

STATO DI TENSIONE IN UN PUNTO ⁽¹⁾

A - STATO TRIASSIALE

Esercizio 4 — Nel punto P di un solido elastico, le sei componenti del tensore degli sforzi valgono:

$$\sigma_{ii} = \begin{cases} + 4 \text{ t/cm}^2 \\ + 2 \text{ »} \\ - 2 \text{ »} \end{cases} \quad \sigma_{ik} = \begin{cases} 1,6 \text{ t/cm}^2 \\ 0,8 \text{ »} \\ 1,2 \text{ »} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ (ik = 12, 13, 23) \end{matrix}$$

Determinare la tensione normale e quella tangenziale sull'elemento del piano α avente per normale la bisettrice a del triedro di riferimento $O(y_i)$.

Si ricorda che il concetto di *tensione* sull'elemento di normale v per un punto P di un solido elastico, scaturisce nel modo più naturale immaginando di tagliare il solido in due parti mediante una qualunque superficie che passi per P con la giacitura dell'elemento

—per es. col piano π dell'elemento stesso (fig. 3)— e di sostituire staccatamente la mutua azione di vincolo interno che quelle due parti si tramettevano prima del taglio; ciò richiederà infatti a ripristino dell'equilibrio —così generalmente turbato— delle due parti, una ben determinata distribuzione di opposte

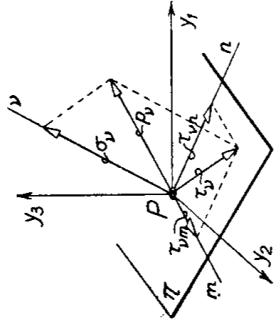


Fig. 3

forze elementari sulle due faccie della superficie di separazione; supposta nota questa distribuzione, si dà il nome di *vettore tensione* o semplicemente di *tensione* sull'elemento fissato per P , al limite —che si ammette pertanto esistere in ogni caso determinato e finito— del rapporto $\Delta R/\Delta A$ fra la risultante ΔR delle forze elementari sull'elemento finito ΔA della superficie

⁽¹⁾ Per tutto questo Cap. v. L. F. DONATO, l. c. Parte I, Cap. II.

di separazione, scelto in modo arbitrario ma con la condizione di contenere comunque il punto P , al tendere a zero di ΔA , e si pone:

$$(9) \quad P_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} \cdot$$

Tale vettore, che si ammette, di più, passi per P e che risulterà in generale obliquo al piano dell'elemento, si decompone di solito sulla normale v a questo piano e su questo piano medesimo; le due componenti σ_v e τ_v (fig. 3) prendono allora il nome di *tensione normale* e di *tensione tangenziale* sull'elemento; la seconda di queste tensioni può a sua volta essere decomposta secondo due qualunque rette ortogonali n ed m del piano dell'elemento in due altre componenti τ_{vn} e τ_{vm} ; stabilita una convenzione per la scelta di queste due rette, si passa allora univocamente, per ogni elemento, dal vettore P_v alla terna delle sue componenti (σ_v , τ_{vn} , τ_{vm}) e viceversa da questa terna al vettore P_v .

La proprietà caratteristica delle componenti tangenziali è la loro *reciprocità*; vale a dire che se sull'elemento di normale n e di tensione tangenziale τ_n , si considera di questa tensione per es. la componente τ_{nv} sulla normale v all'elemento sopra considerato, risulta:

$$(10) \quad \tau_{nv} = \tau_{vn} \quad (1)$$

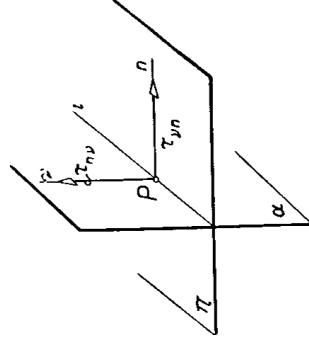


Fig 4

Altrimenti si può anche dire che, per due elementi piani ortogonali, risultano uguali le componenti delle relative tensioni tangenziali valutate secondo la normale alla loro intersezione i (fig. 4).

Passando da un elemento all'altro della stella di piani di centro P , il vettore tensione P_v , in generale, cambia; in particolare per qualche elemento, o anche

(1) Questa proprietà traduce meccanicamente la condizione di equilibrio alla rotazione intorno ai propri assi, per un parallelepipedo elementare con un vertice in P e del quale su n e v sono adagiati due spigoli.

per tutta una totalità di elementi della stella (ad es. per tutti quelli appartenenti a un fascio) può risultare $p_v = 0$, cioè anche $\sigma_v = \tau_{vm} = \tau_{vm} = 0$; tali elementi vengono detti *neutri* o *allo stato neutro*.

Si dice che è noto lo stato di tensione nel punto P , quando è nota la distribuzione del vettore $p_v \equiv (\sigma_v, \tau_{vm}, \tau_{vm})$ per la totalità degli elementi piani della stella di centro P .

Alla stregua di quanto avveniva (Es. 1) per la formazione dell'intorno di P , questa distribuzione resta pienamente caratterizzata dalla conoscenza delle sei componenti $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ del *tenore degli sforzi*; vale a dire, altrimenti, dalle componenti dei tre vettori p_i relativi ai tre elementi piani paralleli alle faccie del triedro trirettangolo $O(y_i)$ di riferimento.

E invero, detti come al solito v_i ed n_i (o m_i) i coseni direttori della normale v all'elemento e della retta n (o m) del suo piano, risultano:

$$(11) \quad \sigma_v = \sum_{ik} \sigma_{ik} v_i v_k ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{vm} = \sum_{ik} \sigma_{ik} v_i m_k , \\ \tau_{vm} = \sum_{ik} \sigma_{ik} v_i m_k ; \end{array} \right. \quad (12)$$

cioè la tensione normale σ_v è una forma quadratica, la componente tangenziale τ_{vm} una forma bilineare dei detti coseni direttori; lineari invece ambedue, passando da un punto all'altro, nelle componenti σ_{ik} del tenore degli sforzi ⁽¹⁾.

È superfluo rilevare che la (11) e le (12) sono formalmente identiche alle (2) e (3) e che quindi si prestano al calcolo allo stesso modo di quelle.

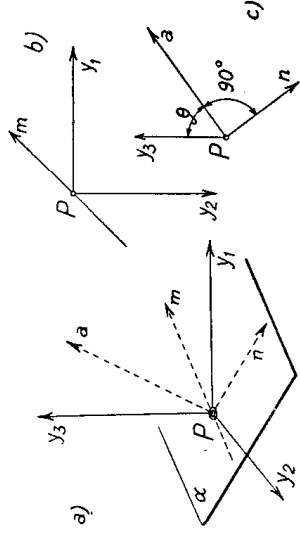


Fig. 5

⁽¹⁾ Dalle (11) e (12) si desume subito, fra l'altro, il significato fisico delle componenti σ_{ik} , e cioè: ognuna delle tre σ_{ii} con indice doppio misura la tensione normale sull'elemento per P perpendicolare all'asse y_i col medesimo indice; ognuna delle tre $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ con indici distinti misura la tensione tangenziale reciproca sui due elementi piani per P di normali y_i e y_k .

