

Sulle configurazioni d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile^(*).

§ 1. Tra le sollecitazioni cui una piastra elastica sottile può essere cimentata, a quelle nominate *piane* o *tangenziali* spetta notoriamente importanza cospicua, e ciò, sia per la vasta cerchia di quesiti della pratica che portano a considerarle, sia, e più ancora, per l'interesse, invero notevole, che destano certi problemi d'analisi (cosidetti *problemi d'autovalori*) che a questi si collegano.

Come si sa, a particolari valori di queste sollecitazioni (*sollecitazioni critiche*, chiamate anche di *punta* nei sistemi unidimensionali) corrispondono configurazioni d'equilibrio caratteristicamente instabili, intendendosi con ciò alludere a *stati d'equilibrio* tali, per cui anche il più tenue cimento, statico o dinamico che sia, produce in generale perturbazioni grandi oltre ogni limite.

Queste circostanze di fatto, cui l'esperienza dà ben conosciuti riscontri, si sogliono per lo più studiare alla stregua d'un noto criterio di stabilità d'uso assai frequente. Il quale criterio, traducendosi in una proposizione d'esistenza di *minimo* per un certo integrale (dell'*energia potenziale totale*) contenente una funzione incognita, caratterizzante la configurazione d'equilibrio, porta, con l'impiego adeguato di alcuni algoritmi del calcolo variazionale, primissimo tra questi quello del Ritz, ad esaurire con agilità e speditezza pressoché qualunque quesito che la pratica chiama a risolvere [1].

Ora, pur riconoscendo (pei risultati conseguiti) l'utilità indubbia di tale modo di riguardare quest'ordine di problemi, non sembra si possa ritenere proprio conseguita, con tutta la generalità desiderabile, la dimostrazione d'esistenza di tali configurazioni, come pure una loro caratterizzazione qualitativa e quantitativa completa.

È perciò che non pare del tutto inutile considerare qui con qualche diffusione gli aspetti analitici delle suddette questioni, come anche di segnalare in pari tempo alcuni procedimenti risolutivi validi in ogni caso.

Riprendendo una mia Nota [2] concernente la quistione ora nominata, si comincia col riportare (§ 2) l'equazione differenziale del problema (che, sotto debite ipotesi di derivabilità e continuità, traduce il principio di minimo di cui sopra) ad una equazione integrale del tipo classico di Fredholm onde sfruttare (§§ 3, 4) ben noti teoremi d'univocità ed esistenza, nonché i metodi risolutivi assegnati per queste equazioni.

(*) Dagli « Annali di Matematica pura ed applicata » Serie IV, Tomo IV (1927).

Indi, non essendo però possibile attribuire a detti metodi che un valore essenzialmente teorico, si introduce (§§ 5, 6) un algoritmo d'approssimazioni successive che, sulle direttive magistrali di Schwarz, Poincaré e Picard, non è difficile né impostare né giustificare.

§ 2. — POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Sia **S** una piastra sottile, elastica, isotropa.

Indichino: h lo spessore, piccolo di fronte alle altre dimensioni, E e ν le costanti d'elasticità, *modulo* e *coefficiente di contrazione* del materiale che la costituisce.

Orientati nella superficie mediana (alla quale, secondo l'uso, andranno riferite le considerazioni che seguono), due assi cartesiani x ed y , si porti normalmente a questi, quindi alla nominata superficie, piana in condizioni naturali (si vuol intendere in assenza di sollecitazioni), l'asse delle z . Allora, se con $p = p(x, y)$ specifichiamo una distribuzione di pressioni sulla **S**, agenti secondo z , ove si indichi con $w = (x, y)$ lo spostamento d'un punto generico P di coordinate x, y , l'equazione per l'equilibrio si scrive [3],

$$(1) \quad \Delta \Delta w(x, y) = p(x, y),$$

essendo scelte le unità di misura in modo, che risulti $= 1$ (per sola semplicità di scrittura) il *coefficiente di rigidità* (*Steifigkeits-koeffizient*, *flexural rigidity*)

$$R = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

che notoriamente moltiplica in quest'equazione il doppio *operatore laplaciano*

$$(2) \quad \Delta \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Ciò posto, detto S il campo d'integrazione definito dalla superficie testé definita, il bordo della quale si indicherà con σ , sia $G = G(P, P')$ una funzione (la *seconda funzione di Green*) di due punti P e P' di S , (di coordinate x, y rispettivamente ξ, η), tale che si abbia in tutto il campo:

$$\Delta \Delta G = 0,$$

a) l'operatore $\Delta \Delta$ essendo indifferentemente formato colle coordinate di P o di P' ;

b) che al contorno σ soddisfi alle condizioni che si vogliono imporre alla w , le quali sono, per i tipi di vincolo più frequente, l'*incastro* o l'*appoggio libero* fornite dalle due coppie

$$(3) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

rispettivamente

$$(4) \quad w = 0, \quad \mathfrak{D}(w) = \nu \Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0,$$

essendo n la normale esterna, spiccata in un punto P di σ ;

c) che in tutto S si possa porre

$$(5) \quad G(P, P') = \frac{1}{8\pi} r^2 \lg r + g(P, P')$$

con r eguale alla distanza $\overline{PP'} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ e $g = g(P, P')$ funzione continua con le sue prime quattro derivate (seconda funzione *preliminare* di Green).

