

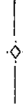
CAPITOLO I

DEFORMAZIONE DELL'INTORNO DI UN PUNTO ⁽¹⁾

Esercizio 1 — Nel punto P di un solido elastico, le sei componenti del tensore di deformazione valgono:

$$\epsilon_{ii} = \begin{cases} + 2,00 \times 10^{-3} \\ + 0,75 \times \text{ »} \\ - 1,75 \times \text{ »} \end{cases} \quad \epsilon_{ik} = \begin{cases} 1,00 \times 10^{-3} \\ 0,50 \times \text{ »} \\ 0,75 \times \text{ »} \end{cases} \quad \begin{matrix} (i = 1,2,3) \\ (ik = 12,13,23) \end{matrix}$$

Si valutino i coefficienti di dilatazione lineare degli elementi paralleli alle bisettrici b_{ik} degli angoli $y_i O y_k$ degli assi di riferimento e gli scorrimenti mutui delle tre coppie di elementi ortogonali che queste bisettrici formano con gli assi medesimi.



Ricordiamo che la deformazione di un corpo elastico soggetto a date forze esterne (esplicitate e reazioni vincolari) resta *individuata* dalle componenti v_i del vettore spostamento $v = P' - P$ del suo punto generico P in un riferimento trirettangolo $O(y_i)$, comunque prefissato; ciò nel senso che queste componenti permettono di passare univocamente dai punti P della configurazione iniziale ai punti P' della configurazione deformata del solido e viceversa. In questo passaggio di configurazione, l'intorno di prim'ordine del punto P resta deformato secondo un'omografia affine ⁽²⁾, una legge geometrica cioè che porta i punti di un elemento lineare o piano per P , nei punti di un elemento lineare o rispettivamente piano per P' ; in virtù di tale legge, lo studio della deformazione dell'intorno è allora sostanzialmente ricondotto a determinare il *coefficiente di dilatazione* ϵ_i per l'elemento lineare generico v e lo scorrimento

⁽¹⁾ Per tutto questo Cap. v. L. F. DONATO: Lezioni di Scienza delle Costruzioni; Cap. I. Ed. C. Corsi, Pisa 1946.

⁽²⁾ Cfr. M. TOGNETTI: Geometria Analitica e Proiettiva; pag. 503. Accademia Navale, Livorno 1947.

mento *mutuo angolare* γ_{vn} per due qualunque elementi v ed n per es. ortogonali della stella di centro P .

A ciò è sufficiente conoscere *nel punto* i valori delle componenti ϵ_{ik} del *tenore di deformazione*, legate notoriamente alle componenti v_i di spostamento dalle relazioni:

$$(1) \quad \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right);$$

propriamente, se indichiamo con v_i ed n_i i coseni direttori dei due elementi v ed n , risultano:

$$(2) \quad \epsilon_v = \sum_{ik} \epsilon_{ik} v_i v_k \quad ; \quad (3) \quad \gamma_{vn} = 2 \sum_{ik} \epsilon_{ik} v_i n_k ,$$

cioè ϵ_v una forma quadratica, γ_{vn} una forma bilineare dei detti coseni direttori, lineari invece ambedue, passando da un punto all'altro, nelle componenti ϵ_{ik} del tensore di deformazione ⁽¹⁾.

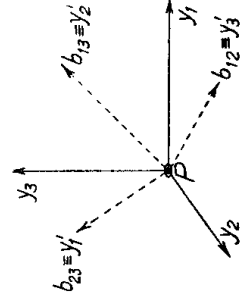


Fig. 1

Tali componenti *caratterizzano* dunque la deformazione dell'intorno del punto, in quanto, ove esse siano note, le (2) e (3) forniscono in modo automatico la dilatazione ϵ_v e lo scorrimento *mutuo* γ_{vn} per semplice sostituzione dei coseni direttori v_i ed n_k degli elementi che interessano.

