

Stabilità dell'equilibrio elastico (*).

1. STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO. — Come nella Statica dei corpi rigidi così anche in Elastostatica il teorema del Dirichlet dà il criterio dominante per il giudizio qualitativo dell'equilibrio: *stabile o instabile è l'equilibrio a seconda che l'energia potenziale totale $\mathcal{E}$, somma di quella elastica W^* e di quella $\mathcal{F}$ dei carichi, è un minimo o un massimo*. In pratica, non basta conoscere la *qualità* dell'equilibrio, occorre conoscere anche una misura o un indice della *sicurezza dall'instabilità*. Nessun migliore indice si può assegnare se non il minimo fattore numerico λ_{cr} che deve moltiplicare i carichi F effettivamente agenti, perché l'instabilità abbia luogo. Giustamente lo si chiama fattore o *moltiplicatore critico λ_{cr} della assegnata distribuzione di carico*. Nessun dubbio che λ_{cr} ha da essere possibilmente $\gg 1$; perciò in pratica, a seconda dei materiali, si sta nell'intervallo $4 \leq \lambda_{cr} \leq 8$.

La condizione di minimo o massimo della $\mathcal{E}$ risulta dall'esame della variazione $\Delta\mathcal{E}$ di $\mathcal{E}$ quando si passa dalla configurazione di equilibrio C_0 ad una prossima C ottenuta spostando i punti del sistema secondo una terna u, v, w ; funzione dei punti stessi.

Separando da $\Delta\mathcal{E}$ i termini $\delta_1\mathcal{E}$ di 1°, rispettivamente $\delta_2\mathcal{E}$ di 2° ordine in u, v, w (e delle corrispondenti derivate) si ha, indicando con $\dots$ termini d'ordine superiore:

$$\Delta\mathcal{E} = \delta_1\mathcal{E} + \delta_2\mathcal{E} + \dots$$

Poiché si tratta di equilibrio, qualunque esso sia, si ha innanzi tutto $\delta_1\mathcal{E} = 0$; la *qualità*: *stabilità, indifferenza o instabilità* appare dall'ispezione del valore; positivo, nullo o negativo di $\delta_2\mathcal{E}$. Alle soglie dell'instabilità si è quando

$$(1) \quad \delta_2\mathcal{E} = 0.$$

Si tratta di rendere esplicita questa condizione. Poiché $\mathcal{E} = W^* + \mathcal{F}$ con W^* energia elastica, $\mathcal{F}$ energia potenziale dei carichi, la (1) si scrive

$$\delta_2 W^* + \delta_2 \mathcal{F} = 0.$$

Quanto a $\delta_2 W^*$, variazione 2ª di W^* (contenente quindi soli termini di 2° ordine in u, v, w , o derivate), dell'energia elastica nel passaggio dalla C_0 alla C , si ha, come si può verificare, nello spirito dal principio dei lavori virtuali,

$$\delta_2 W^* = W + \lambda_2^* W,$$

(*) Dagli «Annali di matematica pura ed applicata», serie IV, tomo XXIX (1949) con aggiornamenti a pp. 179-183.

con W energia elastica corrispondente al passaggio dalla configurazione C_0 ($u = v = w = 0$) considerata come naturale (cioè priva di sforzi interni) alla C , assegnata da u, v, w ; $\mathcal{L}_2^*$ termine di 2° ordine (in u, v, w); del lavoro fatto dagli sforzi interni (corrispondenti alla data condizione di equilibrio), sempre nel passaggio dalla C_0 alla C . Sul calcolo di W e su quello di $\mathcal{L}_2^*$ ritorneremo tra un momento. Resta da rendere esplicito $\delta_2 \mathcal{S}$. Si ha $\delta_2 \mathcal{S} = -\lambda \mathcal{L}_2$ con $\mathcal{L}_2$ espressione, ristretta ai termini di 2° ordine, del lavoro fatto dai carichi esterni nel passaggio da C_0 a C . Il moltiplicatore λ di $\mathcal{L}_2^*$ e di $\mathcal{L}$ interviene automaticamente, quando lo si pensi a fattore dei carichi (*) di cui si tratta. Anche per il calcolo di $\mathcal{L}_2$, come vedremo, si può dare qualche espressione generale. La (1) assume così la forma $W + \lambda (\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2) = 0$, con che risulta

$$(1 a) \quad \lambda = \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*}.$$

Se gli spostamenti si scelgono così che risulti nullo $\mathcal{L}_2^*$, allora si ha semplicemente come *condizione di labilità*,

$$(1 b) \quad W = \lambda \mathcal{L}_2$$

il che vuol dire che si è alle soglie dell'instabilità quando per una terna di spostamenti u, v, w a partire da C_0 , e tale che $\mathcal{L}_2^* = 0$, il lavoro $\mathcal{L}_2$ (di 2° ordine) fatto dai carichi eguaglia o supera la corrispondente (ad u, v, w) energia elastica di deformazione. (Criterio di Bryan-Timoschenko).

