

## Carico di punta pulsante e nozione di flessopressione dinamica<sup>(\*)</sup>.

Un capitolo di scienza delle costruzioni, posto alle soglie della dinamica, riguarda gli equilibri instabili dei sistemi elastici. Caratterizzando le condizioni che li realizzano dà ai costruttori il modo d'evitarli; vere insidie nei loro ardimenti.

L'esempio tipico e più semplice, da cui Eulero per primo ha tratto la nozione di *instabilità* nell'ambito dei problemi elastici, è offerto da un'asta, vincolata agli estremi, soggetta ad uno sforzo assiale, perfettamente centrato, cosiddetto *di punta*. Per certi valori di quello sforzo, chiamati *critici*, viene essa a trovarsi (e qui si ragiona nel campo elastico ordinario) in *equilibrio instabile* nel senso, che una arbitrariamente piccola perturbazione produce, *secondo lo spirito classico della stabilità lagrangiana* (saggiata al vaglio delle *piccole oscillazioni*) spostamenti indefinitamente crescenti.

Questi valori costituiscono uno *spettro discreto*, dato, ove si tratti di appoggi semplici, annullanti lo spostamento ed il momento flettente, dalla relazione

$$(1) \quad P_{\rho} = \rho^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (\rho = 1, 2, \dots);$$

in cui, con simboli notissimi,  $E$  è il modulo d'elasticità,  $J$  il costante momento d'inerzia della sezione resistente,  $l$  la lunghezza misurata tra gli appoggi.

Interesse pratico ha il primo valore soltanto; superarlo, rimanendo nell'ambito della teoria di cui si tratta, è possibile solo a patto di accorgimenti non facilmente realizzabili, quando naturalmente per lo sforzo specifico massimo il materiale resta nel dominio elastico.

Si osservi, tanto per iniziarci ad immagini di cui faremo uso, che, se su di una retta su cui si conta un'ascissa  $P$ , si portano i valori  $P_{\rho}$  dati dalla (1), i punti che così si ottengono rappresentano punti che potremmo chiamare *di instabilità*, i loro intorni, *zone di pericolo*. L'intervallo  $0 \leq P < P_1$  è la zona della stabilità pratica, della *sicurezza* da zero sino ad una certa distanza da  $P_1$ ; il punto  $P_1$  è il primo precipizio, oltre  $P_1$  sino a  $P_2$  la stabilità è relativa a tipi particolari di perturbazioni, tipi sempre più limitati come si prosegue oltre  $P_2, P_3, \dots$ ; nel senso che tra poco chiariremo.

Non staremo qui né a precisare quanto la teoria euleriana aderisca alla realtà, il significato che va attribuito alla stabilità lagrangiana o di prima appros-

(\*) Da « Ricerche di Ingegneria », Anno I, n. 4, 1933-XI.

simazione, né a ricordare l'intervento talvolta benefico (che non basta però, in molti casi, al salvamento della stabilità intesa in un senso più lato) dei termini di secondo ordine negli spostamenti da cui essa prescinde. Tale non è lo scopo che qui si persegue. Si tratta invece di studiare quanto avviene, — ferme tenendo le ipotesi che presiedono alla teoria in questione — quando il carico  $P$  varia periodicamente col tempo.

Si osserva subito al primo esame che non basterà più una coordinata sola, più precisamente uno spettro semplicemente discreto ad un parametro ad indicare le condizioni di stabilità od instabilità come nel caso ora trattato. A seconda del particolare tipo di funzione secondo cui varia nel tempo lo sforzo assiale ne occorreranno due, più od infinite addirittura, e lo spettro potrà eventualmente diventare *continuo a tratti*.

Con ciò si vuol dire che nel nuovo campo che si è condotti a considerare, in luogo di punti *d'instabilità* si hanno *lacune d'instabilità o zone critiche*. Se il punto od i punti che chiameremo *indici di stabilità*, di cui le coordinate nello spazio in questione definiscono i dati determinanti i caratteri qualitativi della sollecitazione, (nel caso di Eulero, l'intensità  $P$  dello sforzo assiale), cadono in queste zone, il sistema sarà in pericolo, cioè, come vedremo, in equilibrio instabile, donde l'attributo dato alle sopraindicate lacune.

Se ad esempio, tanto per fissare l'attenzione, lo sforzo assiale  $P$  varia pulsando con periodo  $T$  come nel diagramma IV, assumendo per metà periodo un valore costante  $P'$  nell'altra uno, pure costante,  $P''$ , (nella figura considerato negativo) le lacune, con riferimento a due coordinate cartesiane ortogonali  $x_1$ ,  $x_2$ , che subito definiremo in funzione dei dati del sistema e della sollecitazione, prendono l'aspetto delle aree tratteggiate della fig. 1.

Per questo sistema va ricercata *separatamente* la stabilità di ognuna delle vibrazioni proprie o fondamentali secondo cui esso può, com'è noto, vibrare. Con riferimento alla  $\rho^{ima}$  di queste vibrazioni, il *punto indice* ha le coordinate  $x_1 = x_1^{(0)}$ ,  $x_2 = x_2^{(0)}$  così definite:

$$x_1^{(0)} = \frac{T\sigma_0}{2} \sqrt{1 - \frac{P'}{P_0}} \quad , \quad x_2^{(0)} = \frac{T\sigma_0}{2} \sqrt{1 - \frac{P''}{P_0}} \quad ,$$

con l'avvertenza di prendere con segno negativo gli sforzi di tensione (dunque nel caso del diagramma IV,  $P''$  è negativo).

