

Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell-Prandtl e di Reissner^(*).

Le considerazioni che qui mi permetto di svolgere hanno un'origine strettamente tecnica, ma presentano un interesse che può trascendere il caso specifico da cui derivano. Di questo, per completezza, passo a dare un cenno. Or molti anni son passati da quando attendevo al progetto ed alla costruzione di 2 gruppi, ognuno costituito da 4 torri-piloni, cilindrici in parete sottile di c. a., alti 60 m. e caricati in testa da pesanti travate metalliche, correnti su campate da 60 m., alle quali doveva esser applicato, in totale, il tiro di ben 32 teleferiche da cantiere navale (cfr. figg. 1 e 2). Sui piloni centrali deriva una spinta in testa che può raggiungere, su ognuno, le 600 tonnellate ed uno sforzo verticale pressoché eguale. Per i contrappesi interni, introdotti onde centrare la linea delle pressioni, per il peso proprio della stessa struttura resistente, lo sforzo assiale cresce dalle 600 tonnellate alla quota massima a 3000 tonnellate al piede. Le pareti molto estese quasi fanno somigliare queste torri a grandi ali verticalmente infisse nel terreno; la *corda* $2l$ è di 16 m. in testa, si mantiene costante quasi per metà altezza, poi cresce linearmente sino a 32 m. alla base; il *bordo d'entrata* è circolare di raggio costante $r = 2,50$ m. Anni di costruzione 1938-39.

Il vento investe queste ali da ogni lato ed al cimento che ne deriva si aggiunge, notevole, la sua azione sulle funi tra i 2 gruppi di piloni distanti tra loro quasi 350 m. Per l'opera d'ingegneria per se stessa, rinunciai ad ogni forma di controventamento (puntoni trasversali) che pur avevo prevista inizialmente. Ma, nella contemplazione del gioco imponente delle forze innanzi alle torri che crescevano senza ponteggi, potenti nell'aspetto, sottili nelle pareti ($s = 16$ cm.) imitando una canna di bambù (cfr. fig. 3), questa rinuncia mi destò qualche preoccupazione. Lo sforzo assiale eccezionale, la flessione derivante dal tiro, l'azione trasversale del vento, associata eventualmente a qualche fenomeno aerodinamico, poteva mutuamente esaltare gli effetti corrispondenti e dar luogo ad una *instabilità* contemporanea, vera combinazione dei 3 casi notissimi di *flambage* secondo Eulero⁽¹⁾, di *fles-*

(*) Dai « Rend. Acc. dei Lincei », fasc. 5, serie VIII, vol. I (1946).

(1) Cfr. S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*. Cap. II, New-Jork and London, 1936.

sione deviata secondo Prandtl-Michell⁽²⁾, di *svergolamento aerodinamico* secondo Reissner⁽³⁾.

Da questi pensieri ebbero inizio, nell'indirizzo noto ai costruttori aeronautici⁽⁴⁾, studi abbastanza sistematici i quali, se nel caso specifico dimostrarono soltanto che il pericolo non stava nella instabilità dell'equilibrio nel