La (1 a) o la (1 b) non basta però per calcolare λ che nel caso in cui il sistema ha un solo grado di libertà. Allora l'unico parametro $q_1 = q$ che determina gli spostamenti si elide nel rapporto. Altrimenti occorre introdurre un ulteriore criterio. Per il pratico questo ha carattere prudenziale, e porta a richieder con riguardo ad (1 a) il valor minimo possibile λ_{cr} di λ ; per uno spirito teologico, indotto a pensare anche all'esistenza di configurazioni di minima resistenza, la richiesta non si sposta. E così la (1 a) diviene in ogni caso

$$(2) \quad \lambda_{cr} = \min \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*}.$$

Da qui scende la condizione $\delta \lambda = 0$ con riguardo a variazioni δq_h dei parametri q_h ($h = 1, 2, \dots$); del sistema o $\delta u, \delta v, \delta w$; degli spostamenti u, v, w . Si arriva pertanto alla condizione

$$(3) \quad \delta W + \lambda \delta (\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2) = 0.$$

Con più aderenza concettuale alla Meccanica analitica si perviene ancora alla (3) cercando nuove *forme di equilibrio prossime alla C_0* .

Ciò porta a richiedere *direttamente* il carattere di estremo per l'energia $W + \lambda (\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2)$ sintetizzato dalla (3). L'apparire di queste forme annuncia l'instabilità. Infatti, secondo un teorema di Poincaré, quando le soluzioni di un sistema meccanico dipendono da un parametro λ , ove per un valore

(*) Che possono portare all'instabilità.

λ_1 di λ due serie, cosiddette *lineari*, di soluzioni diverse $q = q(\lambda)$ e $q^* = q^*(\lambda)$, si confondono in una *soluzione unica*, cosiddetta soluzione o *forma unita*, per riapparire poi diverse, sia pure immaginarie, una volta superato λ_1 , allora, ove la serie q o q^* sia stabile per $\lambda < \lambda_1$, è instabile per $\lambda > \lambda_1$, e viceversa. Il punto λ_1 è evidentemente un punto critico onde si può scrivere senz'altro $\lambda_1 = \lambda_{cr}$. La più suggestiva applicazione di questo teorema è stata fatta, dal Poncairè stesso, nello studio delle forme di equilibrio di una massa fluida rotante. Nel caso di cui si tratta, seguendo Love, si consideri un'asta con sforzo assiale λN_0 ; sia e la deformazione, $\mathcal{C}$ la *curvatura totale*.

Nel piano $(e, \mathcal{C})$ ad ogni punto M corrisponde una configurazione, ad ogni traiettoria di M una *serie lineare* di configurazioni. La serie $\mathcal{C} = 0$ corrisponde evidentemente alle soluzioni rettilinee. Nei punti $e_1, e_2, \dots$; di $\mathcal{C} = 0$ dai quali si diramano altre serie per la quali è $\mathcal{C} \neq 0$ (e $\mathcal{C}$ è con e una ben determinata funzione di λN_0), si ha *scambio di stabilità*.

Questi punti corrispondono ai noti carichi di Eulero dati dallo *spettro discreto*

$$\lambda_q N_0 = \left(\frac{\rho\pi}{l}\right)^2 E J_0, \quad (\rho = 1, 2, \dots),$$

essendo $E J_0$ il *coefficiente di rigidità*, l la lunghezza dell'asta; λ_q è il moltiplicatore di N_0 per cui si hanno soluzioni prossime alle C_0 ; infine $\lambda_1 = \lambda_{cr}$.

2. ILLUSTRAZIONI DELLA (2). — Si consideri dapprima il sistema indicato in fig. 1 ma con due sole aste snodate con richiamo elastico alla configurazione rettilinea, soggetto a sforzo assiale N_0 . Sia k la caratteristica della molla, cioè sia k la forza di richiamo quando la molla viene allungata dell'unità. Configurazione d'equilibrio C_0 è evidentemente la configurazione rettilinea ($q = 0$) coincidente con la direzione di N_0 .