In queste relazioni  $T$  è il periodo di pulsazione,  $\sigma_0$ , a meno del fattore  $\frac{1}{2\pi}$ , la  $\rho^{ima}$  frequenza fondamentale (cfr. § 2)  $P_0$  il  $\rho^{imo}$  carico critico dato dalla (1).

Si conclude che la stabilità del sistema così sollecitato richiede sieno soddisfatte, almeno in linea teorica, infinite relazioni, una per ognuna delle vibrazioni fondamentali o spontanee dell'asta, nelle quali si può scindere il suo moto provocato da una arbitraria perturbazione od eccitazione che dir si voglia. Rileviamo però sin d'ora che, per la pratica, avrà interesse preoccuparsi della stabilità della prima vibrazione fondamentale, porre quindi  $\rho = 1$  e coi valori di  $x_1^{(1)}$  ed  $x_2^{(1)}$  corrispondenti alle determinazioni di  $P'$ ,  $P''$ ,  $\sigma_1$  e  $T$ , riportare il punto sul diagramma: se questo cade in una zona tratteggiata si avrà instabilità.

Quanto ai *punti indici* della stabilità per le vibrazioni superiori si vedrà ch'essi hanno particolare tendenza a cadere nelle plaghe meno invase da lacune instabili. A buon diritto possiamo pertanto affermare che la fig. 1, associata alle determinazioni sopraccennate per  $x_1$  ed  $x_2$  costituisce, per sforzi pulsanti secondo il Diagramma IV, la generalizzata della formola di Eulero.

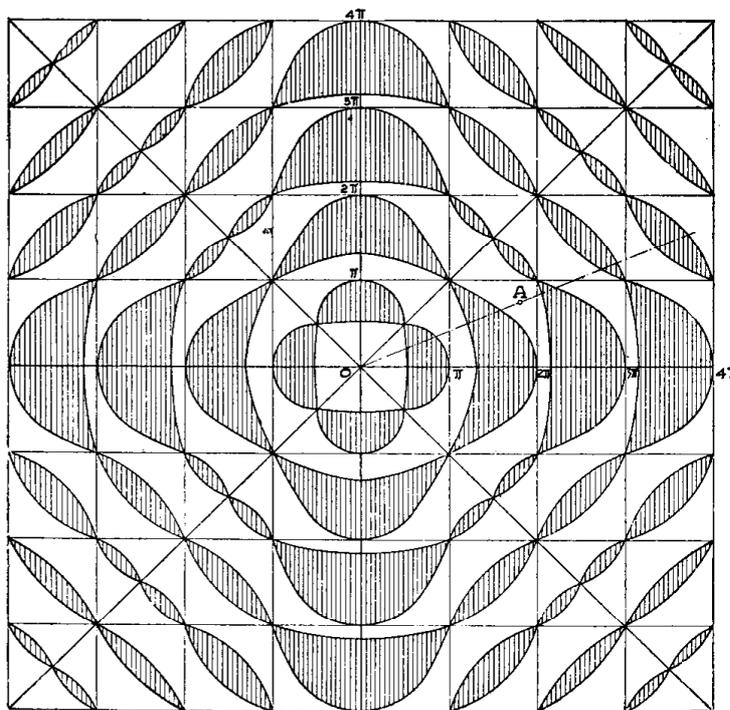


Fig. 1.

Salvo ad essere più precisi nei prossimi paragrafi va posto in rilievo che, ove si tratti di diagrammi più complicati per la variazione dello sforzo (diagrammi I, II, III) bisogna rinunciare alla rappresentazione grafica. Si danno però istessamente, sotto forma di disuguaglianze (cfr. § 4 e 5) le condizioni analitiche per la verifica qualitativa della stabilità, mentre per variazioni con leggi quali si vogliono si dà cenno di un criterio di stabilità grafico-analitico, sostanzialmente identico, che va bene in ogni caso.

2. PROBLEMA STATICO. L'ASTA SOLLECITATA DA UNO SFORZO ASSIALE PERFETTAMENTE CENTRATO. — Fissiamo l'attenzione su un'asta semplicemente appoggiata agli estremi. Indichi  $w = w(x)$  lo spostamento trasversale all'asse,  $p = p(x)$  la distribuzione di carico ad esso normale.

L'equazione che caratterizza  $w$  è data, col significato prima attribuito ad E, J, dalla relazione

$$(2) \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x).$$

Se agisce uno sforzo assiale  $P$  ( $P > 0$  è di compressione) si ha, in sua vece,

$$(2 a) \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = p(x).$$

Con questi due soli richiami possiamo ormai abordar la questione che abbiamo in vista.

Cominciamo a considerare il caso dinamico.