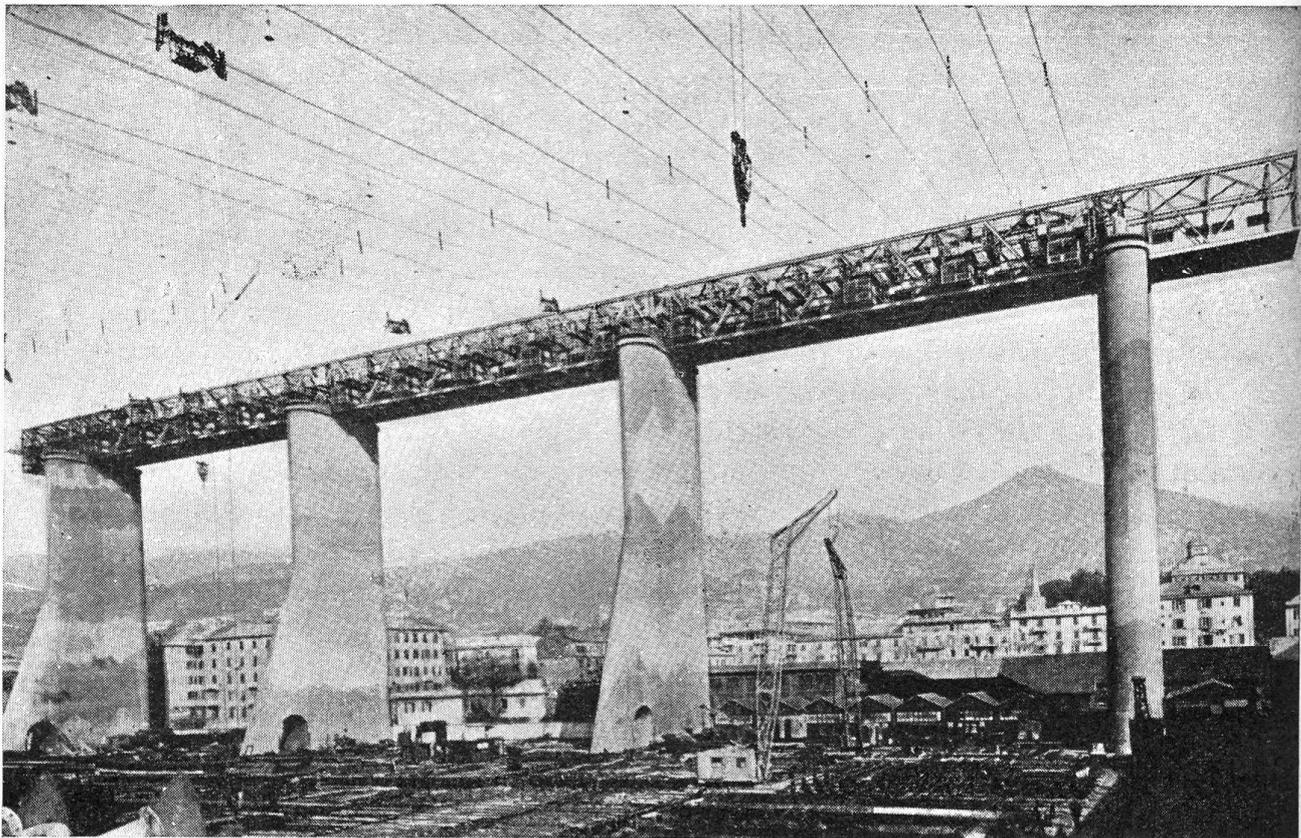


Fig. 1. — Torri piloni: gruppo verso terra. — Ogni pilone, alto m. 58,80, è sollecitato da 540 tonn. orizzontali e 700 tonn. verticali. (I piloni sono stati costruiti con casseri mobili senza ponteggi esterni).

campo elastico, possono tuttavia esser di capitale interesse in altre circostanze, in particolare nel calcolo dei ponti sospesi molto leggeri⁽⁵⁾. In questa Nota presento uno dei primi risultati ai quali sono pervenuto. Si tratta di una sintetica espressione di un certo moltiplicatore critico λ_{cr} della distribuzione di

(2) Ibidem, cap. V.

(3) Cfr. C. MINELLI, *Su una forma di instabilità dell'equilibrio elastico nelle ali a sbalzo*, «Rend. Sem. Mat. R. Università di Roma», 1937.

(4) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Vol. II, cap. X, Zanichelli, Bologna, 1940.

(5) G. KRALL, *Instabilità aerodinamica nei ponti sospesi*, «Mem. scient. di Aerotecnica, Minist. Aeronautica», ottobre 1945; IDEM, *Statica ed aerodinamica del ponte sospeso*, «Giornale del Genio Civile», Minist. Lav. Pubblici, Roma, luglio 1945.