Nel caso nostro, la normale α al piano α dell'elemento che ci interessa (fig. 5) forma con ciascuno degli assi di riferimento uno stesso angolo acuto ϑ , il cui coseno, secondo la (6) che si cambia ora in quest'altra: $3\cos^2\vartheta = 1$, vale $\sqrt{3}/3$.

Come retta n scegliamo ad es. (fig. 5a) e c) la traccia su α del piano (α, y_3) , traccia che forma l'angolo $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ con l'asse y_3 e uno stesso angolo acuto γ con gli assi y_1 e y_2 , sicchè risulta:

$$n_3 = \cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\vartheta = -\sqrt{1 - \cos^2\vartheta} = -\frac{\sqrt{6}}{3};$$

e quindi anche:

$$n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{1 - n_3^2}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6};$$

la retta m di α perpendicolare ad n , in quanto perpendicolare all'asse y_3 , è nel piano (y_1, y_2) e precisamente (fig. 5 b)) è la bisettrice esterna dell'angolo $\angle y_1 O y_2$, e quindi di coseni direttori:

$$m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m_2 = 0; \quad m_3 = 0;$$

riassumendo, i coseni da introdurre nelle (11) e (12) sono quelli raccolti nel quadro che segue:

v_1	v_2	v_3	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/3$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0

Dalla (11), scritta per disteso e con riguardo ai dati, risulta:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_{11} v_1^2 + \sigma_{22} v_2^2 + \sigma_{33} v_3^2 + 2\sigma_{12} v_1 v_2 + 2\sigma_{13} v_1 v_3 + 2\sigma_{23} v_2 v_3 = \\ &= \frac{1}{3} [4 + 2 - 2 + 2(1,6 + 0,8 + 1,2)] = + 3,733 \text{ t/cm}^2; \end{aligned}$$

e dalla (12) rispettivamente:

$$\begin{aligned} \tau_{an} &= \sigma_{11} v_1 n_1 + \sigma_{22} v_2 n_2 + \sigma_{33} v_3 n_3 + \sigma_{12} (v_1 n_2 + v_2 n_1) + \sigma_{13} (v_1 n_3 + v_3 n_1) + \sigma_{23} (v_2 n_3 + v_3 n_2) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{6} [4 + 2 - 2 \times 2 + 1,6 \times 2 - 0,8 - 1,2] = \frac{\sqrt{2}}{6} \times 3,2 \cong 0,754 \text{ t/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\tau_{am} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} [4 - 2 + 0 + 0 + 0,8 - 1,2] = \frac{\sqrt{6}}{6} \times 1,6 \cong 0,653 \text{ t/cm}^2 .$$

È allora anche:

$$\tau_a = \sqrt{\tau_{am}^2 + \tau_a^2} = \sqrt{0,754^2 + 0,653^2} = \sqrt{0,9449} = 0,9975 \text{ t/cm}^2 ;$$

e infine, per la tensione totale p_a sull'elemento scelto:

$$p_a = \sqrt{\sigma_a^2 + \tau_a^2} = \sqrt{3,733^2 + 0,9975^2} = \sqrt{14,93} = 3,864 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 5 — Coi dati dell'Esercizio precedente, determinare nel punto P le tensioni principali σ_{ip} e i piani principali π_{ip} .

Fra le tensioni normali fornite dalla (11) al variare della terna dei coseni direttori v_i , conforme a quanto capitava (Es. 2) per il coefficiente di dilatazione lineare ϵ , ve ne sono tre particolari, e in generale distinte fra loro, di cui una *massima*, una *minima* ed una *stationaria*; esse sono caratterizzate ulteriormente dal fatto di essere accompagnate da tensioni tangenziali nulle, ovvero anche di coincidere, una ad una, col vettore tensione totale p , sui tre elementi a cui sono relative; tali elementi, che sopportano dunque *soltanto* tensione normale, risultano poi fra loro mutuamente ortogonali.

A siffatte tensioni si dà il nome di *tensioni principali*, agli elementi piani su cui agiscono quello di *elementi principali*; noteremo quelle con σ_{ip} , i piani di questi con π_{ip} .

Le tensioni principali giocano un ruolo fondamentale in tutto lo studio degli stati di tensione e, unitamente a quanto si disse per le dilatazioni principali ϵ_{ip} , nel problema di resistenza e di stabilità in un punto di un solido reale.

La loro determinazione, quando siano note le componenti σ_{ik} del tensore degli sforzi, è in tutto analoga a quella delle ϵ_{ip} ; la condizione da utilizzare al pro-

posito è, come allora, la proprietà peculiare che le caratterizza, cioè quella di essere i valori di σ , in grado di estremo nella stella di piani di centro P ; ciò porta a identificare le σ_{ip} con le radici dell'equazione cubica:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero sviluppando e ordinando:

$$(13') \quad \sigma^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2)\sigma -$$

$$- \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

in tutto analoga alla (4') e a proposito della quale valgono le stesse osservazioni fatte allora per questa.

Se le radici di tale equazione sono *tutte e tre diverse da zero*, lo stato di tensione nel punto P si dice *spaziale o triassiale*; se lo sono *soltanto due*, si dice *piano o biassiale*; se lo è, infine, *soltanto una* si dice *lineare o monoassiale*; si verificherà il primo caso se il determinante Δ_1 delle σ_{ik} che figura nella (13') come termine noto è diverso da zero; il secondo invece se è $\Delta_1 = 0$ ma il discriminante $\Delta = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2)$ dell'equazione residua di secondo grado è diverso da zero; il terzo, infine, quando è insieme $\Delta_1 = \Delta = 0$.

