

Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti ^(*).

1. a) È sempre aperta la questione della stabilità dell'equilibrio delle volte autoportanti. Si allude a quelle volte cilindriche su direttrici particolari, necessariamente sovralzate, come si dimostra, sull'ideale catenaria dei carichi diffusi passante per il loro vertice e per i loro due estremi liberi. Liberi, perché queste volte sono prive di imposta proprio in corrispondenza alle generatrici di bordo $\psi = -\psi_0$, $\psi = +\psi_0$. Naturalmente, per sostenersi, queste volte devono essere timpanate agli estremi $x = 0$, $x = L$ delle generatrici. I timpani sorreggono tutto: trasmettono i carichi verticali ai pilastri su cui poggiano, prendono le spinte che avrebbero dovuto essere prese dalle mancanti imposte o, in luogo di queste, dai tiranti in corrispondenza ai pilastri che in duplice filare si distribuiscono nelle volte ordinarie lungo le generatrici di bordo. L'assenza di imposte o di pilastri e tiranti (cfr. fig. 1 ⁽¹⁾) giustifica sempre ampiamente la denominazione di *volta autoportante*.

Il gioco statico secondo cui tutti i carichi si trasmettono ai timpani non è quello della trave ordinaria, attesa la generale sottigliezza della volta e attese le dimensioni globali della direttrice, più o meno dell'ordine della luce L . Non è un gioco statico semplice a meno che non si riesca a semplificarlo considerando i soli sforzi T_2 , S , T_1 , nella superficie (cfr. fig. 2) per arrivare ad un equilibrio estensionale puro che soddisfi sufficientemente le *condizioni al contorno*: in particolare T_2 ed S nulli sulle generatrici di bordo, T_1 nullo in corrispondenza ai timpani, se questi non reagiscono per loro natura normalmente al loro piano, oppure condizioni più complicate se invece tale reattività sussiste, come ad esempio nel caso della volta continua su più od infinite campate.

b) Tipi classici di direttrici sono il semicerchio, la cicloide, la semiellisse, tutte curve per cui la tangente ai bordi risulta parallela ai carichi se questi derivano dal peso proprio od accidentale quindi verticale. Là, dove la tangente è parallela ai carichi è intuibile che T_2 , sforzo assiale nella direttrice, si annulla; infatti se Z è la componente del carico sulla normale in un punto ed R il raggio di curvatura, è $T_2 = RZ$. Se è facile annullare T_2 sulle gene-

(*) Riassunto da G. KRALL e D. CALIGO, *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXX (serie VIII), fasc. 2 - Febbraio - fasc. 3 - Marzo - fasc. 4 - Aprile - fasc. 5 - Maggio e dal Vol. XXXI, fasc. 1-2 - Luglio-Agosto - Ferie - 1961 e voce « Volte autoportanti », in *Manuale dell'Ingegnere*, Ed. Cremonese, Roma 1961.

(1) G. KRALL, *Le volte autoportanti*, in *Manuale dell'Ingegnere Civile* (ed. Cremonese, Roma 1959), pp. 739-771; cfr. anche in « Tecnica Italiana », Trieste, dicembre 1954, da dove sono tratti gli esempi illustrativi, su progetti dell'autore, qui ed in seguito riportati.

ratrici di bordo ed è quindi possibile far a meno delle imposte o dei pilastri e tiranti ordinari, non sempre è facile annullare il taglio S .

Ove non si riesca c'è però un modo che il calcolo dell'equilibrio tenso-flessionale di cui si dirà in appresso dimostra accettabile, di salvare egualmente la soluzione che soddisfa le altre condizioni. Precisamente, si pensa applicato, solidale lungo il bordo, un elemento-tirante capace di assorbire,

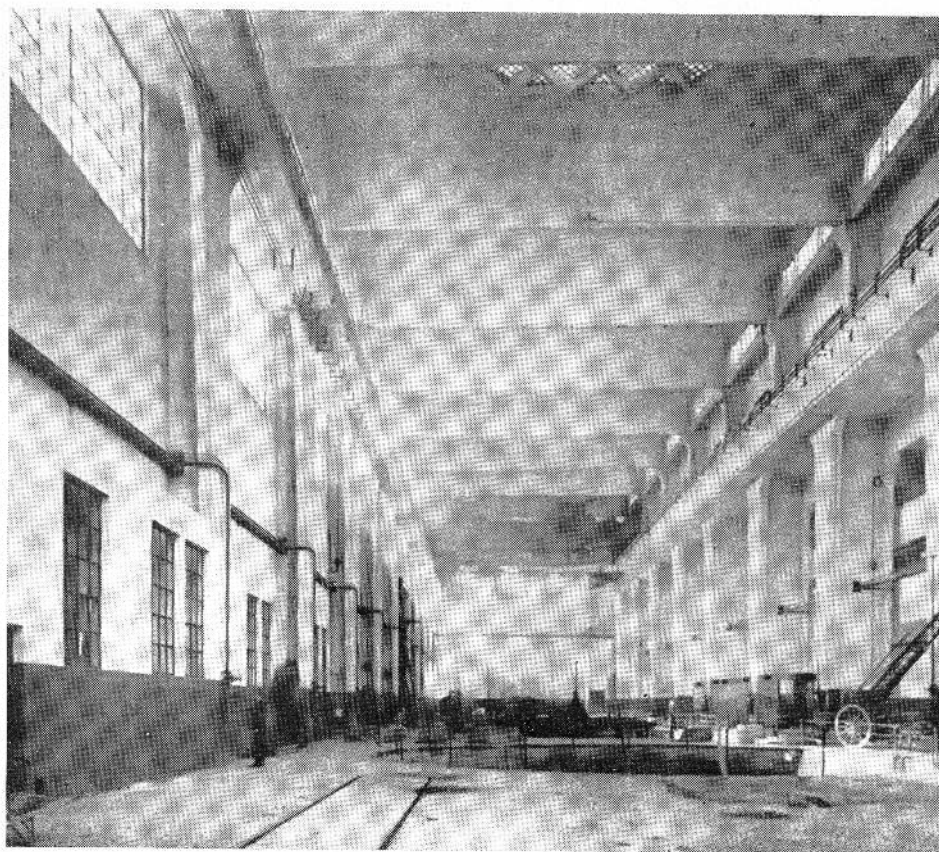


Fig. 1. - Una delle navate dell'Officina montaggio torri dell'Ansaldo (Genova).

procedendo da $x=0$ sino al mezzo ed oltre sino all'estremo $x=L$, l'integrale del taglio $\int_0^x S\left(t, \frac{\pi}{2}\right) dt$. Ciò dà luogo a discontinuità delle sollecitazioni *l'elemento-tirante* è, diciamo, filiforme, ma, ove si pensi diffuso su più fili in un conveniente intorno (dei bordi), tutto va sempre per il meglio.

c) Si dà, in generale, *la direttrice* nella forma $R = R(\psi)$ con R raggio di curvatura, in un punto generico, definito dall'angolo ψ che la normale in questo fa con una direzione assegnata. Questa direzione sia la verticale e gli archi della direttrice siano simmetrici rispetto ad un asse verticale, dal quale si inizi il conteggio della coordinata angolare ψ ; allora sui bordi si ha $\psi = \mp \psi_0$. Per la base semicircolare è $\psi_0 = \pi/2$ e tale direzione verticale caratterizza le generatrici di bordo, nelle quali la tangente è verticale (quindi la normale è orizzontale) e si annulla T_2 .

Se indichiamo con a il raggio del cerchio, o del cerchio generatore della cicloide, con a e b ($0 < b/a = k < 1$) i due semiassi dell'ellisse, risulta:

$$(1) \quad R = a, \quad \text{per il cerchio};$$

$$R = a \cos \psi, \quad \text{per la cicloide}; \quad R = ak^2 (\sin^2 \psi + k^2 \cos^2 \psi)^{-3/2}, \quad \text{per l'ellisse}.$$

2. *Elementi geometrici, spostamenti, sforzi, carichi.* - a) Sia P un punto generico dalla superficie mediana della volta, superficie che sarà indicata con Ω (attribuendo ovvii contrassegni in relazione alle sue diverse configurazioni; ad esempio Ω_0 alla configurazione C_0 , Ω' alla C' , ecc.).

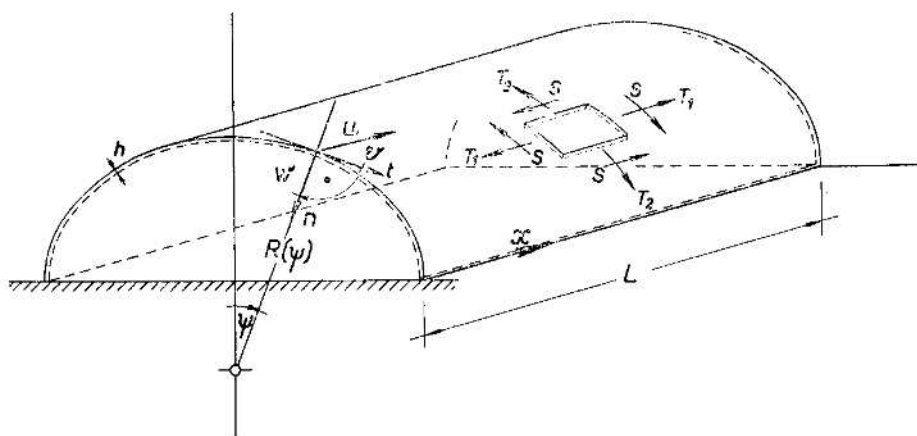


Fig. 2.

Gli *elementi geometrici* dalla volta (cilindrica) sono (cfr. fig. 2).

L , lunghezza (distanza fra due timpani);

R , raggio di curvatura ($= a$, per il semicerchio);

h , spessore (supposto piccolo, rispetto ad L e ad R);

φ_0 , apertura angolare; ψ_0 , semiapertura (in condizioni di simmetria).

