Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile con discontinuità (*).

Tra i problemi di autovalori che si presentano in tecnica, quelli concernenti la determinazione dei carichi cosidetti *critici* o *di punta* hanno interesse cospicuo sotto vari punti di vista. I quali sono ben noti, e tanto, che non è certo il caso di richiamarli qui in modo specifico.

Ordinariamente, la risoluzione di codesti problemi è affidata all'integrazione di un'equazione differenziale del quarto ordine, autoaggiunta, lineare ed omogenea, contenente un parametro da determinare con rispetto ad assegnate condizioni limiti. Oppure, quando tale integrazione sia difficilmente accessibile, a considerazioni di *estremo*, da perseguire coi metodi diretti del calcolo delle variazioni, concernenti un certo integrale rappresentativo della energia totale del sistema.

Del metodo più moderno e più comprensivo per la trattazione di problemi d'autovalori, vogliamo alludere alla teoria delle equazioni integrali, non è ancora rilevante il partito pratico che se ne è tratto in questo campo, se si prescinde da alcune questioni di esistenza, caratterizzazioni qualitative e dimostrazioni di convergenza di procedimenti per approssimazioni successive, quest'ultime, più o meno note agli ingegneri.

Or noi ci proponiamo di dimostrare qui, come la teoria nominata fornisca criteri eccellenti, fors'anche migliori di quelli prima ricordati, quando si vogliono conseguire apprezzamenti numerici. E con tale intento, riservando ad una prossima Nota la trattazione sistematica e completa della quistione, perverremo considerando sotto due diversi aspetti, quello ordinario e quello suindicato, il caso notevole dell'effetto di una « intaccatura » (discontinuità finita del momento d'inerzia) in un'asta caricata di punta. Con che risulterà come, l'impostare certi problemi particolari sotto un punto di vista generale, porti talvolta alla soluzione con maggiore agilità che non si raggiunga, trattandoli per quel che effettivamente sono.

Consideriamo dunque un'asta di lunghezza assegnata L, modulo d'elasticità E, momento d'inerzia J, sollecitata da uno sforzo assiale Π.

È allora noto che, ove con $w = w(x)$ si indichi la deformata dell'asse geometrico, in funzione della coordinata x contata su questo (in condizione naturale), l'equazione che la determina si scrive

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{E}\,\mathrm{J}\,(x)\,\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\Pi\,\frac{dw}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

(*) Dai « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XI, serie 6ª, 1º sem., fasc. 6 – Roma, marzo 1930.

con condizioni limiti per la w, in generale omogenee, caratteristiche per ogni tipo d'appoggio che si considera. Ad esempio $w = 0$, $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$; oppure $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$; agli estremi $x = 0$, $x = L$, per la trave appoggiata *liberamente*, rispettivamente *incastrata*. Fissando l'attenzione sul caso di appoggi liberi e d'una sollecitazione costante $\Pi = P$, tutto è ridotto a considerare l'equazione del second'ordine

$$EJ(x)\frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0 \tag{1 a}$$

con le condizioni $w = 0$ per $x = 0$ e $x = L$, e quindi a ricercare quei valori di P per i quali effettivamente si hanno soluzioni non nulle di codesta equazione soddisfacenti alle condizioni limiti. Tale intento noi vogliamo perseguire caratterizzando la $J = J(x)$ come costante eguale ad J_0 in tutto il campo salvo in un tratto $d = x_2 - x_1$, dove assume un valore J inferiore ad J_0.

Cambiando coordinate con la posizione $\xi = x : L$, la (1 a) si potrà scrivere

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \lambda^2 \rho(\xi) w = 0 \tag{1 b}$$

con $\lambda^2 = P : EJ_0$, $\rho = \rho(\xi)$ funzione definita, ove si ponga $\xi_i = x_i : : L$, $i = 1, 2$; $\delta = (x_2 - x_1) : L$, dalle relazioni $\rho = 1$ nei tratti $0 \leq \xi \leq \xi_1$; $(\xi_1 + \delta) \leq \xi \leq 1$, e $\rho = \frac{J_0}{J} = j^2$ nel tratto $\xi_1 < \xi < (\xi_1 + \delta)$.