Nel caso nostro, i coseni direttori delle bisettrici $b_{ik} \equiv y'_i$ (fig. 1) e quelli degli assi y_i di riferimento

⁽¹⁾ Dalle (2) e (3) si desume subito, fra l'altro, il significato fisico-geometrico delle componenti ϵ_{ik} , e cioè: ognuna delle tre ϵ_{ii} con indice doppio misura il coefficiente di dilatazione dell'elemento per i parallelo all'asse y_i col medesimo indice; ognuna delle tre ϵ_{ik} con indici distinti, misura la metà dello scorrimento *mutuo* dei due elementi per i paralleli agli assi y_i e y_k contrassegnati dalla stessa coppia di indici; questo secondo significato può essere anche meglio precisato così: detti γ_i e γ_k gli *scorrimenti assoluti* che nella deformazione subiscono gli elementi y_i e y_k rispetto alle loro direzioni primitive, per modo che può scriversi, come ovvio: $\gamma_{ik} = \gamma_i + \gamma_k$, risulta:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\gamma_i + \gamma_k) ,$$

cioè la corrispondente ϵ_{ik} è la *media* dei due detti scorrimenti assoluti.

a cui risultano ordinatamente ortogonali, sono raccolti nel quadro che segue:

Elemento	v'_1	v'_2	v'_3	Elemento	v_1	v_2	v_3
$b_{12} \equiv y'_3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0	y_3	0	0	1
$b_{13} \equiv y'_2$	$\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	y_2	0	1	0
$b_{23} \equiv y'_1$	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	y_1	1	0	0

Sostituendo nella (2), con riguardo ai dati, si ottiene allora successivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{y'_1} &= \epsilon_{22} v'_2{}^2 + \epsilon_{33} v'_3{}^2 + \epsilon_{23} v'_2 v'_3 = 10^{-3} (0,75 \times \frac{1}{2} - 1,75 \times \frac{1}{2} + 0,75 \times \frac{1}{2}) = \\ &= -0,250 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{y'_2} &= \epsilon_{11} v'_2{}^2 + \epsilon_{33} v'_3{}^2 + \epsilon_{13} v'_1 v'_3 = 10^{-3} (2,00 \times \frac{1}{2} - 1,75 \times \frac{1}{2} + 0,50 \times \frac{1}{2}) = \\ &= +0,750 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{y'_3} &= \epsilon_{11} v'_1{}^2 + \epsilon_{22} v'_2{}^2 + \epsilon_{12} v'_1 v'_2 = 10^{-3} (2,00 \times \frac{1}{2} + 0,75 \times \frac{1}{2} + 1,00 \times \frac{1}{2}) = \\ &= +1,875 \times 10^{-3} ; \end{aligned}$$

sostituendo invece nella (3), si ottengono per gli scorrimenti angolari delle coppie di elementi ortogonali (y_j, y'_j) i valori:

$$\gamma_{y_1 y'_1} = 2v_1 (\epsilon_{12} v'_2 + \epsilon_{13} v'_3) = 2 \times 1 \times 10^{-3} (1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,50 \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1,50 \times \sqrt{2} \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{y_2 y'_2} = 2v_2 (\epsilon_{42} v'_1 + \epsilon_{23} v'_3) = 2 \times 1 \times 10^{-3} (1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,75 \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1,75 \times \sqrt{2} \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{y_3 y'_3} = 2v_3 (\epsilon_{13} v'_1 + \epsilon_{23} v'_2) = 2 \times 1 \times 10^{-3} (0,5 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,75 \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1,25 \times \sqrt{2} \times 10^{-3}.$$

In modo analogo potremmo procedere ora per gli elementi paralleli alle bisettrici degli angoli $\widehat{y_i O y'_i}$, appartenenti cioè ai piani bisettori dei diedri del riferimento, e per gli elementi sulle normali a questi piani; anzichè dagli assi y_i , seguendo per altro lo

stesso comodo procedimento, potevamo anche partire da una qualunque altra terna di elementi mutuamente ortogonali.

Esercizio 2 — Coi dati dell'Esercizio 1, si determinino nel punto P le dilatazioni principali ϵ_{ip} e le direzioni principali y_{ip} della deformazione.

—♦—

Dalla (2) richiamata di sopra, facendovi variare in tutti i modi possibili la terna dei coseni direttori v_i , otterremmo la distribuzione completa dei valori del coefficiente di dilatazione lineare per la totalità degli elementi della stella di centro P . Fra questi valori ve ne sono sempre, e di solito ben distinti fra loro, uno *massimo*, uno *minimo* e il terzo *stazionario*; i tre elementi lineari per P a cui tali valori si riferiscono risultano fra loro ortogonali e caratterizzati ulteriormente dal fatto di avere scorrimenti mutui nulli; prendono il nome di *elementi principali* e le loro direzioni e relative dilatazioni quello di *direzioni* e di *dilatazioni principali* nel punto P ; denoteremo le prime con y_{ip} , le seconde con ϵ_{ip} ($i = 1, 2, 3$).