Stabiliamo un sistema di coordinate x, ψ sulla Ω in modo che

ψ , coordinata angolare, cresca fra $-\psi_0$ e $+\psi_0$, nel passare da un bordo all'altro;

x , coordinata nel senso delle generatrici, cresca fra zero ed L nel passare da un timpano all'altro;

l'origine di questo sistema è dunque fissata su uno dei timpani al colmo della volta (pensata simmetrica).

b) Abbiamo indicato con

u, v, w la terna (sinistra) di *componenti dello spostamento* in direzione e verso, rispettivamente, di x , di ψ , della normale interna ad Ω ;

T_1, T_2 : *sforzi normali* alle sezioni $x = \text{costante}$, rispettivamente $\psi = \text{costante}$ (per unità di lunghezza); per abituale convenzione essi sono negativi se nel verso crescente della variabile x , risp. ψ , è esercitata una compressione;

S *sforzo di taglio* (per unità di lunghezza) corrispondente al valore comune degli sforzi di taglio tangenziali S_{12} ed S_{21} (che assumono eguale

valore nell'ipotesi di un equilibrio « a membrana » e sono differenti per le soluzioni « flessionali »; si è adottata la convenzione che sia $S > 0$ rivolto verso l'alto per chi guardi nel verso delle x crescenti la sezione della volta $x = \text{costante}$;

Z , tiro nell'elemento di bordo (cfr. n. 1 b e n. 3);

X, Y, Z , componenti del carico agenti sulla volta, con direzione e verso di u e, rispettivamente di v e w ; perciò se sulla volta agisce un carico permanente g , costante per unità di area della Ω , distribuito uniformemente a manto sulla sua superficie (come il peso proprio, quando la volta sia di materiale omogeneo) si ha

$$(2_g) \quad X = 0, \quad Y = g \sin \psi, \quad Z = g \cos \psi;$$

se, invece, la ripartizione è dovuta ad un carico accidentale p (peso per unità di area) la consideriamo regolata dalla seguente legge

$$(2_p) \quad X = 0, \quad Y = p \sin \psi \cos \psi, \quad Z = p \cos^2 \psi.$$

c) Per una volta, di cui la direttrice sia data nella forma $R = R(\psi)$ (cfr. n. 1 c), si hanno le seguenti componenti T_2, S, T_1 dello sforzo per le due distribuzioni di carico sopra considerate:

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{Carico permanente } g & \text{Carico accidentale } p \\ \left\{ \begin{array}{l} T_2 = ga t_2(\psi) \\ S = \mp gt(x) s(\psi) \\ T_1 = \frac{g}{a} m(x) t_1(\psi) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} T_2 = pa t'_2(\psi) \\ S = \mp pt(x) s'(\psi) \\ T_1 = \frac{p}{a} m(x) t'_1(\psi) \end{array} \right. \end{array}$$

$$(0 \leq x \leq L, 0 \leq \psi \leq \psi_0).$$

Il segno « meno » valendo, per le convenzioni fatte, per x contato da un estremo (timpano), il segno « più » per x contato dal mezzo.

Dalla (3) per la base circolare ($R = a$) è da porre:

$$(4_g) \quad t_2(\psi) = -\cos \psi, \quad s(\psi) = -2 \sin \psi, \quad t_1(\psi) = -2 \cos \psi;$$

$$(4_p) \quad t'_2(\psi) = -\cos^2 \psi, \quad s'(\psi) = -\frac{3}{2} \sin 2\psi, \quad t'_1(\psi) = -3 \cos 2\psi.$$

Per le altre basi (ellittiche, cicloidiche, ecc.) si veda la voce « Volte autoportanti », citata in ⁽¹⁾, alle pp. 745 e 748 con l'avvertenza che *qui riferiamo la x a contare da un estremo*, anziché dal mezzo (fig. 12 a p. 745 di ⁽¹⁾).

Nelle (3) compaiono anche le funzioni $t(x)$ ed $m(x)$. Esse sono il taglio e, rispettivamente, il momento che il carico 1 per unità di lunghezza provoca su una trave di luce L : semplicemente appoggiata se il timpano non reagisce trasversalmente al piano, incastrata se il timpano è un piano rigido, inamovibile, ideale. Pertanto, posto

$$(5) \quad x = \xi L, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

è, per il carico g come per quello p :

$$(6) \quad t(\xi) = \frac{L}{2} (1 - 2\xi), \quad m(\xi) = \frac{L^2}{2} (\xi - \xi^2)$$

per la volta isolata semplicemente appoggiata, ed invece

$$(7) \quad t(\xi) = \frac{L}{2} (1 - 2\xi) \quad , \quad m(\xi) = \frac{L^2}{2} \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right)$$

per la volta su infinite campate uguali.

Le (3) - tenuto conto delle (4), (6) e (7) - rispecchiano le proprietà di simmetria di ciascuno sforzo rispetto alla direttrice mediana ($x=L/2$) e rispetto al vertice ($\psi=0$) della volta. La convenzione per il segno di S è stata enunciata poco sopra al comma *b*); si constata anche che se $\psi_0=\pi/2$ la T_2 si annulla sui bordi.

3. Il tiro Z . - *a*) Manifestamente per il carico p risulta $S(x, \pi/2) = 0$, mentre S non si annulla sul bordo $\psi = \pi/2$ per il carico g . In questo caso - come si è avvertito più sopra - si introduce un tiro Z su ognuno dei due bordi, che per il semplice appoggio è

$$(6') \quad Z(x) = \int_0^x S(x, \pi/2) dx = 2gm(x) = gL^2(\xi - \xi^2)$$

e per l'incastro

$$(7') \quad Z(x) = gL^2(\xi - \xi^2 - 1/6).$$

Si osservi che $Z(x)$ non dipende dalle dimensioni trasversali della volta, cioè dalle dimensioni della direttrice e che, secondo la (7'), negli intervalli $0 - 0,211$; $0,789 - 1$ il tirante di bordo va trasformato in puntone di bordo.

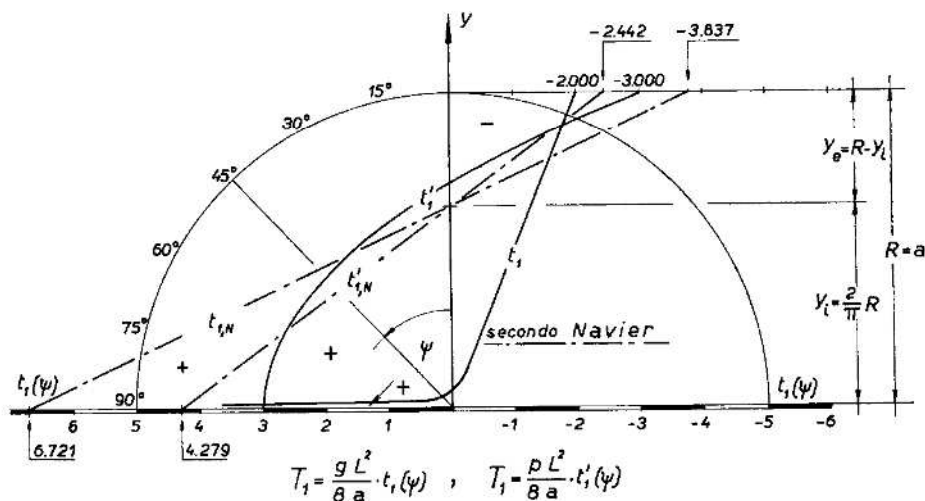


Fig. 3.

L'espressione (7') del tiro $Z(x)$ risulta sovrapponendo al tiro, che chiameremo $Z_0(x)$, della volta con i timpani snodati un $\Delta Z(x)$ equilibrante, con gli sforzi T_i diffusi sulla direttrice, il momento M_0 degli incastri. Quanto alla distribuzione di T_i è spontaneo ammettere che essa sia affine, salvo il segno opposto, a quella che si ha in mezzercia, quindi del tipo indicato in fig. 3, ben discosta, come si vede, da quella di Navier. A questa invece si avvicina di più la distribuzione di T_i nel caso del carico accidentale p .

I momenti di incastro risultano $-2 R\psi_0 gL^2/12$ e il momento al mezzo per il semplice appoggio è $+2 R\psi_0 gL^2/8$. Ora, avendosi in questo caso un tiro $Z_0 = gL^2/4$, poiché $Z_0(0) = Z_0(L) = 0$, ai timpani, per l'incastro, sarà in conformità $Z(0) = Z(L) = \Delta Z = -gL^2/6$. Resta così giustificato il passaggio dalla (6') alla (7') (cfr. fig. 4).

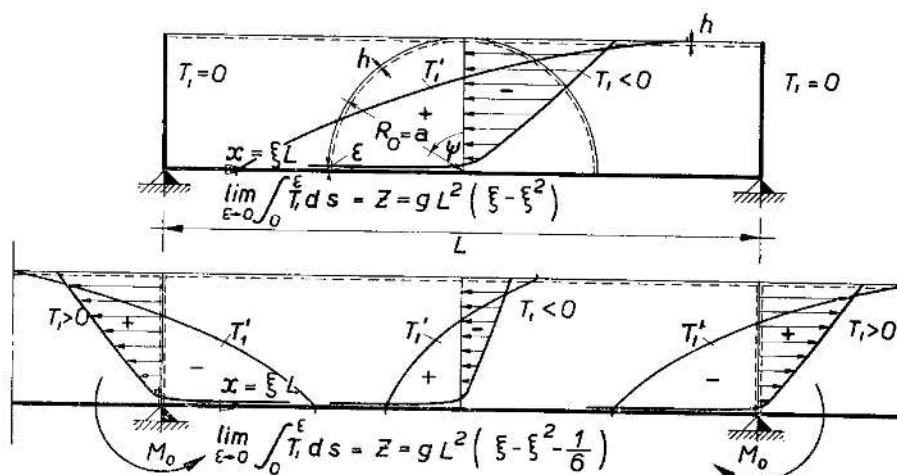


Fig. 4.

b) Qui va rilevato che, più in generale, per una volta autoportante continua corrente su più appoggi-timpani l'espressione di $t(x)$ e di $m(x)$ (secondo le (6)) del taglio e del momento per carico uniforme unitario sulla trave semplicemente appoggiata agli estremi va sostituita con quella del taglio e del momento per carico uniforme unitario sulla trave continua su più campate corrispondente alla serie di volte che si considera. Ciò almeno se la freccia H della volta (nel caso della volta semicircolare $H = R = a$) è sensibilmente inferiore alla generica luce L di campata, poniamo, $L/H > 2,5$. In caso diverso, le deformazioni provocate dal taglio S attenuano i momenti agli appoggi; come è, del resto, intuibile per analogia con la teoria ordinaria della trave continua su parete sensibilmente alta ⁽²⁾.

TABELLA I.

$\frac{L}{2R}$	0	1	2	4	10	∞	M	Osservazioni
$M_B =$	0,000	0,400	0,727	0,912	0,985	1,000	$\bar{M}_B$	$L_1 = L_2 = L$
$M_B =$	0,000	0,333	0,666	0,890	0,980	1,000	$\bar{M}_B$	$L_1 = 0,75 L_2$
$M_B =$	0,000	0,625	0,870	0,965	0,994	1,000	$\bar{M}_B$	$L_1 = L_2 = L_3$
$M_B =$	0,000	0,400	0,727	0,912	0,985	1,000	$\bar{M}_B$	$L_1 = \frac{1}{2} L_2 = L_3$

(2) W. RITTER, *Anwendungen der graphischen Statik*, Bd. III (Zürich 1888).

Per il caso della volta circolare chiusa, cioè per la trave tubolare a direttrice circolare, l'attenuazione dei momenti di appoggio in funzione del rapporto $L/2R$ è illustrata nelle Tabelle I e II.

Per la teoria ordinaria della trave è $L/2R = \infty$. Non occorre dire che, noti i momenti iperstatici sugli appoggi si calcolano i momenti nelle campate disegnando le parabole a partire dalle rette di chiusa come è ben noto.

Per carichi secondo le armoniche superiori, è intuitivo, il taglio si rende meno sensibile. Per il caso della trave cilindrica tubolare su due campate $L_1 = L_2$ si trovano per $n = 1, 2, 3$, i seguenti valori per p variabile come $\sin \psi$, $\sin 2\psi$, $\sin 3\psi$.

TABELLA II.

	$\frac{L}{2R}$	0	1	2	4	10	∞	M	Osservazioni
sen ψ	M	0,000	0,400	0,726	0,912	0,985	1,000	$\bar{M}$	$L_1 = L_2$
sen 2ψ	M	0,000	0,726	0,912	0,976	0,996	1,000	$\bar{M}$	$L_1 = L_2$
sen 3ψ	M	0,000	0,860	0,960	0,996	1,000	1,000	$\bar{M}$	$L_1 = L_2$

I dati, di cui si tratta, si possono estendere alle volte cilindriche aperte sostituendo $2R$ con $R = a$ od H .