Allora la  $w$  diviene funzione oltre che di  $x$  anche del tempo  $t$ . L'equazione del moto è offerta ancora dalla (2 a) purché a  $p(x)$ , che ora vogliamo supporre funzione del tempo oltre che della  $x$ , si sostituisca la forza perduta

$$p(x, t) - \mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$\mu(x)$  indicando la densità lineare, ed ai simboli di derivazione totale si sostituiscono quelli di derivazione parziale.

Ne scende così l'equazione

$$(2 b) \quad EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t),$$

che va integrata con rispetto alle condizioni ai limiti spettanti, come vogliamo, al libero appoggio, precisamente

$$(3) \quad w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

Tale integrazione riesce, quando si supponga  $P$  e  $\mu$  costante, pressoché immediata. Si introduca la posizione classica

$$w(x, t) = \sum_1^{\infty} \sin \frac{\rho\pi}{l} x \cdot \varphi_{\rho}(t),$$

soddisfacente in modo manifesto alle imposte condizioni limiti. Essa dà per gli incogniti coefficienti  $\varphi_{\rho}(t)$  dello sviluppo in serie di Fourier assunto per la  $w$ , l'equazione

$$(4) \quad \frac{d^2 \varphi_{\rho}}{dt^2} + \sigma_{\rho}^2 \left(1 - \frac{P}{P_{\rho}}\right) \varphi_{\rho} = p_{\rho}(t),$$

essendosi posto, con le notazioni già in parte usate,

$$(4 a) \quad \sigma_{\rho}^2 = \frac{EJ}{\mu} \left(\frac{\rho\pi}{l}\right)^4, \quad P_{\rho} = \rho^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

$$(4 b) \quad p_{\rho}(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \int_0^l p(x, t) \sin \frac{\rho\pi}{l} x.$$

Ricordato che  $\frac{\sigma_{\rho}}{2\pi}$  determina la frequenza  $\rho^{ima}$  dell'asta quando non c'è sforzo assiale, scende di conseguenza la virtù che questo ha di *abbassarla*, anzi di annullarla appena raggiunge il valore  $P_{\rho}$ .

Frequenze nulle vogliono dire periodi di vibrazioni infiniti, dunque *l'instabilità*; il sistema sollecitato a vibrare con periodi infiniti abbandona la sua posizione naturale e non vi ritorna più.

Si ponga per conferma, a titolo d'esempio, nella (4),  $p_q = \text{cost.} = \bar{p}_q$ . Allora si avrebbe, ove inizialmente fosse  $\varphi_q = 0$  e  $\dot{\varphi}_q = 0$ , la soluzione

$$\varphi_q = \frac{\bar{p}_q}{\sigma_q^2 \left(1 - \frac{P}{P_q}\right)} \left(1 - \cos \sigma_q \sqrt{1 - \frac{P}{P_q}} t\right),$$

e questa, col crescere indefinito del tempo <sup>(1)</sup> diviene manifestamente infinita appena  $P = P_q$ .

Se  $\rho = 1$ , si vede che per  $P < P_1$ , poiché  $P_1 < P_2 < P_3 < \dots$ ; la stabilità per ogni vibrazione è automaticamente assicurata.

Ciò posto, consideriamo il sistema sollecitato da uno sforzo  $P$  compreso tra  $P_1$  e  $P_2$  così che sia  $P_1 < P < P_2$ . Allora la stabilità avrà luogo unicamente per quelle sollecitazioni per cui  $p_1(t)$  definito dalla (4 b) è nullo così come la  $\varphi_1(0)$  e  $[\dot{\varphi}_1(t)]_{t=0}$ . Cioè è, con locuzione consueta ed espressiva, *ortogonale* alla vibrazione di cui si tratta, la *rima* in questo caso. Se  $P$  è compreso tra  $P_2$  e  $P_3$  dovrà essere la perturbazione  $p$  tale che sia  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$  perché non si abbia instabilità. Ecco il senso in cui va intesa *la riduzione* della stabilità oltre  $P_1$ , almeno nell'inpostazione euleriana del problema, di *stabilità condizionata*, sempre atteso che non sieno superati i limiti di elasticità, a *perturbazioni ortogonali* alla 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> ecc. vibrazione fondamentale con la condizione che si annullino le  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ecc. ed anche le  $\varphi_1(0)$ ,  $\dot{\varphi}_1(0)$ ;  $\varphi_2(0)$ ,  $\dot{\varphi}_2(0)$ ; ecc..

3. SFORZO ASSIALE PULSANTE. — Supponiamo ora sia  $P$  una funzione di  $t$ ,

$$P = P(t),$$

periodica di periodo  $T$ , tale dunque che

$$P(t + T) = P(t).$$

(1) Naturalmente a questa conclusione si perviene anche in modo più diretto ponendo nella (4)  $P = P_q$ . Essa diviene

$$\frac{d^2 \varphi_q}{dt^2} = \bar{p}_q(t).$$

L'integrale  $\varphi_q(t)$  che per  $t = 0$  si annulla assieme a  $\dot{\varphi}_q$  tende in generale all' $\infty$ . Per  $\bar{p}_q(t) = \bar{p}_q$  si ha

$$\varphi_q = \frac{1}{2} \bar{p}_q t^2$$

che cresce indefinitamente con  $\pm t$ .

