VITO VOLTERRA

La matematica e la scienza del suo tempo

di Giulio Krall

Un romanziere celebre, acuto e geniale, visitava in una grande città le gallerie di storia naturale insieme con uno dei conservatori che gli descriveva con molta compiacenza gli animali fossili istruendolo nel miglior modo fino ai terreni pliocenici. Ma allorchè arrivarono dinanzi ai primi vestigi dell'uomo, volse la testa ed alle sue domande rispose che quella non era più la sua vetrina. Egli sentì la propria indiscrezione e non insistette oltre giacchè, così concluse, non si dovrebbe domandare mai ad uno scienziato dei segreti dell'universo che non sono della sua vetrina. Raccontando questo aneddoto, Vito Volterra osservava con altrettanta acutezza che, se ad uno spirito fine, ma talvolta paradossale, com'era quello di Anatole France era permesso trarre da sì ingenua avventura che gli scienziati sono la gente meno curiosa del mondo, e che per ciascuno di essi, ciò che si trova fuori della loro vetrina, non li interessa, egli si sarebbe ben guardato dal trarre una conseguenza: anzi, avrebbe considerato piuttosto quel fatto come un simbolo che rappresenta la naturale e spesso giustificata e doverosa ritrosia che hanno coloro che si dedicano agli studi di esporre idee ed affermazioni fuori dal campo in cui si svolgono di solito i loro pensieri ed in cui si aggira la loro attività scientifica. E soggiungeva che, anzi, negli uomini di scienza la curiosità è ben grande di guardar fuori e lontano perchè in essi vivo è il desiderio di frugare nella vetrina degli altri per ben conoscere il valore della propria ed il fare talvolta un inventario comune fra colleghi vince proprio quel riserbo che tratteneva l'amico di Anatole France dinanzi ad un estraneo.

Per chi si è dedicato agli studi di matematiche, tale curiosità e simile desiderio sono anche molto maggiori che non in coloro che si occupano di altre discipline. Il matematico si trova infatti in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che siano mai vissute. Il matematico ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'Universo ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse. Mentre egli impiega la propria vita e le forze del suo ingegno nell'affinare e perfezionare i suoi metodi e nel renderli adatti e pronti ad ogni più delicata ricerca e ad una sempre più vasta comprensione di fatti, è di continuo premuto da un'onda crescente di studiosi che gli chiedono aiuto e spesso sperano da lui più di quanto egli non possa dare. Sicchè a parte rari spiriti, altamente speculativi ai quali è possibile spaziare nella sfera dei numeri e degli enti astratti della geometria e della logica, indifferenti a tutto ciò che si agita, vive e si trasforma d'intorno, è naturale nei più il desiderio di volger la mente fuori della cerchia della pura analisi.

VITO Volterra (1860-1940) nonno, senatore, Presidente dei Lincei.

Rievocando questi pensieri del Volterra che si ritrovano nel suo discorso della solenne apertura dell'anno scolastico 1901 all'Università di Roma, e riappaiono come tema nei saggi successivi su la Scienza e le Matematiche in generale, balza subito innanzi nell'inseguirsi dei ricordi, la sua personalità nel campo del pensiero: matematico per la matematica, un raro spirito; matematico per la scienza e le sue tecniche applicazioni.

Per chi scrive, guardando sul proprio tavolo di lavoro, riavvicinati i suoi libri maggiori, la raccolta dei suoi scritti, si rischiara tutto il tempo lontano, or son più di venticinque anni, quando, assistente di un maestro indimenticabile, Tullio Levi-Civita, fu, per sua proposta, accolto assistente anche dal Volterra con l'incarico di supplirlo durante le sue missioni scientifiche. Per la meccanica superiore, quella supplenza dura ancora, altri la continueranno, tutti attendendo che a quella cattedra il Maestro ritorni.

Così, quanto meno con la buona volontà, si ripetono, anno per anno, ai superstiti cultori di meccanica pura le sue grandi idee generali su gli aspetti funzionali della meccanica, quello ereditario dei fenomeni con isteresi, quello finalistico dei principi integrali dell'Hamilton, della minima azione, lo stesso aspetto deterministico, newtoniano, ai quali si riduce quello finalistico ed anche quello ereditario, almeno per certi tipi molto generali di memoria dei materiali. Si tratta di memorie invarianti nel tempo, studiate profondamente dal Volterra con riguardo ai nuclei ereditari ch'egli chiamò allora del ciclo chiuso e sui quali si parlerà in appresso. E ricorrono di conseguenza quelle equazioni integrali, che portano il suo nome, tanto feconde in teoria dell'elasticità, in elettrodinamica, sempre quando il passato sembra agire sul presente, quando i corpi elastici ricordano le deformazioni subìte, i dielettrici ricordano gli spostamenti elettrici e i corpi magnetici gli spostamenti magnetici. Ed andando più in là, dal mondo fisico-matematico in quello biologico, dove i parametri più immediati per un matematico sono i numeri degli individui che costituiscono varie specie conviventi, tutte purtroppo e necessariamente sotto il segno della lotta per la vita, si trova il modo, sempre secondo il Volterra, di metter in atto quelle equazioni. E ciò particolarmente sotto quegli aspetti anche più complessi di equazioni integro-differenziali, da lui già studiati in elasticità ed in elettromagnetismo, per il caso in cui sui coefficienti di accrescimento della specie grava l'ereditarietà.

Dalle equazioni del Volterra, anzi dal metodo che egli istituì per risolverle, passando al limite le regole invalse per i sistemi lineari di equazioni algebriche si accede poi alle equazioni di Fredholm che attualmente dominano tutta la fisica matematica o, forse più precisamente, come diceva Sommerfeld, tutta la matematica fisica. In questa, per i contributi innumerevoli che egli apportò in ogni suo campo, il Volterra è universalmente considerato tra i grandi Maestri.

Perciò, ricordando la sua opera si arriva dove si vuole: ad accennare o ad approfondire qualunque ramo della scienza del suo tempo et ultra, come tra poco si va a vedere.

Nato nel 1860 ad Ancona, rimasto orfano di padre a soli due anni, si trovò il cammino scientifico, per il quale sin da giovanetto dimostrò subito una particolare inclinazione, contrastato dalle ordinarie difficoltà della vita. Ma per breve tempo però. Il Roiti, fisico geniale di Firenze, l'autore di un classico trattato di fisica sperimentale, pieno di spunti attuali ancor oggi, lo nominò, che non aveva ancora incominciati gli studi universitari, preparatore nel suo laboratorio. E gli evitò così ogni perdita di tempo, concedendogli di prepararsi per il concorso alla Scuola normale superiore di Pisa ch'era allora, per felici congiunture, nel suo massimo splendore. Insegnavano infatti in quel celebre studio, che gareggiava con quello di Gottinga in Germania e di Cambridge in Inghilterra, Enrico Betti la fisica matematica e la meccanica celeste, Ulisse Dini il calcolo.

Con tali maestri di cui ancor oggi è vivo il ricordo negli allievi e, per riflesso, negli allievi degli allievi, egli si laureò nel 1882. Nominato assistente del Betti ne risentì appresso la suggestione per la fisica matematica, per l'elasticità in particolare. A questa infatti egli diede molti anni dopo la teoria delle distorsioni, come si vedrà certo ispirata da quella nozione di connessione che inaugura la topologia, alla quale il nome del Betti è legato indissolubilmente attraverso certi *numeri* fondamentali che portano il suo nome. Nella teoria delle distorsioni ritrovò fra l'altro l'estensione di quel teorema di reciprocità del Betti che è noto a tutti gli ingegneri.

Dal Dini ebbe la suggestione per la speculazione astratta cui portò subito

contributi essenziali. Forse proprio attraverso i suoi primi studi su certe funzioni strane, derivabili ma non integrabili (secondo la definizione riemanniana), ha inizio la nozione di integrale secondo Lebesgue. Quella stessa che inaugurò la moderna teoria dell'integrazione, costituita ormai in dottrina, materia e titolo di celebri trattati.
L'anno dopo si bandì il concorso per la cattedra di meccanica razionale all'Università di Pisa. Erano di commissione Eugenio Beltrami, Francesco Brioschi ed il Betti. Volterra riuscì primo ed a soli 23 anni divenne maestro nella scuola che l'ebbe allievo.
Gli auspici non potevano in verità esser migliori per nomi tanto memorandi dei commissari, nomi che ancor ricorrono, accanto a quelli di E. Beltrami e Luigi Cremona, nei discorsi degli anziani, con ammirazione e rimpianto, nomi dell'epoca eroica delle matematiche in Italia e delle nascenti scuole di ingegneria.
Principio felice, anni fecondi!
Sono di allora le ricerche sulle funzioni di linea e sulle loro applicazioni alla fisica matematica. In queste si estende la nozione di funzione di un punto a quella di funzione della forma di una linea, d'una superficie, di una varietà e si pongono i fondamenti del moderno calcolo funzionale. Ma per valutare la portata dei nuovi concetti che egli ha introdotto e spiegare l'influenza che essi hanno avuto sullo sviluppo dell'analisi, non si può non soffermarsi sia pur brevemente su questo calcolo funzionale al quale più di ogni altro è legato il suo nome.

Il calcolo funzionale.

Il concetto informatore che lo guidò a gettare le basi del calcolo funzionale ed a costituirlo in dottrina è semplice e lucidissimo: secondo Dirichlet una variabile è funzione di un'altra variabile se, ad ogni valore di questa quantità corrisponde entro limiti assegnati un valore della prima quantità.
Una tale definizione, indipendente da ogni rapporto analitico tra le variabili stesse, appare spontanea e naturale considerando un qualsiasi fenomeno dove due quantità variano simultaneamente ed in maniera tale che i valori dell'una dipendono da quelli dell'altra. Ora, ponendosi proprio da un tale punto di vista, per la suggestione offertagli da questioni fisiche ed analitiche dove una o più quantità dipendono addirittura da tutti i valori in un intervallo (della variabile indipendente) di una o più funzioni, il Volterra è giunto alla nozione di funzione di linea (o di linee) o di funzionale.
Così la temperatura in un punto di una piastra riscaldata ai bordi dipende, a regime stazionario raggiunto, da tutti i valori della temperatura T al bordo. La variabile indipendente è l'arco s del bordo stesso, la linea (del diagramma [T, s]) è data dalla assegnata funzione $T = T(s)$.
In elettromagnetismo, un punto magnetico in presenza di una corrente ha una componente della attrazione dovuta al circuito che varia con la linea che lo costituisce. Non occorre quindi insistere che, parlandosi di funzione di linea o funzionale, si intende qualcosa di ben diverso dalla ordinaria funzione di funzione: $\Phi = \Phi(\varphi)$ dove Φ corrisponde ad un valore di φ per un generico valore della variabile indipendente, e non a tutti i valori di φ nell'intervallo della suddetta variabile. Perciò, ad evitare ambiguità, per un funzionale si usa, secondo Volterra, la notazione ormai classica,

[1] $$\Phi = \Phi[\varphi].$$

Naturalmente la suggestione più forte di funzione di linea derivò dal calcolo delle variazioni.
È questo dedicato alla determinazione di quelle funzioni, cosidette estremali, per le quali una certa quantità che da esse dipende risulta estrema, massima o minima. Tali funzioni rappresentano linee nel problema delle geodetiche, cioè della determinazione su di una superficie od una varietà, della linea di lunghezza estrema, minima o massima, che unisce due suoi punti P_1, P_2. Sono geodetiche le rette nello spazio euclideo, i cerchi massimi sulla sfera, ecc.
Sono estremali i raggi luminosi nel problema delle linee di minor tempo di percorrenza, cosidette brachistocrone, in un mezzo in cui la velocità è funzione del posto, siccome ad esempio la velocità della luce è funzione dell'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga.
Sono infine estremali le traiettorie di un punto materiale o di un punto ideale, rappresentativo di un sistema ad n gradi di libertà, in uno spazio n dimensionale di metrica opportuna, legata all'espressione dell'energia cinetica ed al potenziale.
Tale traduzione geometrica di un problema dinamico deriva dal principio della minima Azione A, la minima Actio di Leibnitz-Maupertuis nella corretta espressione data, appena un secolo dopo, da Hölder.
Si noti che la lunghezza L, il tempo di percorrenza T, l'Azione A sono evidenti funzioni di linee o funzionali del tipo [1]; le geodetiche, i raggi luminosi, le traiettorie dinamiche ne sono le estremali.
La caratterizzazione di queste estremali si riconduce alla estensione della nozione di estremo di una funzione ordinaria a quello di un funzionale: debbono precisamente esser nulle le variazioni del 1° ordine δL, δT, δA di L, T, A quando l'estremale φ, a priori incognita, si varia in tutto l'intervallo di una funzione $\delta\varphi$ piccola del 1° ordine e (generalmente) nulla agli estremi P_1 e P_2.
L'analogia del problema variazionale con il problema dell'estremo di una funzione f di una o più variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$; che indicheremo compendiosamente con x, è evidente. Nel punto di estremo $\bar{x}$ deve risultare nulla la variazione, la somma essendo sottointesa,

$$\delta f = f_x \cdot \delta x, \qquad \left(f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Poichè le δx sono arbitrarie, si possono scegliere ad esempio tutte nulle salvo una e così ordinatamente per ognuna delle variabili, debbono necessariamente annullarsi tutte le derivate (parziali) f_x; da qui seguono n equazioni per il calcolo delle $\bar{x}$.
Orbene, Eulero e Lagrange hanno dato il modo di calcolare la variazione $\delta\Phi$ di Φ, conforme alla δf, quando si variano plausibilmente le linee da

VITO Volterra e Carlo Somigliana il giorno della laurea (1881).

cui dipende e di esprimere quindi, dalla condizione $\delta\Phi = 0$ (per i problemi considerati $\delta L = 0$, $\delta T = 0$, $\delta A = 0$) le equazioni differenziali (cosiddette lagrangiane nei problemi dinamici, euleriane in ogni caso) per il calcolo delle estremali.
La nozione di prima variazione $\delta\Phi$ di un funzionale corrisponde alla nozione di differenziale δf del calcolo ordinario. Ora il Volterra si è proposto, a partire da questa, la sistematica estensione di ogni altro teorema del calcolo ai funzionali ed è nato così il « calcolo funzionale ».
Fondamentali la nozione di sviluppo in serie di Taylor, di Mac-Laurin, la nozione di sviluppo in serie di potenze, dei problemi di inversione, la teoria delle funzioni implicite, la teoria delle sostituzioni infinitesime ch'egli aveva già brillantemente applicate nello studio delle equazioni differenziali lineari.
Impossibile soffermarsi in questo campo vastissimo, senza finire mai. Però, per fissare le idee, e perchè quanto segue non si riduca ad una enunciazione di risultati che potrebbe interessare al più chi già più o meno li conosce, consideriamo ad esempio la serie delle serie; quella di Mac Laurin. Sempre parlando alla buona, e precisazioni a parte, essa si scrive notoriamente:

[2] $$f(x) = f(0) + x f_x(0) + \frac{x^2}{2!} f_{xx}(0) + \ldots$$

convenendo di porre per brevità ... per i termini di ordine superiore in x^2 e

$$f_x = \frac{df}{dx}, \qquad f_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Nell'ambito di una classe vastissima di funzionali:

$$\Phi = \Phi[\varphi]$$

l'espressione corrispondente alla [2] indicata dal Volterra è:

[2a]
$$\Phi[\varphi] = \alpha\,\varphi(x) + \int K(x,x')\,\varphi(x')\,dx' + \frac{1}{2!}\int K(x,x',x'')\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\,dx'\,dx'' + \ldots,$$

con $K(x,x')$, $K(x,x',x'')$ derivate funzionali prime, seconde ecc. di Φ, intendendosi per derivata funzionale il rapporto limite tra l'incremento $\Delta\Phi$ di Φ, corrispondente ad una locale deformazione di φ in x', e l'area $\Delta\Sigma$ racchiusa tra la linea localmente deformata in x' e l'originaria φ. In merito cfr. fig. 4 e successive precisazioni. Tale sviluppo, come quello di Mac-Laurin serve nel problema fondamentale della inversione. Ciò si vede nei termini seguenti: da una funzione: $f = f(x)$ si trae l'inversa: $x = x(f)$, talvolta immediatamente (ad es. per $f = x^2$ si ha subito $x = \pm\sqrt{f}$; per $f = \sin x$, si ha $x = \arcsin f$ ecc.), tal'altra, solo superando difficoltà.
Il più modesto cultore di astronomia conosce l'equazione di Kepler:

$$u - e \sin u = l, \quad \text{con} \quad l = n(t - t_0),$$

che, per un pianeta, lega, istante per istante, l'anomalia eccentrica u all'anomalia media l e definisce quindi in forma implicita la u in funzione di t. Ma per risolverla, cioè per render esplicita la u in termini

di t con la precisione che è specifica dell'astronomia di posizione, quante ricerche e quante finezze!
Il criterio base di tutte le inversioni è in ogni caso lo sviluppo di Mac-Laurin. Se ci si limita a piccoli valori di x, così che siano trascurabili le potenze di secondo ordine e superiori dello sviluppo [2], si ha la relazione lineare, prima approssimazione della inversa:

$$x = \frac{f - f(0)}{f_x(0)}, \tag{3}$$

risultato che si può render preciso quanto si vuole con regole ad hoc, ormai usuali. Ma nel calcolo funzionale l'ambito lineare è già sufficiente per cogliere, non senza difficoltà, una folla di risultati analitici specifici di tutti i capitoli della fisica matematica, che necessariamente è prevalentemente lineare. Lineari sono le equazioni dell'elasticità, dell'elettromagnetismo o di Maxwell, dell'idrodinamica, dell'aerodinamica anche se gli aspetti non lineari si rendono però ogni giorno più attuali nei problemi tecnici più disparati, primi fra tutti quelli della gasdinamica che pone l'aviazione supersonica.
Con riguardo all'equazione funzionale fondamentale della fisica matematica

$$\Phi[\varphi] = \mu \cdot f(x)$$

si ha dallo sviluppo [2a] nell'ordine di approssimazione e in analogia con la [3],