Vanno fatti in più i seguenti rilievi:

1° Per il carico g diffuso sul manto (*peso proprio*) lo sforzo $Z(x)$ nei tiranti di bordo – al quale non si allude nelle op. cit. – si calcola per la volta a base semicircolare (e, sia detto per inciso, anche per la volta a base ellittica indipendentemente dal rapporto dei semiassi) con la relazione – ovvia dopo quanto si è esposto –

$$(*) \quad Z(x^*) = 2g \int_0^{x^*} t(x^*) dx^*,$$

con x^* variabile nell'intervallo compreso fra gli estremi di tutta la serie di volte, contata ad esempio dall'estremo di sinistra. In luogo della (*) conviene calcolare $Z(x)$ con la assai più semplice relazione, che ne consegue direttamente:

$$(*) \quad Z(x) = 2g \cdot m(x).$$

Qui è $m(x)$ il momento dianzi definito (desumibile, ad esempio, dai grafici) calcolato nella generica sezione $x = \text{costante}$, e l'ascissa x è valutata, come ordinariamente si fa, campata per campata, a partire da uno degli estremi della campata considerata (ad esempio da quello di sinistra).

Tale tiro $Z(x)$, che nella volta semplicemente appoggiata è sempre di trazione, nella volta continua cambia segno in un intorno degli appoggi, e là, in luogo di un tirante occorre un puntone di bordo.

2° Se la volta è corrente su *infinite* campate tutte egualmente caricate, sicché ogni campata si può pensare incastrata agli estremi (nel senso che i timpani non possono rotare per ragioni di simmetria), allora il taglio non ha più influenza sui momenti di appoggio, che risultano indipendenti dal rapporto L/R o L/H . Questo risultato non molto noto vale naturalmente anche per la trave continua in parete alta, beninteso sempre che si segua l'impostazione ordinaria del calcolo delle deformazioni per flessione e taglio.

Per le volte tutto questo risulta confermato anche per via più ortodossa, ossia quando si ricorre alle equazioni generali dell'equilibrio della membrana e si impongono le opportune condizioni sui timpani, vale a dire:

l'annullarsi dello spostamento u , normale al timpano, e di quello v , tangente alla direttrice nel piano del timpano, nel caso dell'incastro (impedita rotazione del timpano stesso), ovvero

l'annullarsi dello spostamento v e dello sforzo T , nel caso del semplice appoggio (timpano che può uscire dal suo piano, senza restare necessariamente piano).

Per quanto riguarda il tiro $Z(x)$ ai bordi occorre calcolarlo con la (*) e non con la (*); infatti – poiché il taglio $t(x)$ della volta incastrata risulta eguale a quello della volta semplicemente appoggiata agli estremi (cfr. (6), (7)) – la (*) estesa a tutte le infinite campate di destra o di sinistra risulta indeterminata mentre estesa ad una sola campata – data l'equivalenza fra di esse – porta alla espressione di Z valida per il semplice appoggio, ma con questa non si ha l'equilibrio interno con gli sforzi $\int_0^{\psi_0} T_r R d\psi$.

c) Si ritiene lecito trascurare il suddetto regime flessionale, perché qui si considera il caso $\psi_0 = \pi/2$ e per g si ammette esista il tirante di bordo che assorbe Z (si rilevi che il regime additivo dà dei T_r , localizzati nell'intorno di $\pm \psi_0$, di somma Z per ogni bordo e momenti flettenti secondari nel piano delle direttrici rapidamente smorzantisi procedendo verso il vertice); per p non occorre ammettere niente, giacché S si annulla in $\pm \psi_0$. Naturalmente, in tal guisa non si parla delle volte a direttrice circolare di apertura $2\psi_0 < \pi$, volte in ogni caso tecnicamente non molto raccomandabile per le quali, diminuendo $2\psi_0$, il regime flessionale secondario si rende sempre più sensibile.

4. *Sugli equilibri tenso-flessionali* ⁽³⁾. – a) Proseguiamo nelle premesse con alcune generalità sugli equilibri tenso-flessionali. Hanno, questi, importanza in quanto segue non per l'analisi della stabilità dell'equilibrio (sulla quale influiscono non molto sensibilmente) bensì per controllare che le sollecitazioni specifiche critiche σ_{cr} , calcolate in base ai carichi critici, non superino il limite σ_p di proporzionalità.

(3) D. CALIGO e M. J. DE SCHWARZ, *Calcolo delle volte cilindriche circolari sottili*, nella collana: *Manuali per applicazioni tecniche del calcolo* (IV) dell'Ist. Naz. per le Applicazioni del Calcolo (ed. Cremonese, Roma 1960).

b) Cominciamo con il rilevare che se, ad esempio, è $\psi_0 \neq \pi/2$ (come è nella fig. 5 che illustra un notevole esempio di volta circolare continua su più campate per copertura a sheds) e quindi T_2 non si annulla ai bordi, non c'è un rimedio analogo a quello adottato per S; i regimi statici (3) vanno ancora bene, ma occorre sommare ad essi un regime ulteriore, corrispondente a quello che si genera nella volta senza carichi sulla superficie, ma con applicati idealmente

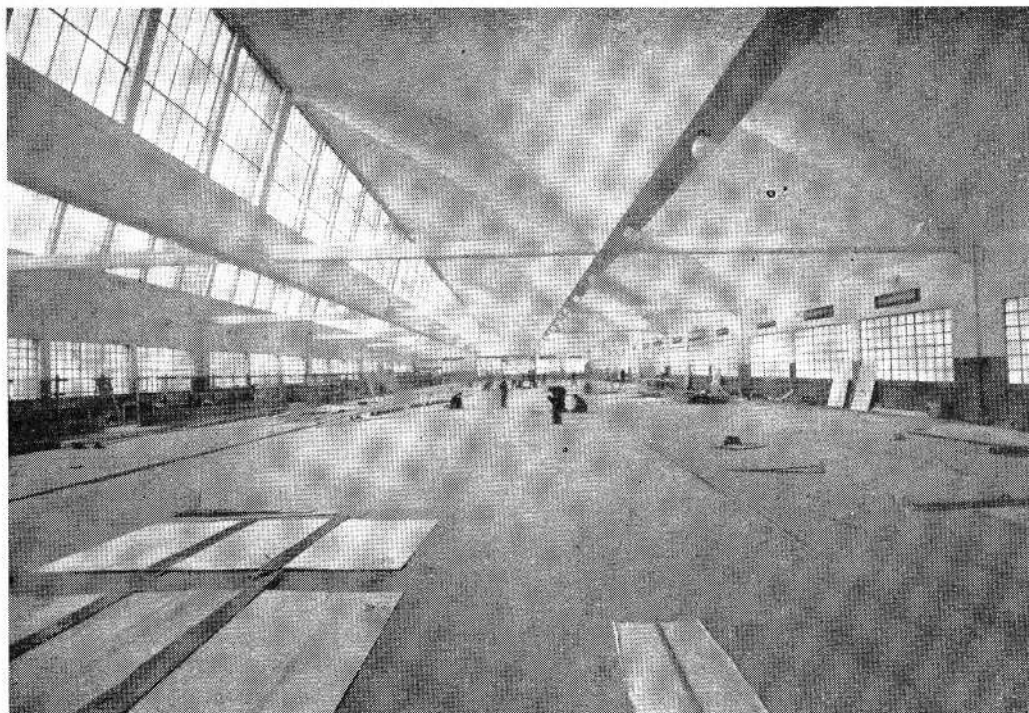


Fig. 5. - Sala a tracciare (Ansaldo - Genova).

ai bordi sforzi eguali e contrari a quelli che non si annullano: $-T_2(x, \psi_0)$, $-S(x, \psi_0)$.

Si potrebbe anche non considerare $-S(x, \psi_0)$, salvo a disporre del tirante di bordo dimensionato per un tiro (analogo a (6')) $Z(x) = \int_x^x S(x, \psi_0) dx$, o più in generale, $Z = gs(\psi_0) \int_0^x t(x) dx$; ma tant'è procedere più rigorosamente per $S(x, \psi_0)$ come per $T_2(x, \psi_0)$.

Il regime statico da sovrapporre, indotto da forze applicate ai bordi, è molto complesso; induce non solo sforzi superficiali T_2^i, S^i, T_1^i (applichiamo l'indice i per distinguerli dai primieri, T_2^o, S^o, T_1^o , cui va allora applicato l'indice o), ma anche momenti flettenti e taglio nel senso della normale. Il loro calcolo, che si riporta alle classiche equazioni del Love⁽⁴⁾ per le lastre curve, è difficile ma superabile numericamente grazie a tabellazioni sistema-

(4) A. E. H. LOVE, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (The University Press, Cambridge 1952), Cap. XXIII e sgg.

tiche compendiate in un volume (cfr. ⁽³⁾), che comincia là dove termina la già citata voce «Volte autoportanti» ⁽¹⁾. Rileviamo che in seguito si terrà conto di questi equilibri flessionali solo per verificare se vien superato il limite σ_p di proporzionalità. Ché, se così avviene, i carichi critici g_{cr} o p_{cr} calcolati per un modulo di elasticità costante diventano illusori. Ma, come faremo vedere al n. 11, dopo aver esaurito il problema nell'ambito lineare, quei valori illusori servono, attraverso un'osservazione opportuna, per calcolare i valori effettivi.

c) Si ritiene lecito trascurare il suddetto regime flessionale, perché qui si considera il caso $\psi_0 = \pi/2$ e per g si ammette esista il tirante di bordo che assorbe Z (si rilevi che il regime additivo dà dei T_1^i , localizzati nell'intorno di $\pm \psi_0$, di somma Z per ogni bordo e momenti flettenti secondari nel piano delle direttrici rapidamente smorzantisi procedendo verso il vertice); per p non occorre ammettere niente, giacché S si annulla in $\pm \psi_0$. Naturalmente, in tal guisa non si parla delle volte a direttrice circolare di apertura $2\psi_0 < \pi$, volte in ogni caso tecnicamente non molto raccomandabili per le quali, diminuendo $2\psi_0$, il regime flessionale secondario diventa sin troppo importante quando non si saldino lungo le generatrici di bordo travi in spessore sottile opportunamente dimensionate. Per volte più ribassate della volta a tutto sesto, indipendenti da questo accorgimento, non resterà che fissare l'attenzione su quelle a base cicloidica, che ammettono un regime di sola tensione superficiale; lo ammettono anche meglio quelle a base ellittica ma le espressioni per T_2 , S , T_1 sono sì complesse da non potersi adoperare se non in forma tabellare, inadatta questa, come subito si vedrà, per gli sviluppi algoritmici che richiede l'analisi della stabilità.

d) Prima di chiudere questa premessa merita raffrontare gli sforzi superficiali T_2 , S , T_1 , della soluzione effettiva (flesso-estensionale)

$$T_2 = T_2^o + T_2^i, \quad S = S^o + S^i, \quad T_1 = T_1^o + T_1^i$$

con quelli T_2^o , S^o , T_1^o della soluzione estensionale pura (a membrana) ai quali ci riferiamo in seguito. Per il carico g (non invece per p) appaiono questi ultimi in certo senso strani per quel $T_1 < 0$ (o $T_1 > 0$) su *tutta* la direttrice (cfr. fig. 3) e per il tiro, localizzato in $\pm \psi_0$, $Z = - \int_0^{\psi_0} T_1 \cdot R d\psi$, che sta ad equilibrarli con il momento esterno M_0 .

