Un metodo generale di valutazione approssimata dei carichi critici per aste di tipo qualunque (*).

In una Nota precedente [1], abbiamo assegnato una formola compendiosa per il calcolo del primo carico critico di un'asta semplicemente appoggiata agli estremi, sollecitata di punta da uno sforzo assiale costante.

Ci siamo posti allora, come si vede, in condizioni di estrema semplicità per essere possibilmente chiari ed anche perché importava, non tanto d'arrivare a risultati di qualche generalità quanto di dimostrare l'applicabilità di un metodo.

Or non sembra proprio inopportuno riprendere la questione, contemplando condizioni di vincolo più generali e condizioni di carico assiale non più costante, ma variabile secondo una legge qualunque.

Mirando a tali intenti prendiamo anche ora, naturalmente, le mosse dall'equazione specifica del problema

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(j(\xi)\frac{d^2 w}{d\xi^2}\right)+\lambda^2\frac{d}{d\xi}\left(\Pi(\xi)\frac{dw}{d\xi}\right)=0, \tag{1}$$

nella quale, come precedentemente, si designa con w lo spostamento normale all'asse (rettilineo in condizioni naturali) di un punto qualunque di coordinata $x = \xi L$, L essendo la lunghezza dell'asta, e ξ variabile tra 0 ed 1. Ed infine, ove sia E il modulo d'elasticità del materiale, $J = J_0\, j(\xi)$ il momento d'inerzia della sezione trasversale generica, $j = j(\xi)$ designando un fattore numerico funzione del posto, $\Pi(\xi) = P\cdot p(\xi)$ lo sforzo assiale, variabile come il fattore numerico $p = p(\xi)$, si ha per il parametro λ^2

$$\lambda^2 = \frac{P\cdot L^2}{EJ_0}\,.$$

Come condizioni limiti, in conformità con le quali dovremo ricercare i valori di λ^2 (e quindi di P) per cui si hanno soluzioni della (1) (*instabili*, donde la locuzione di carico critico attribuita a detti valori di P), noi consideriamo quelle omogene del tipo: $w = 0$, $\frac{d^2 w}{d\xi^2} + n\frac{dw}{d\xi} = 0$ agli estremi $\xi = 0$ e $\xi = 1$. Le quali, con riferimento ad appoggi, fissi per rispetto agli spostamenti, sono del tipo più generale. Si ha precisamente, per $n = 0$ l'appoggio libero, per $n = \infty$ l'incastro, e per valori intermedi, l'appoggio elastico rispetto alle rotazioni.

(*) Dai « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XI, serie 6ª, 1° sem., fasc. 8 – Roma, aprile 1930.

(1) G. KRALL, *Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile con discontinuità*, questi « Rendiconti », fascicolo 6°, p. 564.

Ciò posto, introduciamo la funzione di Green $G = G(\xi, \eta)$ relativa all'operatore differenziale di IV ordine, lineare ed autoaggiunto

$$L[\ ] = \frac{d^2}{d\xi^2}\left(j(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}\right).$$

Tale funzione com'è noto, soddisfa: *a*) alle condizioni limiti; *b*) alla equazione $L[G] = 0$ nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$ salvo nella coincidenza $\xi = \eta$, dove ha una discontinuità nella derivata terza, tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left|\frac{d^3 G(\xi + \varepsilon, \xi)}{d\xi^3} - \frac{d^3 G(\xi - \varepsilon, \xi)}{d\xi^3}\right| = -\frac{1}{j(\xi)}.$$

Per queste proprietà, la (1) si può anche scrivere nella forma integro-differenziale, molto utile come vedremo,

$$w(\xi) = -\lambda^2 \int_0^1 G(\xi, \eta)\frac{d}{d\eta}\left(p(\eta)\frac{dw(\eta)}{d\eta}\right)d\eta.$$

Ovvero anche, integrando per parti,

$$w(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 p(\eta)\frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial\eta}\frac{dw(\eta)}{d\eta}d\eta - \left|\lambda^2 G(\xi, \eta)\, p(\eta)\frac{dw}{d\eta}\right|_0^1.$$

Annullandosi il termine agli estremi, per esser $G(\xi, 0) = G(\xi, 1) = 0$, oppure $\frac{dw}{d\eta} = 0$, una derivazione rispetto a ξ, ove si ponga

$$\frac{dw(\xi)}{d\xi} = \omega(\xi) \quad , \quad \frac{dw(\eta)}{d\eta} = \omega(\eta) \quad , \quad \frac{\partial^2 G(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta} = \Omega(\xi), \eta),$$

porge

$$\omega(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 p(\eta)\,\Omega(\xi, \eta)\,\omega(\eta)\,d\eta.$$

È questa un'equazione integrale omogenea del tipo di Fredholm, a nucleo $p(\eta)\cdot\Omega(\xi, \eta)$ – polare –, simmetrico *definito* e *positivo*. Il che risulta, premesso che sia $p = p(\eta) \geq 0$, dall'esser soddisfatta, per ogni funzione arbitraria $\nu = \nu(\xi)$, in tutto il campo continua o continua a tratti, la relazione

$$\int_0^1\int_0^1 \Omega(\xi, \eta)\,\nu(\xi)\,\nu(\eta)\,d\xi\,d\eta > 0,$$

come si può dimostrare senza notevole difficoltà sfruttando il carattere positivo definito della $G(\xi, \eta)$.