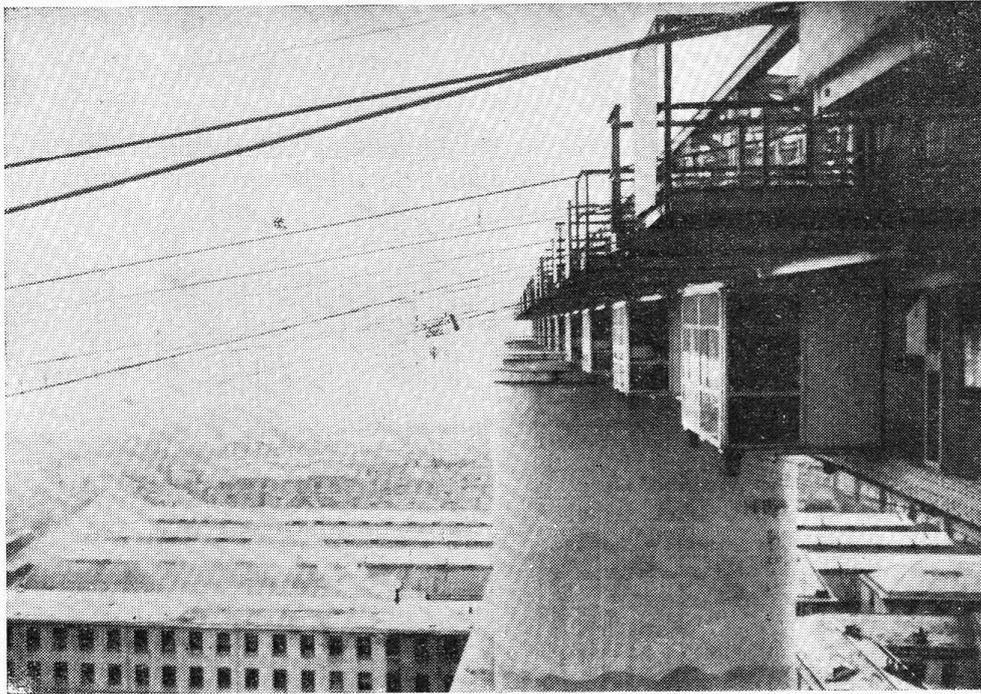
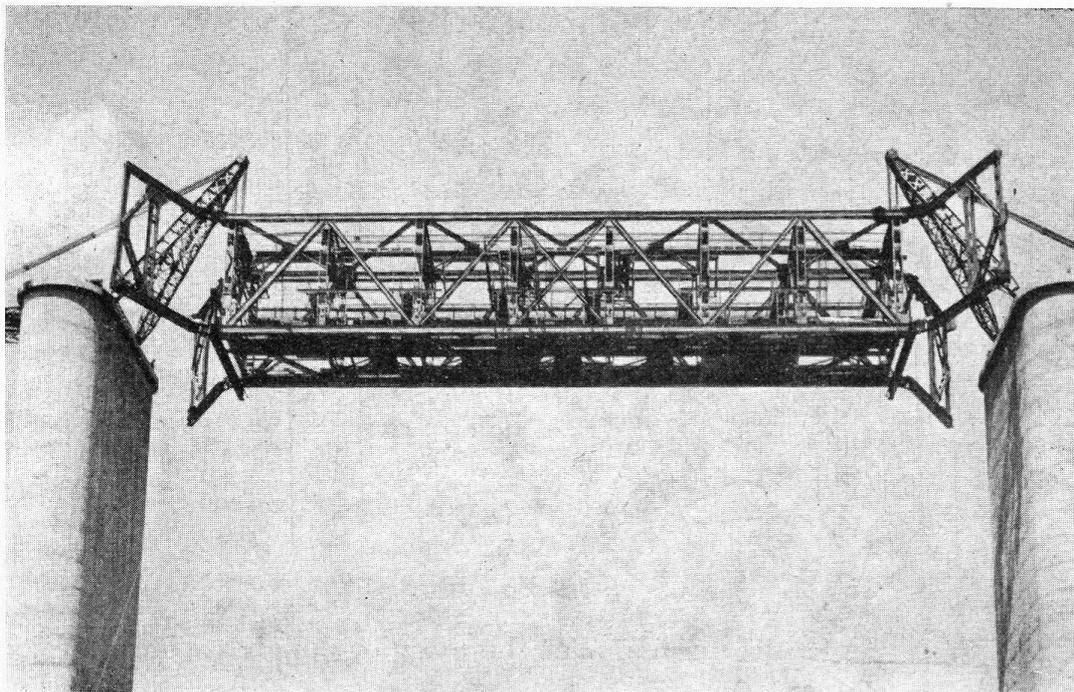


Fig. 2.

Fig. 3. - Come furono montate le $2 \times 3 = 6$ grandi travate.

carichi assiali N , del tiro orizzontale S , del quadrato della velocità del vento V per il quale si verifica l'instabilità globale dell'equilibrio elastico.

Ponendo ordinatamente $S = V = 0$, $N = V = 0$, $N = S = 0$ per N od S applicati in testa, infine per $V = \text{cost.}$ lungo il profilo, costanti supponendosi le caratteristiche geometriche elastiche si ricavano ordinatamente

tre valori λ'_{cr} , λ''_{cr} , λ'''_{cr} tali che $\lambda'_{cr} N$, $\lambda''_{cr} S$, $\lambda'''_{cr} V^2$ danno proprio i classici valori per lo sforzo assiale critico di Eulero, per la flessione deviata di Prandtl, per la velocità critica di Reissner. Poiché si dimostra, ciò che è del resto intuitivo, che $\lambda_{cr} < \lambda'_{cr} < \lambda''_{cr}$, alla formola annunciata che compendia i 3 casi spetterà legittimo un sensibile interesse anche fuori dell'ambito delle costruzioni civili.