$$\mu f(x) = \alpha\varphi(x) + \int K(x\,x')\,\varphi(x')\,dx' \tag{3a}$$

l'integrale essendo esteso all'intervallo che si considera.
E questa non è più una semplice equazione algebrica lineare in x come la [3], è, come vedremo, un'equazione che ne racchiude infinite, intendendosi dire che per risolverla rispetto a φ occorre rifarsi ad infinite equazioni, naturalmente ancora lineari. È un'equazione che il Volterra risolvette per primo, quando il limite superiore è variabile, che il Fredholm risolvette qualche anno dopo, nel caso considerato. Essa è specifica di tutti i problemi della fisica matematica. Successivamente, il Volterra ha dato la soluzione della [3a] completata dei termini di ordine superiore in φ.
Ritorniamo però al concetto di funzionale.
Posto sulla via delle estensioni egli sostituì il campo complesso al campo reale e scaturirono i funzionali analitici e tutta una teoria promossa dalla scuola italiana che da lui è derivata.
Variabili del campo funzionale sono qui le funzioni analitiche nel senso di Weierstrass; ma la teoria può essere svolta sotto i tre punti di vista classici del Riemann, di Cauchy e del Weierstrass di cui si dirà in appresso.
Un passo anche più sostanziale si è fatto con l'introduzione, proprio come in teoria delle funzioni, delle geniali scoperte del Cantor che si sintetizzano nella sua famosa Mengenlehre, la teoria degli insiemi.
Come le funzioni ordinarie si considerano secondo le attuali vedute non più in un intervallo, cioè per tutti i valori della variabile compresi tra due limiti, ma definite su un aggregato qualunque con tutte le necessarie estensioni dei concetti di continuità, derivabilità, integrabilità, ecc., così i funzionali si riferiscono ad un insieme di linee continue di un piano comprese nell'intervallo definito da due curve che non si tagliano. E poichè certi caratteri degli aggregati quali l'ordinabilità, la numerabilità, l'equivalenza, sono indipendenti dalla natura degli elementi che li compongono si presentò naturale e spontaneo di assumere come variabile indipendente — se è lecito chiamarla così — non più una linea, una superficie, una varietà, ma un elemento di natura a priori indeterminata, dunque non più oltre definito che « elemento » o « punto » addirittura. Il campo di questi punti venne chiamato spazio e per certi suoi particolari caratteri, con felice locuzione, « spazio astratto ».
Come al vecchio campo della variabile indipendente venne sostituito il campo funzionale e, nella sua ultima evoluzione, uno spazio astratto, altrettanto può farsi, come osservò il Volterra, per la variabile dipendente. Allora ad ogni elemento non corrisponde più una quantità, un numero, ma un altro elemento, cioè una linea, una superficie, una varietà. Ed alla variabile dipendente non resta quindi che attribuire un campo funzionale e in definitiva, uno spazio astratto.
Il calcolo funzionale è quindi lo studio delle operazioni (funzionali) che trasformano i punti d'uno spazio astratto in punti di un altro spazio astratto. Esempi anche elementari non mancano davvero. Basti pensare all'operazione tra le più semplici, la derivazione: ad ogni funzione (elemento) cui viene applicata corrisponde un'altra funzione. Le equazioni differenziali lineari porgono un esempio anche più suggestivo; tutta la famiglia integrale che rappresenta le loro soluzioni dipende dalle funzioni (della variabile indipendente nel senso ordinario) che costituiscono i loro coefficienti. Ed in questo senso il Volterra, in una memoria fondamentale dei Lincei (Roma, 1899) trattò « I fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari ».
Per gli spazi astratti occorse in primo luogo istituire i concetti di dimensione, numero di dimensioni ecc. Apparvero immediatamente grandi sorprese, ameni inganni per i contrasti tra le deduzioni logiche e i suggerimenti, insidiosi, della intuizione qual si ritrovano nelle audaci concezioni del Cantor.
Non sono forse, dal suo punto di vista equivalenti tra loro, un segmento, un quadrato, un cubo, e ciò nel senso che si può stabilire una corrispondenza biunivoca e completa tra i punti che li costituiscono?
Non vien però forse meno il contrasto con l'intuizione quando si introduce il concetto della bicontinuità?
Difficoltà logiche, difficoltà intuitive, novità, scoperte sorprendenti, un nuovo mondo di inesauribili verità si è aperto con questi studi, per merito della scuola matematica francese, dove le suggestioni del Volterra, espresse in corsi regolari, taluno memorabile, alla Sorbona dove era professore aggregato, ed all'Istituto Poincaré, ebbero particolarmente per merito del Pères e del Frechet gli sviluppi più alti.
L'influenza di quei corsi è stata tale che a buon diritto si può considerare il Volterra anche tra i maestri diretti della grande scuola matematica di Parigi.
Oggi, una giovane schiera romantica di cultori della cosidetta analisi generale, ignorando il passato da cui ha tratto vita, ignora la stessa paternità delle idee fondamentali alle quali si dedica e con grande successo. I risultati si raccolgono in dottrina e si consolida sempre più il calcolo funzionale. Nessun dubbio però, per chi guarda spassionatamente lo sviluppo del calcolo infinitesimale, il calcolo sublime delle nostre prime facoltà di scienze, e, parallelo, lo sviluppo del calcolo funzionale, che il Volterra assume per questo la posizione che nel primo hanno i maestri immortali.

Le ricerche sulla estensione agli spazi n dimensionali delle funzioni di una variabile complessa.

La teoria delle funzioni di una variabile complessa costituisce l'esempio forse il più suggestivo di quella interdipendenza, quasi metafisica come la chiamava Sommerfeld, tra ciò che è matematicamente interessante con quanto è fisicamente interessante. Si è questa sviluppata in tre indirizzi: secondo Cauchy, partendo dalle condizioni di monogeneità per arrivare al teorema che la compendia con una classica formola integrale che porta il suo nome; secondo Riemann, partendo dall'equazione di Laplace per arrivare alla nozione di trasformazione conforme che domina l'idrodinamica piana; infine, secondo Weierstrass e Mittag-Leffler, partendo dalle serie di potenze considerate, come elementi della funzione complessa, per arrivare alla nozione fondamentale di prolungamento analitico su cui si impernia l'analisi locale et ultra di queste funzioni.
Il Volterra, nelle sue estensioni dal campo a due dimensioni legato alla variabile complessa:

$$z = x + i\,y$$

a varietà n dimensionali seguì tutti e tre questi indirizzi ed arrivò sempre, non già a estensioni in certo senso formali ma ad autentiche scoperte nelle quali, solo in parte, si riflettono i risultati classici che naturalmente riappaiono quando $n = 2$.
Va subito notato che, già il Weierstrass, dopo aver esaurita la teoria nell'indirizzo locale e successivamente con particolare riguardo alla analisi critica dell'indirizzo riemanniano (tutto soffuso di intuizioni fisico-matematiche acutissime, per lui tanto audaci e inesplicabili quanto per Helmholtz erano evidenti), considerò il caso delle funzioni di più variabili complesse. Ed iniziò così tutta una serie di ricerche che furono sistematicamente proseguite soprattutto da Poincaré, Levi-Civita e Severi.
Come appare dalle due definizioni della generalizzazione, secondo Volterra e secondo Weierstrass, si tratta di due direzioni di indagine diverse, trattandosi in un caso di definire una funzione di variabile complessa in una varietà ad n dimensioni, nell'altro di definire invece una funzione in una varietà di due o più variabili complesse. Ma come si vedrà l'indirizzo del Volterra, a priori forse più generale, riporta quando si vuole nell'indirizzo del Weierstrass che, sino ad ora, è stato più seguito.
Per intendere quanto in appresso si considerino e ciò valga anche a titolo di richiamo di nozioni classiche, due funzioni Φ ed F dei punti P del piano complesso x, y, e sia:

$$\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2\,, \quad F = F_1 + i\,F_2\,, \quad (i = \sqrt{-1})$$

i essendo l'immaginario $\sqrt{-1}$ e Φ ed F funzioni di x, y. Sia $P' = P + \Delta P$ un punto prossimo a P e $\Delta\Phi$ e ΔF l'incremento di Φ ed F quando da P si passa in P'.
Cauchy si è chiesto sotto quali condizioni il rapporto:

$$\lim.\frac{\Delta\Phi}{\Delta F} = f \tag{4}$$

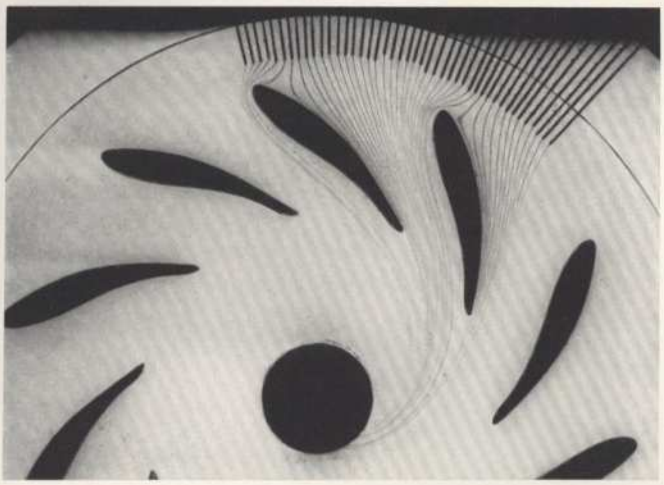
quando $P' \to P$ è indipendente dalla direzione $\overline{PP'}$.
Quando sia semplicemente $F = x + i\,y$, tali condizioni si sintetizzano in modo estremamente conciso, sono le condizioni cosiddette di monogeneità. Allora le Φ_1, Φ_2 soddisfano l'equazione di Laplace:

$$\Delta\Phi = 0\,, \tag{5}$$

e costituiscono due famiglie ortogonali, ciò che significa che le curve $\Phi_1 = \text{cost.}$ rispettivamente $\Phi_2 = \text{cost.}$ si tagliano ortogonalmente tra loro e sussiste la condizione specifica tra le derivate secondo la normale n e la tangente s in un punto comune di Φ_1 e Φ_2,

$$\frac{d\Phi_1}{dn} = \frac{d\Phi_2}{ds}. \tag{6}$$

Basti aver accennato alla [5], l'equazione fondamentale della fisica matematica, per intuire come la teoria delle funzioni di una variabile complessa trovi applicazione in una folla di quistioni: idrodinamiche, di teoria del calore, dell'elasticità che in quella equazione si esprimono.
In idrodinamica, Φ_1 rappresenta il potenziale di velocità, cioè quella funzione di cui le derivate rapporto ad x ed y danno le componenti secondo x ed y della velocità in un punto.
Le linee $\Phi_2 = \text{cost.}$ che tagliano ortogonalmente le linee equipotenziali $\Phi_1 = \text{cost.}$ rappresentano le linee di corrente. La loro conoscenza ha indubbio interesse e gli idraulici pongono continuamente ai matematici il problema della loro determinazione che, sotto l'assillo del tempo, risolvono con metodi grafico-numerici più o meno opportuni.
Gli sperimentatori visualizzano quelle linee ad esempio iniettando filetti fluidi colorati nelle correnti e studiano la distribuzione delle velocità interrompendo quei filetti con cadenza opportuna oppure sovrapponendo, per aver un quadro completo, ai filetti continui di colore denso un mitragliamento cadenzato, diffuso, di colore più leggero. Così ottengono effetti suggestivi; una vera e proria pittorica espressione della teoria delle funzioni.
L'equazione di Laplace che è evidentemente la equazione del campo idrodinamico può a ragione chiamarsi anche l'equazione del campo delle funzioni di variabile complesse in quanto, ad ogni teorema idrodinamico corrisponde uno analitico e viceversa.
Naturalmente, i teorici non si appagano nè dei metodi grafico-numerici

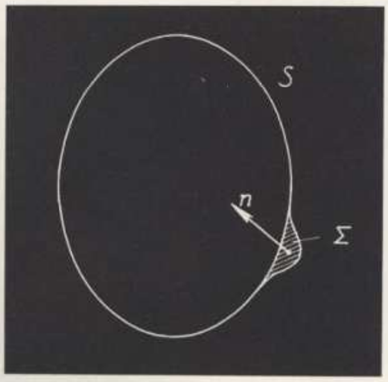


Visualizzazione delle linee di corrente in una turbina (fig. 3).

di integrazione nè dei metodi sperimentali; essi dispongono della nozione fondamentale di trasformazione conforme, espressa dalle relazioni:

$$\Phi_1 = \Phi_1(x, y)\,, \quad \Phi_2 = \Phi_2(x, y)\,.$$

Secondo questa, il piano (x,y) si trasforma nel piano (Φ_1, Φ_2) così che al quadrettato $x =$ cost. $y =$ cost. viene a corrispondere un quadrettato infinitesimale, ciò che significa che nella trasformazione l'orditura resta ortogonale ed anche isometrica, cioè tale che, punto per punto, la scala è la stessa sulla tangente di Φ_1 come su quella di Φ_2. Ciò implica, come conseguenza immediata, la conservazione degli angoli nel passaggio dal piano x, y al piano Φ_1, Φ_2.
Poichè Φ_1 e Φ_2 soddisfano l'equazione di Laplace ne segue che, ove sia nota la trasformazione conforme di una figura elementare $\mathcal{C}$ in una $\mathcal{C}'$ e per la $\mathcal{C}$ considerata come profilo in una corrente sia risoluto il problema idrodinamico, questo problema è risoluto anche per $\mathcal{C}'$.
Ciò avviene ad esempio per i poligoni a lati rettilinei o formati da archi di cerchio, figure che si sanno rapportare sul cerchio e poichè per questo è nota la famiglia dei filetti fluidi e delle linee equipotenziali delle correnti che lo investono, tutta una serie di quistioni idrodinamiche resta risolta.
Fatti questi cenni estremamente sommari sul grado di evoluzione cui era giunta la teoria delle funzioni di una variabile complessa si intuisce come venne spontaneo il desiderio di aprire nuove vie di indagine in questo campo tanto fecondo. Una venne offerta al Volterra dalla ricerca della estensione della nozione di monogeneità da due ad n dimensioni. Mantenendola tal quale Cauchy l'aveva formulata, cioè ammettendo che il rapporto $\Delta\Phi : \Delta F$ rimanga inalterato per qualunque direzione $\overline{PP'}$ nella



Calcolo della derivata di una funzione Φ di una linea S (fig. 4).

varietà n dimensionale anzichè nel piano, non arrivò a niente di nuovo, anzi, ad una quasi ripetizione delle condizioni di monogeneità. Ma negli spazi a più dimensioni non si hanno solo funzioni di punti ma, come egli osservò per primo, funzioni di linee, di superficie ecc. Soffermandosi sulle funzioni Φ, F di una linea S gli venne fatto di pensare alla loro derivata rispetto alla linea, cioè ai limiti per $\Delta\Sigma \rightarrow 0$ dei rapporti:

[7] $$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Sigma}\,, \qquad \frac{\Delta F}{\Delta\Sigma}$$

quando, fissato un punto P di S si varia S (cfr. fig. 4) nell'intorno di P così da limitare un'area $\Delta\Sigma$ in un piano qualunque passante per quel punto.

Allora, Φ ed F variano di $\Delta\Phi$ e ΔF, e l'estensione della condizione di monogeneità appare evidente: deve essere con riguardo alla [6] in conformità con la [7]:

[4a] $$\lim.\ \frac{\Delta\Phi}{\Delta F} = f$$

indipendente dall'orientamento del piano contenente Σ.
Quando questa proprietà è soddisfatta la Φ è chiamata, secondo Volterra, isogena rispetto alla F. Le condizioni di isogeneità quando sia ancora $\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2$ $F = F_1 + i\,F_2$ con Φ ed F funzioni di P, si esprimono con un'equazione, generalizzata di quella di Laplace, di architettura analoga all'equazione originaria nella quale naturalmente ricade per il caso delle due dimensioni e quanto sia $F = x + i\,y$.
Quando Φ è una funzione di linea e φ funzione di punti, la condizione di isogeneità assume un aspetto che ricorda quello specifico dell'ortogonalità tra le funzioni coniugate. Si ha l'equazione funzionale di aspetto analogo alla [6]:

[6a] $$\frac{d\Phi}{d\Sigma} = \frac{d\varphi}{dn}$$

$d\varphi/dn$ essendo la derivata di φ rispetto ad n normale al piano di Σ; con φ a sua volta, armonica in tutto il campo. In tal caso F dicesi anche la coniugata di φ.
Hanno tali funzioni un riscontro fisico? Il Volterra ne ha indicati moltissimi. Ad esempio, in un campo elettromagnetico costante, considerato un polo magnetico M, il potenziale φ del campo per rispetto al polo è armonico e, quando nel campo si consideri una corrente chiusa L che assume tutte le forme possibili nel dominio che si considera, il potenziale Φ del campo rispetto ad L, una evidente funzione di linea, è proprio la coniugata di φ secondo la [6a].
Ma v'ha di più; Φ si può anche esprimere, come fa vedere il Volterra come funzione di due variabili complesse $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$ nel senso di Weierstrass. Sicchè queste funzioni scaturiscono, nell'ambito di tre dimensioni, dalle funzioni isogene di linee e di punti proprio come le funzioni di una variabile complessa scaturiscono dalle funzioni monogene di punti secondo Cauchy. E così, e solo così, anche per le funzioni di due variabili complesse appaiono le applicazioni fisiche nello spazio a tre dimensioni, proprio quelle applicazioni che resistono alle funzioni ad una sola variabile complessa anche quando nei problemi spaziali con simmetria assiale, tanto importanti per gli idraulici, si era ridotti a due sole coordinate. Resistono forse perchè, diceva scherzosamente Hilbert, il tempo è ad una dimensione, lo spazio a tre, ed il numero (alludeva al numero completo, cioè al numero complesso) ne ha soltanto due.
Nessun dubbio che passando da due ad n variabili complesse il Volterra è stato portato a considerare variabili in numero infinito e quindi, come si è già detto, nel campo funzionale dove elementi sono le linee analitiche di una o addirittura di più variabili complesse. Con ciò egli ha aperto il campo seducente dei funzionali analitici ai quali si è dedicato, con particolare successo il Fantappiè, un allievo suo e di Severi. Naturalmente, data la folla di questioni che si presentò innanzi al ricercatore, occorse soffermarsi sui funzionali analitici lineari, quelli per cui vale la relazione:

$$\Phi[f_1 + f_2] = \Phi[f_1] + \Phi[f_2]\,.$$

Ma già l'ambito lineare, studiato nell'indirizzo di Cauchy dal Fantappiè e lumeggiato successivamente nell'indirizzo del Weierstrass dal Volterra, costituiscono materia di indagine di tutta una scuola particolarmente prospera.