Coi nostri dati, i coefficienti dell'equazione (13'), come già per la (4'), sono forniti dal quadro:

$\sigma_{11} = + 4 \text{ t/cm}^2$	$\sigma_{11} \sigma_{22} = + 8,00 \text{ t}^2/\text{cm}^4$	$2 \sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23} = + 3,072 \text{ t}^3/\text{cm}^6$
$\sigma_{22} = + 2$	$\sigma_{11} \sigma_{33} = - 8,00$	$\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} = - 16,000$
$\sigma_{33} = - 2$	$\sigma_{22} \sigma_{33} = - 4,00$	$-\sigma_{11} \sigma_{23}^2 = - 5,760$
	$-\sigma_{12}^2 = - 2,56$	$-\sigma_{22} \sigma_{13}^2 = - 1,280$
	$-\sigma_{13}^2 = - 0,64$	$-\sigma_{33} \sigma_{12}^2 = + 5,120$
	$-\sigma_{23}^2 = - 1,44$	
$\Sigma = + 4 \text{ t/cm}^2$	$\Sigma = - 8,64 \text{ t}^2/\text{cm}^4$	$\Sigma = - 14,848 \text{ t}^3/\text{cm}^6$

dal quale, per essere $\Delta_1 = -14,848 \text{ t}^3/\text{cm}^6 \neq 0$, si deduce intanto che lo stato di tensione in esame è triassiale. Sostituendo nella (13') si ottiene;

$$\sigma_v^3 - 4 \sigma_v^2 - 8,64 \sigma_v + 14,848 = 0.$$

Alle varie ascisse σ_v , segnate nella tabella sottostante, comprese fra i valori $-2,5$ e $+5,5 \text{ t/cm}^2$, la funzione $\psi(\sigma_v)$ a primo membro di questa equazione prende i valori corrispondentemente sotto segnati:

σ_v (t/cm ²)	-2,5	-2	-1	0	+1	+1,5	+2	+3	+4	+5	+5,5
$\psi(\sigma_v)$ (t ³ /cm ⁶)	-4,177	+8,108	+18,488	+14,848	+3,208	-3,737	-10,452	-20,072	-19,712	-3,352	+12,703

da ciò si deduce intanto che le radici σ_{ip} cadono negli intervalli
 (-2,5; -2) t/cm²;
 (+1; +1,5) »;
 (+5; +5,5) ».

A mezzo dell'analoga rappresentazione grafica di quella utilizzata all'Esercizio 2, si apprezzano (fig. 6) alle intersezioni della cubica $\psi = \psi(\sigma_v)$

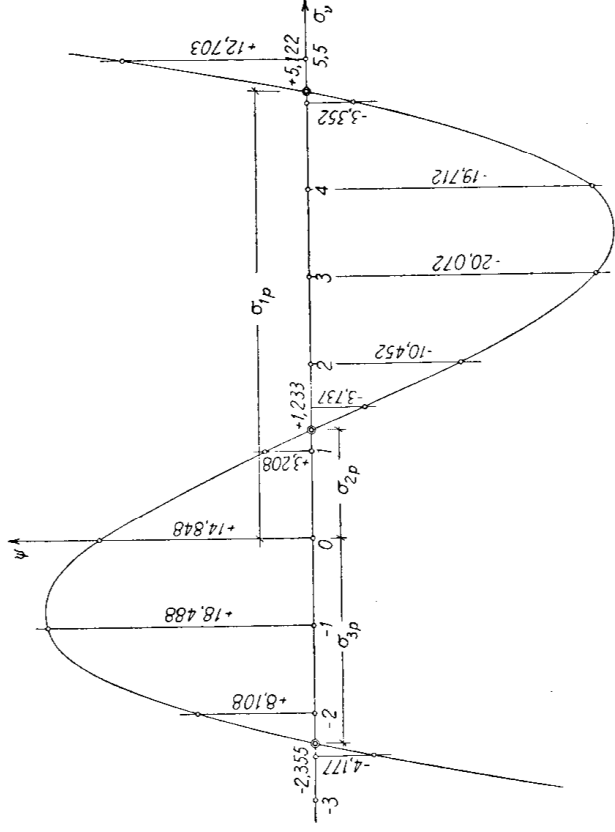


Fig. 6

con l'asse delle ascisse i valori:

$$\sigma_{1p} = +5,122 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{2p} = +1,233 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{3p} = -2,355 \text{ t/cm}^2,$$

che soddisfano con buona approssimazione alla nostra equazione.

Note così le σ_{ip} , potremo ora determinare le giaciture degli elementi principali risolvendo nei coseni

direttori delle loro normali i tre sistemi lineari omogenei che si ottengono sostituendo una ad una le tre σ_{ip} nel sistema:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{11} - \sigma_{ip}) v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 = 0 \\ \sigma_{12} v_1 + (\sigma_{22} - \sigma_{ip}) v_2 + \sigma_{23} v_3 = 0 \\ \sigma_{13} v_1 + \sigma_{23} v_2 + (\sigma_{33} - \sigma_{ip}) v_3 = 0, \end{array} \right.$$

formalmente identico al sistema (5), e associandolo ancora, ogni volta, alla condizione (6): $\Sigma v_i^2 = 1$.

Lasciamo però a chi legge questa determinazione per due ragioni: prima, perchè il procedimento è in tutto analogo a quello seguito (Es. 2) per determinare le direzioni principali y_{ip} della deformazione; secondo perchè, nel caso attuale, troveremo che le σ_{ip} hanno come direzioni proprio le stesse y_{ip} allora determinate.

Si badi però che questa coincidenza si verifica solo perchè è stata voluta di proposito: da un lato perchè le componenti di deformazione ϵ_{ik} assegnate all'Esercizio 1 e le componenti di tensione σ_{ik} assegnate ora caratterizzano di fatto uno stesso stato di equilibrio del punto P ; dall'altro, e ciò *soprattutto*, perchè ci si è posti, pur senza avvertirlo esplicitamente, nella ipotesi restrittiva che il solido a cui il nostro punto appartiene sia omogeneo e isotropo; con questo si vuole significare che in generale, cioè per un solido elastico di natura qualunque, quand'anche, com'è per noi, le sei ϵ_{ik} e le sei σ_{ik} assegnate corrispondessero a un medesimo stato di equilibrio del punto P , le due terne di direzioni principali di dilatazione e di tensione risulterebbero ugualmente distinte: che l'essere tali due terne coincidenti è cioè, come avremo modo di riconoscere più avanti (Es. 12), una proprietà peculiare del solido omogeneo e isotropo.