Sorpassando sulla questione d'esistenza come pure su quella costruttiva di una tale funzione, esaurita dalle ricerche di Boggio [4], Hadamard [5] ed altri, l'integrale generale dalla (1) si scriverà nella forma

$$(6) \quad w(P) = \int_S G(P, P') p(P') dS',$$

essendo dS' l'elemento di superficie di S espresso nelle coordinate ξ e η di P' .

Dopo questi preliminari, di cui ci si varrà in seguito, si caratterizzi una sollecitazione piana con le tre componenti *caratteristiche* $n_{xx} = n_{xx}(P)$, $n_{xy} = n_{xy}(P)$, $n_{yy} = n_{yy}(P)$.

Relativamente ad esse riterremo, in conformità con la teoria classica, che possano ricavarsi come derivate seconde d'una funzione $A = A(P)$ (funzione di Airy [6] *biarmonica* in S , *tipica* della sollecitazione che si considera, secondo le relazioni

$$(7) \quad n_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad n_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

e si abbiano quindi in tutto il campo le relazioni, *fondamentali* nella nostra ricerca,

$$(8) \quad \frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0,$$

e

$$(9) \quad \frac{\partial^2 n_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 n_{yy}}{\partial y^2} = 0.$$

Riterremo inoltre, come condizione essenziale, che dette componenti, riguardate come coefficienti d'una *forma quadratica* in due variabili φ e ψ

$$(10) \quad F = n_{xx} \varphi^2 + 2 n_{xy} \varphi \psi + n_{yy} \psi^2,$$

sieno tali da renderla *definita e negativa*, vale a dire, che si abbia in tutto il campo [7] oltre a $n_{xx} < 0$ ⁽¹⁾,

$$(11) \quad n_{xx} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0;$$

con che si vuole esprimere che la conica delle sollecitazioni relativa al punto generico P è chiusa, dunque una *ellisse*.

(1) In questa Nota si chiamano, con uso invalso in Elasticità matematica, di compressione sforzi, n_{xx} , n_{yy} negativi. Da ciò la richiesta del carattere definito negativo della F .

Allora, se con L indichiamo l'operatore differenziale

$$(12) \quad L = n_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

manifestamente *autoaggiunto* per le nominate relazioni (8), l'equazione per gli spostamenti w (quella che traduce il *principio di minimo* di cui è cenno nel § 1), permanendo ancora la pressione p , si scrive [8]

$$(13) \quad \Delta \Delta w = \tau L(w) + p,$$

τ essendo un parametro numerico, in particolare eguale all'unità, che moltiplica le tre componenti n .

Poiché il termine additivo $\tau L(w)$ della p è, in linea formale, assimilabile a questa, dal confronto della (13) con le (1) e (6) risulta senz'altro

$$(14) \quad w(P) = \tau \int_S G(P, P') L'[w(P')] dS' + \pi(P),$$

essendo

$$(15) \quad \pi(P) = \int_S G(P, P') p(P') dS'$$

e

$$(16) \quad L' = n_{xx}(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 n_{xy}(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + n_{yy}(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

vale a dire, l'operatore L già definito applicato alle coordinate ξ e η di P' .

Per riportare l'equazione *integro-differenziale* (14) ad una equazione *integrale* del tipo di Fredholm eseguiamo una doppia *integrazione per parti*, sicuramente legittima per la specificazione della G . Si ottiene, sfruttando l'annullarsi al contorno della w come della G ,

$$(17) \quad w(P) = \tau \int_S \left\{ \frac{\partial^2 [n_{xx}(P') G(P, P')]}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 [n_{xy}(P') G(P, P')]}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 [n_{yy}(P') G(P, P')]}{\partial \eta^2} \right\} w(P') dS' + \pi(P),$$

od anche, tenendo presenti le (8) e (9), l'equazione

$$(18) \quad w(P) = \tau \int_S L'[G(P, P')] w(P') dS' + \pi(P)$$

che è manifestamente del tipo classico, non omogeneo del Fredholm,

$$(19) \quad w(P) = \tau \int_S K(P, P') w(P') dS' + \pi(P),$$

il nucleo $K = K(P, P')$, *logaritmicamente infinito* per P coincidente con P' , essendo dato dal *secondo parametro differenziale autoaggiunto* della seconda funzione di Green, preso rispetto alle coordinate di P' .

Ciò posto, in base ai teoremi generali della teoria delle equazioni integrali possiamo affermare che, ove il parametro τ sia distinto da una delle radici $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$; dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il suo determinante fondamentale, esisterà una ed una sola soluzione della (18); che invece non ne esisterà alcuna se vi è coincidenza con una delle radici suddette.

Ed avendosi altresì dalla teoria generale la nozione d'esistenza di soluzioni non nulle (*autofunzioni*) dell'equazione

$$(20) \quad w(P) = \tau \int_S K(P, P') w(P') dS', \quad K(P, P') = L'[G(P, P')]$$

corrispondentemente alle nominate radici τ_k (cosidette *valori caratteristici* o *autovalori*), resta implicitamente confermata l'esistenza di soluzioni *non nulle* dell'equazione

$$(21) \quad \Delta \Delta w = \tau L(w),$$

quindi, di configurazioni d'equilibrio corrispondenti alle *sole* sollecitazioni piane $\tau_k n_{xx}, \tau_k n_{xy}, \tau_k n_{yy}$.

Le quali configurazioni tutte, per quanto precede, hanno i caratteri precipui dell'instabilità (l'addizione d'una sollecitazione p , comunque piccola, producendo spostamenti comunque grandi) come già si ebbe a rilevare.