Ed è infatti:

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} T_1 \cdot R \cos \psi \cdot R d\psi = M_0(x)$$

essendo, per $g = \text{costante}$ uniformemente diffuso su tutta la superficie della volta e $\psi_0 = \pi/2$,

$$M_0(x) = (2 R \psi_0 \cdot g) \cdot \frac{L^2}{2} \begin{cases} \xi(1 - \xi), & \text{per timpani snodati} \\ \left[\xi(1 - \xi) - \frac{1}{6} \right], & \text{per volte continue su infinite campate.} \end{cases}$$

Orbene, gli sforzi T_2, S, T_1 effettivi si possono dare avvalendosi delle deduzioni tratte in ⁽³⁾, con riferimento a due coppie di valori per i parametri geometrici $a/L, h/L$ di una volta intorno ai quali fanno rosa assai ristretta, come ha osservato Aas Jakobsen, i parametri delle volte più notevoli sino ad ora costruite. Sicché si hanno due tipi, I e II, di volte, *lunghe* o *corte*, così caratterizzati:

$$\text{Tipo} \begin{cases} \text{I, } \textit{lungo}, & a/L = 0,36 \quad ; \quad h/L = 0,0025; \\ \text{II, } \textit{corto}, & a/L = 2,70 \quad ; \quad h/L = 0,0081. \end{cases}$$

Eliminati in tal guisa due parametri dalla tabellazione, occorre ancora sviluppare il carico costante g in serie trigonometrica

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi} g \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

(togliendo g , si ha da qui lo sviluppo dell'unità) e soffermarsi sul solo primo termine

$$g(x) = \frac{4}{\pi} g \sin \frac{\pi}{L} x;$$

il quale, agli effetti globali (momento flettente M), rappresenta bene il carico uniforme; si ha infatti, al mezzo ($x = L/2$), integrando l'equazione $M''(x) = -g(x)$ (per $M = 0$, agli estremi): $M(L/2) = \frac{4L^2}{\pi^3} g = \frac{L^2}{7,7516} g$ in luogo di $\frac{L^2}{8} g$. Con queste semplificazioni si possono allora scrivere gli sforzi T_2, S, T_1 , effettivi nella forma analoga alla (3),

$$(3) \quad \begin{cases} T_2 = ga \sin \frac{\pi}{L} x \cdot t_2(\psi), \\ S = \mp g \tilde{t}(x) \cdot s(\psi), \\ T_1 = \frac{g}{a} \tilde{m}(x) \cdot t_1(\psi), \end{cases}$$

con $\tilde{t}(x)$ ed $\tilde{m}(x)$ taglio e momento nella trave corrispondente alla volta libera agli estremi o incastrata dalla continuità su più campate, ma calcolati *non* per il carico uniformemente distribuito $q = 1$ bensì per $q = \sin \pi x/L$. Il $4/\pi$ a fattore non appare giacché è già compreso nelle espressioni di t_2, s, t_1 che diamo in Tabella III per i sopracitati Tipi I e II talché, considerando per semplicità il carico uniforme in luogo di quello armonico, si dovrebbe porre $q = \pi/4$ in luogo di $q = 1$. Il termine $\sin \pi x/L$, che interviene al posto dell'unità in T_2 , deriva dal fatto che il carico è armonico rispetto ad x , anziché costante; ma può essere omissso per sicurezza e sostituito con 1 (o con $\pi/4$, più propriamente) tanto più che, se si tenesse conto di tutti i termini dello sviluppo in serie per g , si avrebbe in $x = 0, L$ un superamento dell'unità per un noto fenomeno (cosiddetto di Gibbs) tipico delle serie trigonometriche nei punti di discontinuità.

TABELLA III (*).

Colatitudine ψ	Ordinata y $y = 1 - \cos \psi$	Soluzione a membrana				Tipo I: $a/L = 0,36$; $h/L = 0,0025$				Tipo II: $a/L = 2,70$; $h/L = 0,0081$			
		t_2	s	t_1	t_2	s	t_1	$10^4 G_2/gL^2$	t_2	s	t_1	$10^4 G_2/gL^2$	
0°	1	1,27	0	2,55	1,24	0	2,98	2,06	1,28	0	2,56	0	
5°	0,996	1,26	0,22	2,54	1,23	0,25	2,89	1,97	1,27	0,22	2,54	0	
10°	0,985	1,25	0,44	2,51	1,21	0,49	2,61	1,70	1,26	0,44	2,51	0	
15°	0,966	1,23	0,66	2,46	1,19	0,70	2,20	1,20	1,23	0,66	2,46	0	
20°	0,940	1,20	0,87	2,39	1,15	0,87	1,75	0,42	1,20	0,87	2,39	0	
25°	0,906	1,15	1,08	2,31	1,11	1,01	1,35	0,65	1,16	1,08	2,31	0	
30°	0,866	1,10	1,27	2,21	1,07	1,11	1,11	1,99	1,11	1,27	2,21	0,01	
35°	0,819	1,04	1,46	2,09	1,03	1,20	1,13	3,53	1,05	1,46	2,09	0,02	
40°	0,766	0,98	1,64	1,95	0,99	1,31	1,47	5,11	0,98	1,64	1,92	0,01	
45°	0,707	0,90	1,80	1,80	0,95	1,46	2,14	6,48	0,90	1,80	1,76	0,06	
50°	0,643	0,82	1,95	1,64	0,90	1,69	3,05	7,40	0,82	1,94	1,73	0,13	
55°	0,574	0,73	2,09	1,46	0,83	1,99	4,00	7,62	0,73	2,10	1,79	0,04	
60°	0,500	0,64	2,21	1,27	0,73	2,37	4,68	7,00	0,64	2,25	1,44	0,55	
65°	0,423	0,54	2,31	1,08	0,60	2,78	4,62	5,55	0,53	2,32	0,11	0,60	
70°	0,342	0,44	2,39	0,87	0,45	3,13	3,20	3,53	0,44	2,27	0,96	1,26	
75°	0,259	0,33	2,46	0,66	0,27	3,29	0,27	1,43	0,35	2,27	1,87	4,50	
80°	0,174	0,22	2,51	0,44	0,10	3,00	6,61	0,13	0,24	2,71	8,13	4,22	
85°	0,087	0,11	2,54	0,22	0,01	2,03	16,65	0,61	0,09	3,23	2,72	1,69	
86°	0,070	0,09	2,54	0,18	0,02	1,72	19,98	0,56	0,05	3,11	11,35	2,52	
87°	0,052	0,07	2,54	0,13	0,03	1,36	21,91	0,47	0,02	2,81	23,72	2,82	
88°	0,035	0,04	2,54	0,09	0,03	0,96	24,84	0,34	0	2,25	40,66	2,45	
89°	0,017	0,02	2,55	0,04	0,02	0,50	27,97	0,18	0,01	1,35	63,26	1,42	
90°	0	0	2,55	0	0	0	31,32	0	0	0	92,81	0	
dedotte da op. cit. in (3)		p. 222 (o) o p. 224 (o)	p. 228 (o) o p. 230 (o)	p. 216 (o) o p. 218 (o)	p. 222 (4)	p. 228 (4)	p. 216 (4)	p. 206 (4)	p. 224 (4)	p. 230 (4)	p. 218 (4)	p. 210 (4)	

(*) Secondo D. Caligo e M. J. Schwarz.

Quanto al taglio $\tilde{t}(x)$ ed al momento $\tilde{m}(x)$, che qui abbiamo introdotto per estendere la portata della suddetta tabella anche alle volte su infinite campate, si ha

$$\tilde{t}(x) = \begin{cases} \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi}{L} x, \\ \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi}{L} x, \end{cases} \quad \tilde{m}(x) = \begin{cases} \frac{L^2}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} x, & \text{per volta libera,} \\ \frac{L^2}{\pi^2} \left| \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{2}{\pi} \right|, & \text{per volta su infinite campate.} \end{cases}$$

Avvertiamo che per scrivere la presente tabella si sono rilevate le funzioni t_2, s, t_1 dalle tabelle della citata opera ⁽³⁾; ivi è usato per argomento l'angolo φ contato da un bordo all'altro, cosicché cresce da 0 a 2π , mentre noi qui ci riferiamo alla colatitudine $\psi = \varphi - 90^\circ$. I valori tabulari, là riportati a meno del fattore gL , comune a T_2, S, T_1 , sono stati qui moltiplicati ordinatamente per

$$L/a, \pi, \pi^2 a/L$$

per adeguarli alle formule (3); a piè di ogni colonna è citata la pagina e la colonna corrispondente in ⁽³⁾.

Si noti che l'intervallo $(0, 90^\circ)$ da noi considerato per la ψ corrisponde all'intervallo $(90^\circ, 180^\circ)$ per la φ , rispetto al vertice con riguardo a $\psi > 0$, soltanto in un quadrante. Le formule (conformi alle (4_g))

$$t_2 = -\frac{4}{\pi} \cos \psi = -1,27 \cos \psi,$$

$$s = -\frac{8}{\pi} \sin \psi = -2,55 \sin \psi,$$

$$t_1 = -\frac{8}{\pi} \cos \psi = -2,55 \cos \psi$$

consentono di calcolare direttamente la soluzione a membrana. Per i tipi I e II le figure 3a, 3b illustrano l'andamento delle $t_1 = t_1(\psi)$ ovvero $t_1 = t_1(y)$, ($y = a \cos \psi$) e merita raffrontarle con la $t_1(\psi)$ della soluzione a membrana e con quella alla Navier date in fig. 3 calcolate con la relazione tipica per le travi inflesse, nel caso specifico

$$T_1 = \frac{M}{J} \cdot y',$$

con J momento di inerzia del semicerchio rispetto all'asse baricentrico da cui si conta l'ordinata y' .

L'andamento movimentato (che si ritrova del resto nelle travi in parete alta, cfr. *Manuale* cit. in ⁽¹⁾, p. 729) non deve stupire; il carattere esasperato di t_1 in prossimità dei bordi appare evidente e giustifica Z impulsivo assimilato a una forza per la valutazione dell'elemento tirante.

Infine, a scanso di ambiguità, si noti che in ⁽³⁾ l'incastro della volta si riferisce all'incastro nei timpani della lastra che la sostituisce, mentre i timpani rimangono snodati.

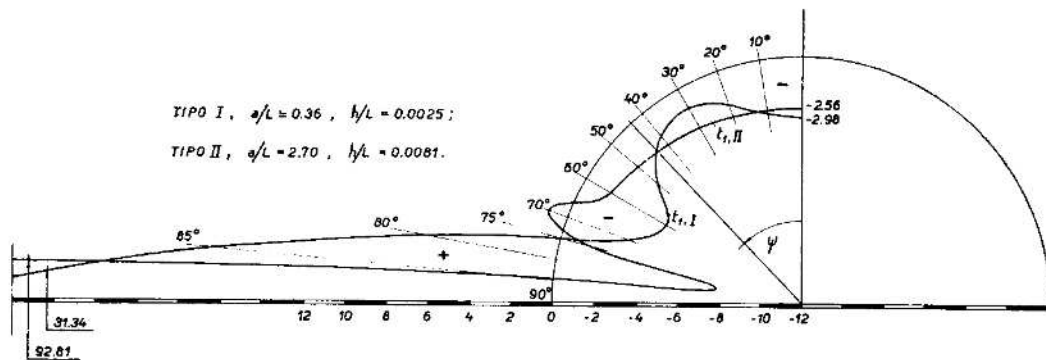


Fig. 3 a.