Esercizio 6 — Riferendo lo stato di tensione esaminato agli Esercizi 4 e 5 al riferimento principale, determinare analiticamente e graficamen-

te la tensione p_a sull'elemento piano per P avente come normale la bisettrice a del triedro principale $P(y_{ip})$

Una volta in possesso (Es. 5) delle tensioni principali σ_{ip} e delle corrispondenti direzioni y_{ip} , lo studio dello stato di tensione nel punto si semplifica notevolmente. Può infatti sempre scegliersi come riferimento la terna delle direzioni principali y_{ip} ; detti ora v_i i coseni direttori della normale v ed n'_i quelli della retta n del piano dell'elemento generico per il punto, le (11) e (12), per essere nulle sui piani principali le tensioni tangenziali, prendono le forme più semplici:

$$(11') \quad \sigma_v = \sum_i \sigma_{ip} v_i^2; \quad (12') \quad \tau_{vn} = \sum_i \sigma_{ip} v_i n'_i.$$

Nel caso nostro, facendo per le rette ausiliarie m ed n la stessa scelta che all'Esercizio 4, relativamente ora al triedro principale (fig. 5), i coseni direttori da introdurre nelle (11') e (12') sono quelli stessi di allora e che qui trascriviamo affetti dall'apice:

v_1	v_2	v_3	n'_1	n'_2	n'_3	m'_1	m'_2	m'_3
$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/3$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
(retta v)			(retta n)			(retta m)		

Con riguardo ai valori determinati per le σ_{ip} all'Esercizio 5, è allora dalla (11'):

$$\sigma_a = \sigma_{1p} v_1^2 + \sigma_{2p} v_2^2 + \sigma_{3p} v_3^2 = \frac{1}{3} (5,122 + 1,233 - 2,355) = + 1,333 \text{ t/cm}^2$$

e dalla (12'), per le due componenti τ_{an} e τ_{am} :

$$\begin{aligned} \tau_{an} &= \sigma_{1p} v_1 n'_1 + \sigma_{2p} v_2 n'_2 + \sigma_{3p} v_3 n'_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{6} (5,122 + 1,233 + 2 \times 2,355) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \times 11,065 = \cong 2,608 \text{ t/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{am} &= \sigma_{1p} v'_1 m'_1 + \sigma_{2p} v'_2 m'_2 + \sigma_{3p} v'_3 m'_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (5,122 - 1,233) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \times 3,889 = 1,5877 \text{ t/cm}^2\end{aligned}$$

e quindi anche:

$$\tau_a = \sqrt{\tau_{am}^2 + \tau_{cm}^2} = \sqrt{2,608^2 + 1,5877^2} = \cong 3,053 \text{ t/cm}^2,$$

e finalmente per la tensione totale:

$$p_a = \sqrt{\sigma_a^2 + \tau_a^2} = \sqrt{1,333^2 + 3,053^2} = 3,331 \text{ t/cm}^2.$$

Anzichè per questa via, possiamo determinare p_a graficamente valendoci, in un riferimento cartesiano (σ_v , τ_v), della rappresentazione piana dello stato di tensione nel punto P mediante i tre cerchi di Mohr.

Tali cerchi c_1 , c_2 , c_3 , con riguardo di seguito ai valori delle σ_{ip} , hanno i seguenti raggi:

$$(15) \quad r_1 = \frac{\sigma_{2p} - \sigma_{3p}}{2} = 1,794 \text{ t/cm}^2; \quad r_2 = \frac{\sigma_{1p} - \sigma_{3p}}{2} = 3,7385 \text{ t/cm}^2;$$

$$r_3 = \frac{\sigma_{1p} - \sigma_{2p}}{2} = 1,9445 \text{ t/cm}^2$$

e per centri rispettivamente i punti C_1 , C_2 , C_3 dell'asse σ_v alle ascisse:

$$(16) \quad a_1 = \frac{\sigma_{2p} + \sigma_{3p}}{2} = -0,561 \text{ t/cm}^2; \quad a_2 = \frac{\sigma_{1p} + \sigma_{3p}}{2} = +1,3835 \text{ t/cm}^2;$$

$$a_3 = \frac{\sigma_{1p} + \sigma_{2p}}{2} = +3,1775 \text{ t/cm}^2.$$

Detti A , B e C (fig. 7) i punti di contatto delle tre coppie di cerchi (c_2 , c_3), (c_3 , c_1), (c_1 , c_2) e, nel caso generale, α , β e γ gli angoli che la normale v al piano dell'elemento forma ordinatamente coi tre assi principali y_{ip} , siano F_2 ed F_3 i punti in cui la retta per A inclinata di $90^\circ - \alpha$ all'asse σ_v taglia i cerchi c_2 e c_3 ; e in modo analogo E_1 ed E_2 quelli in cui la retta per C inclinata di $90^\circ - \gamma$ ancora all'asse σ_v , taglia i cerchi c_1 e c_2 ; nel caso nostro particolare, essendo v la bi-

settrice a del triedro principale, risulta $\alpha = \beta = \gamma = \vartheta \cong 54^\circ 44' 8''$ (angolo il cui coseno è $\sqrt{3}/3$); il punto Q_a in cui si intersecano i due cerchi di centri C_1 e C_3 e

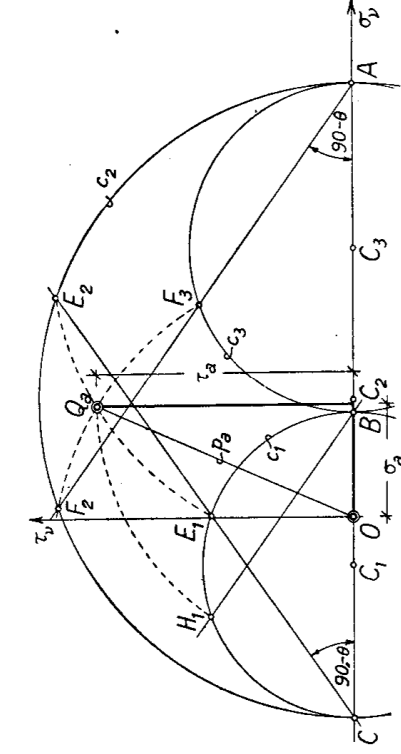


Fig. 7

raggi C_1F_3 e C_3E_1 , corrisponde nella rappresentazione in parola all'elemento di normale a , nel senso che le sue coordinate misurano rispettivamente la tensione normale σ_a e la tensione tangenziale τ_a su questo elemento; tali coordinate (lette nel disegno originario) valgono infatti:

ascissa: $1,33 \text{ t/cm}^2$; ordinata: $3,05 \text{ t/cm}^2$,

che corrispondono appunto con buona approssimazione alle due tensioni suddette.

Si avverta che in questa rappresentazione i punti Q , corrispondenti agli ∞^2 elementi piani della stella di centro P , stanno tutti nella zona comune alle tre lunule che determinano due a due, tangenzialmente, i tre cerchi c_1, c_2 e c_3 .