Per trovare i valori di λ^2 per cui effettivamente si hanno soluzioni nulle in $\xi = 0$ e $\xi = 1$, basterà allacciare due integrali della (1 b) nulli in $\xi = 0$ rispettivamente in $\xi = 1$ con l'integrale spettante al tratto intermedio; tale allacciamento essendo inteso sia fatto con riguardo alla continuità della funzione w come pure della sua derivata (raccordo con contatto di due archi di linea elastica).

Tali integrali, essendo $w = \rho_1 \sin\lambda\xi$ nel tratto $\overline{0\xi_1}$, $w = \rho_2 \sin\lambda(1 - \xi)$ nel tratto $\overline{\xi_2 1}$, infine $w = a \sin\lambda j\xi + b\cos\lambda j\xi$ nel tratto intermedio, dove a, b, ρ_1, ρ_2 designano delle costanti arbitrarie, portano a scrivere le equazioni

$$\rho_1 \sin\lambda\xi_1 = a\sin\lambda j\xi_1 + b\cos\lambda j\xi_1 \quad , \quad \rho_2\sin\lambda(1 - \xi_2) = a\sin\lambda j\xi_2 + b\cos\lambda j\xi_2$$

$$\rho_1\cos\lambda\xi_1 = aj\cos\lambda j\xi_1 - bj\sin\lambda j\xi_1 \quad , \quad -\rho_2\cos\lambda(1 - \xi_2) = aj\cos\lambda j\xi_2 - bj\sin\lambda j\xi_2 .$$

Eliminando da queste le costanti ρ_1, ρ_2, a, b, si ottiene l'equazione trascendente in λ

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin\lambda\xi_1 & 0 & \sin\lambda j\xi_1 & -\cos\lambda j\xi_1 \\ \cos\lambda\xi_1 & 0 & j\cos\lambda j\xi_1 & j\sin\lambda j\xi_1 \\ 0 & \sin\lambda(1-\xi_2) & \sin\lambda j\xi_2 & -\cos\lambda j\xi_2 \\ 0 & -\cos\lambda(1-\xi_2) & j\cos\lambda j\xi_2 & j\sin\lambda j\xi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

La quale, risoluta rispetto a λ porterà alla determinazione di tutta la successione di valori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ per cui il raccordo si effettua nella maniera voluta. Detto λ_k uno generico di codesti valori, il carico critico corrispondente sarà $P_k = \frac{EJ_0}{L^2} \lambda_k^2$.

Rinunciando alla ricerca delle radici (pur permettendoci di segnalarne l'interesse) di siffatta equazione, passiamo ora ad indicare la soluzione offerta dalla teoria delle equazioni integrali. Osservando la (1 *b*) è chiaro che, ove con $\tilde{G} = \tilde{G}(\xi, \eta)$ si indichi la funzione di Green relativa all'operatore $\frac{d^2}{d\xi^2}$, ed alle assegnate condizioni agli estremi, si avrà per la w l'equazione integrale

$$w(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 \rho(\eta)\, \tilde{G}(\xi, \eta)\, w(\eta)\, d\eta,$$

la quale, per esser in ogni caso $\rho > 0$, e $\tilde{G}$ un nucleo simmetrico *positivo* e *definito* nel senso di Hilbert-Schmidt, assicura l'esistenza di infiniti valori di λ^2 (autovalori) *reali*, *positivi*, ordinabili secondo la progressione non decrescente $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots$.

Mirando ora a calcolare il primo autovalore λ_1^2, che è quello di cui unicamente si interessa la pratica, rileviamo che, per le condizioni cui soddisfano la G e la ρ, si ha

$$\sum_1^\infty {}_i \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \rho(\xi)\, \tilde{G}(\xi, \xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Ed ancora, se con $\bar{\lambda}_k^2$ si indicano gli autovalori per la ρ costante $= \bar{\rho} = 1$ in tutto il campo, gli autovalori λ_i^2 corrispondenti alla ρ effettiva $\geq \bar{\rho}$ saranno tutti diminuiti, vale a dire si avrà $\lambda_1^2 \leq \bar{\lambda}_1^2, \lambda_2^2 \leq \bar{\lambda}_2^2, \cdots, \lambda_k^2 \leq \bar{\lambda}_k^2, \cdots$.