La loro conoscenza è importante, non solo perchè, come sarà indicato poco più avanti, semplifica formalmente lo studio della deformazione, ma, soprattutto, per la risoluzione, a suo tempo, del problema fondamentale della Scienza delle Costruzioni, accennato già nella Premessa.

Per determinarle ci si può valere, come condizione, della proprietà peculiare che le definisce, quella cioè di essere i valori in grado di estremo per ϵ_v nella stella di centro P ; tale condizione, imposta analiticamente alla forma quadratica (2) resa omogenea nei coseni direttori v_i , porta a identificare le ϵ_{ip} con le radici della seguente equazione cubica in ϵ_v :

$$(4) \quad \begin{vmatrix} (\epsilon_{11} - \epsilon_v) & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & (\epsilon_{22} - \epsilon_v) & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & (\epsilon_{33} - \epsilon_v) \end{vmatrix} = 0,$$

o anche, sviluppando e ordinando:

$$(4') \quad \epsilon_v^3 - (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \epsilon_v^2 + (\epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{22} \epsilon_{33} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2) \epsilon_v -$$

$$- \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Tale equazione, del tipo secolare di Laplace, avendo coefficienti reali, possiede radici tutte e tre reali⁽⁴⁾, le quali possono essere o tutte distinte, ovvero due o anche tutte e tre coincidenti; nel primo caso la deformazione porta la sfera elementare dell'intorno di P in un ellissoide generale, nel secondo la porta in un ellissoide di rotazione, nel terzo in una sfera; in quest'ultimo caso l'omografia che regola la deformazione dell'intorno del punto si specializza in una omotetia, e ciò significa, fisicamente, che gli elementi lineari della stella di centro P o si accorciano tutti o si allungano tutti ugualmente.

I tre coefficienti da calcolare nella (4'), si deducono in modo comodo dai nostri dati disponendo le operazioni come segue:

$\epsilon_{11} = +2,00 \times 10^{-3}$	$\epsilon_{11} \epsilon_{22} = +1,5000 \times 10^{-6}$	$2 \epsilon_{12} \epsilon_{13} \epsilon_{23} = +0,7500 \times 10^{-9}$
$\epsilon_{22} = +0,75 \times$	$\epsilon_{11} \epsilon_{33} = -3,5000 \times$	$\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} = -2,6250 \times$
$\epsilon_{33} = -1,75 \times$	$\epsilon_{22} \epsilon_{33} = -1,3125 \times$	$-\epsilon_{11} \epsilon_{23}^2 = -1,1250 \times$
	$-\epsilon_{12}^2 = -1,0000 \times$	$-\epsilon_{22} \epsilon_{13}^2 = -0,1875 \times$
	$-\epsilon_{13}^2 = -0,2500 \times$	$-\epsilon_{33} \epsilon_{12}^2 = +1,7500 \times$
	$-\epsilon_{23}^2 = -0,5625 \times$	
$\Sigma = +1,00 \times 10^{-3}$	$\Sigma = -5,1250 \times 10^{-6}$	$\Sigma = -1,4375 \times 10^{-9}$

Moltiplicando i due membri della (4') per 10^9 , si ottiene allora per sostituzione:

$$10^9 \epsilon_v^3 - 10^6 \epsilon_v^2 - 10^3 \times 5,125 \epsilon_v + 1,4375 = 0 .$$

⁽⁴⁾ Per questa proprietà dell'equazione secolare v. ad es. TOGNETTI, l. c. pag. 486, n. 262.

Questa equazione può essere risolta rappresentando graficamente la funzione $\psi(\epsilon_v)$ al suo primo membro nell'intervallo del campo reale in cui cadono le sue radici; intervallo che peraltro si individua subito con facili tentativi: alle ascisse intere $\epsilon_v = 10^{-3} \times (-2, -1, 0, +1, +2, +3)$ corrispondono infatti ordinatamente i valori:

$$\begin{array}{llll} \psi(\epsilon_v) = & -0,3125; & +4,5625; & +1,4375; \\ & -3,6875; & -4,8125; & +4,0625; \end{array}$$

e ciò dice, anzitutto, che le ϵ_{ip} cadono negli intervalli parziali: $[(-2, -1); (0, +1); (+2, +3)] \times 10^{-3}$.