Dei risultati può aversi un'ulteriore comodo controllo per un'altra via analitica, risalendo alla tensione cercata p_a attraverso le sue componenti q_i sugli assi principali y_{ip} (fig. 8); e invece vero tali componenti, nel caso della normale v generica di coseni direttori v_i , valgono semplicemente:

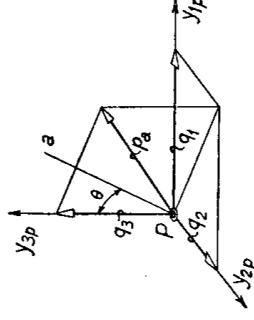


Fig. 8

$$(17) \quad q_i = \sigma_{ip} v_i .$$

Nel caso nostro ($v_1 = v_2 = v_3 = \cos \vartheta = \sqrt{3}/3$) è dunque in particolare:

$$q_1 = + 5,122 \times \frac{\sqrt{3}}{3} ; \quad q_2 = + 1,233 \times \frac{\sqrt{3}}{3} ; \quad q_3 = - 2,355 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dai quali valori, quadrando e sommando e sommando, si deduce per l'intensità della tensione p_a sul nostro elemento:

$$p_a = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{5,122^2 + 1,233^2 + 2,355^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 5,7707 = 3,332 \text{ t/cm}^2$$

che concorda perfettamente coi valori trovati per le altre due vie indicate di sopra.

Esercizio 7 — Sui due elementi piani ortogonali per il punto P di normali y_1 e y_2 della terna di riferimento, le tensioni normali e quella tangenziale reciproca spirante normalmente alla intersezione y_3 dei due elementi, valgono, ancora coi dati dell'Esercizio 4, rispettivamente:

$$\sigma_{11} = 4 \text{ t/cm}^2, \quad \sigma_{22} = 2 \text{ t/cm}^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = 1,6 \text{ t/cm}^2.$$

Determinare nel fascio di sostegno y_3 le tensioni normali e le componenti tangenziali dirette normalmente a y_3 in grado di massimo e di minimo, e individuare gli elementi su cui le une e le altre si verificano.

Si tratta di determinare, per l'elemento generico del fascio di sostegno y_3 , la tensione normale σ_v e, della tensione tangenziale τ_v , solo la componente τ_v secondo la traccia t del piano dell'elemento medesimo sul piano (y_1, y_2) , trascurando invece la componente $\tau_v y_3$ secondo il sostegno del fascio; o anche, più brevemente, le componenti della proiezione p' , di p , sul piano (y_1, y_2) , come se lo stato di tensione nel fascio fosse visto dalla direzione y_3 sul piano (y_1, y_2) (fig. 9 a)).

Questa proiezione può studiarsi nel modo più conveniente utilizzando la rappresentazione grafica di Mohr, analoga a quella vista all'Esercizio 6 per lo stato completo di tensione nel punto P ; solo che trattandosi qui degli elementi di un fascio, cioè di una totalità semplicemente infinita estratta dalla stella, è sufficiente per la rappresentazione un solo circolo: quello relativo al piano (y_1, y_2) sul quale lo stato di tensione nel fascio in esame è proiettato.

Fissato a tanto in questo piano un sistema di riferimento cartesiano ausiliario $O(\sigma_v, \tau_{vt})$ con l'asse σ_v avente la direzione e il senso di y_1 , l'asse τ_{vt} la direzione ma il senso opposto di y_2 (fig. 9 b) e c)), si riportino in \overline{OA} e \overline{OB} rispettivamente la $\sigma_{11} = 4 \text{ t/cm}^2$ e la $\sigma_{22} = 2 \text{ t/cm}^2$; quindi, sulle normali all'asse σ_v , per A e B , in \overline{AC} e \overline{BD} ,

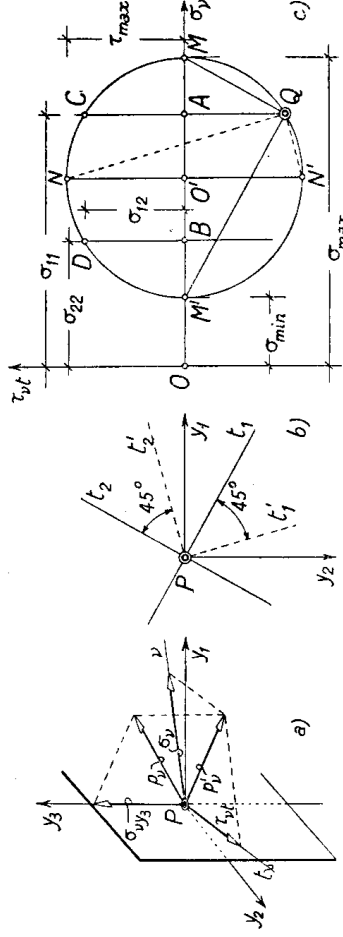


Fig. 9

con riguardo al segno, la $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1,6 \text{ t/cm}^2$: il circolo che passa per i punti C e D ed ha centro nel punto di mezzo O' di AB è il diagramma cartesiano delle tensioni normali σ_v e delle suddette componenti tangenziali τ_{vt} relative agli elementi del fascio in esame.

Le tensioni normali massima e minima che cerchiamo, sono allora individuate dai punti di intersezione M ed M' del circolo con l'asse σ_v e valgono:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\equiv \overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} = 3 + \sqrt{3,56} = \\ &= +4,8868 \text{ t/cm}^2 \\ \sigma_{\min} &= \overline{OM'} = \overline{OO'} - \overline{O'M} = \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg \\ &= 3 - \sqrt{3,56} = \\ &= +1,1132 \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

Tali tensioni sono accompagnate da componenti tangenziali τ_{vt} nulle; ciò, si badi, non significa però che gli elementi piani su cui le tensioni normali in parola agiscono non sopportano tensione tangenziale τ_v : di questa si può solo dire che ne è nulla la componente secondo la traccia l del piano dell'elemento sul piano (y_1, y_2) ; come conseguenza, il vettore tensione totale p , relativo a ognuno dei due elementi sta allora nel piano

del fascio ad esso ortogonale, ma ammetterà, in generale, una componente non nulla secondo l'asse y_3 .

Per determinare le traccie t_1 e t_2 dei piani di questi elementi, si noti che il *polo di rappresentazione*, cioè il punto dal quale vanno condotte le parallele alle traccie dei piani del fascio per ottenere sul circolo i corrispondenti punti rappresentativi, è il punto Q di coordinate $(\sigma_{11}, -\sigma_{22})$, vale a dire il simmetrico rispetto all'asse τ del punto C che corrisponde al piano di traccia y_1 ; le proiettanti QM' e QM sono allora parallele alle traccie t_1 e t_2 cercate, e i due elementi risultano conseguentemente fra loro ortogonali; per quanto osservato di sopra, si può allora dire che il vettore tensione totale p , relativo all'uno di questi due elementi giace nel piano dell'altro.

I coseni direttori delle traccie t_1 e t_2 si desumeranno agevolmente dai rapporti $\overline{AM/QM}$ e $\overline{AQ/QM}$.