2. Fissiamo l'attenzione su un'ala elastica di cui sono $R_1 = EI_1$ ed $R_2 = EI_2$ i coefficienti di rigidezza flessionale nei due piani di simmetria π_1 e π_2 della sezione resistente Ω , $G\Theta$ il numero di Bredt o coefficiente di rigidezza torsionale.

Sia $EI_1 \gg EI_2$ e la flessione agisca nel piano π_1 . Un carico N , eventualmente funzione di x , coordinata contata da un estremo dell'asta, agisce assialmente. Infine, l'asta che ha (vogliamo ammettere) una sezione più o meno alare è investita dal vento di velocità V ; la densità dell'aria si indichi con ρ ($\rho g = 1,293 \text{ kgm}^{-3}$ a 4°C ; porremo quindi $\rho \cong 0,125$).

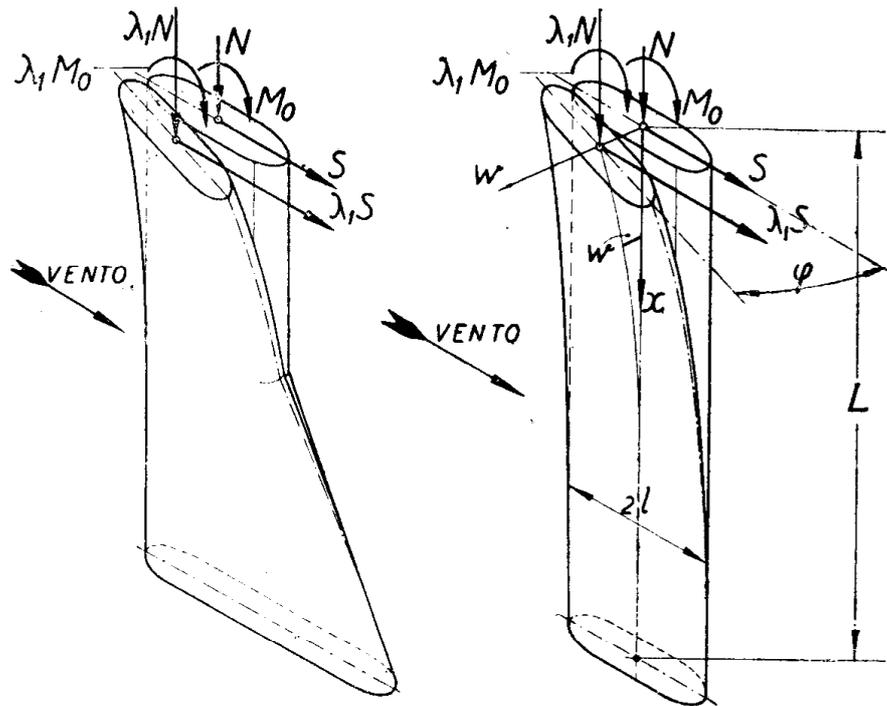


Fig. 4.

Sia $2l$ la corda del profilo, cioè la maggior lunghezza della sezione trasversale Ω (cfr. fig. 4).

Trascurando la resistenza aerodinamica, detta $\varphi = \varphi(x)$ la torsione in x , data dalla variazione angolare del piano di simmetria di Ω da π_1 , si genera, additivo, un momento torcente di origine aerodinamica, > 0 in senso *picchiante* (*),

$$(1) \quad M = \Gamma_m \cdot \varphi$$

(*) È invalsa l'abitudine di chiamare > 0 i momenti aerodinamici *picchianti*, < 0 se *cabranti*. Tutti gli altri momenti > 0 sono *cabranti*.

e, pure additiva, una *portanza* P

$$(2) \quad P = \Gamma_p \cdot \varphi$$

dove, con riferimento all'unità di lunghezza secondo x ,

$$(1 a) \quad \Gamma_m = C'_m \rho V^2 (2l)^2, \quad (2 a) \quad \Gamma_p = C'_p \rho V^2 (2l)$$

C'_m e C'_p essendo le derivate rispetto a φ dei cosiddetti coefficienti di *momento* e di *portanza*, calcolati, poniamo, nell'intorno di $\varphi = 0$. Per detti coefficienti assumeremo i valori $C'_m = -0,25$, $C'_p = 2,00$ (*).

Detto $w = w(x)$ lo scostamento del centro di Ω normalmente a π_1 , la configurazione del sistema sarà definita dalle 2 funzioni $w = w(x)$ e $\varphi = \varphi(x)$.

Per $w = 0$, $\varphi = 0$ si ha equilibrio. Questo è stabile se per i carichi agenti non esistono altre configurazioni pur esse di equilibrio, instabile in caso diverso.