Con ciò sono conseguiti i teoremi d'esistenza come pure, attraverso ai metodi del Fredholm, gli algoritmi risolutivi formali del nostro problema. Per il rigore però fa d'uopo provare che, non solo è possibile (come abbiamo fatto) passare dall'equazione differenziale a quella integrale, ma anche, che è altresì possibile, rifacendo il cammino, pervenire da quest'ultima all'originaria equazione (13). Una tale dimostrazione, come è evidente, si compendia nella verifica dell'esistenza delle quattro prime derivate della w ricavata (in modo qualunque) dalla (19) o (20), a seconda che sia $p = 0$ o $\neq$ da zero.

Rimandando alla Nota originale per la dimostrazione della *Esistenza delle quattro prime derivate delle soluzioni dell'equazione integrale e del Principio d'equivalenza*, passiamo alle

§ 3. - CARATTERIZZAZIONI QUALITATIVE ULTERIORI.

Dagli sviluppi in serie di τ , ricavabili per la w in base ai teoremi di Fredholm, risulta il carattere suo di funzione *meromorfa*. Passiamo a dimostrare che gli *autovalori* τ_k ($k = 1, 2, \dots$), che ne sono i *poli*, sono tutti *semplici*, *reali* e *positivi*.

Prendendo le mosse dalla (21), procedendo *per assurdo*, supponiamo che un generico *autovalore* τ_k possa esser posto nella forma complessa

$$(22) \quad \tau = \tau' + i\tau'' \quad (\tau', \tau'' \text{ numeri reali, } i = \sqrt{-1}).$$

Poiché si dovrà avere in conformità

$$(22 a) \quad w = w' + iw'' \quad (w', w'' \text{ funzioni reali di } P)$$

risulta dalla (21), eguagliando tra loro le parti reali rispettivamente quelle immaginarie,

$$(23) \quad \Delta \Delta w' = \tau' L(w') - \tau'' L(w''),$$

$$(24) \quad \Delta \Delta w'' = \tau'' L(w') + \tau' L(w'').$$

Moltiplicando la (23) per $w'' dS$, la (24) per $w' dS$, integrando e sottraendo si ottiene

$$(25) \quad \int_S (w'' \Delta \Delta w' - w' \Delta \Delta w'') dS = \tau' \int_S \{w'' L(w') - w' L(w'')\} dS - \\ - \tau'' \int_S \{w'' L(w'') + w' L(w')\} dS.$$

Ora, dalla formula di Green generalizzata

$$(26) \quad \int_S (w' \Delta \Delta w'' - w'' \Delta \Delta w') dS = \int_{\sigma} \left(\Delta w' \frac{\partial w''}{\partial n} - \Delta w'' \frac{\partial w'}{\partial n} \right) d\sigma + \\ + \int_{\sigma} \left(w' \frac{\partial (\Delta w'')}{\partial n} - w'' \frac{\partial (\Delta w')}{\partial n} \right) \partial \sigma,$$

si ha, come è facile provare,

$$(27) \quad \int_S (w' \Delta \Delta w'' - w'' \Delta \Delta w') dS = \int_{\sigma} \left(\mathfrak{D}(w') \frac{\partial w''}{\partial n} - \mathfrak{D}(w'') \frac{\partial w'}{\partial n} \right) d\sigma + \\ + \int_{\sigma} (w' D(w'') - w'' D(w')) d\sigma$$

essendo $\mathfrak{D}$ l'operatore già definito al § 1 e D l'operatore

$$D = \frac{\partial}{\partial n} [\Delta] + \nu \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial n} \right],$$

dove t designa la direzione tangente a σ .

Quindi, per le condizioni (3) o (4), in ogni caso, al posto della (27),

$$(28) \quad \int_S (w' \Delta \Delta w'' - w'' \Delta \Delta w') dS = 0.$$

D'altra parte, poiché la w' come la w'' s'annulla al contorno, si avrà dalla (25)

$$(29) \quad \int \{w' L(w'') - w'' L(w')\} dS = 0$$

ed infine, per definizioni fatte,

$$(30) \quad \int_S w L(w) dS = - \int_S \left\{ n_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + n_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS > 0$$

con w eguale w' o w'' .

Risulta perciò al posto della (25), la relazione $\tau'' \cdot L = 0$ ($L =$ quantità non nulla) la quale non potrà esser soddisfatta che per $\tau'' = 0$.

Dimostriamo infine che, per le premesse fatte, gli *autovalori* τ son tutti *positivi*. All'uopo moltiplichiamo la (14), senza termine perturbante, per $L(w)$ ed integriamo su tutto S . Risulta allora

$$(31) \quad \int_S w(P) Lw(P) dS = \tau \int_S \int_S G(P, P') L'[w(P')] L[w(P)] dS dS'.$$

Quindi, ove si osservi che la G è tale che, data una qualunque funzione Φ di P si ha

$$(32) \quad \int_S \int_S G(P, P') \Phi(P) \Phi(P') dS dS' > 0 \quad (2);$$

(2) Per dimostrare che effettivamente tale disuguaglianza (32) è soddisfatta, consideriamo nel campo S l'equazione

$$(*) \quad \Delta \Delta w = \psi,$$

con le condizioni al contorno fornite da una delle coppie 3) o 4).