Dalla figura risulta anche che vi sono nel fascio due elementi che sopportano componente tangenziale τ_{vt} massima, pari precisamente al raggio del circolo:

$$\max \tau_{vt} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} = 1.8868 \text{ t/cm}^2 .$$

Tali elementi corrispondono ai due punti N ed N' del circolo sul diametro parallelo all'asse τ_{vt} , e risultano dunque anch'essi ortogonali fra loro, con traccie t'_1 e t'_2 ruotate di 45° su quelle dei piani degli elementi che sopportano le tensioni normali massima e minima.

All'Esercizio 9 vedremo come questi risultati siano da interpretarsi diversamente quando il piano (y_1, y_2) di rappresentazione sia il piano di un elemento principale per il punto P .

Esercizio 8 — Nel punto P di cui agli Esercizi 4, 5 e 6 determinare la superficie direttrice e l'ellissoide di Lamé.

—◇—
Dello stato di tensione in un punto può darsi, oltre alla rappresentazione piana mediante i tre circoli di

Mohr (Es. 6), una rappresentazione spaziale mediante la *superficie direttrice* e *l'ellissoide di Lamé*.

Ci limitiamo qui a ricordare che, in tutti i casi, le superficie direttrici sono quadriche a centro — questo essendo il punto P — aventi per assi gli assi principali y_{ip} e le equazioni canoniche:

$$(18) \quad \sum \frac{y_i^2}{\sigma_{ip}} = \pm 1,$$

dove il segno a secondo membro è da scegliersi in modo che la quadrica risulti in ogni caso reale: quindi segno costante per tutte le direzioni della stella se le tre σ_{ip} hanno ugual segno; segno invece del primo membro relativamente alle singole direzioni nel caso contrario; i due casi sono distinti dall'essere o meno soddisfatta da valori reali delle coordinate y_i l'equazione:

$$(19) \quad \sum \frac{y_i^2}{\sigma_{ip}} = 0,$$

rappresentante un cono quadrico, che ha per assi ancora gli assi principali y_{ip} ; precisamente: se le σ_{ip} hanno uno stesso segno, questo cono è immaginario e corrispondentemente la quadrica direttrice è un ellissoide; se invece due delle σ_{ip} hanno segno opposto alla terza, il cono è reale e la superficie direttrice è costituita allora dall'insieme di due iperboloidei: ad una falda in una delle zone angolari in cui il cono divide lo spazio intorno a P (e precisamente quella per cui il primo membro della (18) vale $+1$), a due falde nella zona angolare complementare.

Dal punto di vista fisico-meccanico ciò significa che, mentre nel caso dell'ellissoide, cioè del cono immaginario, gli elementi della stella per P sopportano tutti tensioni normali di un segno (trazioni o compressioni), nel caso dei due iperboloidei gli elementi immersi in una delle due zone in cui il cono, reale, divide la stella sopportano tensioni normali di un segno (per es. trazioni) quelli immersi nella zo-

na complementare tensioni di segno opposto (compressioni), e pertanto che gli elementi che inviluppano il cono (19) sopportano tensione normale nulla.

Comunque sia, tanto l'ellissoide nel primo caso quanto l'insieme dei due iperboloidei nel secondo, prendono il nome di *superficie direttrice*, perchè sussiste in ogni

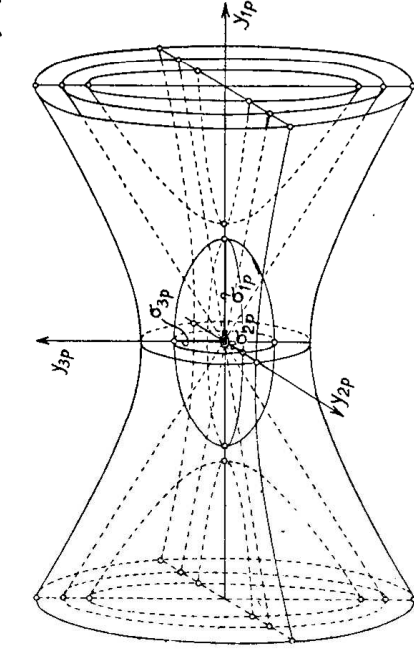


Fig. 10

direzione di p , per ogni elemento della stella.

Quanto al modulo di p , esso è poi staccato, pure in ogni caso, da un ellissoide con centro P e avente ancora per assi principali y_{ip} : *ellissoide delle tensioni o ellissoide di Lamé*; la sua equazione è:

$$(20) \quad \Sigma \left(\frac{y_i^2}{\sigma_{ip}} \right) = 1 .$$

Si avverta che tanto nella (19) quanto nella (20) le coordinate y_i sono da interpretarsi come le componenti q_i fornite dalle (17) della tensione p , sugli assi principali.

Nel caso nostro la (19) è dunque in forma esplicita:

$$\frac{q_1^2}{5,122} + \frac{q_2^2}{1,233} - \frac{q_3^2}{2,355} = 0 ,$$

e questa ci avverte che il cono inviluppo degli elementi per P che sopportano tensione normale nulla è reale (fig. 10); la superficie direttrice è allora costituita dai due iperboloidei:

$$\frac{y_1^2}{5,122} + \frac{y_2^2}{1,233} - \frac{y_3^2}{2,355} = \pm 1 ,$$

di cui il primo a una falda, il secondo a due falde e aventi ambedue il cono di sopra come cono assintotico (1).

L'ellissoide di Lamé ha infine per equazione:

$$\left(\frac{q_1}{5,122}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{1,233}\right)^2 + \left(\frac{q_3}{2,355}\right)^2 = 1.$$

B - STATO BIASSIALE

Esercizio 9 — Nel punto P di un solido elastico, le componenti del tensore degli sforzi valgono:

$$\sigma_{11} = 4 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{22} = 2 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{12} = 1,6 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Riconoscere lo stato di tensione in tale punto e determinarvi le tensioni principali.

—♦—

Si può giudicare della cosa in modo molto semplice; poichè infatti, per la reciprocità delle tensioni tangenziali, è anche $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$, l'elemento di normale y_3 non sopporta tensione tangenziale ed è perciò (Es. 5) elemento principale; e poichè la σ_{33} ad esso relativa è nulla per ipotesi, restano al massimo due tensioni principali diverse da zero.