Ciò si può affermare secondo un celebre teorema del Poincaré sugli equilibri cosiddetti *di diramazione*. Per questo si afferma che, se una configurazione dipende da un parametro λ e per un valore λ_1 di λ si hanno 2 configurazioni diverse, ove per $\lambda < \lambda_1$ sussista stabilità, per $\lambda \geq \lambda_1$ si ha instabilità.

Nel caso attuale si può assumere come parametro λ un moltiplicatore (numerico) di N , S , V^2 . Se per $\lambda = \lambda_1$ si ha una configurazione d'equilibrio anche per $w \neq 0$, $\varphi \neq 0$, i valori $\lambda_1 N$, $\lambda_1 S$, $\lambda_1 V^2$ comporteranno l'instabilità e si diranno *critici* (da ciò la scrittura λ_{cr} in luogo di λ_1).

Per trovare λ_1 si è condotti ⁽⁶⁾ a cercare *soluzioni (instabili)* prossime a quella statica $w = 0$, $\varphi = 0$ annullando la variazione $\delta \mathcal{E}^*$, di una $\mathcal{E}^*(w, \varphi)$ appresso definita, per una variazione w, φ contata dai corrispondenti valori nulli. Quanto a \mathcal{E}^* , risulta determinata dall'energia elastica di deformazione per w, φ meno il corrispondente termine di 2° ordine in w, φ del lavoro fatto dagli sforzi interni e dai carichi moltiplicati per λ .

Il principio variazionale che ne segue dà luogo, secondo l'algoritmo ordinario, a 2 equazioni differenziali in w e φ , con specifiche condizioni agli estremi.

Dette equazioni ammettono soluzioni non nulle, soddisfacenti agli estremi quelle tra le condizioni che corrispondono ai vincoli, solo in corrispondenza ad una serie discreta, cosiddetta *spettro*, di valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; di λ chiamati *autovalori*. Interesse ha naturalmente il più piccolo tra tutti, cioè λ_1 , quando lo spettro sia ordinato in serie crescente. Ma passiamo ad esplicitare il nostro principio: l'energia elastica di deformazione dell'asta vale

$$(3) \quad \frac{1}{2} \int_0^L (EI_2 w''^2 + G\Theta \varphi'^2) dx.$$

(*) Con riferimento al *centro elastico* \mathcal{S} nel *fuoco* dell'ala, ad $1/4$ della *corda* $2l$, dal *bordo di entrata*. Per il *centro* \mathcal{S} al mezzo, $C_m \rightarrow C_{me} \simeq -0,75$.

(6) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Vol. II, cap. VIII, n. 11, Zanichelli, Bologna, 1940.

Per i termini di 2° ordine del lavoro si ha:

Per il momento flettente $M(x)$ dovuto ad S , un termine

$$(4) \quad \int_0^L M(x) \cdot \varphi \cdot w'' dx .$$

Considerato infatti l'elemento dx tra le sezioni $x = \text{cost.}$ e $x + dx = \text{cost.}$, a w corrisponde una rotazione delle due facce $\Omega(x)$ e $\Omega(x + dx)$ data da

$$\frac{dx}{\rho} \cong w'' dx .$$

La componente $M(x) \operatorname{tg} \varphi$ di $M(x)$ fa quindi (per $\operatorname{tg} \varphi \simeq \varphi$) un lavoro $M \varphi w'' dx$; segue la (4) c. d. d.

Dovuto ad $N(x)$:

$$(5) \quad \frac{I}{2} \int_0^L N(x) w'^2 dx$$

come è ben noto.

Per quanto riguarda le azioni aerodinamiche, il contributo δL , di 2° ordine, è dato da

$$(6) \quad \delta L = -\lambda \int_0^L \{ (\Gamma_p \varphi) \delta w + (\Gamma_m \varphi) \delta \varphi \} dx .$$

Si ha quindi in definitiva

$$(7) \quad \delta \mathcal{E}^* = \delta \int_0^L \left\{ \frac{I}{2} (R_2 w''^2 + B \varphi'^2) + \lambda M(x) \varphi w'' - \lambda N(x) w'^2 \right\} dx + \\ + \int_0^L \left\{ \Gamma_p \lambda \varphi \delta w + \Gamma_{me} \lambda \varphi \delta \varphi \right\} dx = 0 .$$

L'algoritmo ordinario porge le 2 equazioni *non autoaggiunte*,

$$(8) \quad \begin{cases} (R_2 w'')' + \lambda [(M \varphi)'' + (N w)'] + \Gamma_p \lambda \varphi = 0 , \\ - (B \varphi)' + \lambda M w'' + \lambda \Gamma_{me} \varphi = 0 \end{cases}$$

con la condizione che sia agli estremi,

$$(8a) \quad -[\lambda (M \varphi)' + (R_2 w'')' + \lambda N w'] \delta w + [R_2 w'' + \lambda M \varphi] \delta w' + (B \varphi)' \delta \varphi = 0 .$$

Le effettive condizioni ai vincoli sono:

Per l'incastro alla base ($x = L$),

$$\delta w = 0 \quad , \quad \delta w' = 0 \quad , \quad \delta \varphi = 0$$

e la (8a) risulta soddisfatta.