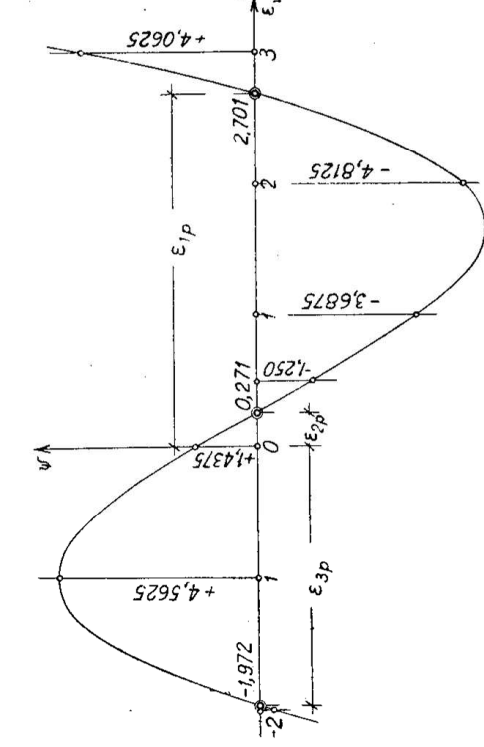


Fig. 2

se e la curva (cubica) che raccorda questi punti, si apprezzano bene i tre valori:

$$\epsilon_{ip} = 10^{-3} \times (+2,701; +0,271; -1,972), \quad (i=1, 2, 3)$$

i quali, come si può verificare per sostituzione nel primo membro, costituiscono radici abbastanza bene approssimate dell'equazione cubica ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Per una risoluzione più esatta dovremmo ridurre l'equazione nella forma $x^3 + px + q = 0$, mancante cioè del termine di secondo grado, mediante la sostituzione: $\epsilon_v = x - a/3 = x + 10^6/3$, ed applicare quindi a questa forma le formule risolutive per radicali o *formule di Cardano* (cfr. ad es. il Manuale COLOMBO Parte I).

Note così le ϵ_{ip} , si possono ora individuare i coseni direttori delle tre direzioni principali y_{ip} , risolvendo i tre sistemi lineari omogenei che in tali coseni si ottengono sostituendo una ad una le tre ϵ_{ip} nel sistema:

$$(5) \quad \begin{cases} (\epsilon_{11} - \epsilon_{ip}) v_1 + \epsilon_{12} v_2 + \epsilon_{13} v_3 = 0 \\ \epsilon_{12} v_1 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{ip}) v_2 + \epsilon_{23} v_3 = 0 \\ \epsilon_{13} v_1 + \epsilon_{23} v_2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{ip}) v_3 = 0, \end{cases}$$

e tenendo conto ogni volta della condizione di normalizzazione delle sue radici:

$$(6) \quad \sum v_i^2 = 1.$$

Sostituendo nelle (5), oltre ai dati, ad es. la $\epsilon_{ip} = 2,701 \times 10^{-3}$, e moltiplicando i due membri delle equazioni per 10^3 , si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 0,701 v_1 - v_2 - 0,500 v_3 = 0 \\ v_1 - 1,951 v_2 + 0,750 v_3 = 0 \\ 0,500 v_1 + 0,750 v_2 - 4,451 v_3 = 0, \end{cases}$$

da cui, sommando m. a. m. le tre equazioni e sostituendo la combinazione lineare che così si ottiene per es. alla terza di esse, si ottiene quest'altro più comodo:

$$\begin{cases} 0,701 v_1 - v_2 - 0,500 v_3 = 0 \\ v_1 - 1,951 v_2 + 0,750 v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - \frac{4,201}{2,201} v_3 = 0; \end{cases}$$

sottraendo dalla terza la prima si ha subito:

$$v_3 = \frac{2,201 \times 0,299}{3,1005} v_1 = \frac{0,6581}{3,1005} v_1 = k_3 v_1,$$

e in conseguenza, dalla terza medesima:

$$v_2 = (1 - \frac{4,201}{2,201} k_3) v_1 = \frac{1,8444}{3,1005} v_1 = k_2 v_1.$$

Tenuto ora conto della condizione (6), risulta in-

tanto per il primo coseno direttore ν_1 della direzione principale y_{1p} il valore:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{\sqrt{1 + k_2^2 + k_3^2}}{1 + k_2^2 + k_3^2} = 3,1005 \times \frac{\sqrt{3,1005^2 + 0,6581^2 + 1,8444^2}}{3,1005^2 + 0,6581^2 + 1,8444^2} = \\ &= 3,1005 \, k_1 = 3,1005 \times 0,272691 = 0,845478 ;\end{aligned}$$

e quindi per il secondo e il terzo, sostituendo ν_1 nelle loro espressioni di sopra, questi altri:

$$\nu_2 = 1,8444 \, k_1 = 0,502951 \quad ; \quad \nu_3 = 0,6581 \, k_1 = 0,179458 .$$

In modo analogo procederemmo per le altre due direzioni principali y_{2p} e y_{3p} , partendo dalle corrispondenti dilatazioni principali ε_{2p} e ε_{3p} ; lasciamo questa ricerca come esercitazione a chi legge.