Per giudicare se lo stato di tensione è biassiale o monoassiale basta allora, come avvertito all'Esercizio 5, calcolare il discriminante Δ dell'equazione di 2° grado che residua dalla (13') a meno della radice nulla. Nel caso specifico tale equazione è:

$$(13'') \quad \sigma_v^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sigma_v + (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = 0;$$

e coi dati:

$$\sigma_v^2 - 6 \sigma_v + 5,14 = 0;$$

essendo: $\frac{\Delta}{4} = 9 - 5,14 = 3,56 \neq 0$, si tratta dunque di stato

(1) A giustificazione di questa proprietà si veda: TOGNETTI l. c. n. 257, pag. 475; sul modo di impiegare praticamente la superficie direttrice e lo ellissoide di Lamé per la ricerca analitica della direzione e del valore di p_v (per un controllo si applichi il procedimento al caso concreto della p_v già determinata all'Esercizio 6) v. ancora: TOGNETTI l. c. n. 260.

biassiale, e le due tensioni principali non nulle valgono:

$$\sigma_{ip} = 3 \pm \sqrt{3,56} = \begin{cases} + 4,8868 \text{ t/cm}^2 \\ + 1,1132 \end{cases} \quad (i=1,2)$$

A mezzo del sistema (14), che consta ora di due sole equazioni, potremmo anche determinare le direzioni y_{1p} e y_{2p} di queste tensioni.

In problemi del genere, riesce però più espressiva del calcolo la risoluzione grafica. Appartenendo i due elementi principali cui sono relative le σ_{1p} e σ_{2p} calcolate al fascio di sostegno y_3 , si tratta di individuare in questo fascio gli elementi che sopportano le tensioni normali massima e minima. Ciò si raggiunge al modo già visto all'Esercizio 7 rappresentando lo stato di tensione nel fascio stesso mediante il circolo di Mohr.

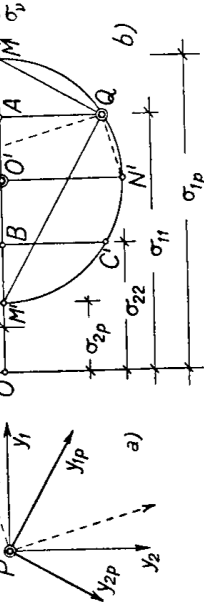


Fig. 11

proiezione sul piano (y_1, y_2) dello stato di tensione nel fascio di sostegno y_3 , con y_3 asse qualunque; ora invece tale sostegno è asse principale; ne segue che, mentre allora le tensioni massima e minima che si determinavano erano degli estremi relativi, ora sono degli estremi assoluti nella stella, cioè tensioni principali; d'altra parte, allora si rappresentava col circolo di Mohr solo una parte della tensione totale p , sull'elemento generico del fascio (la sua proiezione p' , sul piano (y_1, y_2)), ora invece si rappresenta l'intera tensione, in quanto il vettore p , giace ora nel piano (y_1, y_2) .

I punti che corrispondono agli elementi principali sono ancora i due punti M ed M' in cui il circolo taglia l'asse σ ; le ascisse di questi punti, valori delle tensioni principali σ_{1p} e σ_{2p} , sono d'altronde come allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{1p} &= \overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2} = 3 + \sqrt{3,56} = \\ &= + 4,8868 \text{ t/cm}^2 \\ \sigma_{2p} &= \overline{OM'} = \overline{OO'} - \overline{O'M'} = \dots \gg \dots \gg \dots = 3 - \sqrt{3,56} = \\ &= + 1,1132 \text{ t/cm}^2, \end{aligned}$$

valori coincidenti con quelli trovati di sopra.

Per determinare le tracce y_{1p} e y_{2p} dei piani dei rettilativi elementi principali, basta poi (cfr. Es. 7) guidare da P sul piano (y_1, y_2) le parallele alle rette che dal polo Q di rappresentazione (punto di coordinate $(\sigma_{11}, -\sigma_{12})$) proiettano i punti M' ed M in parola.

La tensione tangenziale massima, agente sui due elementi fra loro ortogonali che corrispondono ai punti N ed N' del circolo sul diametro parallelo all'asse τ_v , e perciò bisettori dei diedri dei piani principali, è infine misurata, come all'Esercizio 7, dal raggio $\overline{OO'}$ del circolo e vale perciò:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2} = 1,8868 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 10 — Le componenti del tensore degli sforzi si riducono nel punto P alla sola tensione tangenziale:

$$\sigma_{12} = 1,6 \text{ t/cm}^2 .$$

Riconoscere lo stato di tensione e determinare le tensioni principali.

La (13'') scritta all'Esercizio precedente, si riduce ora alla forma anche più semplice:

$$(13''') \quad \sigma_v^2 - \sigma_{12}^2 = 0 ,$$

che ha per radici $\sigma_{ip} \equiv \pm \sigma_{12} = \pm 1,6 \text{ t/cm}^2$.

Malgrado la presenza di una sola componente non nulla del tensore degli sforzi, lo stato di tensione è dunque ancora biassiale; ciò dipende dal fatto che tale componente è una tensione tangenziale e che quindi, esistendo anche la sua reciproca, le componenti non nulle sono di fatto due.

In tal caso, come prova la risoluzione ora effettuata, le tensioni principali hanno comune valore assoluto, pari precisamente a quello della tensione tangenziale, e segno opposto. I due elementi principali appartengono al fascio di sostegno y_3 e le loro traccie sul piano (y_1, y_2) si individuano ancora comodamente a mezzo del circolo di Mohr relativo a questo fascio.

Tale circolo si semplifica come indicato in fig. 12: il suo centro O' coincide con l'origine O degli assi, il suo raggio diventa la σ_{12} , il polo di rappresentazione è il punto Q dell'asse τ_v di ordinata $-\sigma_{12}$; e allora gli elementi principali, ancora rappresentati dai due punti M ed M' sull'asse σ_v , hanno per traccie le bisettrici degli angoli degli assi y_1 e y_2 ; la σ_{12} , finalmente, è anche la tensione tangenziale massima nel fascio, ed è dunque supportata dalla coppia dei piani coordinati.

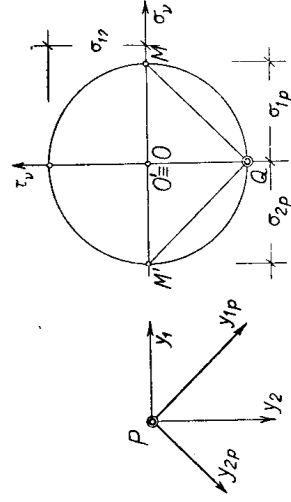


Fig. 12

Esercizio 11 — Nel punto P di un solido elastico le tensioni principali valgono:

$$\sigma_{1p} = 1 \text{ t/cm}^2 ; \quad \sigma_{2p} = 0 ; \quad \sigma_{3p} = -0,6 \text{ t/cm}^2 .$$

Determinare le tensioni normale e tangenziale sull'elemento appartenente al piano del fascio di sostegno y_{3p} inclinato di 30° all'asse y_{1p} .

—◇—

Come già visto ai due Esercizi precedenti, lo studio dello stato di tensione in un punto si semplifica notevolmente per gli stati biassiali e ancor più per quelli monoassiali.