La (4) diviene allora, ritenendo naturalmente separate le vibrazioni trasversali da quelle longitudinali che la  $P(t)$  potrebbe generare,

$$(4 a) \quad \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2} + \sigma_e^2 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_e} \right) \varphi_e = p_e(t).$$

Per lo studio di questa equazione lineare, del second'ordine, a coefficienti variabili, è d'uopo considerare in primo luogo l'equazione omogenea, che si ottiene ponendo  $p_e = 0$ . Da questa, così come prima e come sempre, si avranno immediatamente, fatte le debite specifiche su  $P(t)$ , tutti i criteri di stabilità.

Cominciamo con l'osservare, tanto per inquadrare in un tipo noto la (4 a), che, essendo  $P(t + T) = P(t)$ , sarà pure periodica l'espressione che è a coefficiente di  $\varphi_e$ , precisamente

$$\omega_e = \sigma_e^2 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_e} \right).$$

Sicché si avrà dunque

$$\omega_e(t + T) = \omega_e(t).$$

Ciò posto, introduciamo la nuova variabile

$$\tau = t \frac{2\pi}{T}.$$

La (4 a), per  $p_e = 0$ , diviene

$$(4 b) \quad \frac{d^2 \varphi_e}{d\tau^2} + T^2 q_e(\tau) \varphi_e = 0 \quad \text{con} \quad q_e(\tau) = \frac{\sigma_e^2 \left( 1 - \frac{P}{P_e} \right)}{4\pi^2}$$

e

$$q_e(\tau + 2\pi) = q_e(\tau).$$

Ridotta a questo aspetto di equazione differenziale lineare, del 2° ordine, a coefficienti periodici, possiamo precisare subito, in base alla teoria generale degli *esponenti caratteristici*, i criteri di stabilità.

4. CRITERI DI STABILITÀ SECONDO LIAPOUNOFF PER L'EQUAZIONE  $d^2\varphi/d\tau^2 + T^2 q(\tau)\varphi = 0$  quando  $q(\tau + 2\pi) = q(\tau)$ . — Abbandonando la scrittura degli indici che intervengono nella (4 b) fissiamo dunque l'attenzione sulla equazione

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + T^2 q(\tau) \varphi = 0$$

con  $q(\tau)$  periodica di periodo  $2\pi$ .

La teoria generale <sup>(2)</sup> per questa equazione lineare a coefficienti periodici insegna che, ove sieno noti due integrali indipendenti  $\Phi_1(\tau)$  e  $\Phi_2(\tau)$ , tali che,

(2) G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Cap. II, pp. 97-134, Zanichelli, Bologna 1940 e fasc. I<sub>3</sub> degli *Appunti di Meccanica* cit. nella *Prefazione*.

inizialmente, cioè per  $t = 0$ , sia

$$\Phi_1(0) = 1 \quad , \quad \Phi_2(0) = 0 \quad ,$$

$$\left. \frac{d\Phi_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{d\Phi_2}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad ;$$

la stabilità è legata alla disuguaglianza

$$(6) \quad \mathfrak{J} = \left| \frac{\Phi_1(2\pi) + \dot{\Phi}_2(2\pi)}{2} \right| < 1 .$$

Ora, evidentemente, tanto  $\Phi_1$  quanto  $\Phi_2$  saranno funzioni di  $T$ . Talché sarà anche  $\mathfrak{J}$  una funzione di  $T$ , oppure, se si vuole, introducendo la frequenza  $\lambda = 1/T$ , funzione di  $\lambda$ .

Portiamo come in fig. 2,  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\lambda)$  in relazione, è superfluo dirlo, ad una ben determinata  $q(\tau)$ , su due assi ortogonali e disegniamo le due rette parallele  $\mathfrak{J} = \pm 1$  (cfr. fig. 2).

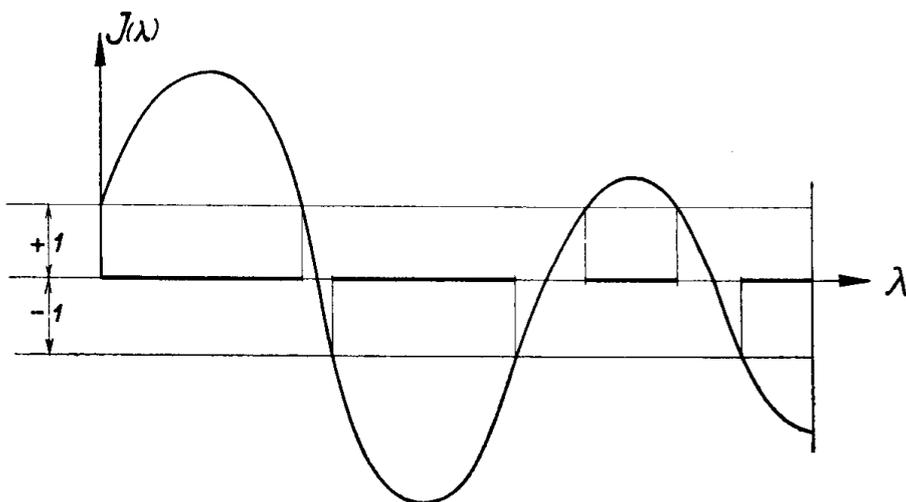


Fig. 2.