Le funzioni polidrome.

Si consideri nel piano x, y la funzione:

$$\Theta = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$

Θ essendo l'angolo che il raggio vettore fa con l'asse x.
Si parta da un punto M_0 situato su x e, dopo aver percorso un ciclo M_0 M M, si ritorni al punto di partenza. Prendendo i valori di Θ che si susseguono con continuità, il valore di Θ_1 che si trova in M_1 dopo aver percorso un ciclo, vale quello iniziale aumentato di 2π. Ecco un esempio di funzione polidroma. Le derivate di Θ rapporto ad x ed y sono invece monodrome ma non regolari nel punto $x = y = 0$.
La funzione di variabile complessa:

$$\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2 = \lg z$$

per la quale è:

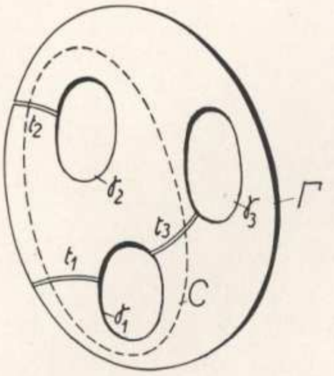
$$\Phi_1 = \Theta\,, \quad \Phi_2 = \lg r\,, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})\,,$$

è anch'essa polidroma. Ma la polidromia di una funzione può esser non solo innata siccome avviene nel caso considerato ma derivare da vere e proprie condizioni d'ambiente; più precisamente dalla natura topologica del campo in cui si opera.
Esempio saliente (nel piano) l'integrale di un differenziale esatto:

[8] $$F = \int_{P_0}^{P_1} X\,dy - Y\,dx$$

esteso lungo una linea che unisce due punti P_0 e P_1.
Il valore di F è indipendente dalla forma della linea, cioè il valore di F in P_1 è indipendente dal cammino percorso per arrivarvi. La dimostrazione riesce facilmente quando si rilevi la circostanza, che scaturisce da un teorema fondamentale di Gauss sulla trasformazione degli integrali di campo in quelli di linea, che se il circuito è chiuso l'integrale è nullo.
Orbene, ciò è vero solo e soltanto se il campo è, con locuzione topologica, semplicemente connesso. E dicesi semplicemente connessa quella superficie

non chiusa, avente dunque un contorno Γ quando un taglio semplice, cioè tale da passare per due distinti punti di Γ, ne toglie la connessione, cioè la divide in due.
Se invece la superficie è tale per cui si possono eseguire $n - 1$ tagli semplici senza togliere la connessione, siccome avviene ad esempio (cfr. fig. 5) quando in essa esistono $n - 1$ buchi di contorni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$; la connessione è allora di ordine n.
Ciò posto, in un campo non semplicemente connesso la trasformazione di Gauss va modificata e di conseguenza l'integrale F esteso ad un cir-



Riduzione alla connessione semplice con tre tagli t_1, t_2, t_3 di un campo con tre fori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (fig. 5).

cuito chiuso non è più nullo, sicchè vien meno la monodromia, cioè il valore di F dipende dal cammino fatto per arrivare da P_0 in P_1. Per ovviare a questa difficoltà si può pensare ad una distribuzione di $n - 1$ tagli che renda il campo semplicemente connesso. Avviene allora che, ove con F_1 si indichi il valore corrispondente ad un determinato circuito $\mathcal{C}$, quando lo si vari così da intersecare $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ volte il 1°, il 2°, l' $(n - 1)^{\text{imo}}$ taglio, si ottiene un valore:

$$[8a] \qquad F = F_1 + r_1\,\omega_1 + r_2\,\omega_2 + \ldots r_{n-1}\,\omega_{n-1}$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ essendo delle costanti, cosiddette moduli di periodicità relativi ai tagli $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ considerati. Una polidromia che, manifestamente, risulta con legge evidente e suggestiva legata alla moltiplicità della connessione, quindi, parlando alla buona, alla complessità topologica del campo. E va osservato che, comunque si deformi la superficie, pensata ad esempio come costituita da gomma, e di conseguenza si vari la forma dei buchi e dei tagli originari, il circuito iniziale $\mathcal{C}$ e quello derivato $\mathcal{C}'$, la [8a] rimane immutata. Queste proprietà si riportano, attese le condizioni di monogeneità, all'integrale di una funzione di variabile complessa:

$$\int_{P_0}^{P_1} \Phi\,dz$$

quando il circuito non racchiuda una singolarità della funzione.
Che tali considerazioni topologiche trovino in fisica matematica salienti applicazioni, si vedrà in seguito parlando delle distorsioni elastiche e dei ravvicinamenti del Volterra tra queste ed i suggestivi teoremi idrodinamici di Lord Kelvin per l'idrodinamica in campi pluriconnessi.
Si tratta ora di chiedersi, come egli si è chiesto, quale ruolo può avere sulla polidromia la connessione negli spazi n dimensionali. Cominciando dal caso di tre dimensioni si vede subito che la connessione è di due tipi ben diversi: lineare, rispettivamente superficiale. La prima riguarda la possibilità di ridurre con continuità ad un punto una qualunque linea chiusa tracciata nel campo, è una connessione analoga a quella del piano con $n - 1$ buchi. La seconda riflette invece la possibilità di ridurre ad un punto una qualunque superficie chiusa (non una linea) in esso tracciata. Se le due possibilità sussistono il campo è linearmente e superficialmente semplicemente connesso.
In caso diverso si hanno ordini di connessione lineare rispettivamente superficiale. Due sfere concentriche hanno connessione cosiddetta superficiale d'ordine 2; per eliminarla basta collegare la sfera interna con quella esterna con un tubo. Allora non si potrà più tracciare la superficie non riducibile ad un punto e naturalmente neanche una linea; infatti, per trasformazione continua le due sfere concentriche collegate con un tubo possono ridursi ad una sfera.
Una sfera con più manici tubolari dicesi linearmente pluriconnessa; una linea $\mathcal{C}$ passante per il manico non si può ridurre ad un punto; non sono tracciabili invece superficie chiuse non riducibili ad un punto. Per ridurla alla connessione lineare semplice non resta che tagliare i manici e chiudere i fori; dilatando i tubi si ritorna facilmente alla sfera.
Per varietà n dimensionali V_n l'intuizione non aiuta più l'analisi topologica. Le connessioni sono di tipi sempre più complicati come per primo ha fatto vedere il Betti. A questi tipi sono legati i numeri che portano il suo nome e costituiscono una pietra miliare della topologia delle varietà. È chiaro che il Volterra, allievo del Betti, aveva quanto gli occorreva per affrontare il problema della polidromia delle funzioni di variabile complessa in una varietà qualunque. In certo senso i risultati sono stati negativi, poichè alla pluralità delle connessioni non trovò corrispondente una pluralità di polidromie. Ma lo studio della correlazione tra polidromia e connessione non gli fu certamente parco di risultati! Anni dopo una analisi approfondita della questione topologica con riguardo alle equazioni della teoria matematica dell'elasticità lo portò a quella già accennata teoria delle distorsioni che costituisce una delle sue più limpide e suggestive ricerche. Ma, prima di parlarne conviene rivolgere l'attenzione al capitolo dei capitoli della fisica matematica, cui sono dedicati trattati classici, dalle « Differentialgleichungen der mathematischen Physik » di Riemann-Weber alle sintetiche, monografiche, « Leçons sur l'intégration des équations différentielles » di Volterra, quelle che tutti noi chiamiamo semplicemente « le lezioni di Stoccolma », alle « Differentialgleichungen » (il Bd. VI delle finalmente complete Vorlesungen über theoretische Physik) del Sommerfeld, il grande fisico di Monaco, cui spetta il merito di aver aperto alla nuova generazione dei fisici la via maestra che dalla matematica-fisica classica, portò agli attuali grandiosi sviluppi della matematica dell'atomo.

Le equazioni alle derivate parziali della fisica matematica.

È una circostanza singolare che la generalità dei fenomeni fisico-meccanici si lascia esprimere da equazioni differenziali alle derivate parziali, cioè da relazioni tra le derivate (rispetto alle coordinate spaziali ed al tempo) di una o più funzioni incognite che del fenomeno esprimono uno o più enti specifici (potenziale, temperatura, pressione, spostamenti) classificabili in tre tipi.
L'ordine massimo delle derivate è generalmente il secondo e questo ne determina l'ordine. Con riguardo ad una incognita funzione φ delle variabili indipendenti che chiameremo — consideriamone due soltanto — x, y sono esse riducibili alla espressione generale:

$$[9] \qquad Ar + 2\,Bs + Ct = \Phi\,.$$

In questa, con simboli immutabili ormai, introdotti da Darboux, nelle sue « Leçons de géométrie infinitésimale », p, q sono le derivate prime φ_x, φ_y; $r, s\, t$ le derivate seconde φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy}. Infine A, B, C sono funzioni note delle coordinate e Φ è funzione non necessariamente lineare anche della funzione incognita φ e sue derivate prime p, q.
I tre tipi son chiamati *ellittico*, *parabolico*, *iperbolico* a seconda che il discriminante $AC - B^2$ è maggiore, eguale o minor di zero.
Tale distinzione deriva dal carattere di una famiglia di linee $y = y(x)$, secondo Monge, dette caratteristiche, associata alla equazione che ha importanza essenziale nel processo di integrazione. L'equazione di detta famiglia è espressa dall'equazione differenziale:

$$[10] \qquad A y_x^2 - 2\,B y_x + C = 0$$

e da qui, risolvendo rispetto alla derivata y_x, si vede che tale famiglia è doppia, complessa e coniugata nel caso ellittico; reale ed unica nel caso parabolico; reale e doppia nel caso iperbolico.
I tipi rappresentativi, i prototipi anzi dei casi considerati sono, per l'ellittico, l'equazione del potenziale o di Laplace:

$$[11] \qquad \Delta\varphi = 0\,.$$

Essa è specifica della teoria del potenziale newtoniano. E ciò nel senso che, attraverso la nozione di φ si può, esternamente alla massa potenzianti, determinare la forza agente su un punto, o polo, di massa $m = 1$ calcolandone le componenti X, Y, Z secondo gli assi con semplice derivazione; precisamente:

$$X = \varphi_x\,, \; Y = \varphi_y\,, \; Z = \varphi_z\,.$$

Il potenziale espresso da una equazione alle derivate parziali che lega quindi i valori di φ e quelli immediatamente vicini elimina la fastidiosa cosiddetta azione a distanza delle forze newtoniane introducendo il concetto di azione mediata attraverso la esistenza di un campo dato da φ.
La [11], come già si è detto, è l'equazione fondamentale della fisica matematica, specifica della idrodinamica dei fluidi incompressibili per φ potenziale di velocità; del calore nel caso stazionario per φ temperatura, della torsione in elasticità, per φ funzione delle sollecitazioni.
Per il caso parabolico è rappresentativa l'equazione:

$$[12] \qquad \varphi_{xx} = \frac{1}{k}\,\varphi_t\,,$$

con φ_t derivata di φ rispetto al tempo t. Interviene nella teoria della propagazione del calore (k è il coefficiente di conduzione).
Ma il caso parabolico è specifico anche della teoria della diffusione, quando φ dà il flusso materiale e k il coefficiente di diffusione; è l'equazione del moto dei fluidi viscosi per φ potenziale e k viscosità cinematica. In elettricità, per φ corrente elettrica specifica, k coefficiente specifico di resistenza, caratterizza la corrente in un conduttore.
Nel suo schema rientra formalmente la stessa equazione di Schrödinger, quella che traduce l'aspetto duale della materia sotto forma di onde e corpuscoli, precisamente l'equazione:

$$\Delta\varphi = \frac{2m}{ih}\,\varphi_t$$

essendo i l'immaginario $\sqrt{-1}$, h la costante universale di Plank, il quanto d'azione, φ la funzione incognita, un quid suscettibile di varie interpretazioni, ad asempio tale che il prodotto di $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ (considerata complessa) per il suo coniugato $\bar{\varphi} = \varphi_1 - i\varphi_2$ rappresenta l'intensità della corrente. L'equazione è tipica della meccanica ondulatoria. A priori non si vede un legame con qualcosa di ondulatorio; ma basta porre $\varphi = \psi\,e^{-i\omega t}$, con che si introduce un ente complesso vibrante con frequenza ω e numero di giri $\omega/2\pi$ per cadere nell'equazione:

$$\psi_{xx} + \varkappa^2\,\psi = 0 \qquad \left(\varkappa^2 = \frac{2m}{h}\,\omega\right)$$

che è l'equazione classica a cui si riduce quella delle vibrazioni di una corda.

Per il tipo iperbolico è rappresentativa l'equazione:

$$[13] \qquad \varphi_{xx} - \frac{1}{V^2}\varphi_{tt} = 0$$

o, in tre dimensioni, aggiungendo le derivata seconda rapporto ad y e z,

$$[13a] \qquad \Delta\varphi - \frac{1}{V^2}\varphi_{tt} = 0, \text{ o semplicemente, } \Box\varphi = 0 \, .$$

È l'equazione delle propagazioni ondose. Per una fune tesa, posto $y = z = 0$, vale la [13] e φ rappresenta l'elongazione trasversale; per un mezzo elastico omogeneo φ può rappresentare le componenti dello spostamento. Essa appare quindi essenziale nella teoria elastica della luce secondo Fresnel, dove la luce è assimilata ad onde (trasversali) in un mezzo ideale chiamato etere, un quid sottile che riempie l'universo, dotato di proprietà particolarissime se raffrontate a quelle dei mezzi elastici ordinari; proprietà specifiche dei fluidi e dei solidi elastici allo stesso tempo, ma comunque esistente in modo incontestabile secondo le celebri *Leçons sur l'élasticité* di Lamé; esistente per una creazione immaginaria di un filosofo ma essenziale come l'aria che si respira, secondo Lord Kelvin.
Successivamente, con l'avvento della teoria elettromagnetica della luce secondo Maxwell, φ rappresenta uno dei quattro potenziali elettromagnetici del Lorentz simbolizzati dal tetravettore elettromagnetico che determina il campo elettrico. Allora l'etere perde gran parte della sua realtà, diventa semplicemente la sede del campo, senza troppe specificazioni. Le equazioni, salvo il significato fisico diverso, rimangono formalmente le stesse.
In ogni caso V rappresenta sempre la velocità di propagazione.
Dalla soluzione generale, poniamo nel caso di una dimensione, data da d'Alembert:

$$[14] \qquad \varphi = f(x - Vt) + g(x + Vt)$$

essendo f e g funzioni arbitrarie di $x - Vt$ rispettivamente di $x + Vt$ si vede che se all'istante $t = 0$ è (poniamo pure sia $g = 0$):

$$\varphi = f(x)$$

all'istante $t = t$ sarà:

$$\varphi = f(x - Vt) \, .$$

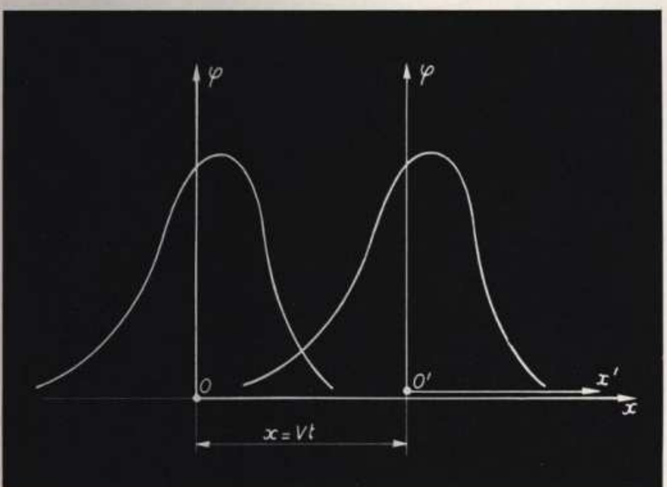
Ma ciò, con riferimento al sistema x, φ, significa semplicemente che la linea $\varphi = f(x)$ si è traslata di $x_0 = Vt$ (cfr. fig. 6).
Quindi, se $f = f(x)$ rappresenta all'istante $t = 0$, poniamo un avallamento nell'intorno di un punto O d'una fune tesa, questo stesso avallamento si ritrova al tempo $t = t$ nell'intorno di un punto O' distante Vt; il che significa evidentemente che l'avallamento (non gli elementi della fune) si è propagato con velocità V.
Ora, a seconda della natura del fenomeno ondoso, V viene espresso in base alle costanti del sistema sede di questo fenomeno.
Se si tratta di una fune tesa con tensione S, massa μ per unità di lunghezza, è:

$$V = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \, .$$

Per le onde in un mezzo elastico intervengono le costanti di Lamé e la densità in modo diverso a seconda del tipo di onda, trasversale o longitudinale.
Quando si tratta di onde elettromagnetiche, allora risulta nel vuoto e praticamente nei gas,

$$V = \frac{e_m}{e_s}$$

con e_m e e_s unità elettromagnetiche ed elettrostatiche della intensità di corrente. Il rapporto tra le quali potendosi ricavare da innumerevoli esperienze concede di calcolare, o meglio ritrovare indirettamente V, cioè la velocità delle onde elettromagnetiche e quindi della luce. Tale risultato costituì



Sulla nozione di onda $\varphi = f(x - Vt)$ progressiva con velocità V (fig. 6).

a buon diritto il successo più vistoso della teoria elettromagnetica della luce.
Senza insistere sulla sintetica definizione di propagazione ondosa così espressa merita rilevare l'interdipendenza attraverso l'immaginario tra le equazioni del tipo ellittico dei fenomeni a carattere statico o stazionario e quelle di tipo iperbolico dei fenomeni di propagazione.
Se nell'equazione del potenziale idrodinamico, l'equazione di Laplace:

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

si pone $y = i\,t$, $i = \sqrt{-1}$, si ritrova l'equazione iperbolica, tipica dei fenomeni di propagazione ondosa:

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 0 \, .$$

La soluzione generale [14], data da d'Alembert, diviene, riponendo $t = i\,y$:

$$[14a] \qquad \varphi = f(x + i\,y) + g(x - i\,y) \, .$$

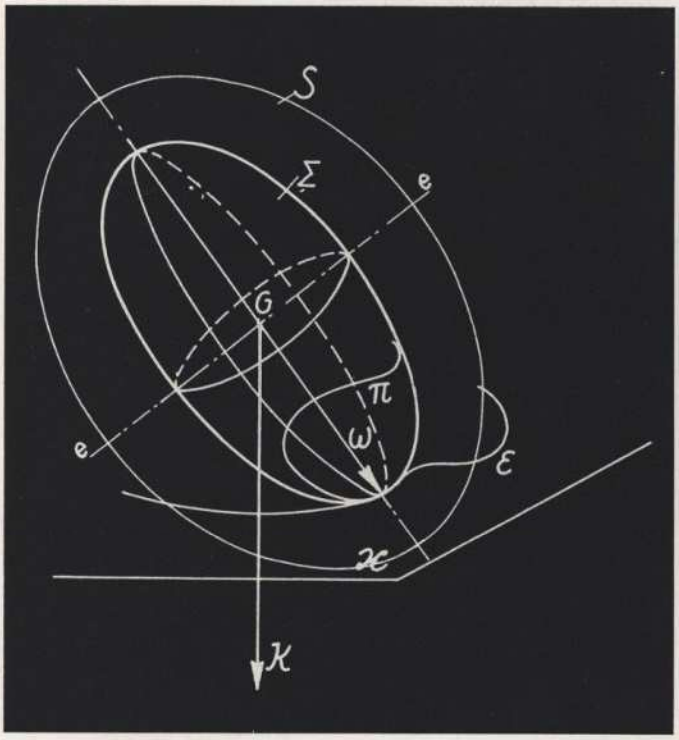
Perchè φ risulti reale basta che sia $g = f$ e si ha la soluzione dell'equazione di Laplace espressa con funzioni di variabile complessa.
Questo misterioso gioco dell'imaginario che consente di passare dalle espressioni di fenomeni fisici a quelle di altri essenzialmente diversi non è strettamente formale come si potrebbe ritenere a prima vista. L'avvento della teoria della relatività, ha gettato qualche luce sul suo significato, sia pur senza toglierne quella parte di oscurità che consentiva a Minkowsky di chiamare mistica l'enigmatica formula:

$$\sqrt{i} \text{ sec} = 3.10^5 \text{ km.}$$

Va rilevato che nell'ambito delle propagazioni tridimensionali la [13a] esprime onde in mezzi omogenei.
Per i mezzi anisotropi il laplaciano si sostituisce con le singole derivate seconde, moltiplicate per delle costanti deducibili dalle costanti cristallografiche del mezzo.
Per le equazioni ellittiche sono classici vari metodi d'integrazione; quello, cosidetto delle imagini di Lord Kelvin è forse il più brillante. Per le equazioni iperboliche valgono i metodi della teoria delle vibrazioni imperniate sulle equazioni integrali, almeno nell'ambito della possibilità di separare il fenomeno ondoso in una somma di moti vibratori, cosidetti fondamentali; altrettanto importante, ma sotto un punto di vista diverso, quello della sintetica espressività, è il metodo del Kirchhoff che ha riportato con felice intuizione il metodo di Green imperniato su una celebre formula integrale di Gauss, dal campo ellittico a quello iperbolico.
Il caso parabolico appare meno studiato degli altri ma ad esso sono legati fenomeni di grande interesse; tutti quelli cosidetti transitori, tanto attuali per gli elettricisti, e, come si vedrà, di certi particolari moti ondosi.
In questo ambito di ricerche il Volterra spaziò da Maestro per tutta la vita.
Nel campo ellittico, le sue ricerche sulle funzioni di variabile complessa in più dimensioni costituiscono indubbiamente l'estensione, non certo formale come si è visto, del metodo di Riemann che collega le funzioni di una variabile complessa all'equazione di Laplace in due dimensioni, sicchè non si poteva pensare a modo più brillante di quello che egli usò per affrontare l'equazione di Laplace in una V_n qualunque. In questo indirizzo il Bierknes, idrodinamico-teorico tra i maggiori, ha studiato con singolare efficacia il moto di un ellissoide ad $n - 1$ dimensioni in un fluido che riempie una V_n.
La stessa trattazione dell'equazione delle propagazioni $\Box\varphi = 0$ ponendo $Vt = ix_4$ conduce al laplaciano quadri-dimensionale nelle coordinate $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $ix_4 = Vt$ nel quale come egli ha fatto vedere le funzioni di più variabili complesse portano a lumeggiare, ripassando al reale, aspetti suggestivi dei fenomeni ondosi.
Il metodo delle imagini di Lord Kelvin specifico delle equazioni ellittiche, è stato riportato dal Volterra nell'ambito iperbolico conseguendo ad esempio la soluzione generale delle vibrazioni di una membrana non già sotto forma di serie infinite che esprimono la sovrapposizione di infiniti moti vibratori fondamentali, ma in termini finiti, sotto l'aspetto di integrali definiti.
Per le equazioni del tipo parabolico, pur esistendo tutta una teoria d'integrazione alla quale sono legati i nomi di Fourier, Laplace e Poisson che hanno fornito metodi considerati come modello e punto di partenza di una serie innumerevole di studi fisico-matematici, egli osservò che le proprietà qualitative più riposte, quali ad esempio la polidromia, non scaturivano da quel complesso pur formidabile di ricerche, almeno così come avveniva per le equazioni ellittiche e (come vedremo, particolarmente per suo merito) per le equazioni iperboliche.
Egli riuscì ad estendere i metodi delle equazioni iperboliche all'equazione parabolica attraverso quel passaggio per l'imaginario cui si è accennato nel caso dell'equazione di Schrödinger, ma rilevò subito che il nuovo metodo non dava neanche quanto era già noto. In seguito trattando il tempo come quantità complessa e non più come imaginaria pura, ponendo adunque:

$$t = y + iz$$

riportò l'equazione in due coordinate x, t in tre dimensioni, (x, y, z).
Attraverso visioni geometriche acutissime, mise in evidenza la polidromia delle soluzioni che aveva sempre sospettata giacchè nei due ambiti separati dal caso parabolico, questa era apparsa, nel 1° caso, attraverso le funzioni di variabile complessa, nel 2°, attraverso considerazioni profonde su cui si va ad intrattenersi.
Cominciano queste con l'osservazione dell'aspetto sostanzialmente diverso che assumono le soluzioni delle equazioni differenziali a seconda del numero di dimensioni che si considerano. Ciò gli era apparso in modo lampante quando iniziò lo studio dell'equazione [11] nell'indirizzo di Riemann, cercando di estendere le funzioni di variabile complessa da due a più dimensioni. E poichè a tale equazione prototipo del caso ellittico corrisponde, per specifica importanza, nel caso iperbolico l'equazione [13] si soffermò senz'altro su questa. Qui avveniva che lo studio era inoltrato particolarmente nel caso delle quattro variabili x, y, z, t soprattutto per merito di



Sulla nozione di polodia π ed erpolodia ε nel moto alla Poinsot (fig. 7).

Poisson e Kirchhoff attraverso l'introduzione delle soluzioni singolari che tanto efficacemente erano state impiegate da Green nel caso ellittico. Queste soluzioni singolari, funzioni di due punti P e P′ del dominio che si considera sono così chiamate perchè per $P \to P'$ diventano esse, assieme con le derivate, infinite di un ordine opportuno. Circoscrivendo il punto singolare $P = P'$ con un dominio ω di ordine $n - 1$, la soluzione diviene regolare in tutto il campo $\Omega - \omega$ e praticamente in quello effettivo quando $\omega \to 0$. Avviene però che, tendendo ω a zero, in certe formule integrali di carattere generale, che stabiliscono delle reciprocità tra due soluzioni dell'equazione che si considera, quindi in particolare tra la soluzione cercata e quella singolare, che è nota, taluni termini lasciano un residuo non nullo, residuo che è proprio il valore della funzione nel punto P′. Per il che, avvalendosi di quelle formule e della soluzione singolare si riesce a ricavare la soluzione del problema.

Per l'equazione di Laplace, in due dimensioni, la soluzione singolare è $\varphi = \lg r$, essendo r la distanza tra P e P′; in tre dimensioni è invece $\varphi = 1/r$. Per l'equazione di d'Alembert:

$$\varphi = \frac{f(r \pm Vt)}{r} \qquad [17]$$

con f funzione arbitraria di $r - Vt$ o $r + Vt$. Rappresenta questa soluzione una sorgente di onde epicentrali sferiche, progressive, se l'argomento è $r - Vt$, regressive se $r + Vt$. Le prime soltanto sono considerate in fisica-matematica poichè caratterizzano una sorgente da cui l'energia è irradiata; le seconde non si considerano poichè corrispondono all'energia, spazialmente diffusa che converge in un punto da un dominio in uno stato ondoso libero, ciò che è contrario ai principi della termodinamica.

Se è $f = \sin \frac{2\pi}{\lambda}(r - Vt)$ la sorgente è armonica, con lunghezza d'onda λ e periodo $T = \lambda : V$. Orbene, il Kirchhoff, avvalendosi di questa soluzione singolare, ha scritto una formula, che porta il suo nome, che consente di trovare per ogni punto P del dominio il valore di φ in un istante $t > 0$ quando per $t = 0$ sia data su una superficie Γ che racchiude P la distribuzione di φ e di $d\varphi/dn$. Tale formula costituisce, sia pur attraverso talune arbitrarietà, la espressione analitica di quel principio dell'ottica dovuto ad Huygens con il quale si dimostra e prevede la generalità dei fenomeni che in essa si considerano.

Nel caso di due dimensioni però questa formula vien meno. La singolarità non è più data dalla [17] ma dalla espressione:

$$\varphi = \frac{A \cos \alpha/2 + B \sin \alpha/2}{\sqrt{r}} \cdot f(r \pm Vt)$$

con A, B costanti e $x' - x = r \cos \alpha$, $y' - y = r \sin \alpha$.

Questa soluzione è manifestamente polidroma rispetto ad α e ad essa non si può quindi applicare il teorema di Gauss su cui, come la formula di Green per la $\Delta\varphi = 0$, si fonda la soluzione del Kirchhoff.

Con questa osservazione elementare ed altre più generali e profonde il Volterra venne alla persuasione che, anche nel caso iperbolico la polidromia era non meno possibile che nel caso ellittico. E merita vedere quali conseguenze derivarono da questo convincimento.

La propagazione della luce nei cristalli.

Come si è detto, la [13a] vale per le propagazioni ondose nei corpi isotropi; nei sistemi cristallini, in particolare quelli biassici (aragonite, topazio) o più semplicemente in quelli monoassici (spato d'Islanda) nei quali appare la rifrazione conica rispettivamente la ordinaria doppia rifrazione, l'equazione è estremamente più complicata.

Nell'ambito dell'ottica fisica che assimila il fenomeno luminoso alle vibrazioni di un mezzo elastico (etere) dopo le divinazioni di Fresnel, con il consolidarsi della teoria matematica dell'elasticità si pervenne, per merito di Lamé, alla scrittura delle equazioni delle onde nei mezzi biassici; quelle equazioni portano il suo nome e stanno alla base dell'ottica ondulatoria. Il Volterra costruì per esse una soluzione singolare che offriva la via alla estensione della formula di Kirchhoff. Ma guardò questa con diffidenza; la polidromia non appariva, ma poteva essere nascosta.

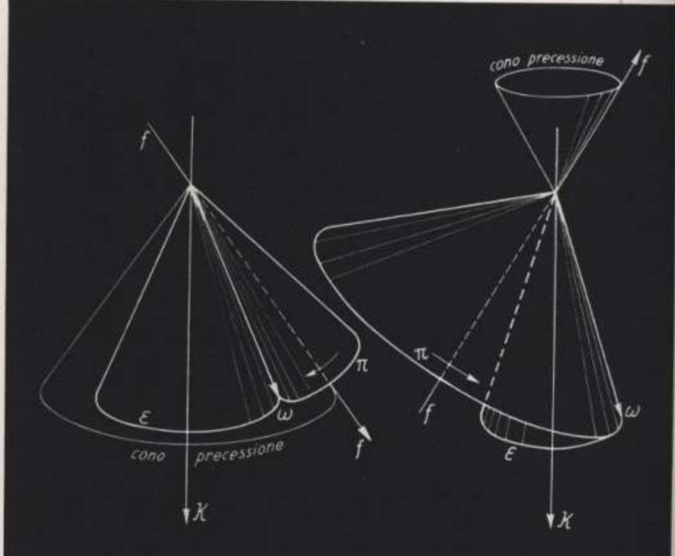
Proprio allora era apparsa una memoria « Ueber die Brechung des Lichtes in kristallinischen Mitteln » di Sonya Kowalewsky, una giovane, bella, seducente e già celebre matematica, allieva di Weierstrass. Sfruttando un metodo generale di integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del maestro era pervenuta a scrivere gli integrali generali delle equazioni di Lamé, ciò che significava, brevemente, delle equazioni dell'Ottica.

Leggendola, il Volterra se ne rallegrò intimamente perchè se quelle soluzioni andavano bene, cioè erano monodrome, e soddisfacevano effettivamente alle equazioni, egli disponeva non meno valida, la generalizzazione della formola di Kirchhoff, cioè a dire l'espressione matematica del principio dell'Huygens nei mezzi cristallini. Ma prima di ritenere acquisito tanto risultato si domandò se proprio certamente le soluzioni della Kowalewsky erano immuni dall'insidia della polidromia che le avrebbe rese illusorie.

Vincendo la segreta speranza di non ritrovarla, anche per la fiducia in un lavoro che indubbiamente era stato rivisto dallo scienziato che, per convinzione generale, come nessun altro aveva penetrato gli enigmi più riposti della matematica, egli finì con il metter in evidenza la polidromia di quelle soluzioni e quindi il carattere illusorio di esse e l'estensione che egli aveva tratta dal principio di Kirchhoff. Comunicò il risultato al Mittag-Leffler, suo amico, primo tra i matematici della giovane scuola svedese, già direttore degli « Acta Mathematica », la rivista che ancor oggi ospita, ed è ospitabilità ambitissima, memorie conclusive, all'uso classico, di felici ricerche e di successi acquisiti lungo la via.

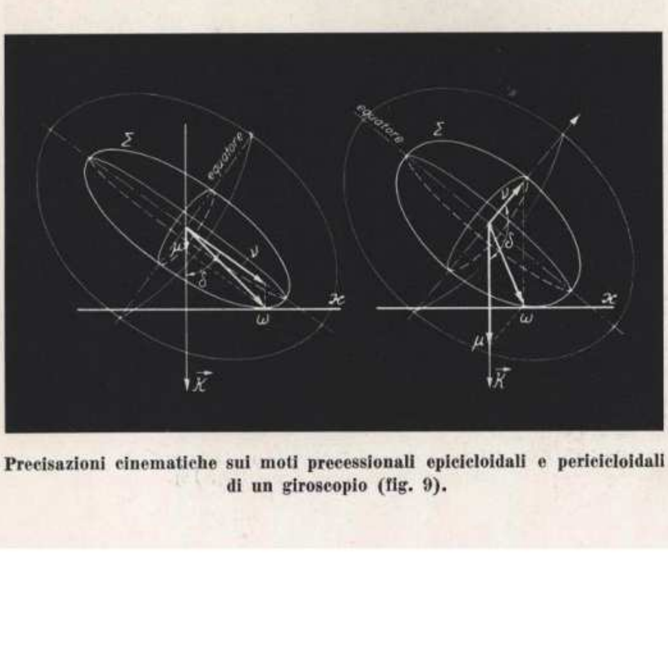
La brillante Sonya, per l'effervescenza che generò l'osservazione del giovane Volterra, se ne dolse moltissimo. E deve aver scritto al maestro una lettera non conforme alla timidezza con cui gli si presentò per la prima volta (sono parole di Mittag-Leffler) « le visage recouvert par un grand chapeau rabattu afin de cacher la timidité de ses 20 ans et l'émotion que lui causait l'épreuve qui, à ses yeux devait decider de son avenir ».

Quella lettera non si trova perchè quand'ella, giovanissima si dipartì, dopo aver raggiunto la cattedra all'Università di Stoccolma, Weierstrass bruciò le sue lettere. Ma quelle di Weierstrass rimasero al Mittag-Leffler, un grande allievo indiretto del Maestro, che non obbiettò perchè le conservasse, per sè soltanto fin che egli era in vita. Le pubblicò molti anni dopo in una bella memoria nel tomo 39 degli «Acta» a complemento del libro che sua sorella Anna Carlotta, drammaturga, aveva scritto su la vita di Sonya. E là si trova la risposta del Maestro all'allieva, in termini dolorosi: « *Meine Teuere Freundin, ich bin ganz zerknirscht unter der Last der Vorwürfe, die Dein gestern mir zugegangener Brief (ohne Ort und Datum) unter der Form von Bitten enthält..... aber es hat sich meiner eine furchtbare Müdigkeit bemächtigt, körperlich und geistig, die mich ganz apatisch macht und mit Widervillen gegen alles Denken und Schreiben erfüllt, kurz, ich bin, was die Aerzte gehirmüde nennen.....* ».

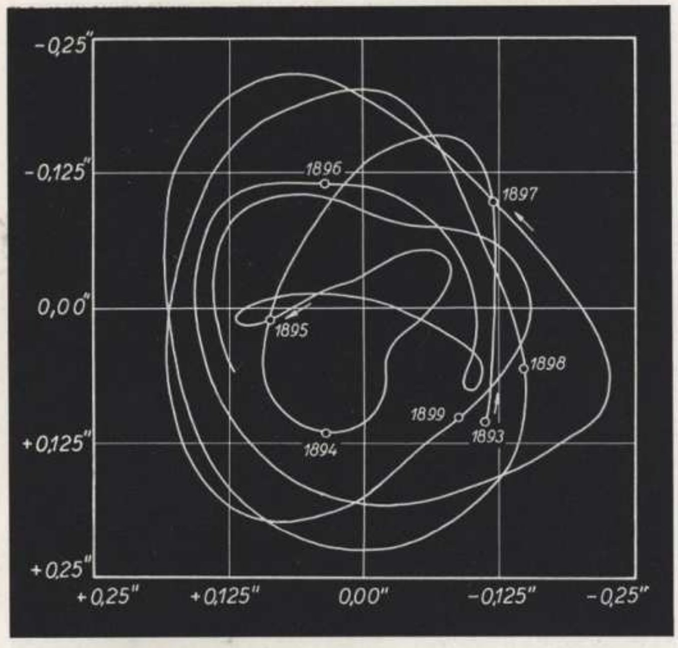


Moti precessionali epicicloidali e pericicloidali di un giroscopio (fig. 8).