Si ha evidentemente un unico parametro q e, in termini di questo:

$$W = \frac{1}{2} k q^2, \quad \mathcal{E}_2^* = 0, \quad \mathcal{E}_2 = 2(l - \sqrt{l^2 - q^2}) N_0 \cong N_0 l \frac{q^2}{l^2};$$

da qui segue per la (1 a)

$$\lambda_{cr} N_0 = \frac{1}{2} k l.$$

Come si vede, per $\lambda_{cr} = 1$ cioè quando N_0 potesse allungare la molla di $\frac{1}{2} l$ si avrebbe equilibrio indifferente.

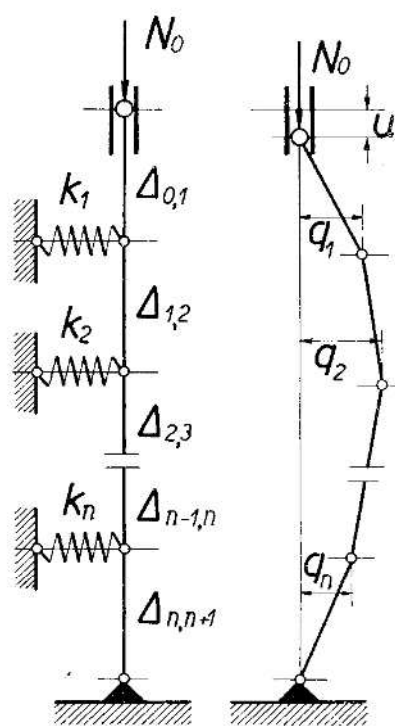


Fig. 1.

Si consideri ora (senza limitazioni) il sistema della indicata fig. 1. I parametri sieno $n; q_1, q_2, \dots, q_n$; n le molle richiamanti. Essendo, con simboli evidenti

$$W = \frac{1}{2} \sum_1^n k_h q_h^2, \quad \mathfrak{L}_2^* = 0, \quad \mathfrak{L}_2 = N_0 \sum_1^n \frac{(q_h - q_{h-1})^2}{2 \Delta_{h,h-1}},$$

appare subito come la (1 a) non consente più, da sola, il calcolo di λ_{cr} e quindi la necessità del ricorso alla (2).

Da questa segue con riguardo ai parametri q_h da cui si fa dipendere u, v, w ;

$$(3 a) \quad \frac{\partial W}{\partial q_h} - \lambda \frac{\partial (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_2^*)}{\partial q_h} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

ovvero, nel caso specifico delle (3) per $\Delta_{h,h-1} = \Delta$ per ogni valore di h ,

$$(3 b) \quad k_h q_h + \lambda N_0 \frac{q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}}{\Delta} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Sono le (3 a) e quindi le (3 b) equazioni algebriche, lineari ed omogenee in $q_1, q_2, \dots, q_n$; perché esistano soluzioni $\neq 0$ dovrà essere nullo il discriminante $D(\lambda)$ e perciò occorrerà che λ sia radice della equazione algebrica di grado n in λ ,

$$(2 c) \quad D(\lambda) = 0.$$

Tra tutte le radici interessa la più piccola $\lambda_1 = \lambda_{cr}$; che significato abbiano le radici successive, il criterio pratico, evidentemente, non consente di vederlo; si invece il teorema di Poincaré sullo scambio delle stabilità e certe loro proprietà di *minimo-massimo* che trovano anche pratica applicazione.

3. SISTEMI CONTINUI. — Per una configurazione C_0 , indichino X, Y, Z ; X_n, Y_n, Z_n ; i carichi agenti: forze di massa e superficiali; $\bar{X}_x, \bar{X}_y, \dots, \bar{Z}_z$; le corrispondenti componenti del tensore degli sforzi: u, v, w ; gli assegnabili spostamenti funzioni di x, y, z ; $e_{xx}, e_{xy}, \dots, e_{zz}$; le corrispondenti componenti del *tensore delle deformazioni* per le quali si penserà separata la parte $e_{xx}^{(1)}, \dots$; di 1° ordine in u, v, w da quella $e_{xx}^{(2)}, \dots$; di 2° ordine. Le $e^{(1)}$ sono ben note, le $e^{(2)}$ sono in appresso date esplicitamente. Si ha allora, come è facile dimostrare, $W = W(e^{(1)}, e^{(2)})$ nota forma quadratica nelle $e^{(1)}$ che dà l'energia elastica corrispondente ad u, v, w , e, almeno nello spirito dei lavori virtuali,

$$(4) \quad \mathfrak{L}_2^* = \int_S (\bar{X}_x e_{xx}^{(2)} + \bar{X}_y e_{xy}^{(2)} + \dots) dS.$$