Sussiste allora il teorema fondamentale: *Per  $\lambda$  compreso negli intervalli ove la  $\mathfrak{J}(\lambda)$  emerge dalla quota 1 o si sommerge sotto quota  $-1$ , si ha instabilità, stabilità negli altri.*

Si osservi che nell'espressione di  $\mathfrak{J}(\lambda)$  potrebbe intervenire un altro parametro contenuto eventualmente nella  $q(\tau)$ , ad esempio, per una  $q$  discontinua a tratti del tipo indicato nel diagramma IV, il rapporto tra le intensità  $P'$  e  $P''$ . Indichiamo codesto parametro con  $\nu$ . Allora, nel piano  $\lambda, \nu$  o su quella superficie che più piace assumere come sostegno delle coordinate  $\lambda, \nu$ , la disuguaglianza

$$-1 < \mathfrak{J}(\lambda, \nu) < +1$$

determinerà zone di stabilità ed instabilità nel senso che, se un punto di coordinate  $\lambda = \bar{\lambda}$ ,  $\nu = \bar{\nu}$ , cade in una o l'altra di esse il moto che si ottiene perturbando il sistema sarà stabile od instabile.

Si tratta, evidentemente, di una estensione del criterio di prima. Invero, adottando ad esempio il piano, le curve

$$\mathfrak{J}(\lambda, \nu) = +1, \quad \mathfrak{J}(\lambda, \nu) = -1,$$

sono le linee di livello della

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\lambda, \nu)$$

limitanti le zone dove questa emerge o si sommerge sopra quota  $+1$  e sotto quota  $-1$ , e definienti quindi le lacune di instabilità e stabilità.

Inutile ripetere che, in luogo di  $\lambda$  e  $\nu$  si potranno assumere due altre variabili biunivoche quali si vogliono  $x_1$  e  $x_2$  e riportare queste in quel diagramma che più comoda.

5. INTEGRAZIONE DELLA (4 b) PER  $q = q(\tau)$  COSTANTE A TRATTI SECONDO IL METODO DI LIPSCHITZ-MEISSNER (3). — Quanto alla costruzione degli integrali  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  si presentano in generale serie difficoltà; in ogni modo, almeno concettualmente superate dalle famose ricerche di Gildén, Lindstedt, G. Hill, Poincaré.

Quelle più famose in meccanica celeste, dovute a Hill, rese rigorose da Poincaré, partono da uno sviluppo in serie di Fourier per la  $\varphi$ , i coefficienti essendo incogniti come il periodo.

Introducendo questo sviluppo nella (4 b) si arriva ad un sistema di infinite equazioni nei coefficienti suddetti.

La trattazione di questo sistema, e quindi della (4 b) per una  $q(\tau)$  periodica ma generica, esula quindi, almeno per ora, dall'ambito delle ricerche tecniche anche le più elevate, a meno non si voglia far ricorso ai metodi grafici numerici di integrazione i quali si prestano bene allo scopo, ad esempio quello ben noto, veramente efficace, cosiddetto *dell'evolvente*, dovuto a Meissner.

Ma, arrestandoci a queste indicazioni sarebbe un eludere i propositi prefissati. Con l'intento di ricavare risultati concreti rivolgiamoci ad un criterio, sostanzialmente contenuto nelle celebri ricerche di Lipschitz, già applicato da Meissner nello studio delle vibrazioni di locomotive. Tale procedimento è completamente rigoroso per una  $q(\tau)$  costante a tratti come nei tipi considerati nei diagrammi I-IV ed in ogni caso applicabile ai problemi della tecnica in cui effettivamente le funzioni  $q(\tau)$  che si possono presentare, sono senz'altro approssimabili con linee così sagomate. Anzi, avviene proprio che siffatte funzioni si presentano spesso con tale aspetto e si decompongono (contrariamente a quanto ora facciamo), in funzioni periodiche, trigonometriche ad esempio.

Se la funzione  $q(\tau)$  varia a tratti, evidentemente, negli intervalli in cui è costante, gli integrali della (4 b) sono ben noti; son quelli soliti caratterizzanti un moto armonico.

L'intervallo  $0 \leq \tau \leq 2\pi$  sia dunque diviso in  $n$  parti.

Nella  $i^{\text{ma}}$  sia  $q(\tau) = \text{cost.} = q_i$ , si abbia dunque

$$q(\tau) = q_i \quad \text{per} \quad \tau_{i-1} < \tau < \tau_i.$$

(3) Cfr. E. MEISSNER, « Schw. Bauzeitung », Bd. 72, N. 11, 1918.

Poniamo poi

$$q_i = \frac{v_i^2}{4\pi^2}.$$

Con ciò gli integrali in ogni intervallo sono allora del tipo

$$(7) \quad a_i \cos \frac{T v_i}{2\pi} \tau + b_i \sin \frac{T v_i}{2\pi} \tau,$$

$a_i$  e  $b_i$  essendo costanti arbitrarie. In tali circostanze la costruzione di  $\Phi_i$  riesce immediata. Basta partire con l'integrale (7), scritto per  $i = 1$ , in cui si sia posto  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ . Arrivati in  $\tau = 1 \cdot \frac{2\pi}{n}$  bisognerà raccordare a questo l'integrale (generale) dell'intervallo successivo,

$$a_2 \cos \frac{T v_2}{2\pi} \tau + b_2 \sin \frac{T v_2}{2\pi} \tau,$$

calcolando in modo ovvio le due costanti arbitrarie  $a_2$  e  $b_2$ .