E la lettera spiega quindi l'inconveniente che coinvolse allora lo stesso Weierstrass, giacchè la memoria della Kowalewsky si presentava come una sorte di collaborazione con il maestro. Infatti, in essa, è riprodotto per intero un suo lavoro (che si ritrova nel vol. I delle Opere) fondamentale « Zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ».
Alla parte negativa delle sue ricerche pubblicate nel 1891, il Volterra ne fece seguire una costruttiva, che mira direttamente all'integrazione delle equazioni dell'ottica secondo Lamé. Egli trovò importanti soluzioni, continue, monodrome per tutti i valori delle variabili x, z e per $y > 0$, contenenti quattro funzioni arbitrarie delle tre variabili indipendenti. Ma non riuscì, come egli stesso rilevò, a dimostrare in rigore che sul piano $y = 0$ si poteva dare arbitrariamente la rotazione ω e la dilatazione σ del mezzo.
E così, pur conseguendo risultati notevoli (anche perchè si estendono alle equazioni della teoria elettromagnetica della luce di cui le equazioni si identificano formalmente con quelle del Lamé nei mezzi elettricamente anisotropi e magneticamente isotropi siccome sono effettivamente i cristalli), la questione dell'integrazione delle equazioni dell'Ottica rimase aperta.
Ed erano passati 50 anni dacchè Fresnel l'agitò ritrovando, quando la teoria dell'elasticità era da fare, la superficie fronte di un'onda epicentrale in un cristallo biassico, superficie algebrica del 4° ordine che porta il suo nome. Celebre superficie! Attraverso questa il giovane Hamilton (a cui è dovuta l'ottica geometrica e l'equivalente, ad un'ottica in n dimensioni, dinamica dei sistemi) ritrovò a tavolino la rifrazione conica sperimentalmente scoperta solo dopo alcuni anni, nel topazio e nell'aragonite dal fisico Lloyd. Lamé la ritrovò dalle sue equazioni dell'elasticità come effettivo fronte di un'onda epicentrale. Si tratta di calcoli estremamente lunghi e penosi che il Volterra, quasi per esercizio tecnico, acutamente facilitandone i passaggi, riportava anche in lezione. Ma tale era l'agilità della sua esposizione, comunicativa, benevole, anzi paterna, punteggiata da pause sapienti, tanto per lasciar respiro, che nessuno si accorgeva delle difficoltà che andava superando come chi, portato da una guida d'eccezione, si trova, e non sa come, su vie impervie che da solo certo non avrebbe mai tentate.
E da soli non si sapevano poi rifare le deduzioni di Lamé, preferendo quelle più attuali, al confronto immediate, che egli anche esponeva quando trattava la teoria delle caratteristiche.
Il risultato del Lamé fu allora considerato solenne; riportato nelle sue « Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides » (Paris, 1866) vi restò, secondo una tra le tante felici espressioni del Maggi, come un gioiello custodito nel suo astuccio, finchè la Kowalewsky non ne lo trasse fuori per giovarsene nella sua ricerca assegnando ad essa la funzione che ha l'onda sferica nei mezzi omogenei per arrivare alla formulazione del principio dell'Huygens. Le conseguenze, come si è visto, non furono positive e la questione si inoltrò nel nostro secolo. Per i sistemi uniassici (spato d'Islanda) accanto ai risultati del Conway in Inghilterra e del Goünwald in Germania figura, certamente eminente, un lavoro del Signorini in un indirizzo suggeritogli dal Maggi suo maestro. Là si dimostra che da un centro emittente la luce si propaga per strati compresi tra due falde della superficie d'onda di Fresnel (particolarizzata con contributo dei punti che tra di esse si trovano, sino a che con il tempo il contributo dei punti sulle due falde soltanto diviene essenziale spegnendosi quello dei punti intermedi.
Nel 1919-1920 finalmente, in due ponderose memorie negli « Acta Societati Scientiarum Upsaliensis » dedicate a Volterra, Niels Zeilon trovò la soluzione definitiva della ormai storica questione.
Ch'essa sia definitiva occorre, come disse il Maggi dopo essersene informato con il Volterra, far fede all'autore, al metodo delle soluzioni fondamentali ch'egli impiegò costruendole con un suo ardito procedimento avvalendosi della nozione feconda di integrale di Fourier.
Volterra considerava con molta ammirazione quel metodo, non solo lo espose più volte in lezione ma chiamò lo Zeilon al nostro seminario di matematica perchè in merito ne riferisse.
Naturalmente non si può dire che tali memorie abbiano superato la critica profonda che spettò a quella della Kowalewsky, critica non fatta per la critica, ma a puro titolo di ricerca, per conforto dei propri risultati in campo vicino, unica ragione sufficiente per superare fatiche che certo non appagano risultati negativi e meno ancora i dispiaceri altrui.



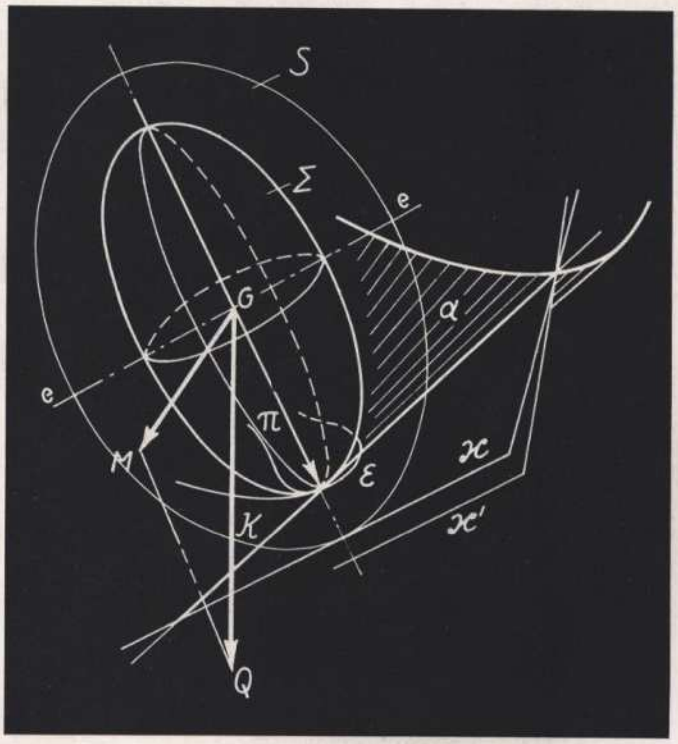
Precisazioni cinematiche sui moti precessionali epicicloidali e pericicloidali di un giroscopio (fig. 9).



Polodia terrestre secondo misurazioni internazionali coordinate all'Osservatorio di Capodimonte (fig. 10).

I moti ciclici interni in un giroscopio ed il moto dei poli.

Nel 1893 lasciava la cattedra di Meccanica celeste nell'Università di Torino, Francesco Siacci, grande artigliere e scienziato. Per la sua duplice attività un simbolo precursore di quell'attuale artiglieria geodetica et ultra che altro non è che un nuovo capitolo della teoria del moto dei pianeti. Già allora, ben degno successore di chi inaugurò i metodi ancor oggi attuali della balistica esterna fu chiamato il Volterra. E così, dai profondi pensieri matematici della tranquilla Pisa egli fu portato a dedicarsi alla meccanica analitica ed in particolare a quella celeste.
E vi si dedicò con quell'entusiasmo che aveva appreso dai suoi maestri quando insegnavano, come egli amava raccontare, ciò che essi stessi giorno per giorno studiavano e scoprivano, sicchè gli allievi, assistendo alla scienza nel suo progredire, con tutte le sue lotte, le sue difficoltà, i suoi sentimenti, le sue crisi e le dolci vittorie, lavorassero accanto non solo perchè le menti dotate risplendessero, ma anche perchè quelle men dotate si rendessero comunque proficue.
Era allora di grande attualità, certo oggi non ancora spenta, il problema del moto del corpo rigido, problema che costituì sin dagli inizi dell'altro secolo una questione della dinamica non meno importante del problema dei tre corpi. Tra i lavori fondamentali su questo problema figura una ricerca della stessa Kowalewsky, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (Acta 12), premiato dall'Accadémie des Sciences nel 1888. La Kowalewsky vi si recò a ricevere il premio, portato per l'eccezionalità del lavoro da 3000 a 5000 fr. la vigilia di Natale. Era allora nel fulgore della produzione scientifica, del successo. Aveva superate tutte le assai curiose ostilità misogine, non certo attuali, delle repubbliche scientifiche di Stoccolma, di Upsala, di Berlino ed era giunta alla cattedra di fisica matematica nell'Università di Stoccolma. Fulgore che soli tre anni dopo, una polmonite doveva spegnere per sempre.
Riandando ai preludi, una prima sistematica dei moti liberi, cioè non soggetti a forze, di un solido S è stata fatta da Poinsot.
Si tratta di quei moti che portano il suo nome e di cui la descrizione cinematica e dinamica è forse tra le più espressive che mai sia stata raggiunta. Calcolato in base ai dati iniziali del moto (ad esempio posizione e velocità di tre punti del corpo) il cosidetto momento totale **K** delle quantità di moto, momento definito da un vettore fisso nello spazio ed immutabile con l'azione di sole forze interne al sistema, il moto avviene così che un certo ellissoide Σ affine e coassiale all'ellissoide di inerzia Σ' del corpo e quindi con il corpo solidale (Σ' è calcolabile con regole immediate in base alla distribuzione delle masse) rotola senza strisciare su un piano $\varkappa$ normale al vettore **K.**
Posto che il contatto puntuale in P, tra ellissoide Σ e piano $\varkappa$ lasci traccia su l'uno o sull'altro, il rotolamento porta al tracciamento per successione di punti di una linea su Σ ed una su $\varkappa$ che prende il nome di polodia π rispettivamente erpolodia ε (cfr. fig. 7).
La congiungente il baricentro G, centro di Σ, con P caratterizza un vettore ω che è l'asse istantaneo di rotazione, il suo modulo ω, la velocità angolare. Perciò P si chiama polo e la sua traccia su Σ, come si è detto, polodia. Il polo si muove dunque sulla superficie del corpo; sta fisso, cioè, la polodia si rinserra su un punto, se ω coincide con uno degli assi di Σ.
Unendo i punti della polodia π e dell'erpolodia ε con G si generano due coni; il moto libero si precisa anche così che il cono di π, solidale con il corpo, rotola senza strisciare sul cono di ε.
Per il caso di un giroscopio, l'ellissoide di inerzia è di rotazione, dei momenti principali di inerzia A, B, C due sono uguali, poniamo A = B. I moti liberi si descrivono naturalmente ancora alla Poinsot ma sono possibili specifi-



Sulla nozione di moto alla Volterra di un corpo rigido con moti ciclici interni (fig. 11).

cazioni ulteriori. Precisamente, avviene che π ed ε sono circonferenze ed i coni corrispondenti con vertice in G hanno per asse, l'asse di figura f rispettivamente il momento **K.**
Nel rotolamento del cono di π sul cono di ε, f descrive, evidentemente, un cono con asse coincidente con **K** cosiddetto cono della precessione.
Sono possibili (cfr. fig. 8) due eventualità: il cono π rotola esternamente o internamente alla falda di ε; i moti si dicono allora precessioni epicicloidali rispettivamente pericicloidali.
Tra velocità angolare di precessione μ e quella attorno all'asse di figura ν (cfr. fig. 9) sussistono le relazioni di Eulero.

$$A\mu = K, \quad C\nu = \mu (A - C) \cos \vartheta \tag{18}$$

e tra μ, ν, ω si ha la relazione geometrica, evidente nelle figure, tra i lati del triangolo di cui è ϑ l'angolo formato da μ con ν.
Per Σ allungato, quindi per $A > C$, deve esser evidentemente $\vartheta < 90^o$ e sono dunque possibili solo precessioni epicicloidali. Per Σ appiattito, $A < C$ e deve esser $\vartheta > 90^o$ sicchè sono possibili soli moti pericicloidali.
Quel grande giroscopio che è la Terra ha l'ellissoide di inerzia appiattito, come è intuibile e comprovano le misure geodetiche, le perturbazioni sul moto della Luna conseguente alla non sfericità ed una precessione forzata dalla Luna e dal Sole di cui diremo: si ha precisamente $C = 1{,}00336\,A$. Le precessioni sono dunque pericicloidali. Merita soffermarsi su quelle per cui $\vartheta \sim 180^o$ e quindi $\cos \vartheta \simeq -1$.
Dalle [18] si ha allora:

$$\frac{\mu - \nu}{\mu} \cong \frac{A}{C} \tag{18a}$$

e dalla figura, $\omega \simeq \mu - \nu$. Quindi, per valori di ϑ prossimi a 180^o le velocità angolari μ, ν sono indipendenti da ϑ, si potrebbe anche dire, isocrone. Per il caso della Terra, se tali precessioni ci sono, per virtù di dati iniziali, rilevando che $2\pi : \omega = T_s$ dà evidentemente il giorno sidereo, risulta per la [18a], $2\pi : \nu = T_r = \sim 306\, T_s$. Dunque, il polo P impiega $T_r = 306$ giorni siderei per percorrere la polodia.
Proiettata sulla calotta polare terrestre, tale polodia è un cerchio di appena 4,00 m. di raggio, il cono di π ha quindi un'apertura piccolissima che è dell'ordine di $1/10''$.
La scoperta sperimentale del moto del polo e quindi — per definizione di latitudine — della variazione delle latitudini, è una autentica gloria italiana, più precisamente dell'Osservatorio di Capodimonte a Napoli.
Nel 1872 Emanuele Fergola sospettando variazioni secolari delle latitudini gettò le basi per la dimostrazione di quelle a corto periodo che 10 anni dopo furono messe in evidenza da Arminio Nobile. Per la valutazione precisa di queste piccolissime variazioni occorrono osservazioni di precisione fatte da più osservatori pressapoco sullo stesso parallelo, naturalmente distanziati in longitudine. Fu stabilita una organizzazione internazionale di otto osservatori i cui lavori sono coordinati a Capodimonte. L'osservatorio italiano dedicato a tali misure è a Carloforte in Sardegna. Per la precisione necessaria in questo genere controllatissimo di lavoro, la permanenza a Carloforte è considerata da noi un titolo di studio prezioso, quasi una garanzia. Per questo osservatorio sono passati infatti tra i nostri migliori astronomi: Emilio Bianchi, Volta, Carnera, Silva, Favaro.

Le osservazioni sistematiche hanno rilevato però anomalie (cfr. fig. 10) del moto effettivo del polo, rispetto a quello dianzi definito e già considerato da Eulero. La polodia è complicata quanto mai, e non già tranquillamente circolare; il periodo T_r è di circa 430 giorni anzichè 306.
Per spiegare queste anomalie, nel classico trattato del Tisserand, fondamentale in meccanica celeste, ben due capitoli, che fanno riferimento a lavori di M. Darwin, Gyldèn, Helmert, sono dedicati al moto del polo. Vi è considerato l'effetto dello spostamento delle masse, della plasticità, dell'elasticità del giroscopio terrestre, delle perturbazioni geologiche, meteorologiche, delle maree. Anche il nostro Schiapparelli ha dedicato una suggestiva memoria, presentata all'Osservatorio di Pulkova nel 1889, in occasione della sua festa semisecolare, nella quale studia la perturbazione del moto dei poli conseguente alla plasticità della Terra. cioè della sua facoltà di adattarsi al suo asse di rotazione. Ma la causa più importante o quanto meno più suggestiva fu trascurata ed è merito del Volterra l'averla segnalata e sistematicamente studiata. Si tratta dell'azione sul moto libero di un corpo rigido di eventuali moti ciclici interni, cioè parlando alla buona, dell'azione dei giroscopi dentro al giroscopio.
La Terra, da quel grandioso giroscopio che è, effettivamente possiede moti ciclici interni di ogni genere costituiti dalle correnti dei fiumi, che si continuano nel moto dei vapori nell'aria, da correnti più o meno cicliche nei mari, quali la corrente del Golfo, da moti vorticosi nell'atmosfera.
Ricerche recenti sul magnetismo terrestre altrimenti inspiegabile per intensità, fanno supporre esistenti dei vortici magmatici grandiosi nell'interno della crosta terrestre. Caratteristica di tali moti è evidentemente quella di non alterare la distribuzione della materia, quindi di lasciare inalterati i momenti principali di inerzia A, B, C del corpo.
Preso lo spunto per la ricerca, il Volterra cominciò a porre il problema generale del moto di un corpo rigido con moti ciclici interni.
Modificò innanzi tutto le equazioni di Eulero e pervenne a generalizzare i moti alla Poinsot dando anche in questo caso, una elegante definizione geometrica. Considerò accanto al vettore $\mathbf{K} = GQ$ delle quantità di moto il vettore GM dei moti interni riferito a tre assi solidali con il corpo. Orbene, egli dimostrò che il piano di rotolamento $\varkappa$ non è più invariabile e normale a **K** ma sta sempre normale alla congiungente di Q con M. E da qui dedusse il calcolo della polodia π e della superficie generata dalle tangenti a detta polodia, che chiamò superficie assiale α. Il moto del corpo è tale che l'ellissoide Σ rotola (cfr. fig. 11) senza strisciare su $\varkappa$ mentre $\varkappa$ ruota attorno alla generatrice di incontro con la superficie assiale α che è solidale con il corpo.
Naturalmente i moti ciclici sono influenzati dal moto del corpo che li contiene; per mantenerli stazionari occorre disporre di opportuni momenti. Di questi egli diede l'espressione in varie circostanze, ad esempio quando è fissata la polodia; a sua volta calcolò il moto libero dando in funzione del tempo i moti ciclici e quello del corpo.