Se $\psi = \psi(P)$ è una funzione arbitraria dei punti P di S (come vogliamo supporre) ma tale da soddisfare alle condizioni, poco restrittive del resto, che danno i limiti d'applicabilità della formula di Lauricella, avremo, con le notazioni solite

$$(**) \quad w(P) = \int_S G(P, P') \psi(P') dS'.$$

Moltiplicando allora questa espressione di $w(P)$ per $\psi(P) dS$, l'integrazione estesa a tutto S dà

$$\int_S w(P) \Delta \Delta w(P) dS = \int_S \int_S G(P, P') \psi(P) \psi(P') dS dS'.$$

La dimostrazione della (32) è con ciò ricondotta a provare che, ove la $w = w(P)$ soddisfi alle condizioni 3) o 4) (come effettivamente avviene se la G sotto il doppio segno integrale s'identifica con una delle due funzioni di Green considerate) si ha in ogni caso

$$(***) \quad \int_S w \Delta \Delta w dS > 0.$$

Ciò risulta senza notevole difficoltà sfruttando con lievi modifiche una celebre formula da Kirchoff trovata ed adottata per primo in un campo di questioni prossime a quelle che ci riguardano.

Detta formula, per il nostro scopo, si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \int_S w \Delta \Delta w dS - \int_{\sigma} w \left\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial t} \left[\cos \delta \sin \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} d\sigma + \\ + \int_{\sigma} \frac{\partial w}{\partial n} \left\{ \nu \Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} d\sigma = \int_S \left\{ \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1 \rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2} \right)^2 \right\} dS, \end{aligned}$$

per la (30), assimilando la Φ con la $L[w(P)]$, si ottiene necessariamente $\tau > 0$, come volevamo provare.

Riguardiamo ora la w come funzione di τ , sotto forma di sviluppo in serie di potenze del tipo

$$(33) \quad w = w_0 + w_1 \tau + w_2 \tau^2 + \dots + w_m \tau^m + \dots$$

con w_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) coefficienti (funzioni di P) da determinare.

Sostituendo nella (21) ricaviamo lo schema algoritmico

$$(34) \quad \Delta \Delta w_0 = 0$$

e.

$$(35) \quad \Delta \Delta w_m = L(w_{m-1}) \quad \text{per } m > 1$$

con le condizioni al contorno fornite (per la (35)) da una delle coppie (3) o (4).

Rilevando l'*equivalenza* della formula generica (35) con le

$$(36) \quad w_m(P) = \int_S L'[G(P, P')] w_{m-1}(P') dS'$$

oppure

$$(37) \quad w_m(P) = \int_S G(P, P') L'[w_{m-1}(P')] dS',$$

passiamo a dimostrare che la serie (33), che sappiamo essere *meromorfa* in base ai teoremi di Fredholm, possiede soli *poli semplici*, come annunciamo.

Supponiamo all'uopo che esista un *polo* τ_k d'ordine r per $r > 1$. Si avrà, sviluppando in un intorno convenientemente vicino,

$$(38) \quad w(P) = \frac{v_r(r)}{(\tau - \tau_k)^r} + \frac{v_{r-1}(P)}{(\tau - \tau_k)^{r-1}} + \dots$$

$v_r, v_{r-1}, \dots$ essendo funzioni di P che si sanno calcolare. Infatti, sostituendo nella (21), prendendo i termini in $\frac{1}{(\tau - \tau_k)^r}$ e $\frac{1}{(\tau - \tau_k)^{r-1}}$ risulta

$$(39) \quad \Delta \Delta v_r = \tau_k L(v_r)$$

essendo ρ_1 e ρ_2 le *curvature principali* della superficie $w = w(P)$ e δ l'angolo che la normale esterna n fa con l'asse x .

Sfruttando in definitiva le condizioni limiti 3) o 4), si ha

$$\int_S w \Delta \Delta w dS = \int_S \left\{ \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1 \rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2} \right)^2 \right\} dS.$$

Si riconosce ora in modo immediato che, se $\nu < 1$, la funzione integranda del termine a destra, riguardata come *forma quadratica* nelle variabili $1/\rho_1, 1/\rho_2$, sarà senz'altro *positiva*. Poiché effettivamente, per realtà ben note, la costante ν è, per ogni materiale, minore dell'unità, resta conseguita la giustificazione della (***)

e

$$(39 a) \quad \Delta \Delta v_{r-1} = \tau_k L(v_{r-1}) + L(v_r)$$

con le solite condizioni ai limiti (3) oppure (4).

Moltiplicando la (39) per $v_{r-1} dG$, la (39 a) per $v_r dS$, ove si integri in tutto S e si sottraggano una dall'altra le equazioni che risultano, si ricava

$$\int_S (v_{r-1} \Delta \Delta v_r - v_r \Delta \Delta v_{r-1}) dS = \tau_k \int_S (v_{r-1} L(v_r) - v_r L(v_{r-1})) dS + \int_S v_r L(v_r) dS.$$

Ricordando alcune trasformazioni ed eguaglianze già adottate (le (26), (27), (28), si ottiene

$$\int_S \left\{ n_{xx} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial v_r}{\partial x} \frac{\partial v_r}{\partial y} + n_{yy} \left(\frac{\partial v_r}{\partial y} \right)^2 \right\} dS = 0.$$

Perché tale integrale si annulli è necessario che identicamente si annullino in tutto il campo le derivate $\frac{\partial v_r}{\partial x}, \frac{\partial v_r}{\partial y}$, poiché, come si ebbe a rilevare, la funzione sotto il segno è, per ipotesi, in ogni caso differente da zero.

Ma al contorno σ , si adotti la coppia di condizioni (3) o la coppia (4), la v_r deve annullarsi. Perciò si avrà in conformità, $v_r = 0$ in tutto S .