Per l'estremo libero ($x = 0$), esprimendo:

a) l'eguaglianza del taglio $-(EI_2 w'')$ alle forze secondo Π_2 ,

$$\lambda (M\varphi)' + (EI_2 w'')' + \lambda N w' = 0;$$

b) l'eguaglianza del momento interno $-EI_2 w''$ a $M_0 \varphi$,

$$\lambda M_0 \cdot \varphi + EI_2 w'' = 0;$$

c) infine, per l'assenza di momenti torcenti,

$$B\varphi' = 0,$$

si hanno condizioni che soddisfano la (8 a) come naturalmente deve essere.

Anziché affrontare le (8), seguendo il *metodo diretto* del Ritz rifacciamoci al principio (7) e consideriamo note la w e φ , a meno di un incognito fattore A per la w , C per la φ , identificandole con funzioni soddisfacenti alle condizioni ai vincoli.

Poniamo precisamente, contando x dall'estremo libero,

$$w = A \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \xi \right) \quad , \quad \varphi = C \cos \frac{\pi}{2} \xi \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L}.$$

Per $M(0) = 0$ e per $R_2 = \text{cost.}$, $B = \text{cost.}$ le (8 a) sono effettivamente soddisfatte.

È, corrispondentemente ad uno sforzo S in testa,

$$(9) \quad M(x) = SL\xi,$$

ma porremo, piuttosto, a tutto favore della stabilità,

$$(9 a) \quad M(x) = SL \sin \frac{\pi}{2} \xi.$$

Esprimendo la condizione di stazionarietà rispetto alle 2 variabili indipendenti A e C risultano 2 equazioni lineari omogenee in A e C . Soluzioni non nulle si hanno per l'annullarsi del discriminante. Risulta, per valori costanti di EI_2 , $G\Theta$, Γ_p , Γ_m , l'equazione in λ , prima annunciata,

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \frac{\pi^2}{4} \frac{EI_2}{L^2} - \lambda N & , & \frac{4}{3\pi} L \cdot \lambda S + \frac{8}{\pi^3} \Gamma_p L^2 \lambda \\ \frac{4}{3\pi} L \cdot \lambda S & , & G\Theta + \frac{4}{\pi^2} \Gamma_m L^2 \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Da questa si ha immediatamente λ_1 . Ove le w e φ fossero sviluppate in serie di funzioni con n coefficienti incogniti $A_1, A_2, \dots; C_1, C_2, \dots$; in luogo di A e C la (10) risulta di grado $2n$ in λ . Risultano autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; sulla convergenza dei quali (per $n \rightarrow \infty$) verso lo spettro critico non è il caso di soffermarsi. Conviene piuttosto considerare subito i casi particolari di Eulero, Prandtl e Reissner onde provare con i confronti la bontà della scelta per w e φ .

Caso di Eulero: $S = V = 0$, $N \neq 0$. Si ha

$$(10 a) \quad \lambda' N = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI_2}{L^2}.$$

Caso di Prandtl: $N = V = 0$, $S \neq 0$. Si ha

$$(10 b) \quad \lambda'' S = 3,68 \frac{\sqrt{EI_2 \cdot G\Theta}}{L^2}.$$

Caso di Reissner: $S = N = 0$, $V \neq 0$. Si ha

$$(10 c) \quad \sqrt{\lambda'''} V = \frac{\pi}{(2l) \cdot (2L)} \sqrt{\frac{G\Theta}{-C'_{me} \cdot \rho}}.$$

Le (10 a) e (10 c) coincidono con formole notissime. Per la (10 b) si ha in rigore, per $M = SL\xi$,

$$\lambda'' S = 4,012 \frac{\sqrt{EI_2 \cdot G\Theta}}{L^2}.$$

Il metodo, per sua natura, dovrebbe dare, come si sa dal Calcolo, un valore superiore. Ma la (10 b) è invece per difetto; ciò dipende dal fatto che si è assunta la distribuzione di momenti (9 a) ovunque eccedente rispetto alla effettiva (9), (si ha infatti per $\xi \leq 1$, $SL\xi < SL \sin \frac{\pi}{2} \xi$).