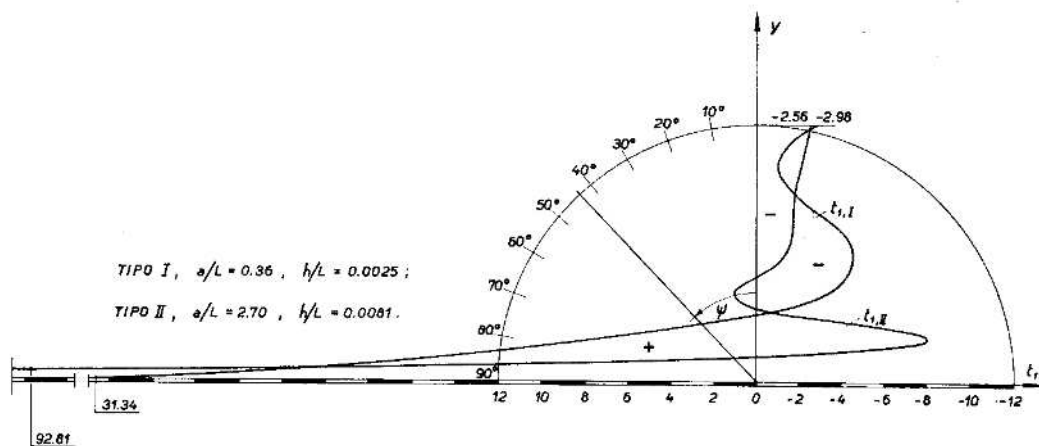


Fig. 3 b.

La perturbazione (ivi considerata e avente carattere secondario), che dal timpano corre smorzandosi verso il mezzo, qui non si considera.

Nelle Tabelle I e II, si riporta per completezza anche G_2 , momento nel piano della direttrice.

§ 2. — IL PRINCIPIO DI DIRICHLET PER L'ELASTOSTATICA DELLE VOLTE SOTTILI.

5. Per una configurazione C_0 : $u = v = w = 0$ di equilibrio siano T_2, S, T_1 gli sforzi corrispondenti ad una distribuzione di carico, X, Y, Z . Ai carichi si applichi un moltiplicatore λ .

Si tratta di determinare quei valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ di λ per cui esistono configurazioni di equilibrio prossime alla $u = v = w = 0$. Di questi valori, pensati ordinati in una successione discreta crescente, che effettivamente esiste, interessa il minore λ_1 . Si indica λ_1 con λ_{cr} giacché, se per $\lambda < \lambda_1$ la C_0 è stabile, per $\lambda = \lambda_1$ — avendosi due configurazioni possibili: la $u = v = w = 0$ e la u_1, v_1, w_1 , corrispondente a $\lambda = \lambda_1$ — si ha instabilità per un teorema

di Poincaré sugli *equilibri di biforcazione* (di due *serie lineari* funzioni di un parametro).

Orbene, la determinazione della serie (spettro) λ_ρ , ($\rho = 1, 2, \dots$) e delle corrispondenti u_ρ, v_ρ, w_ρ configurazioni di equilibrio prossime alla $u = v = w = 0$, è ricondotta dal principio di Dirichlet⁽⁵⁾ alla ricerca delle estremali del principio variazionale

$$(8) \quad \delta\Phi = 0$$

con

$$(9) \quad \Phi = W + \lambda (\mathfrak{L}_2^* - \mathfrak{L}_2).$$

I termini che intervengono in Φ sono:

W l'energia elastica di deformazione corrispondente al passaggio dalla configurazione C_0 alla configurazione C , assegnata da u, v, w ;

$\mathfrak{L}_2^*$ il lavoro di 2° ordine, fatto dagli sforzi interni $X_x, X_y, \dots$ (corrispondenti alla configurazione di equilibrio) nel passaggio dalla C_0 alla C , per la parte di secondo ordine $e_{xx}^{(2)}, e_{yy}^{(2)}, \dots$ della deformazione e ;

$\mathfrak{L}_2$ il lavoro di 2° ordine, fatto dai carichi esterni, nel passaggio dalla C_0 alla C , come ad esempio avviene se tali carichi hanno il carattere di pressione idrostatica.

6. *Elementi di 1° e 2° ordine della deformazione della superficie mediana di una volta cilindrica con direttrice regolare qualunque.* — a) Per esplicitare $W, \mathfrak{L}_2^*, \mathfrak{L}_2$ conviene qualche premessa geometrica sulla flessione e sull'estensione di una superficie.

Rinviamo al classico trattato del Love⁽⁶⁾ per lo studio di una superficie generica e ci riferiamo ad una superficie cilindrica qualunque, della quale sia data la direttrice nella forma $R = R(\psi)$.

b) Per la *deformazione* e si prendono in considerazione i termini $e^{(1)}$ di primo ordine ed $e^{(2)}$ di secondo ordine, cosicché da $e = e^{(1)} + e^{(2)}$ segue, per le componenti $e_1, e_2, \omega = e_{12}$ (corrispondenti, nel piano cartesiano, alle e_{xx}, e_{yy}, e_{xy})

$$e_1 = e_1^{(1)} + e_1^{(2)}, \quad e_2 = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}, \quad \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}.$$

Posto

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}', \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}^*,$$

(5) G. KRALL, *Stabilità dell'equilibrio elastico*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, T. XXIX (1949) e *Manuale dell'Ingegnere civile* (Cremonese, Roma 1959) pp. 550-563.

(6) Cfr. op. cit. (4), pp. 524 e 543.

si ha, secondo p. 178

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e_1^{(1)} = u' & , \quad e_1^{(2)} = \frac{v'^2 + w'^2}{2}; \\ e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} & , \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2); \\ \omega^{(1)} = \frac{1}{R} \dot{u} + v' & , \quad \omega^{(2)} = \frac{w\dot{u} - v\dot{u}}{R^2} + \frac{wv' + vw'}{R} - u'v'. \end{array} \right.$$

Queste espressioni (10), giova ripeterlo, sono valide per una volta cilindrica con direttrice di equazione intrinseca $R = R(\psi)$.

Per $R \rightarrow \infty$, dopo avere posto $R\psi = y$ e

$$\left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)' = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{1}{R} \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)' = \frac{\partial}{\partial y} ,$$

risulta in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial x} & , & \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ e_2^{(1)} &= \frac{\partial v}{\partial y} & , & \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \omega^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & , & \quad \omega^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

c) Per le *variazioni di curvatura* $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$, fornite da Love ⁽⁶⁾, poiché il quadrato dell'elemento lineare sulla superficie è $ds^2 = dx^2 + R^2(\psi) d\psi^2$, risulta

$$(11) \quad \kappa_1 = w'' \quad , \quad \kappa_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\dot{w}}{R} + \frac{v}{R} \right) \quad , \quad \kappa_{12} = \frac{\dot{w}'}{R} + \left(\frac{v}{R} \right)';$$

è sufficiente tener conto solo di questi termini di 1° ordine, perché nei nostri calcoli partiamo da distribuzioni non flessionali di sforzi interni limitati a T_1, T_2, S (escludendo la flessione: $G_1, G_2, H_{12} = H_{21} = 0$).

d) Per il passaggio dal contorno Ω_0 ($u = v = w = 0$) a quello Ω (per uno spostamento u, v, w assegnato) la trasformazione dell'elemento di superficie $d\Omega_0$ nel $d\Omega$ genera un elemento di volume dV , del quale interessa, per carichi idrostatici, la parte di secondo ordine in u, v, w , che indicheremo con d_2V . Più precisamente, posto

$$dV = d_1V + d_2V$$

si ha ⁽⁷⁾

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1V = -wR d\psi dx, \\ d_2V = \frac{v\dot{w} + v^2 + w^2 - \dot{v}w - Ru'w + Rv'u}{2} d\psi dx. \end{array} \right.$$

(7) Cfr. op. cit. (1,5), p. 554 ove, però, manca, senza conseguenze per le deduzioni ivi riportate, il prodotto $Rw'u$, che compare nella (12).

7. *Espressione del potenziale elastico e del lavoro di 2° ordine.* — Abbiamo ormai quanto occorre per passare al calcolo di W , $\mathfrak{L}_2^*$, $\mathfrak{L}_2$.

Si ha, secondo Love ⁽⁸⁾ (detto ν il modulo di Poisson),

$$(13) \quad W = W_f + W_e$$

con W_f energia di flessione (potenziale elastico flessionale) della superficie, data da

$$(13f) \quad W_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \{ \kappa_1^2 + 2\nu \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu) \kappa_{12}^2 \} d\Omega,$$

e W_e energia dell'estensione (potenziale elastico estensionale) della superficie, data da

$$(13e) \quad W_e = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ e_1^2 + 2\nu e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \omega^2 \right\} d\Omega.$$

In (13e), (13f) si è indicato con Ω il manto della volta.

Per il calcolo di $\mathfrak{L}_2^*$ dall'espressione generale

$$\mathfrak{L}_2^* = \int_S (X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots) dS$$

per un corpo elastico qualunque S , soggetto a sforzi $X_x, X_y, \dots$ corrispondenti all'equilibrio che si esamina, si ha nel caso attuale,

$$(14) \quad \mathfrak{L}_2^* = \int_{\Omega} (T_2 e_2^{(2)} + S \omega^{(2)} + T_1 e_1^{(2)}) d\Omega$$

con T_2, S, T_1 dati dalle (3); $e_2^{(2)}, \omega^{(2)}, e_1^{(2)}$, dalle (10).

Se alle generatrici è applicato un tirante di bordo (cfr. n. 1 b e n. 3) a $\mathfrak{L}_2^*$ va aggiunto un termine funzione del tiro Z

$$(14a) \quad \Delta \mathfrak{L}_2^* = \int_0^{L/2} Z(x) e_1^{(2)}(x, \psi_0) dx.$$

Infine per $\mathfrak{L}_2$, che vien fatto di dover considerare quando si hanno carichi esterni idrostatici (il che appare dalla stessa specificazione, che si va a dare), si ha

$$(15) \quad \mathfrak{L}_2 = - \int_{\Omega} p d_2 V$$

con $d_2 V$ fornito dalla (12).

(8) Cfr. op. cit (4), pp. 530-531.

§ 3. — IL MOLTIPLICATORE CRITICO λ_{cr} PER VOLTE AUTOPORTANTI.
VOLTA SEMICIRCOLARE ISOLATA. FORMOLE DI D. CALIGO.

8. a) Per il principio variazionale (8): o se ne scrivono le euleriane oppure se ne ricercano le estremali con metodo diretto.

Qui, proseguendo nello spirito delle Note ⁽¹⁾, ci atteniamo alla seconda via esprimendo u, v, w come combinazione lineare di funzioni note u_m, v_m, w_m soddisfacenti le condizioni ai limiti ed opportunamente scelte.