* * *

Sin qui per i moti liberi. Ma non meno importanti sono i moti forzati, e per il giroscopio le cosidette precessioni forzate.
La terra fa una precessione forzata fondamentale attorno ad un asse normale al piano dell'orbita con periodo grandissimo: un anno platonico, pari

Ondulazione della falda del cono platonico dovuta alla nutazione provocata dalla precessione della Luna (fig. 12).

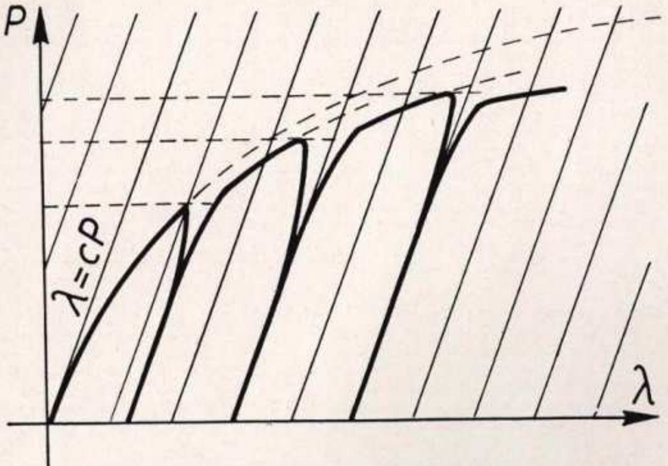


Diagramma sforzo-deformazione in presenza di isteresi senza inversione della forza (fig. 13).

a 26.000 anni. L'asse di figura descrive in questo intervallo un cono di una semiapertura 23° 5′.

La perturbazione deriva dall'azione del Sole e, principalmente della Luna. Come è noto l'asse terrestre è inclinato sul piano dell'eclittica così che il piano dell'equatore fa con questo 23° 30′. La Luna a sua volta ha il piano dell'orbita inclinato di 6° su quello dell'ellittica.

Poichè la Terra ha struttura giroscopica con prevalenza di masse verso l'equatore (è $C > A$) ne segue che l'attrazione del Sole e della Luna agisce in senso raddrizzante sull'asse della Terra.

Come ogni buon giroscopio, la Terra sfugge all'azione perturbante precessionando come precessiona la trottola con l'asse inclinato e che per il peso tende a ribaltarsi. Precessiona tranquillamente perchè l'azione è tenue ed uniforme o quasi. Altrimenti, come ogni giroscopio considerevole, può presentare inerzia e ritardi nei movimenti. In tecnica esistono proprio perciò i giroscopi piloti, rapidissimi, sensibilissimi, che comandano con servomotore i grandi giroscopi stabilizzatori delle navi sempre e quando il mare è mosso, anzi, quasi o molto agitato.

La precessione platonica è la più tranquilla precessione imaginabile; comunque, le sue conseguenze sono notevoli. In primo luogo, la cosidetta precessione degli equinozi, cioè l'annuale anticipo di $360 \times 60 \times 60$: $26.000 = 50''$ del punto di primavera e quindi la distinzione tra anno tropico ed anno sidereo e tutte le note conseguenze sul calendario (dei 50″, 16″ vanno attribuiti all'azione del Sole, 34″ alla Luna).

Il calcolo del momento raddrizzante e quindi della precessione riesce secondo il criterio suggerito da Gauss di ammettere che, in media, la massa del Sole e quella della Luna, possono esser diffuse sulle corrispondenti orbite relative.

Le conseguenze lontane sono assai vistose: il rovesciamento completo delle stagioni, cioè delle condizioni di temperatura che le distinguono, ogni mezzo anno platonico con riflessi imponenti in glaciologia. Il lento scambio tra le stelle sulla falda del cono platonico negli uffici di stella polare; tra 12.000 anni scintillerà al Polo la brillante Vega. Altrettanto notevole sarà l'apparizione di costellazioni attualmente invisibili nel nostro emisfero; tra 12.000 anni splenderà nel cielo di Roma la Croce del Sud che oggi si vede appena alla latitudine del Cairo. Sin nelle costruzioni che sfidano i secoli appaiono le modifiche apportate dagli uomini per ovviare alle conseguenze della precessione. Templi greci ed egiziani orientati così che il nascente Sole di un giorno astronomicamente ben determinato illuminasse attraverso la porta principale l'imagine di una divinità, divennero inservibili e furono sostituiti da altri (Medinet Abu) con l'orientamento corretto o aggiustati (Agina) con l'apertura di una porta nuova.

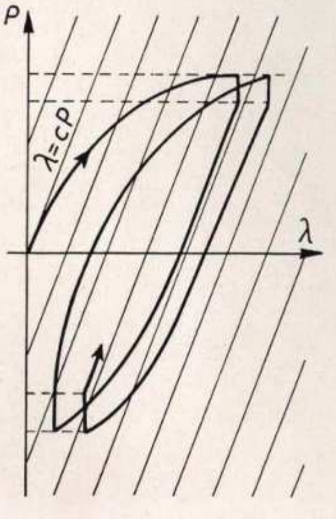


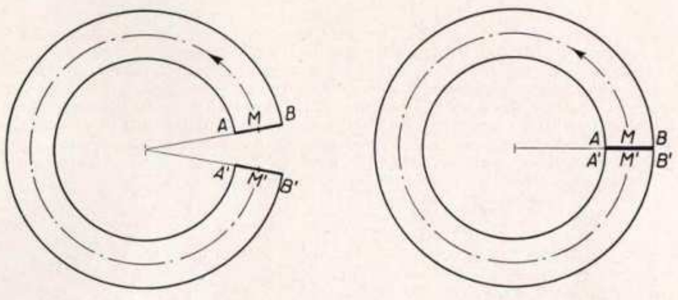
Diagramma sforzo-deformazione in presenza di isteresi con inversione della forza (fig. 14).

Naturalmente, se precessiona la Terra sotto l'azione del Sole e della Luna, la Luna che ruota anch'essa sia pur più lentamente della Terra (il suo periodo di rotazione è uguale a quello di rivoluzione attorno alla Terra così da mostrar a questa sempre la stessa faccia), precessiona sotto l'azione del Sole e della Terra. Tale precessione ha un periodo molto più breve dell'anno platonico; appena di 18,2/3 anni. Conseguenza di questa è una precessione dei nodi e una perturbazione, cosidetta nutazione, della stessa precessione platonica. Non occorre dire che il moto del polo corrisponde a tali precessioni e nutazioni è trascurabile atteso il piccolissimo valore di μ (è $T = 2\pi : \mu = 26.000$ anni) rispetto ad ω. Il cono della precessione platonica risulta superficialmente ondulato. Le precessioni libere alla Eulero perturbate da tutto il repertorio di perturbazioni contemplato: plasticità, bradisismi, maree, moti ciclici di Volterra, render ancor più fine l'ondulazione del cono platonico (cfr. fig. 12).

Da quanto precede, senza parlare di tutte le precessioni forzate che si impongono in tecnica nelle innumerevoli applicazioni del giroscopio, appare ben interessante la considerazione delle perturbazioni su un giroscopio sede di moti ciclici interni.

Gli studi del Volterra aprono un indirizzo promettente che presenta interesse sotto punti di vista diversi, in particolare quelli cosmogonici delle mete asintotiche del moto dei corpi celesti sotto l'azione di interni moti ciclici. Il problema si complica però quando questi non sono stazionari e si considerano le azioni mutue tra questi ed il giroscopio che li sostiene; questione che egli ha magistralmente approfondita.

Tutte le sue ricerche apparse sulle nostre principali riviste, sono raccolte in una memoria, ponderosa memoria, degli « Acta Mathematica » (tomo 22) intitolata « Sur la Théorie des variations de latitudes ». È essa condotta alla maniera classica, degna di stare accanto alle classiche memorie che Jacobi ha dedicato al moto libero di un corpo rigido. Come in quelle riappaiono anche qui, sotto forma di espressioni razionali o esponenziali le funzioni ellittiche e jacobiane quando si studiano i rapporti tra rotazione e moti ciclici e si calcolano ad esempio le forze necessarie per mantenerli stazionari.



Realizzazione schematica di una distorsione secondo Volterra in un anello (fig. 15).

Le equazioni integrali di Volterra ed i problemi della meccanica ereditaria.

Nel 1896 hanno inizio gli studi, che lo interesseranno poi per tutta la vita, sulla inversione degli integrali, comprendendosi in questo problema la risoluzione delle equazioni integrali di cui già è stato fatto cenno.

Il problema dell'inversione di un integrale definito ha l'origine in un problema di meccanica, chiamato problema delle tautocrone.

In forma generale questo si pone come determinazione di una curva $x = x(y)$ nel piano verticale (x, y) tale che un punto pesante obbligato a percorrerla, partendo con velocità nulla dall'estremo superiore, arrivi al punto più basso O in un tempo che sia una funzione $\varphi(h)$ dell'altezza iniziale h rispetto ad O.

Eguagliando la forza viva $\frac{1}{2} v^2$ al lavoro $g(h-y)$ fatto nella caduta da h ad $h-y$, poichè $v = ds/dt$ e $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ed infine $\int_o^t dt = \varphi(h)$ si trova

$$\varphi(h)\sqrt{2g} = \int_o^h \frac{u\,dy}{\sqrt{h-y}} \quad \text{con} \quad u = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

La funzione incognita $x = x(y)$ anzi la sua derivata, si trova sotto il segno integrale. Perciò, per esprimerla non resta che affrontare il problema dell'inversione.

N. H. Abel con un passaggio analitico semplicissimo ha risolto la questione; in particolare per $\varphi(h) = \text{cost.}$ cioè per il tempo di percorrenza indipendente dall'altezza, ha ritrovato la cicloide come curva tautocrona. Proprietà notevolissima che consente la costruzione del pendolo con periodo indipendente dalla elongazione (l'isocronismo del pendolo su traiettoria circolare scoperto da Galileo si riferisce notoriamente alle sole piccole oscillazioni!).

Ma il lavoro di Abel ha avuto anche il pregio di far soffermare l'attenzione degli analisti su quest'ordine di questioni. Ed a queste il Volterra rimase attratto più d'ogni altro, iniziando addirittura un ciclo di ricerche nuove e di grande attualità e sul quale già s'era soffermato Boltzmann, il celebre fisico di Vienna. Si tratta dei *fenomeni di isteresi*, cioè di ritardi dell'effetto sulla causa, di sovrapposizione di effetti residui (cfr. figg. 13 e 14) di assestamenti su cicli chiusi nel diagramma causa ed effetto che intervengono, si può dire, in tutti i fenomeni fisici e sono studiati in un capitolo unico della fisica, cosiddetta della meccanica fisica ereditaria. Essa abbraccia i fenomeni di isteresi elastica, magnetica, elettrica quando le cause sono la forza meccanica, magnetica, elettrica; gli effetti, lo spostamento o la deformazione, lo spostamento magnetico, elettrico nella classica definizione maxvelliana. Ma essi appaiono anche nella gravitazione universale, nelle scienze biologiche e sociali, come ha fatto vedere lo stesso Volterra in ricerche sistematiche che occuparono intensamente l'attività dei suoi ultimi anni. Come si esprimono questi fenomeni?
Seguendo Volterra soffermiamoci ad esempio sull'elasticità considerando una molla in condizioni naturali sulla quale al tempo t agisca una forza $\mathrm{F} = \mathrm{F}(t)$ (che in un ambito sufficientemente vicino a quello naturale e in assenza di fenomeni dinamici che si escludono ammettendo variazioni lente) provoca uno spostamento ad essa proporzionale

[19] $$u(t) = k\,\mathrm{F}(t)\,.$$

Se la forza si spegne, W, che dipende linearmente da F, si annulla. È questa, parlando alla buona, la legge di Hoocke.
Ma si pensi ora che, di uno spostamento $w(\tau) = 1$ in un istante τ antecedente a t (quindi $\tau < t$) e durato un intervallo di tempo $\Delta\tau = 1$ resti, all'istante t, un ricordo, che dipende da t e da τ,

$$\Phi = \Phi(t, \tau)\,.$$

Se si ammette una teoria lineare del ricordo, e quindi che ad azione doppia o tripla, corrisponda un ricordo doppio, triplo, ad una durata doppia, tripla un ricordo ancora doppio e triplo, detto spostamento $w(\tau)$ durato un tempuscolo $d\tau$ nell'intorno dell'istante $t = \tau$ lascierà un ricordo all'istante t dato da

$$\Phi\,(t,\ \tau)\ w\,(\tau)\ d\,\tau\,.$$

A buona ragione la funzione delle due determinazioni t, τ della variabile tempo, è stata chiamata dal Volterra, nucleo ereditario o semplicemente nucleo.
Per la forma da attribuire a tale funzione egli considerò il caso importantissimo in cui t e τ intervengono solo come differenza $(t - \tau)$; e cioè:

$$\Phi\,(t, \tau) = \Phi(t - \tau)\,,$$

ciò che significa che il ricordo dipende solo dalla distanza nel tempo dell'evento, e non dall'istante in cui si ricorda. È il caso tipico delle memorie invarianti che si può ammettere senz'altro per i materiali nel periodo, lungo anche decine d'anni, del loro sfruttamento ordinario (fenomeni di fatica a parte). Tali nuclei sono chiamati del ciclo chiuso per la proprietà dei sistemi costruiti con materiali di siffatta memoria, principalissima tra tutte quella della corrispondenza di moti periodici alle azioni periodiche. Specificando la $\Phi\,(t - \tau)$ si ha frequentemente

$$\Phi(t - \tau) = \beta e^{-\alpha(t-\tau)}$$

con $\alpha > 0$ e tanto più grande quanto più è smemorato il materiale.
L'acciaio di qualità, di una lama di Toledo ad esempio è il più smemorato tra i metalli, meno lo è il ferro dolce. Sicchè la memoria d'acciaio del parlare comune, non è affatto specifica dell'acciaio. Nuclei semplicissimi del tipo $\Phi = \beta e^{-\alpha\tau}$ nei quali l'istante t addirittura non interviene, casi evidenti di una memoria indelebile, ma di una percettibilità decrescente con l'età, hanno riscontro nell'ambito di quei fenomeni di viscosità, tanto attuali nel cemento armato, di cui tutti ne parlano. Si riferiscono tali nuclei ad intervalli dell'ordine dei giorni per l'acciaio armonico dal momento della sovratensione, dei mesi e degli anni per i calcestruzzi giovani, intendendosi che $\tau = 0$ coincide, per il calcestruzzo con la sua maturità a, poniamo, 28 giorni (dall'impasto).
Ritornando al problema analitico, ammettiamo che w vari con il variare di τ da un tempo $\tau = 0$ all'istante $\tau = t$; si avrà allora in luogo della legge lineare [19] sovrapponendo gli effetti ereditari (o se si vuole, i ricordi)

[20] $$w(t) = k\ \mathrm{F}(t) + \int_0^t \Phi\,(t, \tau)\ w(\tau)\ d\tau\,.$$

Come si vede, la *memoria* $\Phi\ (t,\ \tau)$ è analiticamente data, ma l'incognita $w(\tau)$ appare tanto fuori quanto sotto il segno integrale. Per esprimerla si ha quindi un'equazione integrale da risolvere. È questa l'equazione di Volterra di 2ª specie, non omogenea poichè $\mathrm{F}(t) \neq 0$.
Il Volterra istituì tutta una teoria per queste equazioni. Le riportò ad un sistema di un numero finito di ordinarie equazioni algebriche lineari, poi, dalle soluzioni di queste scritte con l'ordinaria regola di Cramer, risalì dal discreto al continuo, cioè passò al limite per $n \to \infty$ e pervenne alla soluzione cercata. Nelle linee generali il suo pensiero è il seguente:
Fissati degli istanti, poniamo pure egualmente intervallati $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$; $t_1, t_2, \ldots t_n$ il nucleo ereditario $\Phi\,(t, r)$ potrà esser determinato dai soli valori che tale funzione assume nei nodi del quadrettato compreso nell'area triangolare $t \geq \tau$. Il valore generico per gli istanti $\tau = \tau_j < t_i$, $t = t_i$ si indichi con Φ_{ij}. Con notazione conseguente si scriva brevemente $w\,(t_i) = w_i$ e $w\,(\tau_j) = w_j$. Posto eguale ad uno l'intervallo costante tra istante ed istante, la equazione [19] è sostituita dal sistema,

[20a] $$\begin{aligned} w_1 \qquad\qquad\qquad &= f_1\,, \\ \Phi_{21}\ w_1 + w_2 \qquad\quad &= f_2\,, \\ \Phi_{31}\ w_1 + \Phi_{32}\,w_2 + w_3 &= f_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

È questo un ordinario sistema di equazioni algebriche lineari e non omogene e distruttura un po' particolare; mancano tutti i termini a destra della diagonale. Si hanno soluzioni deducibili ad esempio con la regola di Cramer, pur che il suo discriminante

[21] $$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{21}\ 1\ \ldots\ldots \\ \Phi_{31}\ \Phi_{32}\ 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

sia zero. E questo lo è infatti ed è anzi sempre uguale ad 1 poichè si riduce al prodotto dei soli elementi — tutti eguali ad 1 — sulla diagonale e nulli essendo tutti gli elementi a destra di questa.
Secondo le regole di Cramer si ha quindi, poichè $\mathrm{D} = 1$,

[21a] $$w_i = \frac{\mathrm{D}_i}{\mathrm{D}} = \mathrm{D}_i$$

con D_i determinante ottenuto da D sostituendo la colonna i^{ima} con i termini noti f_i. Con ciò, almeno per punti, passando dal continuo al discreto la funzione incognita è determinata.
Per ritornare al continuo, occorre passare al limite per $n \to \infty$ cioè considerare il determinante infinito D_i.
Con una abilità analitica d'eccezione il Volterra riuscì in tale intento e diede la funzione incognita nella forma inversa della [20a].