Nel caso delle torri piloni di cui si accennò, risulta $\lambda \cong 6,00$, quindi una grande sicurezza all'instabilità. Naturalmente valori elevati di λS , λN , λV^2 portano fuori dal campo elastico. Occorre allora analizzare ciò che avviene tenendo conto della plasticizzazione, proprio così come si fa per una colonna caricata di punta quando il carico di Eulero perde significato per i bassi rapporti $L : i$ ($i =$ raggio di inerzia di Ω) come avviene nel caso specifico. Si rilevi che conviene in generale tener fisso $V = V_0$ ed applicare il moltiplicatore λ ad S ed N solamente.

Il problema va considerato agli inizi, poiché manca addirittura la trattazione nel campo plastico del caso elementare di Prandtl-Michell e per quello di Reissner. A questi mi riprometto di poter dedicare un'altra Nota che potrebbe avere interesse anche nel campo aeronautico per quanto riguarda la valutazione dei *gradi di sicurezza* effettivi, non solo nel campo elastico ma anche in quello plastico, di questa associazione di tre fondamentali casi di instabilità (*).

(*) A pp. 99-102 e 311-314 si dà un criterio per trovare valori minoranti dei λ_{cr} quando questi portano oltre il campo elastico e diventano quindi del tutto illusori e talvolta fatali.

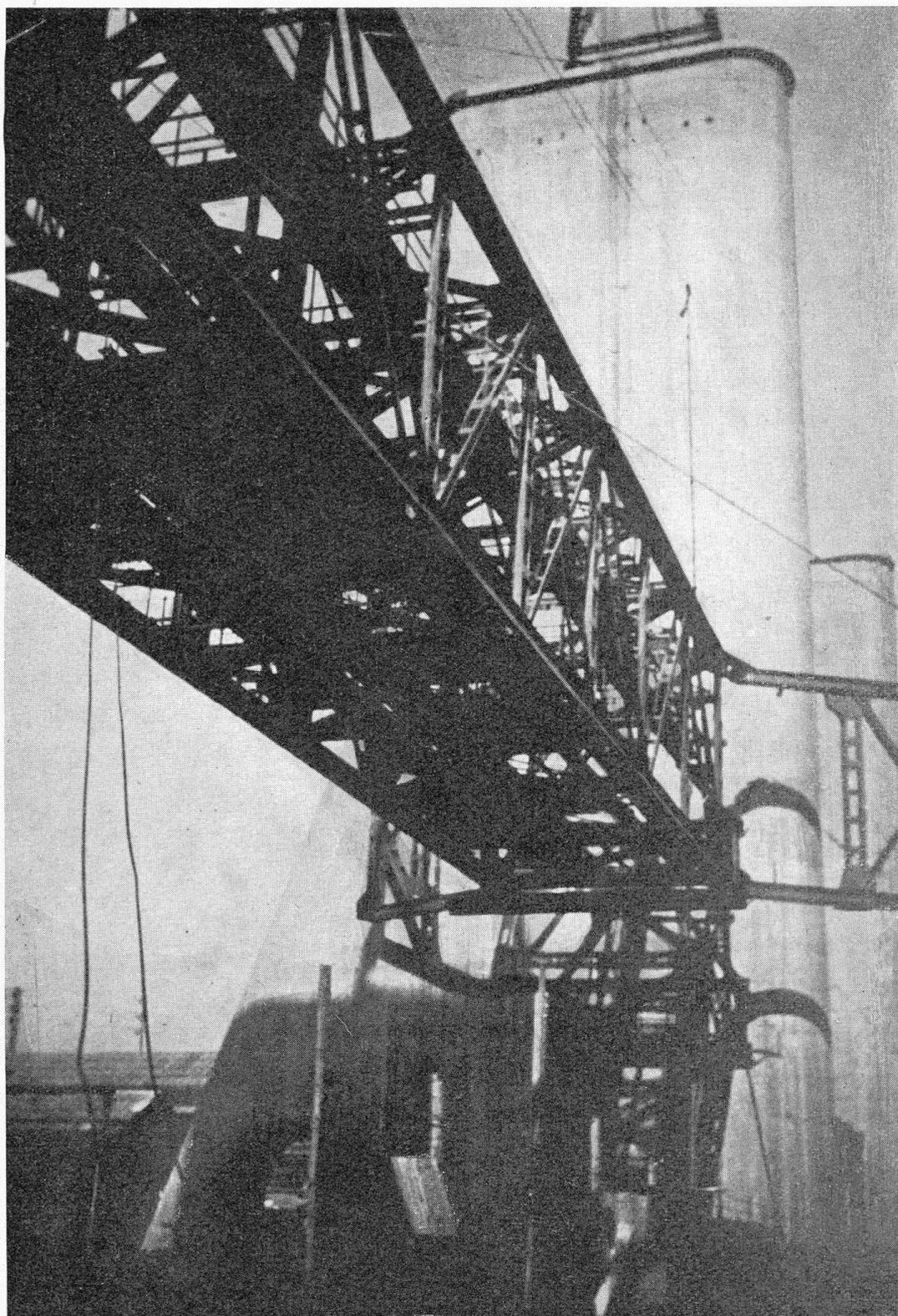


Fig. 5. - Illustra la manovra che sta terminando in fig. 3.