I coefficienti A_m, B_m, C_m della combinazione

$$(16) \quad u = \sum_1^N A_m u_m, \quad v = \sum_1^N B_m v_m, \quad w = \sum_1^N C_m w_m$$

sono a priori indeterminati. Per determinarli si introduce la (16) in (8) e si tiene conto di (13), (14) e (14a) — mancando ora il termine Ω_2 —; si è così riportati, con sole quadrature, da un funzionale in u, v, w e derivate prime e seconde ad una forma quadratica nella A_m, B_m, C_m , di cui la prima parte W è definita positiva:

$$\Phi(A_m, B_m, C_m) = W + \lambda (\Omega_2^* + \Delta\Omega_2^*).$$

Talché, dalle condizioni di estremo

$$(17) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_m} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

si ha un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee. Eguagliando a zero il determinante del sistema si ottiene un'equazione in λ di cui la radice inferiore, reale, dà il moltiplicatore critico λ_{cr} .

b) Per il seguito sarà utile fare le seguenti posizioni per il *carico critico*: con una distribuzione di carico (2_g) uniforme sulla volta

$$(18_g) \quad g_{cr} = g\lambda_{cr} = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr},$$

con una distribuzione di carico (2_p) uniforme sulla proiezione orizzontale

$$(18_p) \quad p_{cr} = p\lambda_{cr} = \frac{1}{6} \frac{E}{1-\nu^2} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr}.$$

$$(18) \quad \bar{\lambda}_{cr} = \min \bar{\lambda}.$$

9. Poiché è notissimo, ciò che appare del resto evidente dalle (13_e), (13_f), che W_e prevale fortemente su W_f , giacché W_e è dell'ordine di h/R e W_f dell'ordine di $(h/R)^3$ (e h/R è, in linea pratica, dell'ordine dei centesimi), la terna a priori migliore pensabile è quella per cui si annulla W_e .

Si realizza tale ipotesi imponendo che sia nullo il termine $e^{(1)}$ dell'estensione, sia cioè, nel caso specifico, in virtù delle (10):

$$(19) \quad e_1^{(1)} = u' = 0, \quad \omega^{(1)} = \frac{\dot{u}}{R} + v' = 0, \quad e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} = 0.$$

Una terna u, v, w che soddisfa le (19) dicesi *non estensionale*; la più ragionevole per una volta semicircolare ($R = a$) appare la

$$(20) \quad \begin{cases} u = \Sigma A_m \frac{\cos m\psi}{m}, & v = \Sigma A_m \frac{x}{a} \sin m\psi, & w = \Sigma A_m \frac{mx}{a} \cos m\psi, \\ (0 \leq x \leq \frac{L}{2}, 0 \leq \psi \leq \pi/2), \end{cases}$$

e la simmetrica per $L/2 \leq x \leq L$, essa corrisponde ad una inflessione a ginocchio con una discontinuità in mezzo, per $x = L/2$, ammissibile solo per locale plasticizzazione della sezione. La (20) annulla effettivamente le componenti del prim'ordine $e_1^{(1)}, \omega^{(1)}, e_2^{(1)}$ ed è osservabile in linea qualitativa quando si inflette una trave a sezione semicircolare in lamiera sottile; può aver senso considerarla soltanto per volte di lunghezza L grande rispetto al raggio a ($L/a > 20$) come comprovano anche esperienze puramente qualitative.

Introducendo la (20) in Φ e limitandosi ad un solo termine della serie, per m pari, si trova che nella (18_g) si deve porre il minimo, rispetto ad m , di

$$(21_g) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a}\right)^3 (m^2 - 1)^2 \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{m^2 + 24(1 - \nu) \left(\frac{a}{L}\right)^2}{m^2 \left[(m^2 - 1)(m^2 - 4) + 12 \left(\frac{a}{L}\right)^2 \right]} \quad (9).$$

10. a) Per varie ragioni è necessario riprendere i calcoli e adottare altre terne, senza omettere né W_e né il termine $\Delta \Omega_2^*$ dovuto al tiro Z (cfr. n. 7).

Passiamo, dunque, a considerare la terna (analoga alla (20)):

$$(22) \quad \begin{cases} u = \Sigma_{mn} A_{mn} \cos n\pi \frac{x}{L} \cos m\psi \\ v = \Sigma_{mn} B_{mn} \sin n\pi \frac{x}{L} \sin m\psi \\ w = \Sigma_{mn} C_{mn} \sin n\pi \frac{x}{L} \cos m\psi. \end{cases}$$

Introdotta la (22) nella Φ si dovrebbero ricercare le coppie di interi m, n che consentono di soddisfare le (17) procurando un minimo.

In tal guisa si introduce un infestamento della volta, effettivamente osservabile in qualche esperienza — anche solo qualitativa — su modelli. L'infestamento, tanto più fitto quanto più è grande m , porta a ridurre W_e

(9) Ad esempio, se $a/h = 144$, $a/L = 0,36$ (volta di tipo normale) secondo la (21_g), per $\nu = 0$, il minimo valore $\bar{\lambda}_{cr}$ di $\bar{\lambda}$, da introdurre nella (18_g), si consegue con $m = 4$ ed è 7,808: assumendo $E = 2 \cdot 10^6$ to m^{-2} , si avrebbe un carico critico $g_{cr} = 0,2618 \bar{\lambda}_{cr} = 2,044$ to m^{-2} .

di fronte a W_f , giacché decresce con m , mentre W_f cresce, come si vede dalle loro espressioni (25) che riportiamo più avanti.

Questo equilibramento dei valori di W_e rispetto a W_f non è certo nuovo. Appare sin dallo studio dell'asta con sforzo assiale con reazione elastica diffusa sulla portata. Ivi il minimo carico critico non si ha, come per il caso del solo vincolo agli estremi, per una inflessione sinusoidale senza nodi ma con $(n - 1)$ nodi ed n intero tanto più grande quanto più forte è la reattività elastica diffusa.

A questa compete, per $w \neq 0$, un'energia elastica tipicamente estensionale. In due dimensioni, circostanze analoghe appaiono nella lastra soggetta a sforzi nel piano e poggiata, solidale, su un suolo elastico. Per le superficie cilindriche appare nella formola di v. Mises che dà la pressione critica per un tubo timpanato agli estremi ⁽¹⁰⁾.

In questo tubo non intervengono però regimi del tipo qui considerato giacché niuna portanza nel senso della campata deve opporre il tubo alla pressione essendo questa uniformemente distribuita sul manto.

Per la superficie a doppia curvatura si ritrova un increspamento analogo precisato ad esempio nelle notevoli formule di Zoelly e Schwerin per la pressione esterna, uniforme, critica per una sfera.

b) Ma torniamo alla terna (22) e limitiamoci ad un solo termine nelle sommatorie, con i coefficienti così legati fra di loro;

$$A_{mn} = A/m, \quad B_{mn} = AL/(n\pi a), \quad C_{mn} = AL m/(n\pi a),$$

essendo A indeterminata, m ed n interi con m pari.

La (22) si riduce così alla

$$(23) \quad \begin{cases} u = A \cos n\pi \frac{x}{L} \cdot \frac{\cos m\psi}{m}, & v = A \frac{L}{n\pi a} \sin n\pi \frac{x}{L} \cdot \sin m\psi, \\ w = A \frac{m}{n} \frac{L}{\pi a} \sin n\pi \frac{x}{L} \cdot \cos m\psi. \end{cases}$$

Le condizioni (17) conducono a ricercare i valori di m e di n per i quali è minimo il rapporto

$$(24) \quad -\frac{W_e + W_f}{\delta_2^* + \Delta \delta_2^*} \quad (11).$$

Riportiamo le espressioni di W_f e di W_e dedotte introducendo la (23) in (13e), (13f); esse sono, con riferimento al quadrante di volta $0 \leq x \leq L/2$, $0 \leq \psi \leq \psi_0 = \pi/2$,

$$(25e) \quad W_e = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{a} \frac{3}{4} \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 LA^2,$$

(10) Cfr. A. u. L. FÖPPL, *Drang und Zwang* (Oldenbourg, Berlin 1928); p. 373; ovvero op. cit. (5), p. 622.

(11) Cfr. op. cit. (5), pp. 550-551.

$$(25f) \quad W_f = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \frac{1}{16} n^2 \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 LA^2 \left\{ m^2 \left[1 + \frac{m^2-1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \frac{m^2-1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 \right\}.$$

Analogamente da (14) e (14a), con la (23), si ottengono le espressioni:

$$\Omega_2^* = -g \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{1}{4m^2-1} \left\{ (m^2+1) \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \frac{m^2}{4n^2} [4m^4-14m^2+7+(2m^2+1) \frac{n^2\pi^2}{3}] \right\}, \\ \Delta\Omega_2^* = g \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{m^2}{4n^2} \left[\frac{n^2\pi^2}{3} - 1 \right], \quad m \text{ pari},$$

con il carico g , mentre con il carico p non si considera $\Delta\Omega_2^*$ ed è

$$\Omega_2^* = -p \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 \frac{LA^2}{4} \frac{\pi}{16} \left[\left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{n} \right)^2 \right], \quad m \text{ intero} \geq 2.$$

La seguente ricerca, ulteriormente circoscritta ponendo $n=1$, consisterà nel calcolare il minimo, $\bar{\lambda}_{\min} = \bar{\lambda}_{cr}$ rispetto ad m pari, delle funzioni (che intervengono nelle (18)):

$$(26_g) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a} \right)^3 \frac{m^2-1/4}{m^2} \cdot \\ \cdot \frac{12 \left(\pi \frac{a}{L} \right)^4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2 - 1 \right]^2 - 2(1-\nu) \frac{m^2-1}{m^2} \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 \right\}}{(m^2+1) \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2(m^2-1)(m^2-\pi^2/6-3/2)}$$

per la distribuzione di carico (2g), e

$$(26_p) \quad \bar{\lambda} = \left(10^2 \frac{h}{a} \right)^3 \cdot \\ \cdot \frac{12 \left(\pi \frac{a}{L} \right)^4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + m^4 \left\{ \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + m^2 - 1 \right]^2 - 2(1-\nu) \frac{m^2-1}{m^2} \left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 \right\}}{m^2 \left[\left(\pi \frac{a}{L} \right)^2 + (m^2-1)^2 \right]},$$

per la distribuzione di carico (2p).