[20a]* $$w(t) = k\,\mathrm{F}(t) + \int_0^t \mathrm{R}(t,\ \tau)\ \mathrm{F}(\tau)\ d\tau\,.$$

In tale espressione, che costituisce il suo *principio di inversione*, è $\mathrm{R} = \mathrm{R}(t,\ \tau)$ il cosidetto nucleo risolvente, dato da una serie uniformemente convergente di cui i termini si ottengono con quadrature sul nucleo $\Phi\ (t,\tau)$. Così restò espresso il suo *principio di convergenza.*
Ma non si arrestò qui; pose a confronto le soluzioni ottenute con altri procedimenti che egli stesso istituì; approssimazioni successive o equivalenti, come quelle di iterazione, delle serie di potenze di un parametro a fattore di $\Phi(t,\ \tau)$. Ritrovò naturalmente gli stessi risultati ed in particolare che la soluzione w poichè $\mathrm{R}(t, \tau)$ risulta funzione intera di λ è una funzione olomorfa di λ.
Le estensioni che egli trasse passando dalle espressioni integrali a quelle integrodifferenziali hanno lo spunto nella dinamica ereditaria. Infatti, se al problema statico-elastico della molla sollecitata da una forza $\mathrm{F}(t)$ funzione del tempo si sostituisce quello dinamico, che interviene appena F vari con relativa rapidità rispetto al periodo di oscillazione della molla, occorre per il principio di d'Alembert, che riduce ogni questione dinamica ad una di statica, sostituire ad F la forza perduta, cioè F meno la reazione di inerzia $m\ \dfrac{d^2w}{dt^2}$, essendo m la massa virtuale della molla.
Ma senza soffermarsi sulla semplice questione tecnica del calcolo di m, occorre subito notare che l'incognita funzione $w(t)$ appare non solo sotto il segno integrale, ma, fuori da questo ed anche sotto il segno della doppia derivazione. Perciò l'equazione si chiama integrodifferenziale. E considerò sistemi più complessi che gli vennero offerti dai sistemi elastici continui. Per questi la memoria può non esser sempre sufficientemente rappresentata da una sola funzione $\Phi(t,\ \tau)$ come avviene che non una sola costante k può esprimere le proprietà elastiche. Le quali, come si sa, per i corpi isotropi, sono già due, le famose costanti di Lamé, per i corpi anisotropi sono 21 e sono le costanti che intervengono nell'espressione del potenziale elastico unitario. E così la memoria venne espressa da una matrice con elementi funzioni di t e τ e le equazioni via via si complicarono. Le loro soluzioni però le ricondusse tutte ad un solo criterio generale risolutivo.
In questo campo inesplorato egli spinse tanto la sua curiosità da non avvertire un vicino ancor più fecondo e che già gli si era presentato nell'ambito funzionale. Si trattava di equazioni della stessa forma [20] salvo ad avere il limite superiore fisso; scrivendo in luogo di t e τ, x ed x', precisamente dell'equazione

[22] $$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^l \Phi(x,\ x')\ w\ (x')\ dx'\,.$$

Come più tardi si è visto è questa specifica si può dire di tutti i capitoli della fisica matematica, dell'elasticità, dell'ottica geometrica, della teoria cinetica dei gas, e di quel capitolo che costituisce il tratto d'unione tra fisica matematica classica e moderna fisica atomica, costituito dalla meccanica ondulatoria secondo Schrödinger.
Alla soluzione di queste equazioni è pervenuto Ivar Fredholm in una celebre memoria degli Acta. Ma quanta parte del lavoro del Volterra stia nella soluzione del Fredholm è facile vedere già nei brevi termini seguenti. Nel caso dei limiti fissi, la riduzione dell'equazione integrale a sistema algebrico vale naturalmente egualmente; si ha, in luogo delle [20a] il sistema

[22a] $$\begin{aligned} (1 + \lambda\Phi_{11})\ w_1 + \quad \lambda\,\Phi_{12}\ \ w_2 + \quad \lambda\,\Phi_{13}\ \ w_3 + \ldots &= f_1\,, \\ \lambda\Phi_{21}\ \ w_1 + (1 + \lambda\,\Phi_{22})\ w_2 + \quad \lambda\,\Phi_{23}\ \ w_3 + \ldots &= f_2\,, \\ \lambda\,\Phi_{31}\ \ w_1 + \quad \lambda\,\Phi_{32}\ \ w_2 + (1 + \lambda\,\Phi_{33})\ w_3 + \ldots &= f_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ; \end{aligned}$$

e la regola di Cramer porge

[23] $$w_2 = \frac{\mathrm{D}_i}{\mathrm{D}(\lambda)}\,;$$

D_i ha il significato di prima e $\mathrm{D}(\lambda)$ è il discriminante che non è però in ogni caso diverso da zero.
Il suo non annullarsi dipende dal valore del parametro λ. Se λ è una radice dell'equazione algebrica

[24] $$\mathrm{D}(\lambda) = 0$$

le w_i divengono infinite ed il sistema non ha praticamente soluzioni come è notissimo dagli elementi di algebra.

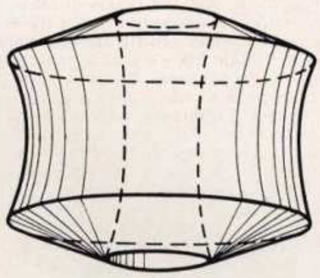
Seguendo i criteri di sviluppo adottati dal Volterra si perviene ancora ai suoi teoremi di inversione e convergenze nella forma equivalente alla [20a]*. Il terzo teorema però, quello riguardante il parametro porta ad esprimere w non più come funzione olomorfa in λ ma come funzione meromorfa; le sue singolarità sono i soli poli i quali stanno là dove λ si identifica con una radice della [24]. Questo parametro ha un significato ben preciso. In elasticità e in dinamica ondulatoria è una frequenza. Le radici λ_1, λ_2, $\ldots$; costituiscono uno spettro che per i sistemi atomici si identifica con gli spettri classici della serie di Balmer, di Paschen, ecc. Sin la struttura fine che appare quando una riga spettrale si divide in più righe ha il riscontro in una radice multipla d'ordine p di una equazione algebrica che, ove si mutino di poco i coefficienti, si divide in radici vicine di ordini di multiplicità p_1, p_2, $\ldots$; di somma $= p$ legati alla perturbazione dei coefficienti.
Nessun dubbio che Fredholm in quest'ordine di ricerche ha avuto un successo clamoroso che ha soverchiato quello delle equazioni del Volterra con le quali hanno tanta evidente affinità.
Intimamente egli si dolse di non aver colto ciò che aveva quasi a portata di mano e che sostanzialmente, come si è visto, egli stesso aveva dato il modo di vedere senza trovar, incredibilmente, il dovuto riconoscimento.
Ma è ormai ora di lasciare queste equazioni integrali, tanto, a parlarne non si finirebbe mai. Si riaccennerà ad esse trattando la teoria matematica della lotta per la vita, quella che costituì il dolce svago dei suoi ultimi anni.

Volterra all'Università di Roma.

Riandiamo all'inizio di questo nostro secolo, quando mancava a quanti l'ammiravano nella pace di quei tempi felici ed ammirano tutt'oggi negli scritti e nei ricordi Eugenio Beltrami, matematico-fisico massimo del nostro risorgimento scientifico.
Era ovvio che a succedergli alla Cattedra di Fisica Matematica e di Meccanica Celeste fosse chiamato il Volterra.
Con l'insegnamento di tali discipline nell'Università di Roma si iniziarono per lui i migliori anni della sua vita. La sede ambitissima, il suo matrimonio con Virginia Almagià, la diletta compagna della sua vita, fedele e impareggiabile custode della sua memoria.
Seguirono ben presto i riconoscimenti ufficiali, la nomina a Senatore del Regno, la indiscussa fama internazionale.
In Francia ebbe onori accademici e quasi una nazionalità onoraria, amicizia sincere; le sue idee trovarono risonanza completa in quella fiorente scuole matematica.
Egli ricambiò quella simpatia che trovò sì vivida nel modo più completo. Come pochi contribuì a rinforzare l'amicizia verso il nostro Paese, la sua stessa memoria contribuisce a rinnovarla dopo le recenti crisi, siccome avviene spesso di rilevare.
La vita attiva, il suo indirizzo anche pubblicistico della scienza e della matematica che dà il mezzo per praticarla, non lo distolse mai dalla ricerca attiva.
Completò in trattati le sue lezioni romane sulle equazioni integrali, quelle alla Sorbona sulle funzioni di linea, le lezioni di Stoccolma sulle equazioni della fisica matematica.
Là sono sistematicamente presentati i suoi profondi pensieri sulla nozione di funzione di linea, sui funzionali, sul calcolo funzionale.
Ma, instancabile nel ricercare campi di indagine per quei rami della fisica matematica che pareva esaurirsi o quanto meno evolversi verso orientamenti non strettamente classici, nel senso come egli l'intendeva, di un capitolo dell'analisi che poteva restare anche al di là delle premesse iniziali qualcosa di utile in ogni caso per lo studio dei più disparati problemi. Non sono forse le funzioni di variabile complessa, nate in idrodinamica altrettanto utili nei problemi della teoria del calore, dell'elasticità, nello studio della torsione?
Un qualche segno di esaurimento dava allora in particolare la teoria matematica dell'Elasticità che, per l'influenza del Betti e per innata disposizione era diventata una teoria nazionale, una vera causa personale dei nostri più eminenti fisici matematici, tra i primi, Carlo Somigliana, coetaneo, amico per la vita et ultra del Volterra, ancor oggi inesausto nella ricerca, presidente della sezione matematica e meccanica dei Lincei, maestro carissimo e venerato da tutti noi anziani.

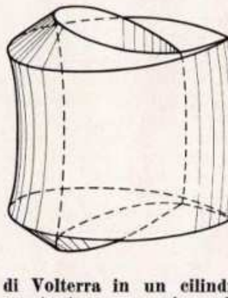
Le distorsioni elastiche.

Il ruolo essenziale che ha la connessione del dominio in cui si opera sulle soluzioni delle equazioni differenziali è già apparso in queste pagine tanto nell'ambito dell'idrodinamica, quanto, per merito del Volterra, dell'ottica dei cristalli. Ma, prima che in questi problemi, la topologia si era già introdotta in fisica matematica attraverso la nozione di nodo nello studio dell'induzione mutua dei circuiti elettrici proprio dove, per la prima volta, s'è rivelata la periodicità di un integrale ciclico.
Lo stesso studio delle funzioni algebriche e dei loro integrali (integrali abeliani) sopra quelle superfici topologicamente riducibili a spazi con una ben determinata connessione lineare che Riemann ha ideate per la loro uniformizzazione, trova risorse intuitive nel campo della elettrologia. E ciò alla maniera con cui Riemann, metallizzandole per renderle conduttrici e curando l'isolamento nelle sezioni di diramazione per poterle considerare sedi di correnti elettriche, dimostrò intuitivamente l'esistenza su di esse di un potenziale armonico uniforme φ (con ovvia singolarità nei poli di applicazione).
Appena accennando all'estensione di queste ricerche, dall'equazione di Laplace a quella dell'equilibrio termico con irraggiamento od a quella dell'equazione delle onde in presenza di uno spettroscopio a diffrazione, fermiamoci a considerare il saliente ruolo che in elasticità ha la connessione. Essa interviene attraverso certe operazioni nei corpi non semplicemente connsesi, operazioni che il Volterra chiamò distorsioni e sulle quali costruì una teoria che ha avuto ed ha una influenza notevolissima anche nell'ambito tecnico.



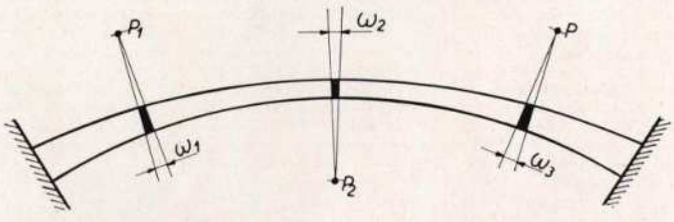
Distorsione elementare di Volterra in un cilindro cavo per asportazione di un cuneo e successiva saldatura (fig. 16).

Egli si domandò, riprendendo uno studio del Weingarten sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi, apparso nei Rendiconti dei Lincei (1901), che cosa avveniva se in un corpo semplicemente o non semplicemente connesso, fatto un taglio si forzava tra le facce di questo un cuneo rigido; oppure se, asportato un cuneo di materiale elastico, si rinsaldavano con movimento rigido le facce dopo averle forzatamente avvicinate o, più generalmente, se fatti dei tagli secondo piani si praticavano su queste movimenti rigidi relativi qualsivogliono. Trovò che nel primo caso non restavano soddisfatte le cosiddette condizioni di regolarità istituite da St. Vénant, condizioni che esprimono la congruenza, cioè la compatibilità della deformazione di ogni elemento che costituisce il corpo. Nel secondo caso, cioè per i corpi non semplicemente connessi, la regolarità della deformazione rimane invece rispettata.
Ciò significa che per i corpi semplicemente connessi, la distorsione è localmente sempre ritrovabile (si ammette una esecuzione ad hoc, diremo ideale, della saldatura dopo il taglio). Non così invece nei corpi a connessione multipla, nei quali la distorsione è localmente introvabile pur potendosi rilevare lo stato di coazione con mezzi vari, fotoelastici se possibile, elastodeformometrici.



Distorsione elementare di Volterra in un cilindro cavo per asportazione di uno spessore costante e successiva saldatura (fig. 17).

Non si arrestò egli certamente a questo punto fondamentale, ma diede le soluzioni complete per le sue distorsioni (quelle dianzi definite) mettendo in luce la caratteristica peculiare della polidromia delle funzioni che esprimono gli spostamenti, la continuità invece sino alle derivate seconde della deformazione.
Che le funzioni che dànno gli spostamenti siano polidrome è facile riconoscere.
Con riguardo ad un anello (cfr. fig. 15) in cui sia praticata una distorsione per asportazione di un cuneo e successiva saldatura delle facce A B e A′ B′ aperte dal taglio, si esaminino gli spostamenti (a saldatura fatta).
I punti A B di una faccia del taglio non si sono spostati mentre quelli A′ B′ dell'altra si spostano della larghezza della fessura. Perciò, partendo da un punto M di A B e percorrendo un ciclo interno all'anello per arrivare in un punto M′ di A′ B′ seguendo gli spostamenti che procedono per continuità vi si arriva con valori differenti da quelli che si avevano in partenza; si tratta dunque di una polidromia del tipo già segnalato per la funzione.
Per queste distorsioni trovò teoremi di reciprocità, eleganti conferme sperimentali fatte su anelli, cilindri cavi (cfr. fig. 16, 17) assoggettati a distorsioni elementari (rotazioni, traslazioni per solo scostamento rispettivamente per solo scorrimento delle facce del taglio), realizzando un complesso

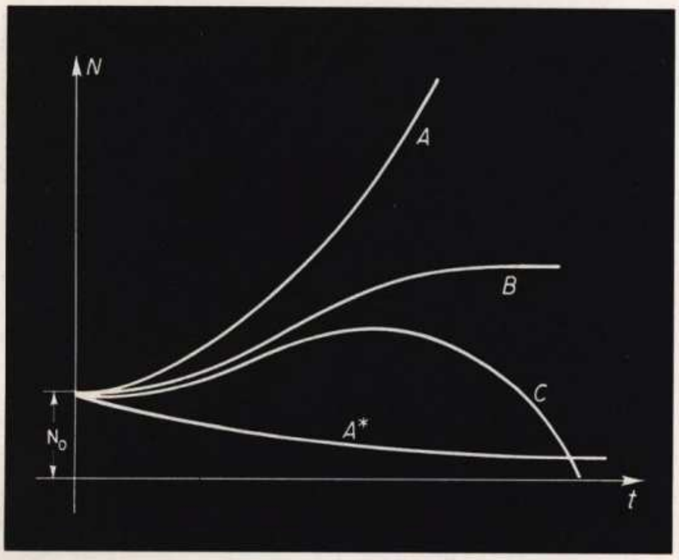


Realizzazione secondo Albenga di una generale distorsione di Volterra in un arco elastico con tre distorsioni in sezioni obbligate (fig. 18).