Tale procedimento essendo naturalmente valido per ogni r intero superiore all'unità, porta a riconoscere che effettivamente la w non può avere che *poli semplici*.

Concludendo, osserveremo che il Boggio [12] ebbe già a rilevare, adducendo esempi assai cospicui dalla teoria dell'elasticità, del calore e dell'elettromagnetismo, che in generale, ove le funzioni che soddisfano alle equazioni delle corrispondenti teorie, abbiano, per rispetto ad un parametro, dei *poli*, questi, necessariamente, debbono essere *semplici*.

§ 4. - INTRODUZIONE DELLE COSTANTI DI SCHWARZ.

Conseguite le caratterizzazioni qualitative delle soluzioni del nostro problema, resta a vedere come queste possano ottenersi evitando le formule generali del Fredholm, di costruzione estremamente complessa nel caso nostro.

Ci proponiamo di trar partito del metodo universale e fecondo delle *approssimazioni successive*. All'uopo ci informiamo alle direttive fondamentali di Schwarz e Picard e per quanto riguarda sia l'impostazione algoritmica sia la sua giustificazione.

Riattaccandoci allo sviluppo (33) del precedente paragrafo, fissando l'attenzione su due coefficienti generici w_m, w_n , formiamo gli integrali

$$(40) \quad W_{m,n} = \int_S L(w_m) \cdot w_n dS, \quad (m, n, = 0, 1, \dots),$$

che, per certe loro proprietà di comportamento, chiameremo brevemente: *costanti di Schwarz*.

Relativamente a queste costanti passiamo a dimostrare alcune proprietà importanti.

a) Si ha in tutto il campo

$$(41) \quad W_{m,n} = W_{n,m}.$$

Infatti, integrando la (40) due volte per parti, sfruttando le (8) e (9) si ottiene ⁽³⁾

$$\int_{\dot{S}} L(w_m) \cdot w_n dS = \int_{\dot{S}} w_m L(w_n) dS.$$

vale a dire $W_{m,n} = W_{n,m}$.

b) Il valore di $W_{m,n}$ è dipendente dalla somma $m+n$, non dai particolari valori di m ed n . Vale a dire, indicato con μ un numero intero $< m, < n$, si ha

$$(42) \quad W_{m,n} = W_{m-\mu, n+\mu} = W_{m+\mu, n-\mu} = W_{m+n}.$$

Infatti, esplicitando nella (40) la funzione w_m pel tramite della formula ricorrente (37 a), si ottiene

$$\begin{aligned} W_{m,n} &= \int_{\dot{S}} L(w_n) w_m dS = \int_{\dot{S}} \int_{\dot{S}} L[w_n(P)] L'[G(P, P')] w_{m-1}(P') dS dS' = \\ &= \int_{\dot{S}} \int_{\dot{S}} L[w_n(P)] G(P, P') L'[w_{m-1}(P')] dS dS' = \\ &= \int_{\dot{S}} w_{n+1}(P') L[w_{m-1}(P')] dS' = W_{m-1, n+1}, \end{aligned}$$

e quindi, ripetendo μ volte la stessa operazione, la relazione (42) che si voleva provare.

§ 5. - COSTRUZIONE DELLA PRIMA AUTOFUNZIONE E DEL PRIMO AUTOVALORE.

Essendo, per quanto precede, lecito adottare un indice solo nella costante W , poniamo m , il primo *autovalore* τ_1 e la corrispondente *autofunzione* che indicheremo con $w^{(1)}$, è fornito dalle relazioni *limiti*

$$(42) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{W_{m-1}}{W_m} = \tau_1$$

$$(43) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\tau_1^m w_m] = w^{(1)}.$$

(3) Posto che la w_0 , ricavata dalla (34), sia nulla al contorno.

§ 6. — ESISTENZA EFFETTIVA DEI LIMITI (42), (43).

Per giustificare le nominate relazioni introduciamo i rapporti

$$(44) \quad \rho_m = \frac{W_m}{W_{m-1}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Faremo vedere anzitutto ch'essi soddisfano alle *disuguaglianze* fondamentali

$$(45) \quad \frac{W_m}{W_{m-1}} > \frac{W_{m-1}}{W_{m-2}} > \frac{W_{m-2}}{W_{m-3}} > \dots$$

Introduciamo all'uopo l'integrale *positivo*

$$(46) \quad I = - \int_S \left\{ n_{xx} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha w_m + \beta w_n) \right]^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha w_m + \beta w_n) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\alpha w_m + \beta w_n) + n_{yy} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\alpha w_m + \beta w_n) \right]^2 \right\} dS > 0,$$

con α e β costanti qualunque.

Ove si osservi che si ha identicamente, poich  tutte le w si annullano al contorno,

$$\begin{aligned} W_{2m} &= W_{m,m} = \int_S w_m L(w_m) dS \\ W_{m,n} &= \int_S w_m L(w_n) dS \\ W_{2n} &= W_{n,n} = \int_S w_n L(w_n) dS \end{aligned}$$

risulta al posto della (46), eseguendo materialmente le operazioni,

$$(47) \quad I = \alpha^2 W_{2m} + 2\alpha\beta W_{m,n} + \beta^2 W_{2n} > 0,$$

che per costruzione   una forma quadratica *positiva* e *definita* nelle α e β .