11. *Sollecitazioni critiche oltre il limite σ_p di proporzionalità.* — Siano dunque calcolati g_{cr} e p_{cr} con le (18g), (18p) e Tabelle IV, V per le volte isolate. In base a questi carichi si calcoli la sollecitazione *principale* massima $|\sigma_{cr}|$ con T_2, S, T_1 delle (3) associate alle (4g), (4p), (6) e (7) o, tenendo conto della flessione, con le (3) e seguenti (Tabella I). Ove risulti $|\sigma_{cr}| > |\sigma_p|$ i g_{cr} o p_{cr} sono da considerarsi ovviamente illusori. E ciò in quanto sono calcolati con un modulo (il solito modulo) d'elasticità dei calcoli ordinari, costante, $E = E_0$ mentre, oltre σ_p , è E una funzione $E = E(\sigma)$ decrescente

con σ che si annulla in $\sigma = \sigma_p$ limite di plasticità. Per uscire dall'impasse, conviene procedere nei termini seguenti: Si indichino d'ora innanzi con $g_{cr}^{(o)}$, $p_{cr}^{(o)}$ i valori di g_{cr} , p_{cr} calcolati per $E = E_o$, con $\sigma_{cr}^{(o)}$ la corrispondente σ_{cr} , principale, o comunque normativa. Si indichino invece con g_{cr} , p_{cr} e σ_{cr} i valori

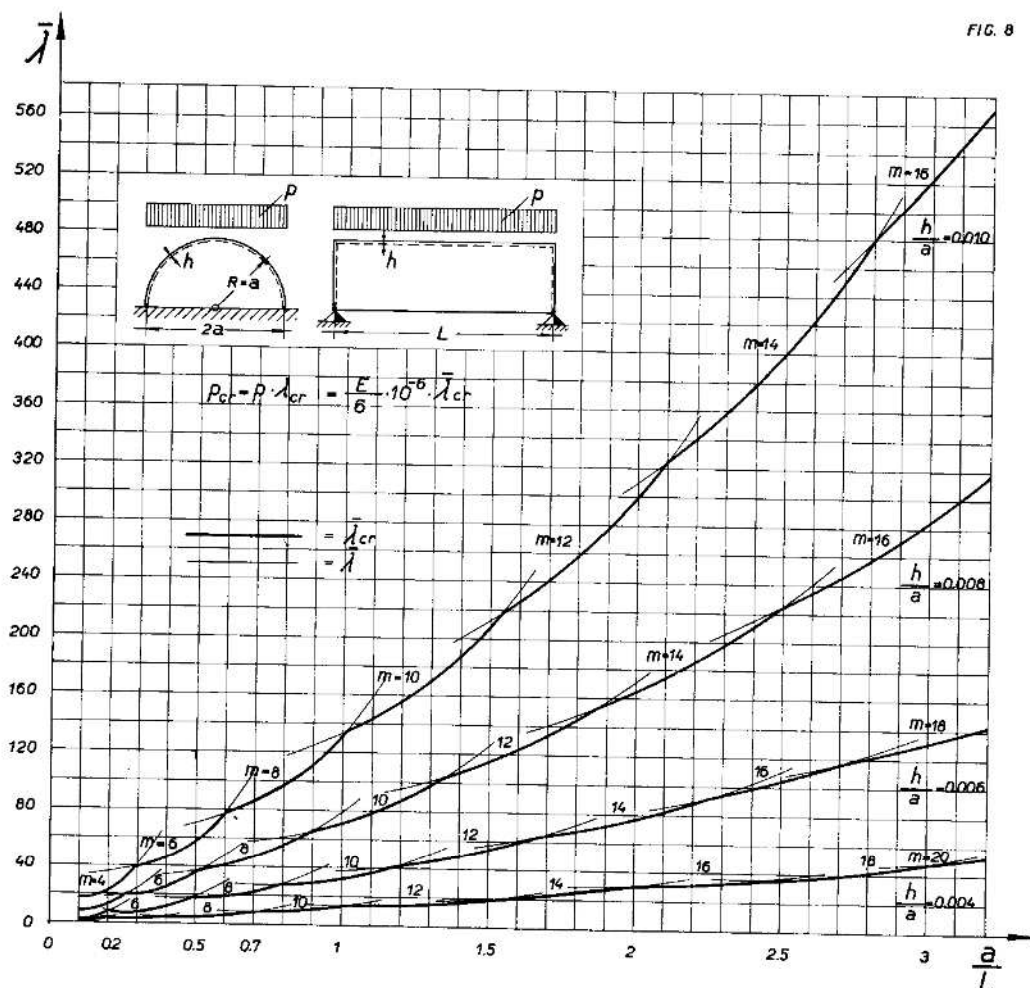


Fig. 6. — Il significato di questa fig. 6 è ampiamente illustrato nella nota, quasi in calce, della Tab. V, pag. 212.

critici, a priori incogniti, effettivi di p, g, σ per $E(\sigma)$ in σ_{cr} , dunque per $E = E(\sigma_{cr})$. Orbene, il calcolo di σ_{cr} si può fare, come apparirà tra un momento, molto ragionevolmente, in base alla formula

$$(27) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \pi\beta \sqrt{\frac{E_o}{\sigma_{cr}^{(o)}}}.$$

In questa, α, β sono costanti del materiale; precisamente quelle che intervengono nella nota formula di Tetmayer,

$$(28) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \beta \frac{l}{i}$$

TABELLA IV.

Minimi λ_{cr} del λ , fornito dalla (26_g), e valori di m minimanti (*); $(g_{cr} = \frac{\pi E}{24(1-\nu^2)} 10^{-6} \lambda_{cr})$.

$10^2 h/a$ a/L	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,22 (4)	1,34 (4)	4,24 (4)	9,82 (4)	18,97 (4)	32,58 (4)	76,76 (4)	149,51 (4)
0,2	0,40 (6)	2,67 (6)	7,73 (4)	14,62 (4)	25,21 (4)	40,42 (4)	88,40 (4)	165,95 (4)
0,3	0,62 (8)	3,47 (6)	9,99 (6)	22,27 (6)	42,23 (6)	71,30 (4)	131,59 (4)	223,19 (4)
0,4	0,80 (8)	4,92 (8)	13,25 (6)	26,95 (6)	48,61 (6)	80,22 (6)	181,22 (6)	345,89 (6)
0,5	1,0 (10)	5,74 (8)	17,15 (8)	36,21 (6)	60,89 (6)	95,98 (6)	205,74 (6)	382,16 (6)
1,0	2,1 (14)	12,3 (12)	33,9 (10)	72,7 (10)	135,1 (8)			
2,0	4,4 (18)	26,5 (16)	76,9 (14)	166,4 (14)				
3,0	7,0 (22)	44,3 (20)	131,1 (18)					

(*) In ogni casella il primo numero è il λ_{cr} , il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di Δ e $\square$, si rilevi che indicano la posizione corrispondente ai valori medi di h/a , a/L per volte di tipo lungo rispettivamente di tipo corto (cfr. n. 4 d) ed in particolare la fig. 6.

TABELLA V.

Minimi λ_{cr} del $\bar{\lambda}$, fornito dalla (26_p), e valori di m minimanti (*); $\left(p_{cr} = \frac{E}{6(1-\nu^2)} 10^{-6} \bar{\lambda}_{cr}\right)$.

$\frac{10^2 h/a}{a/L}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
0,1	0,19 (4)	1,17 (4)	3,69 (4)	8,55 (4)	16,52 (4)	28,37 (4)	66,84 (4)	97,48 (2)
0,2	0,38 (6)	2,52 (6)	6,73 (4)	12,74 (4)	21,96 (4)	35,20 (4)	76,99 (4)	144,54 (4)
0,3	0,59 (8)	3,28 (6)	9,45 (6)	21,06 (6)	39,92 (6)	62,13 (4)	114,67 (4)	194,49 (4)
0,4	0,77 (8)	4,77 (8)	12,53 (6)	25,48 (6)	45,96 (6)	75,84 (6)	171,33 (6)	318,69 (4)
0,5	0,99 (10)	5,57 (8)	16,63 (8)	34,23 (6)	57,56 (6)	90,74 (6)	194,52 (6)	361,31 (6)
0,6	1,2 (10)	7,0 (8)	19,0 (8)	41,2 (8)	77,2 (8)			
0,7	1,4 (10)	8,2 (10)	22,6 (8)	46,6 (8)	85,0 (8)			
0,8	1,6 (12)	9,2 (10)	27,4 (10)	54,6 (8)	96,0 (8)			
0,9	1,8 (12)	10,6 (10)	29,8 (10)	65,6 (8)	111,0 (8)			
1,00	2,0 (14)	12,1 (12)	33,2 (10)	71,3 (10)	131,0 (8)			
1,25	2,6 (14)	15,2 (12)	44,0 (12)	91,4 (10)	162,2 (10)			
1,50	3,2 (16)	18,8 (14)	53,4 (12)	114,2 (12)				
1,75	3,8 (16)	22,6 (14)	65,2 (14)	137,6 (12)				
2,00	4,4 (18)	26,3 (16)	76,1 (14)	164,8 (14)				
2,25	5,0 (20)	30,6 (16)	89,8 (16)					
2,50	5,6 (20)	34,8 (18)	101,6 (16)					
2,75	6,4 (22)	39,2 (18)	116,2 (16)					
3,00	7,0 (22)	44,2 (20)	130,4 (18)					

(*) In ogni casella il primo numero è il λ_{cr} , il secondo (entro parentesi) è il corrispondente m . Per il significato di Δ e $\square$ vedere nota alla Tab. IV.

Questa Tabella V è compendata in fig. 6. Questa figura contiene quattro curve: per $h/a = 0,006$, $h/h = 0,004$, $h/h = 0,008$ ed infine per $h/a = 0,010$; ogni curva è formata da molti archi (a tratto marcato), ciascuno dei quali è il grafico di $\bar{\lambda}$ in funzione di a/L per un valore di m , indicato sopra l'arco, e per quello di h/a della curva a cui l'arco appartiene. Gli archi sono prolungati, a tratto sottile, oltre i punti di intersezione con i due archi adiacenti.

che si sostituisce alla formola di Eulero

$$(29) \quad \sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E_0}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

quando $\sigma_{cr} \geq \sigma_p$. Ciò avviene specificamente per un'asta caricata di punta quando la snellezza l/i , rapporto tra lunghezza e raggio giratore d'inerzia della sezione resistente, è inferiore od eguale al limite, conforme alla (29), per $\sigma_{cr} = \sigma_p$,

$$\left(\frac{l}{i}\right)_p = \pi \sqrt{\frac{E_0}{\sigma_p}}.$$

Per l'acciaio di qualità è $\alpha = 5891$, $\beta = 38,18 \text{ kg cm}^{-2}$, per il calcestruzzo ($\sigma_R = 400 \text{ kg cm}^{-2}$) secondo nostre valutazioni empiriche ma accettabili, è $\alpha = 400$, $\beta = 2,179 \text{ kg cm}^{-2}$. Per i vari altri materiali si confronti qualsiasi manuale di ingegneria, in particolare ⁽¹⁾, p. 566.

La formola (27) si può giustificare abbastanza bene, qui basti rilevare che, riferendola all'asta caricata di punta, quindi ponendo in essa $\sigma_{cr}^{(0)}$ dato dalla (29), si ha proprio la (28), cioè, così la si chiama, *la retta di Tetmayer* che, nel piano $(\sigma, l/i)$, si sostituisce all'*iperbole di Eulero*, corrispondente alla detta (29).

Noto σ_{cr} , poiché T_2, S, T_1 sono indipendenti dal modulo E , si calcola il g_{cr} o p_{cr} effettivo in base alle formule

$$(30_g) \quad g_{cr} = g_{cr}^{(0)} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}}, \quad (30_p) \quad p_{cr} = p_{cr}^{(0)} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}}$$

le σ nella (30_g) essendo ovviamente *sollecitazioni principali* o comunque determinanti per distribuzione come g ; nella (37_p), per distribuzioni come p .