In tal guisa, procedendo passo passo, raccordando le varie linee integrali si giungerà all'istante  $\tau = 2\pi$  e quindi al valore  $\Phi_1(2\pi)$  che interessa per il calcolo di  $\mathfrak{J}$ .

Per  $\Phi_2$  si partirà dall'integrale (7) in cui  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = \frac{2\pi}{T v_1}$  e, allacciandolo a quello del secondo tratto e successivamente, così come si è fatto per  $\Phi_1$ , si perverrà in tal modo all'espressione di  $\Phi_2$  nell'ultimo tratto  $\tau_{n-1} < \tau < 2\pi$ . Ivi si derivi l'espressione ottenuta e si ponga  $\tau = 2\pi$ . Risulterà  $(d\Phi_2/d\tau)_{\tau=2\pi}$ . Si avrà finalmente quanto basta per calcolare  $\mathfrak{J}$  secondo la (6).

Per un numero di intervalli  $n = 4, 3, 2$  si trovano, con riferimento alla fig. 3, in tal guisa le seguenti espressioni per l'indice di stabilità  $\mathfrak{J}$ :

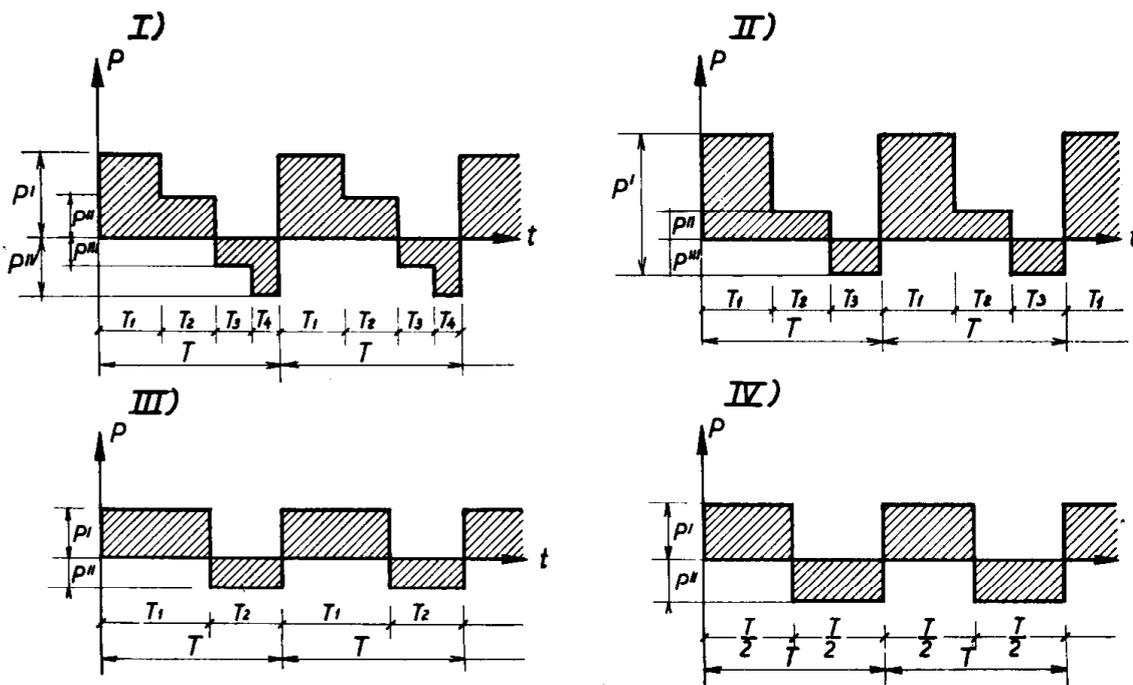


Fig. 3.

$n = 4$  (Diagramma I)

$$\mathfrak{J} = C_1 C_2 C_3 C_4 + N S_1 S_2 S_3 S_4 - \sum_{i k l m} v_{ik} S_i S_k C_l C_m$$

con

$$C_i = \cos\left(\frac{T v_i \tau_i}{2 \pi}\right) \quad , \quad S_i = \sin\left(\frac{T v_i \tau_i}{2 \pi}\right) \quad , \quad N = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 \cdot v_3}{v_2 \cdot v_4} + \frac{v_2 \cdot v_4}{v_1 \cdot v_3} \right) ,$$

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_i}{v_k} + \frac{v_k}{v_i} \right)$$

e la somma è estesa alle seguenti 6 permutazioni di  $i, k, l, m$ ;

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 & 3 & 4 & & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & & 3 & 4 & 1 & 2 . \end{array}$$

$n = 3$  (Diagramma II)

$$\mathfrak{J} = C_1 C_2 C_3 - v_{12} S_1 S_2 S_3 - v_{13} S_1 S_3 C_2 - v_{23} S_2 S_3 C_1 .$$