Note le dilatazioni e le direzioni principali y_{ip} , poichè queste ultime, come già detto, sono caratterizzate fra l'altro dall'avere due a due scorrimento mutuo nullo, se riferiamo l'intorno di P alla loro terna e indichiamo ora con ν'_i e n' , i nuovi coseni direttori degli elementi ν ed n della stella, le (2) e (3) prendono le forme canoniche:

$$(2') \quad \varepsilon_i = \sum_j \varepsilon_{ip} \, \nu_j'^2 \quad ; \quad (3') \quad \gamma_{mn} = 2 \sum_i \varepsilon_{ip} \, \nu'_i \, n'_i ,$$

in base alle quali il computo numerico risulta notevolmente semplificato.

Esercizio 3 — Ancora coi dati dell'Esercizio 1, si determinino nel punto P il cono di scorrimento e il coefficiente di dilatazione cubica.

—♦—

Si ricorda che il cono di scorrimento in un punto P è il luogo degli elementi lineari per P a dilatazione nulla; sicchè per due qualunque di questi elementi, la de-

formazione comporta al massimo uno scorrimento mutuo.

La sua equazione si ottiene subito dalla (2) imponendo la condizione $\epsilon_v = 0$; è cioè:

$$(7) \quad \sum_{ik} \epsilon_{ik} v_i v_k = 0 .$$

Questo cono può risultare reale o immaginario; in questo secondo caso è luogo di coppie di rette immaginarie coniugate aventi come intersezione, reale, il vertice del cono.

Una sua proprietà caratteristica è, in ogni caso, quella che i suoi assi coincidono con le tre direzioni principali y_{ip} .

Assumendo queste direzioni come assi di un riferimento cartesiano e indicando, come già nelle (2') e (3'), con v_i i coseni direttori dell'elemento v , la (7) prende pertanto la *forma canonica*:

$$(7') \quad \sum_i \epsilon_{ip} v_i^2 = 0 ,$$

in base alla quale, per giudicare se il cono è reale o immaginario, basta osservare i segni delle dilatazioni principali ϵ_{ip} : e precisamente, se tali segni sono tutti concordi il cono è immaginario, se due sono discordi dal terzo è invece reale.

Nel caso nostro, coi valori delle ϵ_{ip} determinati all'Es. 2, è per disteso:

$$2,701 v_1^2 + 0,271 v_2^2 - 1,972 v_3^2 = 0 ,$$

e si tratta dunque di un cono reale; fisicamente ciò significa, in omaggio alla continuità della deformazione, che gli elementi lineari che cadono in una delle porzioni solide delimitate dal cono hanno ad es. dilatazione positiva (si allungano tutti), quelli che cadono nella zona complementare hanno invece dilatazione negativa (si accorciano tutti).

Il coefficiente di dilatazione cubica δ caratterizza, com'è noto, la deformazione dell'intorno di P dal punto di vista

volumico; il suo valore, indipendente manifestamente dalla scelta del riferimento, si ottiene in modo semplice come somma dei coefficienti di dilatazione lineare relativi a *tre qualunque* elementi mutuamente ortogonali per il punto; è cioè:

$$(8) \quad \vartheta = \sum_i^3 \epsilon_{ii} .$$

Così coi dati dell'Esercizio 1, nel riferimento geometrico $O(y_i)$ allora scelto risulterebbe:

$$\vartheta = 10^{-3} \times (2 + 0,75 - 1,75) = 0,001 ;$$

nel riferimento delle direzioni principali y_{ip} , risulterebbe in modo analogo:

$$\vartheta = \sum_i^3 \epsilon_{ip} = 10^{-3} \times (2,701 + 0,271 - 1,972) = 0,001 ,$$

ciò che costituisce insieme un'eloquente riprova alla risoluzione grafica dell'equazione cubica, eseguita all'Esercizio 2.