Possiamo perciò asserire che, tutti gli autovalori di tale equazione saranno reali, positivi ed ordinabili in serie non decrescente, e che si avrà l'identità già sfruttata in analoghe circostanze

$$\sum_1^{\infty}{}_i \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 p(\eta)\,\Omega(\eta, \eta)\,d\eta.$$

Relativamente a codesti autovalori rileveremo alcune proprietà, importanti pei nostri intendimenti, di cui la dimostrazione che omettiamo, è facilmente perseguibile sugli schemi del calcolo delle variazioni [1].

Brevemente, codeste proprietà si riassumono dicendo che: α) se cresce p, calano, o quanto meno non crescono, gli autovalori λ_i^2 e viceversa; β) se cresce j gli autovalori crescono o quanto meno non calano e viceversa; γ) se nelle condizioni limiti $w = 0$, $\frac{d^2 w}{d\xi^2} + n \frac{dw}{d\xi} = 0$, n cresce da un valore nullo all'infinito, tutti gli autovalori crescono pur essi in modo monotono.

Talché, dunque, ove si indichino con $\bar{\Omega}$ e $\bar{\lambda}_i^2$ gli autovalori per un sistema di cui sieno $\bar{p} \leq p$, $\bar{j} \geq j$, $\bar{n} > n$ le caratteristiche, avendosi per quanto sopra $\lambda_i^2 \leq \bar{\lambda}_i^2$, potremo scrivere a meno dell'errore $\sum_2^\infty{}_i (\lambda_i^{-2} - \bar{\lambda}_i^{-2}) \geq 0$, la relazione

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 \{ p(\eta)\, \Omega(\eta, \eta) - \bar{p}(\eta)\, \bar{\Omega}(\eta, \eta) \} \, d\eta \tag{2}$$

la quale, ove per le suddette $\bar{p}$, $\bar{j}$, $\bar{n}$ si tratti di un problema più semplice, per cui $\bar{\lambda}_1^2$ sia facilmente determinabile, si traduce in una utile formola approssimata dalla quale si ha una importante limitazione inferiore, precisamente

$$\lambda_1^2 \geq \frac{1}{\frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 \{ p(\eta)\, \Omega(\eta, \eta) - \bar{p}(\eta)\, \bar{\Omega}(\eta, \eta) \} \, d\eta} .$$

Ora, per quanto si possa evitare il calcolo dei nuclei Ω e $\bar{\Omega}$ per derivazione delle originarie G e $\bar{G}$, ove si pensi al loro significato meccanico, può essere comunque desiderabile di ricondurci ad una forma più esplicita, che metta in evidenza la j e rispettivamente la $\bar{j}$.

All'uopo rileviamo che, se si pone $m(\xi, \xi') = j(\xi') \cdot \frac{\partial^2 G(\xi, \xi')}{\partial \xi'^2}$, si ha, per le proprietà rilevate cui soddisfa la G,

$$\frac{\partial^2 G(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} = \Omega(\xi, \eta) = \int_0^1 \frac{\frac{\partial m(\xi, \xi')}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial m(\eta, \xi')}{\partial \eta}}{j(\xi')} \, d\xi' .$$

Del che, evitando ogni calcolo, del resto perseguibile con facilità, si può darsi ragione quando si scriva Ω in funzione del lavoro di deformazione, tenendo presente che, $\frac{\partial m(\xi, \xi')}{\partial \xi}$ dà il momento flettente in ξ' provocato da un momento unitario in ξ.

(1) Cfr. per esempio R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I Bd., cap. VI. Springer, Berlin 1924.

Si avrà quindi, indicando con $\bar{m}$ i momenti, senz'altro valutabili, corrispondenti ad un valore $\bar{n}$ di n nelle condizioni limiti,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1\int_0^1 \left\{ \frac{p(\xi)}{j(\xi')}\left[\frac{\partial m(\xi,\xi')}{\partial \xi}\right]^2 - \frac{\bar{p}(\xi)}{j(\xi')}\left[\frac{\partial \bar{m}(\xi,\xi')}{\partial \xi}\right]^2 \right\} d\xi\, d\xi'.$$

Sotto questo aspetto, che rende esplicita la $j = j(\xi)$, il calcolo non implica certo difficoltà, quando sia condotto ai lumi della statica, che ordinariamente ricorre nella pratica.