$n = 2$  (Diagramma III)

$$\mathfrak{J} = C_1 C_2 - v_{12} S_1 S_2 .$$

Se infine  $\tau_1 = \tau_2 = \pi$ , cioè gli intervalli sono eguali come nel

$n = 2$  (Diagramma IV)

$$\mathfrak{J} = \cos\left(\frac{T v_1}{2}\right) \cos\left(\frac{T v_2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} \right) \sin\left(\frac{T v_1}{2}\right) \sin\left(\frac{T v_2}{2}\right) ,$$

ovvero, posto

$$x_1 = \frac{T v_1}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{T v_2}{2} ,$$

$$\mathfrak{J} = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) \sin x_1 \sin x_2 .$$

6. LACUNE DI INSTABILITÀ PER UNA  $q = q(\tau)$  QUASI COSTANTE. — Valga qui la citazione di un criterio particolarmente efficace e di applicazione immediata. Abbia  $q = q(\tau)$  la forma, per  $\varepsilon q_m > 0$ ,

$$(8) \quad q(\tau) = q_0 + \varepsilon \sum_{m=2,4,6,\dots} q_m \cos\left(m \frac{\tau}{2} + \varphi_m\right)$$

$q_0, q_m$  essendo costanti,  $\varepsilon$  quantità numerica piccola del 1° ordine. Orbene, si ha stabilità quando  $T$  è esterno agli intervalli di estremi

$$(9) \quad \begin{cases} T_k'' = \frac{k}{2\sqrt{q_0}} \left( 1 + \frac{\varepsilon q_2 k}{4q_0} \right), \\ T_k' = \frac{k}{2\sqrt{q_0}} \left( 1 - \frac{\varepsilon q_2 k}{4q_0} \right), \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Viene definito, come si vede, uno spettro continuo a tratti di valori critici del periodo  $T$ .

7. LACUNE DI INSTABILITÀ PER CARICHI PULSANTI. — Ormai, in base a queste relazioni generali, che possono naturalmente servire in casi diversi da quello specifico di cui si tratta, abbiamo quanto occorre per verificare se, corrispondentemente ad una data frequenza della pulsazione ed intensità saltuariamente variabile 4, 3 o 2 volte nel periodo si ha o no la stabilità.

Supponiamo che  $P$  vari secondo il diagramma IV.

Si avrà allora, poiché in base alla (4 b)

$$q(\tau) = \frac{\sigma_q^2}{4\pi^2} \left( 1 - \frac{P}{P_0} \right),$$

$$\sigma_q^2 \left( 1 - \frac{P'}{P_0} \right) = (v_1^{(q)})^2 \quad \text{per } 0 \leq \tau \leq \pi$$

$$\sigma_q^2 \left( 1 - \frac{P''}{P_0} \right) = (v_2^{(q)})^2 \quad \text{per } \pi \leq \tau \leq 2\pi$$

e quindi, per la definizione di  $x_1$  ed  $x_2$ ,

$$x_1^{(q)} = \frac{T v_1^{(q)}}{2} = \frac{T \sigma_q}{2} \sqrt{1 - \frac{P'}{P_0}},$$

$$x_2^{(q)} = \frac{T v_2^{(q)}}{2} = \frac{T \sigma_q}{2} \sqrt{1 - \frac{P''}{P_0}},$$

con l'avvertenza di prender negativi gli sforzi di tensione.

Se  $P'$  e  $P''$  si considerano fissi e si vuol esaminare la stabilità d'una assegnata vibrazione in funzione del periodo  $T$ , si consideri nel piano  $x_1, x_2$  la retta

$$\frac{x_2^{(q)}}{x_1^{(q)}} = \sqrt{\frac{P_0 - P''}{P_0 - P'}}.$$

Avendosi per la distanza  $\overline{AO}$  di un punto  $A$  di essa dall'origine  $O$ ,

$$\overline{AO} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{T \sigma_q}{2} \cdot k^{(q)},$$

$$k^{(q)} = \sqrt{\left( 1 - \frac{P'}{P_0} \right) + \left( 1 - \frac{P''}{P_0} \right)}$$

con  $k^{(q)}$  costante, si potranno determinare subito, servendosi della fig. 1, i valori critici di  $T$  (corrispondenti a due ben determinati valori  $P'$  e  $P''$  di  $P$ )

segnando su essa i tratti (costituenti uno spettro critico *continuo a tratti*) traversanti le aree tratteggiate.