Per renderci chiaro conto di questa semplificazione, basta osservare che se è ad es. $\sigma_{3p} = 0$, l'elemento di normale y_{3p} è un elemento *neutro* in quanto, per essere elemento principale, su di esso è nulla anzitutto la tensione tangenziale; ne segue che il vettore tensio-

ne p_ν relativo a un qualunque elemento della stella di centro P giace, come le due tensioni principali σ_{1p} e σ_{2p} non nulle, su questo piano neutro; e inverso, dalle (17), qualunque siano i coseni direttori ν_i della normale ν , cioè qualunque sia l'elemento della stella, per essere $\sigma_{3p} = 0$, la componente q_3 di p_ν risulta identicamente nulla, e ciò significa appunto che p_ν giace costantemente sul piano (y_{1p}, y_{2p}): lo stato di tensione biassiale è dunque piano in quanto il vettore tensione p_ν , al muoversi dell'elemento nella stella, si mantiene in un piano: il piano principale neutro. L'ellissoide di Lamé si riduce in conseguenza all'ellisse dello stesso piano avente come centro P e semiassi σ_{1p} e σ_{2p} (fig. 13); al muoversi dell'elemento nella stella, l'estremo di p_ν descrive l'intero campo piano delimitato da questa ellisse.

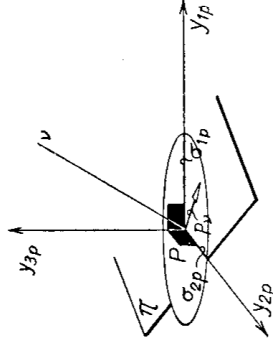


Fig. 13

Nel caso poi che sia ad es. anche $\sigma_{2p} = 0$, cioè lo stato di tensione sia monoassiale, le cose si semplificano ulteriormente; ancora dalle (17), qualunque siano i coseni direttori ν_i , risulta infatti:

$$q_1 = \nu_1 \sigma_{1p}, \quad q_2 = q_3 = 0,$$

sicché anche $p_\nu \equiv q_1$; per ν_1 variabile fra zero ed 1, p_ν varia dunque fra zero e σ_{1p} , e il suo estremo descrive lo intero segmento PI in cui si stende il vettore massimo σ_{1p} ; in particolare per tutti gli elementi del fascio di sostegno $y_{1p} (\nu_1 = 0)$ è $p_\nu = 0$, cioè tale fascio è tutto di elementi neutri.

L'ellissoide di Lamé si specializza ora ulteriormente in un segmento di retta $I'I'$ di lunghezza $2\sigma_{1p}$, di cui P è il punto di mezzo (fig. 14).

Quanto alla rappresentazione dello stato di tensione è poi sufficientemente, come già visto ai due Esercizi precedenti, limitarci alla rappresentazione in un fascio: quello avente per sostegno la normale al

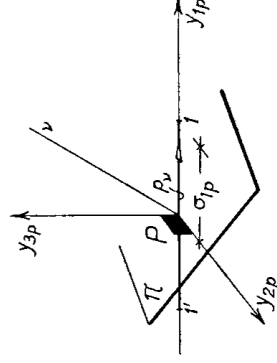


Fig. 14

piano principale neutro nel caso di stato biassiale; una qualunque delle normali al sostegno del fascio di piani neutri nel caso di stato monoassiale, normale la cui direzione risulta comunque, ovviamente, direzione principale. I tre cerchi di Mohr per il caso dello stato generale nella stella si riducono allora ad uno solo.

Nel nostro caso l'espressione (11') della tensione normale σ , nel riferimento principale, diviene:

$$\sigma_v = v'_1{}^2 \sigma_{1p} + v'_3{}^2 \sigma_{3p},$$

dalla quale, sostituendovi i valori assegnati delle σ_{ip} e i coseni:

$$v'_1 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad v'_3 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

si deduce immediatamente;

$$\sigma_v = \frac{1}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 0,6 = -0,2 \text{ t/cm}^2.$$

La tensione tangenziale τ_v si ricava in modo analogo comodamente dalla (12') assumendo come retta n del piano dell'elemento la traccia t di questo sul piano (y_{1p} , y_{2p}), in quanto è allora (fig. 15):

$$n'_1 = -v'_3 \quad \text{e} \quad n'_3 = v'_1;$$

di più, appartenendo l'elemento al fascio di sostegno y_{2p} , la componente τ_{vt} che così si ottiene coincide (Es. 9) con tutta la tensione tangenziale τ_v . È dunque, sostituendo di seguito nella (12'):

$$\begin{aligned} \tau_{vt} \equiv \tau_v &= -v'_1 v'_3 \sigma_{1p} + v'_1 v'_3 \sigma_{3p} = -v'_1 v'_3 (\sigma_{1p} - \sigma_{3p}) = \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + 0,6) = -0,683 \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

Per la risoluzione grafica del problema, basta rappresentare col relativo circolo di Mohr lo stato di tensione nel fascio di sostegno y_{2p} .

Assunto nel piano di rappresentazione (y_{1p} , y_{3p}) l'asse delle σ , parallelo a y_{1p} e orientato nello stesso senso,

l'asse delle τ_v parallelo a y_{3p} ma orientato in senso opposto (fig. 15), e riportate in \overline{OA} e \overline{OB} le due tensioni σ_{1p} e σ_{3p} , il circolo in parola ha \overline{AB} come diametro, cioè raggio, conforme alla seconda delle (15): $r = (\sigma_{1p} - \sigma_{3p})/2 = 0,8 \text{ t/cm}^2$ e centro all'ascissa $a = (\sigma_{1p} + \sigma_{3p})/2 = +0,2 \text{ t/cm}^2$.

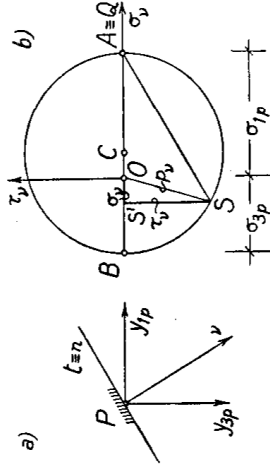


Fig. 15

Il polo di rappresentazione è poi il punto A ; condotta allora per A la parallela alla traccia t del piano assegnato, per le coordinate del punto S in cui questa taglia il circolo si trovano i valori:

$$\overline{OS'} = -2,2 \text{ t/cm}^2 ; \quad \overline{S'S} = 0,69 \text{ t/cm}^2 ;$$

praticamente coincidenti coi valori delle tensioni normale e tangenziale sopra calcolate.

Il modulo di p , è poi fornito dall'ipotenusa \overline{OS} del triangolo rettangolo $OS'S$.