A titolo d'esempio poniamo $p = \bar{p} = 1$, $n = \bar{n} = 0$. Trattandosi allora d'una trave semplicemente appoggiata, si ha $m(\xi,\xi') = \bar{m}(\xi,\xi') = \xi(1-\xi')$ per $\xi' \geq \xi$ e $= \xi'(1-\xi)$ per $\xi' \leq \xi$. Dunque $\left[\frac{dm(\xi,\xi')}{d\xi}\right]^2 = \xi'^2$ per $\xi' \leq \xi$ e $= (1-\xi')^2$ per $\xi' \geq \xi$.

L'integrazione rispetto a ξ porge quindi

$$\int_0^1 \left[\frac{dm(\xi,\xi')}{d\xi}\right]^2 d\xi = \int_0^{\xi} \xi'^2\, d\xi + \int_{\xi}^1 (1-\xi')^2\, d\xi =$$

$$= \xi'^2\,\xi + (1-\xi')^2(1-\xi) = \xi'(1-\xi') = m(\xi',\xi').$$

La (2) si scrive in conformità

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 m(\xi',\xi')\left(\frac{1}{j(\xi')} - \frac{1}{j(\xi')}\right) d\xi',$$

che è l'espressione assegnata nella Nota precedente.

NOTE E COMPLEMENTI

Fuso di lunghezza L con momento d'inerzia J_1 agli estremi $x = 0, L$; J_2 nel tratto centrale di lunghezza l_2 simmetricamente disposto. J_1 cresce sino al valore J_2 con legge

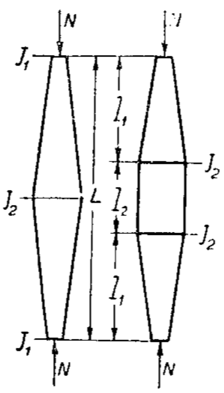

Fig. 1.

$$J(x) \simeq J_1 + (J_2 - J_1)\left(\frac{2x}{L - l_2}\right)^n$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$. Se N è costante e gli estremi sono incernierati si ha

$$\lambda_{cr} N_0 = N_{cr} \simeq \frac{m E J_2}{L^2}$$

con m numero dipendente dai parametri J_1/J_2, n, l_2/L secondo l'allegata Tabella (cfr. fig. 1) (*).

<table>
<tr><th rowspan="2">J_1/J_2</th><th rowspan="2">n</th><th colspan="5">l_2/L</th></tr>
<tr><th>0</th><th>0,2</th><th>0,4</th><th>0,6</th><th>0,8</th></tr>
<tr><td rowspan="4">0,1</td><td>1</td><td>6,48</td><td>7,58</td><td>8,63</td><td>9,46</td><td>9,82</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5,40</td><td>6,67</td><td>8,08</td><td>9,25</td><td>9,79</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5,01</td><td>6,32</td><td>7,84</td><td>9,14</td><td>9,77</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4,81</td><td>6,11</td><td>7,68</td><td>9,08</td><td>9,77</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0,2</td><td>1</td><td>7,01</td><td>7,99</td><td>8,91</td><td>9,63</td><td>9,82</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6,37</td><td>7,49</td><td>8,61</td><td>9,44</td><td>9,81</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6,14</td><td>7,31</td><td>8,49</td><td>9,39</td><td>9,81</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6,02</td><td>7,20</td><td>8,42</td><td>9,38</td><td>9,80</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0,4</td><td>1</td><td>7,87</td><td>8,59</td><td>9,19</td><td>9,70</td><td>9,84</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7,61</td><td>8,42</td><td>9,15</td><td>9,63</td><td>9,84</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7,52</td><td>8,38</td><td>9,12</td><td>9,62</td><td>9,84</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7,48</td><td>8,33</td><td>9,10</td><td>9,62</td><td>9,84</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0,6</td><td>1</td><td>8,61</td><td>9,12</td><td>9,55</td><td>9,76</td><td>9,85</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8,51</td><td>9,04</td><td>9,48</td><td>9,74</td><td>9,85</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8,50</td><td>9,02</td><td>9,46</td><td>9,74</td><td>9,85</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8,47</td><td>9,01</td><td>9,45</td><td>9,74</td><td>9,85</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0,8</td><td>1</td><td>9,27</td><td>9,54</td><td>9,69</td><td>9,83</td><td>9,86</td></tr>
<tr><td>2</td><td>9,24</td><td>9,50</td><td>9,69</td><td>9,82</td><td>9,86</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9,23</td><td>9,50</td><td>9,69</td><td>9,81</td><td>9,86</td></tr>
<tr><td>4</td><td>9,23</td><td>9,49</td><td>9,69</td><td>9,81</td><td>9,86</td></tr>
</table>

(*) Per formole più precise cfr. pp. 581-583, *op. cit.* a p. 336.