Quindi, valendo per questi una relazione analoga alla (2), noto che sia, trattandosi d'un problema più semplice, $\lambda^2 = \bar{\lambda}_1^2$, si potrà scrivere, per la valutazione numerica (per difetto, quindi a favore della stabilità) di λ_1^2, a meno dell'errore $\sum_2^\infty {}_i (\lambda_i^{-2} - \bar{\lambda}_i^{-2})$,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cong \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 (\rho - \bar{\rho})\, \tilde{G}(\xi, \xi)\, d\xi$$

per ρ qualunque, purché $\geq \bar{\rho}$.

Nel caso nostro, essendo $(\rho - \bar{\rho}) = 0$ nei tratti $\overline{0\xi_1}$ e $\overline{\xi_2 1}$, e $(\rho - \bar{\rho}) = (j^2 - 1)$ nel tratto $\overline{\xi_1 \xi_2}$, avremo, poiché $G(\xi, \xi) = \xi(1 - \xi)$, e $\bar{\lambda}_1^2 = \pi^2$ per $\rho = \bar{\rho} = 1$,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cong \frac{1}{\pi^2} + (j^2 - 1) \left\{ (1 - \xi_1)\, \xi_1\, \delta + \frac{\delta^2}{2} \left(1 - 2\xi - \frac{2}{3}\delta \right) \right\}$$

e quindi

$$P_1 = \frac{EJ_0\pi^2}{L^2}\left\{1 + \frac{J_0 - J}{J}\pi^2\left[(1-\xi_1)\,\xi_1\,\delta + \frac{\delta^2}{2}\left(1 - 2\,\xi - \frac{2}{3}\,\delta\right)\right]\right\}^{-1}.$$

In particolare, trattandosi d'una intaccatura in mezzeria, per $\xi_1 = \frac{1-\delta}{2}$, e δ infinitesimo,

$$P_1 = \frac{EJ_0\pi^2}{L^2}\left\{1 + \frac{J_0 - J}{J}\,\frac{\pi^2}{4}\,\frac{d}{L}\right\}^{-1},$$

o, press'a poco,

$$P_1 = \frac{EJ_0\pi^2}{\left(L + \frac{J_0 - J}{J}\,d\right)^2}.$$

NOTE E COMPLEMENTI

Colonna (cfr. fig. 1) alta L, incastrata al piede, libera in testa, soggetta a sforzo assiale costante N_0 abbia nel tratto superiore l_1 un momento di inerzia J_1, in quello inferiore $l_2 = L - l_1$ un momento d'inerzia J_2. Si ha secondo A. N. Dinnik:

$$\lambda_{cr}\,N_0 = N_{cr} = \frac{m\,EJ_2}{4\,L^2} \qquad (*)$$

con m numero dipendente dai due unici parametri l_2/L, J_1/J_2. Tale valore di m è riportato nella Tabella a fine pagina, per $a = l_2$,

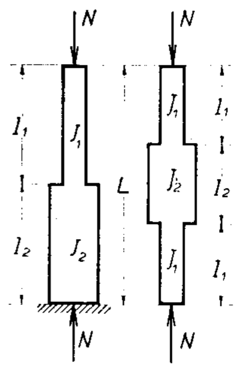

Fig. 1.

Osservazione. – È chiaro che la stessa formula (*) vale *a meno del fattore* 1/4 per un fuso lungo L *incernierato* agli estremi, soggetto a sforzo assiale costante N_0, con tratti l_1, l_1, agli estremi di momento d'inerzia J_1 e nel tratto $l_2 = 2\,a = (L - 2\,l_1)$ avente momento d'inerzia J_2.

J_1/J_2 \ a/L	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78
0,8	8,55	9,18	9,63	9,84