Non occorre dire che i punti della retta

$$\frac{x_2}{x_1} = 1$$

corrispondono o all'assenza o alla costanza (nel tempo) dello sforzo assiale, quindi a  $P' = P'' = 0$  oppure  $P' = P'' = P \neq 0$ . I punti critici di instabilità sono allora, come si vede subito, i punti A distanti da O di  $\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{2}$  per  $n = 1, 2, \dots$ ; Quindi, rilevando che  $k^{(0)}$  è dato in tal caso da

$$k^{(0)} \sqrt{2} \quad \text{per } P = 0, \\ k^{(0)} \sqrt{2 \left(1 - \frac{\bar{P}}{P_0}\right)} \quad \text{per } \bar{P} \neq 0,$$

si avrà instabilità per

$$\frac{T\sigma_0}{\sqrt{2}} = \left(n \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{T\sigma_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\bar{P}}{P_0}} = \left(n \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{2},$$

dunque, per lo spettro discreto

$$T = n \frac{\pi}{\sigma_0} \quad \text{oppure} \quad T = n \frac{\pi}{\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{P}}{P_0}}}.$$

Naturalmente, per  $P = 0$  o  $P$  indefinitamente costante  $= P$ , non ha senso parlare più di periodo  $T$ ; i risultati or ottenuti vanno perciò intesi come riferiti alla instabilità di una assegnata vibrazione fondamentale per sforzi oscillanti tra due valori, costanti per mezzo periodo,  $P'$  e  $P''$  *assai prossimi* a  $P = 0$  od a  $P = \bar{P}$ . Va rilevato che si presenta qui una specie di risonanza con una data vibrazione (ampiezze crescenti) quando si ha eguaglianza tra il periodo  $T$  dello sforzo assiale pulsante (secondo il diagramma IV) con un multiplo intero della metà del suo periodo per  $P = 0$  o della metà del suo periodo *variato* per effetto assiale (precisamente  $\pi : \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{P}}{P_0}}$  in luogo di  $\pi : \sigma_0$ ) quando  $P = \bar{P} \neq 0$ .

Da una ispezione della fig. 1 risulta ancora che, sugli assi  $x_1 = 0, x_2 = 0$  le lacune sono particolarmente estese, sempre più si riducono invece verso le diagonali  $x_1 = x_2$  dove anzi si strozzano nei punti or considerati. Allontanandosi poi dall'origine, nell'intorno delle diagonali codeste lacune si affinano sempre più sino a ridursi quasi a delle linee.

OSSERVAZIONE. — Ci siamo soffermati su di una equazione soltanto, relativa alla  $\rho^{ima}$  autovibrazione; la verifica di stabilità si riferisce pertanto unicamente a quelle eccitazioni che lasciano dormienti le altre vibrazioni ovvero

sono ad esse *ortogonali*. Perciò dovendosi prender riflesso per una stabilità incondizionata ad una sollecitazione qualunque si richiede di conseguenza che *tutti* i punti definiti dalle coordinate

$$x_1^{(\varrho)} = \frac{T\sigma_\sigma}{2} \sqrt{1 - \frac{P'}{P_\varrho}} \quad , \quad x_2^{(\varrho)} = \frac{T\sigma_\varrho}{2} \sqrt{1 - \frac{P''}{P_\varrho}}$$

ovvero, con riferimento alle espressioni di  $P_\varrho$  e  $\sigma_\varrho$ ,

$$x_1^{(\varrho)} = \frac{T\sigma_1}{2} \varrho^2 \sqrt{1 - \frac{P'}{P_1 \varrho^2}} \quad , \quad x_2^{(\varrho)} = \frac{T\sigma_1}{2} \varrho^2 \sqrt{1 - \frac{P''}{P_1 \varrho^2}}$$

stiano fuori dalle lacune di instabilità per  $\varrho = 1, 2, 3, \dots$ .

Si osserva che, per  $\varrho$  crescente e  $P < P_1$ , com'è necessario per garantire la stabilità della prima vibrazione, che è la più interessante, tali punti si avvicinano tutti alla diagonale  $x_1 = x_2$ . Si presenta per le vibrazioni più elevate ( $\varrho$  sufficientemente grande) approssimativamente il caso dell'assenza di sforzo assiale ( $P'$  e  $P''$  inferiori a  $P_1$  risultano piccoli di fronte ai carichi critici d'ordine superiore). La condizione di stabilità prima trovata, precisamente

$$T \neq n \frac{\pi}{\sigma_\varrho} \quad , \quad (n = 1, 2, \dots;)$$

è in ogni modo assicurata, ove si ricordi che  $\sigma_\varrho = \varrho^2 \sigma_1$ , quando sia

$$T \neq \frac{\pi}{\sigma_1} .$$

Che le presenti considerazioni possano trovare applicazioni concrete non v'è dubbio certamente.

Esse segnano un primo passo in un indirizzo, che non credo studiato, degno di attenzione, in quanto avviene sempre che, quando gli *effetti dinamici ordinari* si fanno sentire e temere in una costruzione, attorno a questa assai frequentemente aleggiano sinistri i pericoli dell'*instabilità alla Eulero* <sup>(4)</sup> totale o localizzata a certe membrature. Sicché i saggi sulla stabilità andrebbero fatti tenendo presenti i pericoli, non delle due cause suaccennate considerate separatamente, ma tra loro associate, così come in un primo abbozzo qui s'è tentato di fare.

(4) I problemi di *instabilità* nel senso corrente in scienza delle costruzioni costituiscono, come si vede a § 2, il ponte di passaggio tra statica e dinamica e rappresentano veramente una questione statico-dinamica. Osserviamo ancora che dalle espressioni di  $\mathcal{J}$  spettanti ai Diagrammi I, II, III, ponendo  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$  eguali a zero si hanno subito le condizioni di instabilità fornite dalla (1).