Si ha quindi

$$(48) \quad W_{2m} W_{2n} - W_{m,n}^2 > 0$$

od anche, per $n = m + 1$,

$$(49) \quad \frac{W_{2m}}{W_{2m+1}} > \frac{W_{2m+1}}{W_{2m+2}}.$$

Ci  posto, introduciamo, sfruttando la (32), l'integrale *positivo*

$$(50) \quad J = \int_S \int_S G(P, P') \{ \alpha L[w_m(P)] + \beta L[w_{m-1}(P)] \} \cdot \{ \alpha L'[w_m(P')] + \beta L'[w_{m-1}(P')] \} dS dS'$$

con α e β costanti da riguardare alla stregua di prima.

Eseguendo materialmente le operazioni, ove si osservi che, per le (37), valgono le relazioni

$$W_{2m+1} = W_{m,m+1} = \int_S w_{(m+1)} L(w_m) dS = \iint_{S S'} G(P, P') L[w_m(P)] L'[w_m(P')] dS dS',$$

$$W_{2m} = W_{m,m} = \int_S w_m L(w_m) dS = \iint_{S S'} G(P, P') L[w_m(P)] L'[w_{m-1}(P')] dS dS',$$

$$W_{2m-1} = W_{m,m-1} = \int_S w_m L(w_{m-1}) dS = \iint_{S S'} G(P, P') L[w_{m-1}(P)] L'[w_{m-1}(P')] dS dS',$$

si ottiene

$$J = \alpha^2 W_{2m+1} + 2 \alpha \beta W_{2m} + \beta^2 W_{2m-1} > 0.$$

Potremo perciò esprimere tale disuguaglianza nella forma

$$(51) \quad W_{2m+1} W_{2m-1} - W_{2m}^2 > 0,$$

oppure

$$(52) \quad \frac{W_{2m+1}}{W_{2m}} > \frac{W_{2m}}{W_{2m-1}} > \frac{W_{2m-1}}{W_{2m-2}} > \dots$$

Associando queste relazioni (52) alle (49) restano manifestamente provate le (45). Quindi i valori ρ_m , in conformità con le (45), *crescono* con m . Comunque però, essi tendono ad un limite *finito*. Ciò risulta osservando che altrimenti, la serie

$$(53) \quad W_0 + W_1 \tau + W_2 \tau^2 + \dots + W_m \tau^m + \dots$$

non convergerebbe che per il valore banale $\tau = 0$, il che porterebbe a dichiarare *divergente* per ogni valore non nullo di τ la serie

$$w_0 + w_1 \tau + w_2 \tau^2 + \dots + w_m \tau^m + \dots,$$

in contrarietà con i teoremi di Fredholm.

Si avrà dunque necessariamente

$$(54) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{W_{m+1}}{W_m} = \rho_1 \quad (\rho_1 = \text{quantità finita non nulla}).$$

Dimostreremo ora, che $1/\rho$ è il *raggio di convergenza* della serie (35) e, per quanto precede, il primo autovalore τ_1 .

All'uopo cerchiamo di costruire una disuguaglianza che colleghi la generica w_m dello sviluppo di w alla generica costante W_m .

Poniamo nella (46) la $G(P, P')$ al posto della w_n (con P' fisso) ed in essa dividiamo la w_m per $\sqrt{W_{2m}}$. Otteniamo allora, integrando per parti, ancora indicando con I l'espressione che ne risulta, con Λ l'operatore definito dalla (28)

$$(55) \quad I = \alpha_2 \frac{W_{2m}}{W_{2m}} - \frac{2 \alpha \beta}{\sqrt{W_{2m}}} \int_S \Lambda[w_m(P), G(P, P')] dS + \\ - \beta^2 \int_S \left\{ n_{xx} \left[\frac{\partial G(P, P')}{\partial x} \right]^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial G(P, P')}{\partial x} \frac{\partial G(P, P')}{\partial y} + n_{yy} \left[\frac{\partial G(P, P')}{\partial y} \right]^2 \right\} dS > 0.$$

Avendosi però con una ulteriore integrazione per parti, (ove si ricordi l'algoritmo costruttivo fornito dalla (37)

$$-\int_S \Lambda [w_m(P), G(P, P')] dS = \int_S L[G(P, P')] w_m(P) dS = w_{m+1}(P'),$$

potremo scrivere, poiché è $I > 0$, indicando con $\Omega(P')$ il coefficiente di β^2 nella (55),

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta \frac{w_{m+1}(P')}{\sqrt{W_{2m}}} + \beta^2 \Omega(P') > 0,$$

e quindi, coi soliti criteri

$$(56) \quad \frac{w_{m+1}^2(P')}{W_{2m}} < \Omega(P').$$

Osservando poi, che per essere $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_m$, si ha

$$\frac{W_{2m+2}}{W_{2m}} = \frac{W_{2m+2}}{W_{2m+1}} \cdot \frac{W_{2m+1}}{W_{2m}} = \rho_{2m+2} \cdot \rho_{2m-1} > \rho_1^2$$

e perciò

$$W_{2m+2} > \rho_1^2 W_{2m};$$

ponendo eguale ad Ω il limite superiore (*positivo* per premessa) di $\Omega(P')$, potremo anche scrivere la disuguaglianza (56) nella forma

$$w_{m+1} < \frac{\sqrt{\Omega}}{\rho_1} \sqrt{W_{2m+2}},$$

oppure, sostituendo m ad $m+1$,

$$(57) \quad w_m < K \sqrt{W_{2m}} \quad \left(K = \frac{\sqrt{\Omega}}{\rho_1} \right).$$

Dal fatto che il rapporto $\frac{w_m}{\sqrt{W_{2m}}}$ non supera mai, qualunque sia m , una costante finita K , scende, seguendo un criterio di convergenza dovuto a Schwarz, che la serie per la w , converge *assolutamente ed uniformemente* in tutto S per ogni valore di τ inferiore a $1/\rho_1$, e quindi che $\tau = \tau_1 = 1/\rho_1$ ne è precisamente il *raggio di convergenza*.