di deduzioni limpidissime che costituiscono uno dei più bei capitoli dell'elasticità.
Distorsioni di Volterra si praticano anche in tecnica, ad esempio quando si disarma un'arco con le presse idrauliche in chiave, cioè si allontanano relativamente le facce dei due semiarchi gettati e maturati sulla centina, sino a che si provoca la spinta necessaria per realizzare la coincidenza dell'asse con la linea delle pressioni. Bloccate le presse si fa poi il sigillo che è equivalente alla interposizione, tra le facce del taglio, di adeguati spessori. Tale distorsione si pratica anche a titolo curativo. Ad esempio, se un arco od una fondazione, poniamo per semplicità si sposta orizzontalmente, allora l'arco subisce una vera e propria distorsione del tipo considerato (l'arco prolungato nelle fondazioni assieme con il terreno realizza l'anello).
Ove si manifestino disturbi si può annullarla senz'altro con una distorsione opposta tagliando l'arco in chiave ed inserendo in pari tempo le presse idrauliche per farle agire sino al ripristino della spinta iniziale.
Ma si può anche eliminare una qualunque accidentale distorsione di Volterra siccome può essere provocata in un arco incastrato da un qualunque cedimento delle fondazioni. Si procede, fissando l'attenzione su tre sezioni (cfr. fig. 18) dell'arco che sieno facilmente operabili, introducendo in ciascuna di esse un cuneo di apertura conveniente. Questa si può valutare con una costruzione grafica informata alla nozione di ellisse terminale di elasticità proposta dal nostro Albenga. Probabilmente egli non pensò all'introduzione effettiva di questi cunei, che avrà considerato una ben violenta cuneoterapia. Ci pensò invece l'ing. Miozzi, dinamico capo dell'ufficio tecnico comunale della Serenissima. Da buon anconetano, là dove poteva non potè non far sue le distorsioni del suo grande concittadino. E non si arrestò al ponte Druso a Bolzano; progettista anche del bel ponte degli Scalzi a Venezia, non mancò di sottoporlo, a titolo preventivo, e senza inconvenienti, a interventi distorcenti con tecnica sempre più adeguata.
Questi interventi hanno una notevole importanza in quanto iniziarono anche da noi quelle costrizioni od autotensioni artificiali nelle strutture, inaugurate in Francia dal Sejourné e dal Freyssinet per il ponte di Villeneuve sur Lot sin dal 1910 e costituiscono oggi, sotto i più vari aspetti, promossi dal Freyssinet soprattutto, la maniere, anzi la manie di quanti costruiscono con quella pietra filosofale, non sempre dura, che è il calcestruzzo di cemento.
Tutti sanno infatti che la pratica offre innumerevoli esempi in cui, pur mancando le forze esterne non è affatto nulla la deformazione e quindi lo stato di tensione interna del corpo. Basti ricordare le tensioni provocate da difetti di fusione, a non uniforme raffreddamento delle colate, ai getti sconsiderati di liquidi calcestruzzi in particolare, alle tensioni dovute alle introduzioni forzate di membrature, alla pretensione delle strutture con cavi, catene, fili armonici; alla produzione di deformazioni plastiche, cioè deformazioni indimenticabili, che non svaniscono con la causa che le produce e perciò producono stati di coazione residui come è facile intuire.
Tutti questi stati si sanno più o meno calcolare con metodi abbastanza a punto che risalgono a Lord Kelvin e, scendendo per i rami sono stati via via adottati alle circostanze specifiche della tecnica.
Le autotensioni non sono una attualità; ogni cerchiatura a caldo, ogni ritubazione in artiglieria, ogni catena pre-tesa costituiscono più o meno l'esempio remoto degli esempi, taluno assai vistoso, della moderna tecnica del precompresso. La quale si differenzia solamente per l'altissima tensione specifica nelle sue cerchiature, nei suoi fili armonici, nelle sue funi.
In questa sovratensione, anche 5 volte superiore a quella del passato (si arriva sui 100-120 kg/mm² di tensione d'esercizio) sta però il segreto del suo successo sulla lenta dispersione viscosa a cui nel campo dei calcestruzzi sono soggette tutte le distorsioni. Tali dispersioni possono esser guardate con utilità da un punto di vista ereditario proprio secondo i metodi di Volterra ed esser seguite nella loro dissipazione nel tempo.
Tali tipi di costrizioni o distorsioni non sono, come talvolta si afferma, affatto generalizzazioni di quelle del Volterra che, anzi, deliberatamente le ha trascurate per considerare solo quelle che rispettano la regolarità perchè con riflesso a tale precisazione ne seguisse quel modello di capitolo a cui abbiamo alluso.
Un esempio singolarmente espressivo che chiarisce la posizione delle distorsioni di Volterra, si ritrova in idrodinamica. Là, se un recipiente a pareti rigide contiene un liquido incompressibile in cui non ci sono vortici, il liquido deve stare in quiete, se il volume è semplicemente connesso, è cioè, una sfera, un cubo, un parallelepipedo, che sono tutti equivalenti. Il movimento è invece possibile solo e soltanto se la connessione è multipla, cioè se alla sfera si collega uno o più tubi-manici, sicchè lo spazio ha connessione lineare multipla. Il movimento irrotazionale corrisponde qui alla deformazione regolare.

Le applicazioni matematiche alle scienze biologiche e sociali.

Un eminente biologo dell'università di Padova domandò al Volterra se era mai possibile trovare una via matematica per prevedere le variazioni dei numeri di individui che compongono le associazioni di più specie conviventi. La domanda non poteva essere meglio indirizzata. Sin dal 1901 il Volterra aveva volto lo sguardo sulle applicazioni delle matematiche alle scienze biologiche e sociali, ma non vi si era particolarmente soffermato poichè quelle riguardavano sostanzialmente i metodi della statistica, sia pure brillantemente applicati, ma non si dava luogo a questioni tali da interessare la biologia ed in pari tempo anche la matematica.
Qui invece la questione gli si presentò subito diversa poichè gli si profilò innanzi, sicuro, un interessante sistema di equazioni differenziali di cui già vedeva l'evoluzione in un sistema di equazioni integro-differenziali; non vi era dubbio infatti che anche la questione ereditaria si sarebbe o prima o poi presentata.
Poichè quel biologo, il prof. d'Ancona, era suo genero, apparve anche assicurato il controllo delle deduzioni teoriche con la realtà osservata nelle specie più disparate, dai pesci nelle peschiere e nei mercati di pesce (osservazioni indirette) e giù, sino alla contabilità degli infusori, dei microbi, sul vetrino del microscopio.



Curve di accrescimento di una specie; A ed A* secondo Malthus, B secondo Pearl (nutrimento limitato), C secondo Volterra (intossicamento) (fig. 19).

Così iniziò i suoi studi, felicissimi, che furono i suoi prediletti, particolarmente negli ultimi anni della sua vita.
Cominciò a considerare come continue le variazioni del numero degli elementi (individui) delle singole associazioni e ad ammettere che le variazioni naturali, cioè non perturbate da forze esterne, fossero proporzionali al numero stesso degli individui componenti l'associazione.
Prese in esame il caso più semplice di un'associazione di due specie conviventi che si contendono il nutrimento.
Chiamò con N_1 ed N_2 i numeri degli individui componenti, con ν_1, ν_2; μ_1, μ_2 i coefficienti di natalità e mortalità quando il nutrimento è tanto abbondante da soddisfare l'avidità di tutti.
I coefficienti di accrescimento ε_1, ε_2 restano allora espressi dalle relazioni

$$\varepsilon_1 = \nu_1 - \mu_1 , \quad \varepsilon_2 = \nu_2 - \mu_2$$

e le equazioni per le variazioni di N_1 ed N_2 con il tempo t, che dànno cioè la derivata di N_1, N_2 o, parlando alla buona, la loro velocità (di variazione) sono

$$[25] \qquad \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 , \qquad \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2 N_2 .$$

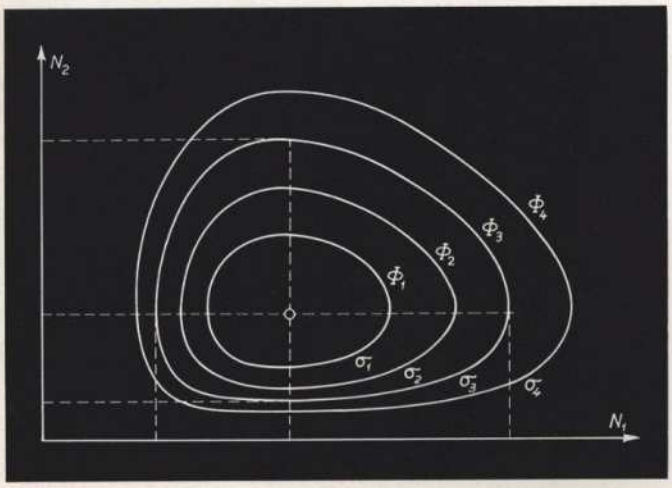
Da qui integrando, se ε_1 ed ε_2 sono positivi, N_1 ed N_2 crescono con legge esponenziale, cioè tendono all'infinito (curva A della fig. 15). Quali ne siano le conseguenze non occorre certo rilevare, primissima ed inesorabile la diminuzione della quantità di nutrimento, poniamo $h_1 N_1$ in virtù di N_1, $h_2 N_2$ in virtù di N_2, quindi una diminuzione totale $h_1 N_1 + h_2 N_2$. Ciò influisce sul coefficiente di accrescimento delle due specie in misura diversa poichè diversi sono i bisogni.
Introdotti due nuovi coefficienti γ_1, γ_2, ε_1 ed ε_2 diverranno $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 - \gamma_1 (h_1 N_1 + h_2 N_2)$, $\varepsilon_2^* = \varepsilon_2 - \gamma_2 (h_1 N_1 + h_2 N_2)$ e le equazioni [25] si completano semplicemente sostituendo ε_1 con ε_1^*, ε_2 con ε_2^*, tutte le costanti essendo, naturalmente, positive.
Lo studio di queste equazioni differenziali concede di far previsioni sulla sorte delle due specie. Ad esempio, se in particolare $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 = 0$, N_1 ed N_2 tendono, dopo ovvie sofferenze, ad un valore costante che assicurerà la vita a tutti.
In caso diverso, ammesso che $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1$ sia > 0, N_2 tende a zero ed N_1 ad un valore costante; una specie sparisce e l'altra vive di stretta misura. Se fosse $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 < 0$ si scambiano le sorti.
A favorire questa tendenza assintotica sorge l'aggressività di una specie in raffronto all'altra. Quella destinata a morire potrebbe finire con il nutrirsi dell'altra e, poniamo, solo dell'altra. Perciò per primo caso il Volterra considerò quello in cui N_1 ha da mangiare quanto occorre ed N_2 si nutre invece di solo N_1, ciò significa che N_2 si esaurirebbe per fame se N_1 non ci fosse e che il coefficiente di accrescimento è $-\varepsilon_2$ (con $\varepsilon_2 > 0$). I coefficienti di accrescimento nel regime che si considera (N_2 mangia N_1) divengono

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 , \quad \varepsilon_2^* = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$$

e le equazioni per N_1 ed N_2 funzioni incognite di t si scrivono sostituendo nelle [25] tali espressioni di ε_1^*, ε_2^* ad ε_1, ε_2, dunque

$$[26] \qquad \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1^* N_1 , \qquad \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2^* N_2 .$$

Studiandole con singolare perizia il Volterra è giunto a dare il comportamento in grande di N_1 ed N_2.



Librazioni stabili in grande di due specie attorno alla soluzione stazionaria (N_2 mangia N_1 che ha, per ipotesi, nutrimento illimitato) **(fig. 20)**

Cominciando dal caso elementare in cui $N_2 = 0$, si ha cioè una sola specie, le [26] porgono, essendo N_0 il numero iniziale di individui,

[27] $$N = N_0 \frac{\varepsilon\, e^{\varepsilon t}}{\varepsilon + N_0 \gamma\, (e^{\varepsilon t} - 1)}\,.$$

È la legge dell'accrescimento secondo Pearl, quando l'aumento della popolazione rende difficile la vita (nutrimento limitato). Si ha la tendenza asintotica ad un numero N^* (curva B della fig. 19)

$$N^* = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

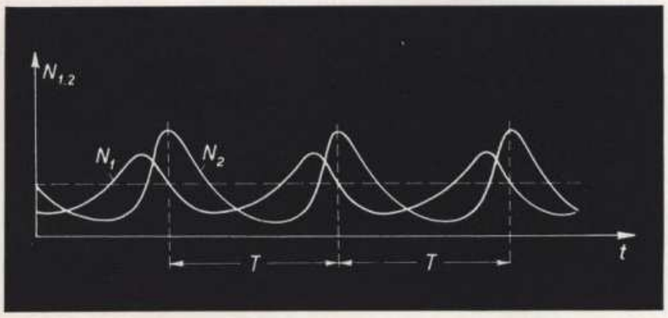
indipendente dal numero iniziale di individui. Ove l'aumento di N provochi l'intossicamento per metabolismo o psicologico, N tende a zero in un tempo finito come si può verificare, opportunamente perfezionando le [26] con l'aggiunta di un termine ereditario (curva C). Per $\gamma = 0$ (nutrimento illimitato, convivenza pacifica) si ripete il caso delle [25],

$$N = N_0\, e^{\varepsilon t}\,;$$

è la famosa legge di Malthus; per $\varepsilon \gtrless 0$ si ha l'accrescimento o l'esaurimento esponenziale (curva A). Per il caso delle due specie conviventi interessa la soluzione statica (numero costante degli individui,

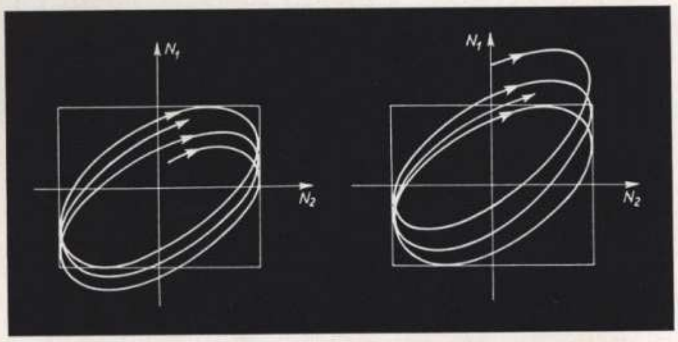
$$N_1 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\,, \quad N_2 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$$

che si ha quando inizialmente N_1, ed N_2 coincidono proprio con detti valori. In caso diverso N_1 ed N_2 fanno delle librazioni stabili, come si vedrà, in grande, attorno a questa soluzione.
Ciò appare ben chiaro in figura 20 dove, eliminando il tempo, è riportato N_1 in funzione di N_2. Appare, con riguardo alle curve chiuse attorno ad O (ognuna, orbita del punto $P = P(N_1 N_2)$ purchè in un certo istante N_1 ed N_2 abbiano i valori che ad un suo punto corrispondono), che N_1 ed N_2 oscillano tra un estremo superiore ed uno inferiore. Tale oscillazione risulta in un grafico di N_1 ed N_2 in funzione di t (cfr. fig. 21).
Volterra ha anche determinato il periodo T della librazione, che chiamò periodo della fluttuazione, ed ha stabilito il teorema fondamentale che la media del numero di N_1 rispettivamente N_2 su qualunque ciclo, cioè $\bar{N} = \frac{1}{T}\int_0^T N\,dt$ è invariante, cioè è sempre la stessa. Quindi la media di N_1 ed N_2 è indipendente dai dati iniziali. Si tratta di un invariante notevole delle



Fluttuazioni corrispondenti alle librazioni stabili di due specie (N_2 mangia N_1 che ha, per ipotesi, nutrimento illimitato) **(fig. 21).**

specie in generale ch'era stato già intuito da C. Darwin. Non solo, ma ha considerato anche il caso in cui per cause esterne N_1 ed N_2 fossero distrutti uniformemente e proporzionalmente al loro numero (trattandosi di due specie di pesci, tale distruzione corrisponderebbe alla pesca, a parità di furbizia rispetto al pescatore).
Avviene in tal caso che se una specie mangia l'altra, si avvantaggia sempre la specie mangiata. Il che corrisponde ad una saggezza superiore per cui gli aggressori, giacchè le forze esterne che distruggono tutti più o meno uniformemente ci sono sempre, non hanno la meglio, sia pure alla lunga. Si tratta in questo caso, di una perturbazione della legge di invarianza delle medie. Queste perturbazioni sono molto conformi con le leggi di fluttuazione e conservazione tratte dalle variazioni dei patrimoni ittici nelle peschiere dell'Alto Adriatico. Si noti che la legge della perturbazione delle medie fu anch'essa intuita già da C. Darwin.
Naturalmente tutto ciò non riguarda che i primi passi della teoria. Il Volterra non si arrestò innanzi alla pluralità di specie conviventi e neanche innanzi al caso delle azioni ereditarie dell'ambiente, del nutrimento, dell'intossicamento chimico (prodotti del metabolismo) e psicologico nelle specie superiori. Pervenne ad equazioni integro-differenziali del suo tipo prediletto e di queste studiò le soluzioni in grande, cioè qualitativamente. La periodicità vien naturalmente meno come in tanti fenomeni con isteresi, ma permane invece la legge di fluttuazione nella più lata espressione di oscillazione attorno ai valori stazionari con passaggio attraverso infiniti massimi ed infiniti minimi e si ritrovano anche i casi di assestamento (cfr. fig. 22) ben noti ai tecnici, in particolare la tendenza asintotica ad un ciclo periodico, e ciò si può provare applicando i suoi ultimi teoremi energetici sulla degradazione ereditaria. La legge di conservazione delle medie si riferisce a medie asintotiche, cioè per $T \rightarrow \infty$ e ciò era da attendersi non essendovi più un periodo. La legge della perturbazione delle medie permane, riferita non al periodo — che non esiste — ma ad un tempo sufficientemente grande.



Fluttuazioni di due specie, nelle condizioni della fig. 20, sulle quali grava però l'ereditarietà. È possibile una tendenza asintotica alla periodicità come nei cicli di isteresi dei materiali (fig. 22).

Che si possa da qui istituire una teoria matematica della lotta per la vita non vi è dubbio, come non vi è dubbio sulla possibilità d introdurre in questi studi i principi teologici e finalistici (principio della minima azione, principio dell'Hamilton, ecc.) informatori dell'eterno alternarsi nel mondo vivente, alternarsi che è in ogni cosa dell'universo, la luce e le tenebre, il bene ed il male, il caldo ed il freddo. Tali principii si reggono, come si può dimostrare, anche quando sovrasti, ma sia lenta rispetto ai periodi d'alternamento, come si suol dire in meccanica sia adiabaticamente agente, la degradazione energetica delle azioni ereditarie, causa dominante della tendenza ineluttabile alla fine. A meno che, s'intende, la creazione non sia sempre, o quanto meno saltuariamente in atto, come vorrebbero vedute molto recenti sulla materia. Ma in tal caso la fine può non esser molto preoccupante per la sua attualità.
Questi cenni, pur tanto sommari, rendono evidente la straordinaria visione di insieme che il Volterra aveva della natura del mondo matematico, fisico e vivente; dei metodi che servono a scoprirlo.
Con una visione della fisica matematica come dottrina che nella fisica ha solo lo spunto e resta invariante comunque la fisica vada evolvendosi, rimase egli apparentemente agnostico innanzi alla crisi che da un lato aprì la teoria della relatività, dall'altro, la teoria dell'atomo di Bohr con il compromesso dei postulati di Sommerfeld. E tale atteggiamento non cambiò pur con il grandioso progredire e consolidarsi delle nuove teorie.
Questo agnosticismo era un segno di coerenza, in lui innata, con un modo di pensare che aveva seguito tutta la vita: di fedeltà all'opera immortale, che l'aveva sempre ispirato, dei grandi fisici matematici della prima metà dell'Ottocento. Non solo, era anche una tendenza a mantenere l'equilibrio tra le applicazioni classiche dell'analisi alla geometria, alla meccanica, alla fisica, alle lucenti teorie, essenzialmente formali, veri ritorni alla scienza ellenica, al di là di ogni più roseo sogno dei pitagorici, costituenti, per usare l'espressione di un grande matematico francese, la mèta-matematica della scuola moderna di fisica.

(*Seguirà:* **Volterra e le istituzioni scientifiche italiane**).