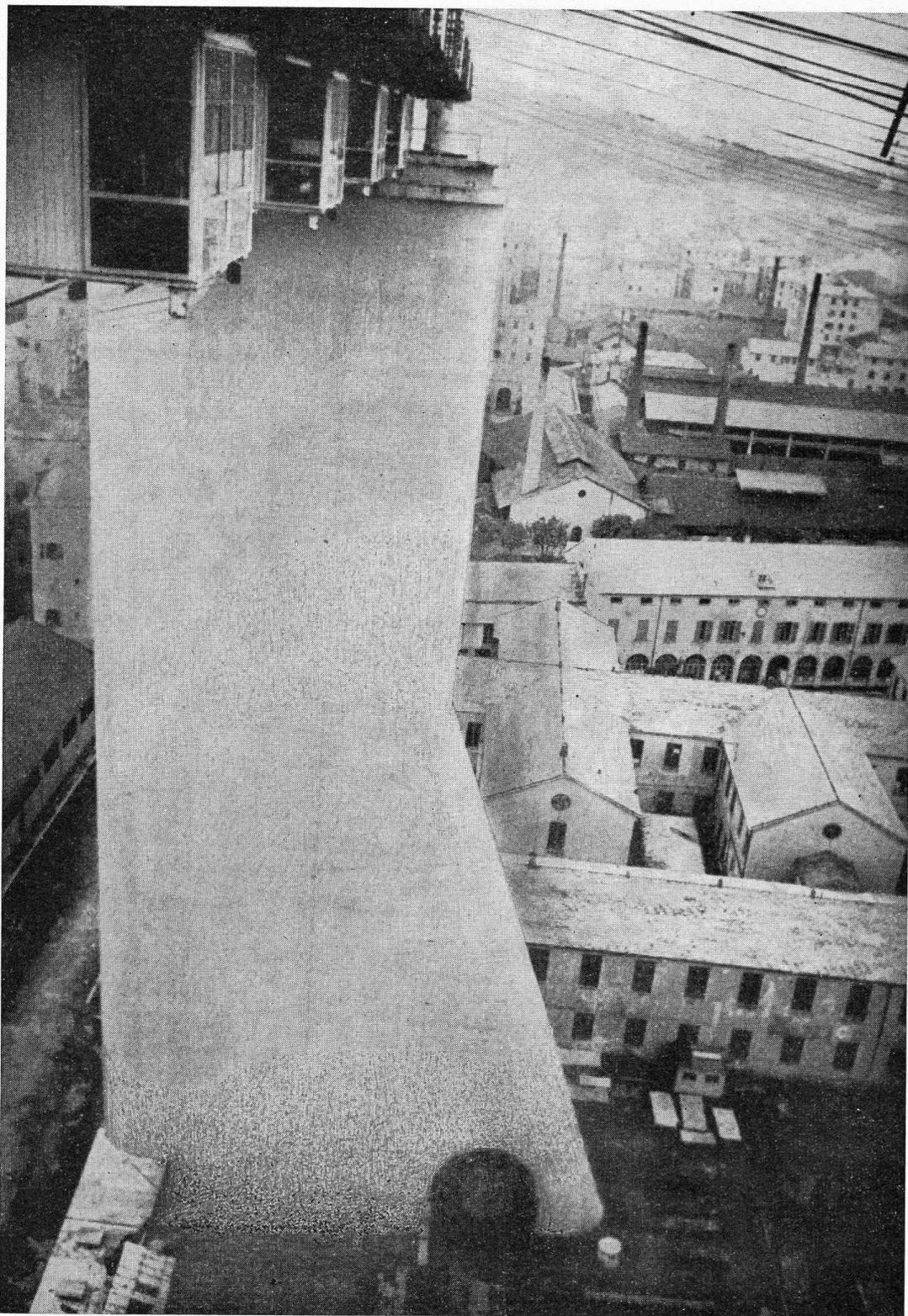


Fig. 6. - I piloni a terra, tutti in parete sottile ($s \cong 18$ cm) sono ormai in esercizio.