Infatti, la serie

$$K (\sqrt{W_0} + \tau \sqrt{W_2} + \dots + \tau^m \sqrt{W_{2m}}),$$

maggiorante della (33) converge per $\tau < 1/\rho_1$, come risulta osservando che il quoziente tra due termini successivi

$$\frac{\tau^m \sqrt{W_{2m}}}{\tau^{m-1} \sqrt{W_{2m-2}}} = \tau \sqrt{\frac{W_{2m}}{W_{2m-1}} \cdot \frac{W_{2m-1}}{W_{2m}}} = \tau \sqrt{\rho_{2m-1} \cdot \rho_{2m}}$$

ha per limite (per $m = \infty$) il valore $\rho\tau$.

Per dimostrare la (43), osserviamo che il punto $\tau_1 = 1/\rho_1$ dev'essere necessariamente un *polo semplice*.

Quindi in un suo intorno sarà legittimo lo sviluppo del tipo

$$(58) \quad w(P) = \frac{w'(P)}{1 - \frac{\tau}{\tau_1}} + v_0(P) + v_1(P) \cdot \tau + \dots + v_m(P) \cdot \tau^m + \dots,$$

$w' = w'(P)$ essendo il *residuo del polo*; $v_0, v_1, \dots, v_m$; essendo funzioni determinabili di P .

Confrontando questo sviluppo con l'originario (33), si ottiene senz'altro

$$(59) \quad w_m(P) = v_m(P) + \frac{w'(P)}{\tau_1^m},$$

e dunque ovviamente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_m \tau_1^m = w'.$$

Introducendo la (58) nell'equazione (20), eguagliando i coefficienti delle potenze eguali si trova

$$(60) \quad w' = \tau_1 \int_S L'[G(P, P')] w'(P') dS$$

ed il sistema *ricorrente* per la formazione delle v

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = \tau \int_S L'[G(P, P')] w'(P') dS', \\ v_1 = \int_S L'[G(P, P')] v_0(P') dS', \\ \dots \dots \dots \\ v_m = \int_S L'[G(P, P')] v_{m-1}(P') dS'. \end{array} \right.$$

Ora la (60) è proprio l'equazione di cui si cercava la soluzione, la w' la soddisfa *identicamente*, come pure soddisfa alle condizioni al contorno. Si avrà quindi $w' = w^{(1)}$, cioè l'identità tra la (59) e la (43), ed infine $(1/\rho) = \tau_1$, come si voleva dimostrare.

Ciò posto formiamo con le v testé definite, poiché ne è assicurata la derivabilità, le costanti positive

$$W_{m+n} = \int_S L(w_n) v_n dS.$$

Si avranno ancora le disuguaglianze

$$\frac{W_1}{W_0} < \dots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \dots$$

dalle quali si conclude l'esistenza d'un limite finito ρ_2 del rapporto

$$\frac{W'_n}{W'_{n-1}}.$$

Che se ciò non avvenisse, sarebbe necessariamente *divergente* la serie

$$v_0 + v_1 \tau + \dots + v_n \tau^n + \dots,$$

la quale però, converge anche al di là di τ_1 .

Della disuguaglianza, analoga alla (57)

$$|v_n(P)| < K' \sqrt{W'_{2n}}$$

che si stabilisce nel modo identico al precedente, resta provata l'identità del *cerchio di convergenza* delle due serie

$$v_0 + v_1 \tau + \dots + v_n \tau^n + \dots$$

e

$$W_0 + \dots + W_1 \tau + \dots + W_n \tau^n + \dots$$

Con ciò si arriva al secondo polo $\tau_2 = 1/\rho_2$.

In conformità, ove si osservi che in un intorno conveniente di τ_2 si dovrà avere

$$w = \frac{v}{1 - \frac{\tau}{\tau_2}} + u_0 + u_1 \tau + \dots + u_m \tau^m + \dots,$$

da un confronto con l'originario sviluppo

$$v_0 + v_1 \tau + \dots + v_n \tau^n + \dots,$$

risulta la relazione analoga alla (59)

$$v' = u_m + \frac{v_m}{\tau_2^m}$$

e quindi

$$v' = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_2^m v_m.$$

Una tale funzione soddisfa alla (25) e quindi alla (26) nonché rispetta le condizioni al contorno. Perciò essa s'identifica come integrale relativo all'autovalore τ_2 , quindi come *seconda autofunzione* $w^{(2)}$.

Procedendo così di seguito, sulle tracce segnate da Picard, si dimostra l'esistenza di tutti gli autovalori, di cui l'insieme, chiameremo *spettro relativo alla specifica sollecitazione* n , e delle corrispondenti soluzioni o *autofunzioni* caratterizzanti le configurazioni (instabili) d'equilibrio.

NOTA BIBLIOGRAFICA.