Occorre appena rilevare che la (34) equivale ad aver introdotto per $\sigma \geq \sigma_p$ il modulo variabile

$$(31) \quad E(\sigma) = \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{\pi^2 \beta^2} \quad (\sigma \geq \sigma_p)$$

e ad aver fatta la posizione spontanea

$$(32) \quad \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}} = \frac{E(\sigma_{cr})}{E_0}.$$

Naturalmente, se è $\sigma_{cr} \geq \sigma_p$ in una zona della struttura, può non esserlo, anzi non lo è, nel resto della stessa, sicché l'ammissione che sia $E = E(\sigma_{cr})$ ovunque può sorprendere sulle prime. A parte il fatto che il superamento si verifica sempre in una zona *importante* per la stabilità, va osservato che, in ogni caso, con riguardo al principio variazionale (8), poiché è $0 \leq E(\sigma) \leq E_0$ per $\sigma \geq \sigma_p$, il λ_{cr} che si trova per $E(\sigma) < E_0$ dappertutto, chiamato λ_{cr} *effettivo*, è *sempre* inferiore al λ_{cr} *vero* per $E(\sigma) < E_0$ localizzato. Ciò è evidentemente a vantaggio della sicurezza e non infirma sensibilmente l'economia delle deduzioni.

Esempi numerici. — Ciò posto, passiamo ad alcuni brevi esempi numerici per illustrare quanto precede e giustificare le diffuse premesse

sul calcolo di T_2, S, T_1 anche per i regimi tensoflessionali qui trascurati, nel calcolo degli enti globali W ed ξ_2^* , ma non trascurabili invece, in taluni casi, nel calcolo del valor locale della costrizione σ del materiale al cui superamento o meno di σ_p , in ultima analisi, viene riferito il carattere, illusorio o veritiero, del λ_{cr} .

a) *Volta isolata (in cemento armato)* - Sia $L = 20,00$ m, $a/L = 0,20$, $10^2 h/a = 1,0$; assumiamo $E = 2,0 \cdot 10^6$ tm⁻², $\nu = 0,20$. Si ha perciò: $a = 4$ m, $h = 4$ cm, $1/(1-\nu^2) = 1,04$ e, dalla Tabella IV, $\bar{\lambda}_{cr} = 25,21$; la (18_g) fornisce $g_{cr} = \pi/24 \cdot 1,04 \cdot 2,0 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} \cdot 25,21 = 6,86$ tm⁻².

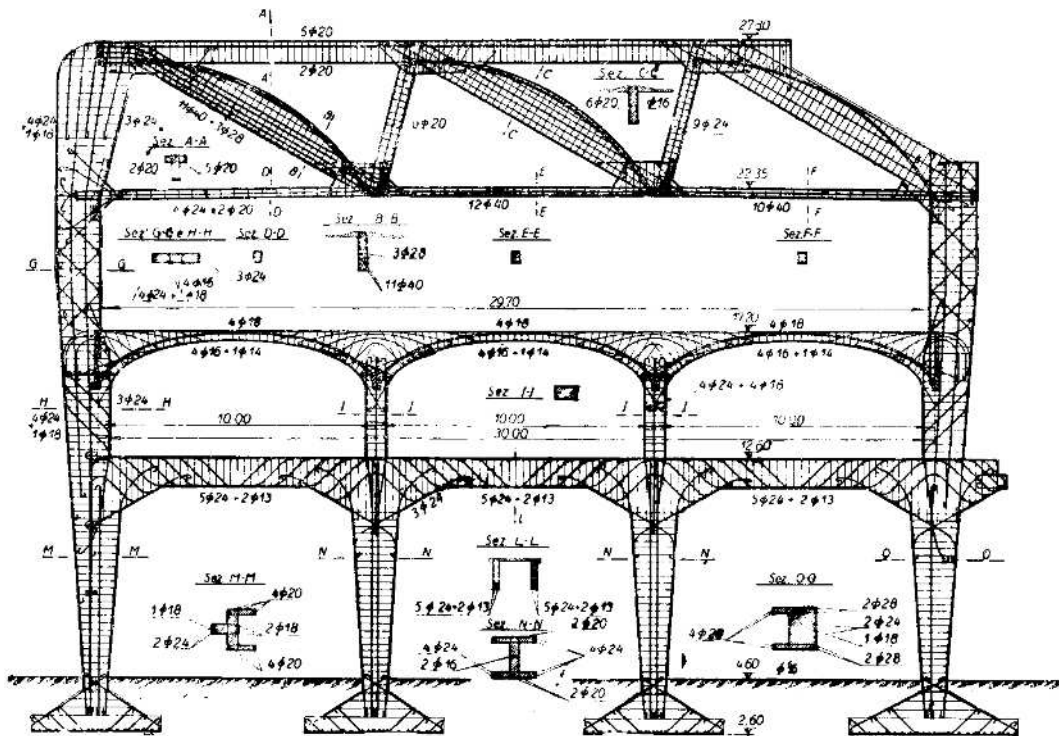


Fig. 7. - Armatura di un timpano-telaio per le volte della copertura a sheds (fig. 5) per la grande sala a tracciare dei Cantieri Ansaldo di Sestri.

Verifichiamo la σ_{cr} per T_1 al vertice ($\psi = 0$), in mezzeria ($\xi = 1/2$). Applicando le (3), poiché da (4_g) e (6) segue $t_1(0) = -2,00$; $m(1/2) = L^2/8 = 50,0^2$ m², risulta $|\sigma_{cr}| = T_1 : h = |6,86 : 4,0 \cdot 50,0 \cdot (-2,0) : 0,04| = 4288$ tm⁻² $\cong 430$ kg cm⁻². Ammesso, ora ed in quanto segue, che sia $\sigma_p = 150$ kg cm⁻², non resta che applicare l'indice (o) - come faremo sempre per ogni ente in regime oltre σ_p - al valore sopracalcolato e scrivere $\sigma_{cr}^{(o)} = 430$ kg cm⁻². Applicando la (27) con $\alpha = 400,0$, $\beta = 2,179$ kg cm⁻², risulta $\sigma_{cr} = 400 - \pi \cdot 2,179 \cdot (2,0 \cdot 10^5 : 430)^{1/2} = 252$ kg cm⁻². Pertanto, in virtù di (30_g), il g_{cr} effettivo è $6,86 \cdot 252 : 430 = 4,02$ tm⁻².

Oltre a σ_{cr} al vertice occorre verificare ciò che avviene al *tirante di bordo*. Per questo si ha, applicando la (6'), per $g = g_{cr}^{(o)}$ un tiro $Z_{cr}^{(o)} = g_{cr}^{(o)} (L/2)^2 = 6,86 \cdot 10,0^2 = 686$ t. Da qui, posto che il dimensionamento sia stato fatto

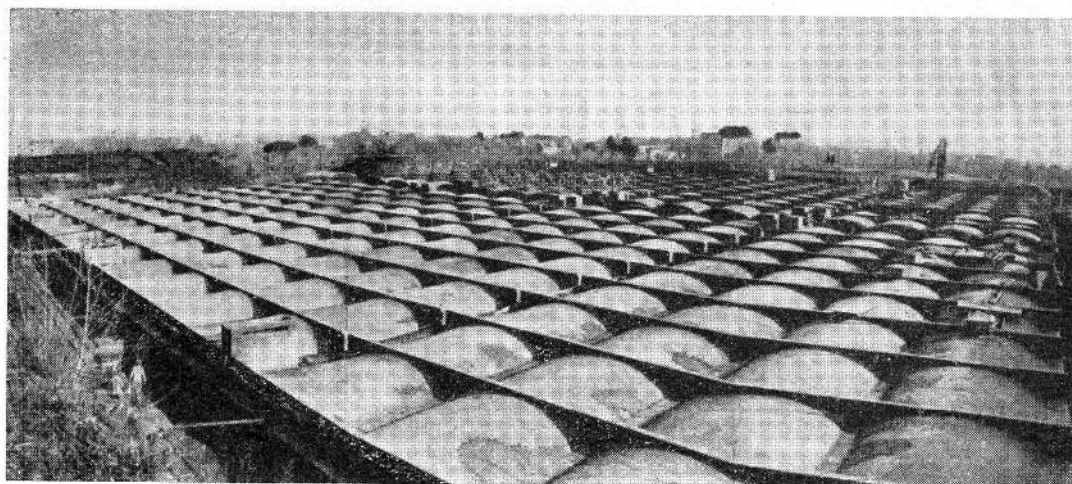


Fig. 8. - Copertura di un serbatoio $200 \times 150 \text{ m}^2$ prima del rivestimento antitermico di 1,00 m di terra. Analoghi serbatoi, con rivestimenti *antiaerei*, per carburanti furono costruiti negli anni 30.

come per la volta per un carico $g = 0,500 \text{ tm}^{-2}$ e con $\sigma_f = 1200 \text{ kg cm}^{-2}$, con che il tirante viene ad avere una sezione resistente $A_f = \frac{gL^2}{4} : \sigma_f = 41,7 \text{ cm}^2$, si ha una sollecitazione critica del ferro $\sigma_{cr}^{(o)} = \sigma_f \cdot \lambda_{cr}^{(o)} = 1200 \cdot 6,86 : 0,500 = 16464 \text{ kg cm}^{-2} > \sigma_p \simeq 5891 - 80 \cdot 38,18 = 2837 \text{ kg cm}^{-2}$, posto che nel caso specifico la (28) sia valida per $l/i \leq 80$. Appare quindi assai più rilevante il superamento di σ_p per il ferro del tirante che non per il calcestruzzo dal vertice. Se si adopera la (27), tanto per fissare l'attenzione su un $E(\sigma)$,

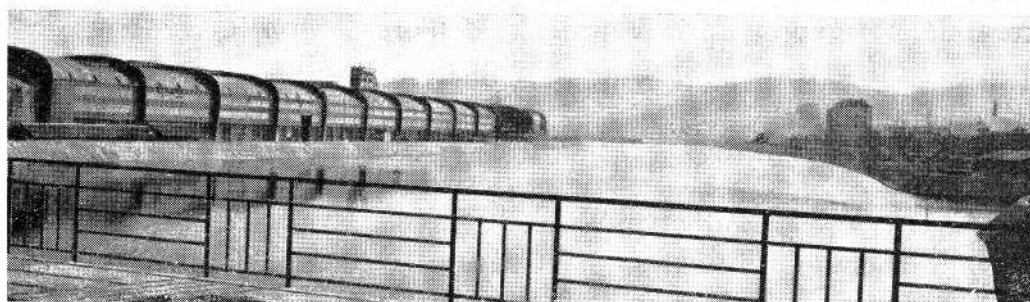


Fig. 9. - Una delle navate, $200 \times 25 \text{ m}^2$, dei magazzini per solfato ammonico della Montecatini a S. Giuseppe di Cairo.

con $\alpha = 5891$, $\beta = 38,18$, $E_o = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}$, risulta $\sigma_{cr} = 5891 - \pi \cdot 38,18 (2,1 \cdot 10^6 : 16464)^{1/2} = 4536 \text{ kg cm}^{-2}$ con che il g_{cr} scende sotto al valore trovato con riguardo al vertice, precisamente (per la (30_g)) $g_{cr} = 6,86 \cdot 4536 : 16464 = 1,89 \text{ tm}^{-2}$; tutto ciò naturalmente se il tirante non cede prima di arrivare a questo σ_{cr} tanto elevato.