- [1] Cfr. per esempio A. NÀDAI, *Elastische Platten*. (Berlin, Springer, 1925) pp. 231-234.
 [2] G. KRALL, *Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico*, « Rendiconti Acc. Lincei », vol. III, serie 6^a, pp. 744-749 (1926).
 [3] A. NÀDAI, op. cit., pp. 19-22.
 [4] T. BOGGIO, *Sull'equilibrio delle piastre incastrate*, « Rend. Acc. Lincei », vol. X, serie 5^a, (1901), pp. 199-205; *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », t. XX, pp. 1-39 (1905); R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* (Milano, Hoepli, 1904) pp. 1-54.
 [5] I. HADAMARD, *Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires*, « Ann. de l'École Normale », 3^a serie, t. XVIII (1901); *Le Problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques encastrees*, « Mémoires de l'Ac. des Sciences », t. XXXIII.
 [6] A. NÀDAI, op. cit., pp. 222-225.
 [7] Cfr. per esempio BIANCHI, *Lezioni di Geometria analitica* (Pisa, Spoerri, 1915) Appendice.
 [8] A. NÀDAI, op. cit., pp. 232-236.
 [9] Cfr. per esempio G. VIVANTI, *Teoria delle equazioni integrali lineari* (Milano, Hoepli, 1916) pp. 121-154.
 [10] H. A. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Erster Band. (Berlin, Springer 1890) pp. 241-269; É. PICARD, *Sur quelques applications de l'équation de M. Fredholm*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », t. XXII (1906) pp. 241-259; *Traité d'Analyse* Tome III (Paris, Gauthier-Villars, 1908) pp. 100-128.
 [11] R. MARCOLONGO, op. cit., p. 17.
 [12] T. BOGGIO, *Sopra alcuni teoremi di fisica matematica*. Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908).

NOTE E COMPLEMENTI

Le generalità che precedono si illustrano bene attraverso l'espressione bilineare, secondo Hilbert, della funzione di influenza $G = G(P, P')$. Per arrivarvi, sommariamente procedendo, si considerino le vibrazioni libere della lastra elastica che si considera. Se μ_0 è la massa per unità di superficie si ha per la configurazione $u = u(P)$ di vibrazione, l'equazione integrale del Fredholm

$$(*) \quad u(P) = \sigma^2 \int_S \mu_0 G(P, P') u(P') dS(P')$$

σ^2 essendo notoriamente legato ai periodi di vibrazione T dalla relazione $T = 2\pi : \sigma$.

La (*) ammette, per una serie discreta di *autovalori* σ_ρ^2 ($\rho = 1, 2, \dots$) tutti reali e positivi, ordinabili in serie crescente, *autosoluzioni* $u_\rho = u_\rho(P)$ ortonormali chiuse, quindi soddisfacenti, per esse soltanto, l'equazione

$$\int_S \mu_0 u_\rho u_\tau dS = \begin{cases} 1 & \rho = \tau, \\ 0 & \rho \neq \tau. \end{cases}$$

Sviluppando la $G(P, P')$ in serie di autofunzioni u_ρ , procedendo alla Fourier si trova, ciò che vale in rigore, la annunciata espressione bilineare

$$G(P, P') = \sum_{\rho} \frac{u_\rho(P) u_\rho(P')}{\sigma_\rho^2}.$$

Per una piastra rettangolare di lati a, b , $S = a \times b$ è, come subito si constata, ove sui bordi si abbia l'appoggio snodato, ($w = 0$, $w'' = 0$),

$$(**) \quad u_q(xy) = u_q(P) = \frac{2}{ab\mu_0} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \sigma_q^2 = \frac{B}{\mu_0} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2$$

ρ indicando una coppia di interi m, n . Segue per $P = P(x, y)$, $P' = P'(x', y')$

$$(***) \quad G(P, P') = \frac{4}{ab\mu_0} \sum_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y'}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}.$$

Ora la (18), per $\pi(P) = 0$ per semplicità, consente il calcolo degli autovalori τ reali positivi ordinabili in serie crescente se $n_{xy} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$, $n_{xx} < 0$ (con che anche $n_{yy} < 0$) attraverso un principio variazionale non naturale o atipico, precisamente

$$(***) \quad \int_S \left\{ w(P) - \tau \int_S L' [G(PP')] w(P') dS' \right\} \delta w(P) dS = 0$$

$w(P)$ essendo però limitata alla classe di funzioni

$$w(P) = \sum_q A_q u_q(P)$$

con le A_q arbitrarie e le $u_q = u_q(P)$ ad esempio le autofunzioni (**) del problema vibratorio.

Da (****) si trova, ponendo ordinatamente in δw ,

$$A_1 = 1, \quad A_q = 0 \quad \text{per } q \neq 1; \quad A_2 = 1, \quad A_q = 0 \quad \text{per } q \neq 2; \text{ etc.},$$

un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee nelle A_q di cui la condizione di compatibilità fornisce un'equazione di cui le radici, almeno per $N \rightarrow \infty$ dovrebbero tendere agli autovalori τ_q . Ponendo $n_{xx} > 0$, $n_{yy} > 0$, sforzo di compressione come d'uso, non resta che richiedere il carattere definitivo delle F . e si ha, per $n_{xy} = 0$ (caso particolarmente semplice attesa l'ortogonalità)

$$\lambda_1 = \lambda_{cr} = \min \frac{4B}{ab} \frac{n_{xx} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + n_{yy} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$$

il minimo essendo riferito alla coppia di interi m, n .

Per $n_{xy} \neq 0$ le variabili non si separano più ed occorre affrontare il sistema algebrico completo per la A_q , (come si fa a pag. 275). Anzi, si può dare la circostanza che per $n_{xx} = n_{yy} = 0$, λ abbia doppio segno (caso della lastra sollecitata da soli sforzi di taglio ai bordi che si trova in condizioni identiche se si cambia il segno).