Infine per $\mathfrak{L}_2$; quando sono ovunque assegnate le u, v, w si ha in generale $\mathfrak{L}_2 = 0$ a meno che i carichi non siano funzioni di u, v, w (come ad esempio avviene se si tratta di una pressione idrostatica) o quando una o due componenti degli spostamenti siano espresse in termini di 2° ordine

delle rimanenti, come può tornare conveniente in molti casi (quando si applica il criterio di Bryan-Timoshenko). Così, passando dal contorno Ω_0 ($u = v = w = 0$) a quello Ω per u, v, w assegnato, se con $d_2 V$ si indica la parte di 2° ordine in u, v, w dell'elemento di volume dV generato nella trasformazione di $d\Omega_0$ in $d\Omega$, il termine $\mathfrak{L}_2$, per una pressione idrostatica p , vale

$$(5) \quad \mathfrak{L}_2 = - \int_{\Omega_0} p d_2 V.$$

Rilevato che $W(e^{(1)}, e^{(2)}), \mathfrak{L}_2^*, \mathfrak{L}_2$ si sanno calcolare in termini della u, v, w e derivate (e tra un momento daremo le relazioni esplicite per il caso più notevole delle superfici cilindriche a base qualunque), il calcolo di λ è ricondotto ad un problema variazionale nel quale i parametri $q_1, q_2, \dots$; prima considerati, sono sostituiti dalle funzioni u, v, w ; salvo a riapparire sotto forma di coefficienti dello sviluppo delle u, v, w ; stesse in termini di funzioni note. Infatti, un metodo ormai classico, cosiddetto *diretto*, del calcolo delle variazioni sta nel riportare il problema nell'ambito prima considerato, cioè dell'estremo di una funzione di un numero finito di variabili (le $q_1, q_2, \dots$).

Basta porre u, v, w sotto forma di combinazione lineare, a coefficienti costanti incogniti A_q, B_q, C_q , di funzioni assegnate u_q, v_q, w_q ; soddisfacenti le condizioni limiti, dunque

$$u = \sum_q A_q u_q, \quad v = \sum_q B_q v_q, \quad w = \sum_q C_q w_q.$$

Allora λ risulta funzione dei coefficienti A_q, B_q, C_q ; e così come prima, le condizioni di stazionarietà (3 a) divengono

$$(3 b) \quad \frac{\partial W}{\partial A_q} - \lambda \frac{\partial (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_2^*)}{\partial A_q} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial B_q} - \lambda \frac{\partial (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_2^*)}{\partial B_q} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial C_q} - \lambda \frac{\partial (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_2^*)}{\partial C_q} = 0.$$

Si ha perciò ancora un sistema di equazioni algebriche lineari ed omogenee nelle A_q, B_q, C_q ; i nuovi parametri al posto delle u, v, w . Il discriminante di questo sistema, eguagliato a zero, porge l'equazione di cui la più piccola radice dà il cercato moltiplicatore critico.

4. CALCOLO DELLE COMPONENTI $e^{(1)} + e^{(2)}$ DELLA DEFORMAZIONE PER UNA SUPERFICIE QUALUNQUE ⁽¹⁾. — Premettendo nota la classica trattazione del Love della teoria generale delle volte sottili, rifacciamo il calcolo delle e_1, e_2, ω che interessano per i nostri intenti, tenendo però conto dei termini del 2° ordine, ivi trascurati.

Senza indugiarcene quindi in quelle precisazioni che si richiederebbero per una autonoma trattazione, mantenendo i simboli del Love, riferiamo

(1) Cfr. *Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autopportante*, Nota I di G. KRALL (« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, ser. VIII, vol. I, fasc. 12, pp. 1281-1295 (dicembre 1946)).

la superficie, per ora qualunque, indeformata Ω ad un elemento lineare ds espresso in coordinate curvilinee α, β ,

$$(6) \quad ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + 2 AB \cos \chi d\alpha d\beta$$

essendo:

A, B in generale funzioni di α, β ;

χ l'angolo che fanno tra loro le tangenti nel punto $P(\alpha, \beta)$, alle linee $\alpha = \text{cost.}$, $\beta = \text{cost.}$ Se ammetteremo che dette linee sieno *linee di curvatura*, sarà $\chi = \pi/2$.

In P consideriamo una terna x, y, z , di assi essendo z orientato secondo la normale ad Ω , l'asse x tangente alla curva $\beta = \text{cost.}$, l'asse y normale ad x , e con verso tale che la terna x, y, z risulti *destra*.

Sieno: u, v, w gli spostamenti applicati a P riferiti alle tangenti, ed alla normale in P , alle curve $\beta = \text{cost.}$, $\alpha = \text{cost.}$

R_1 ed R_2 i raggi di curvatura di quelle sezioni normali della superficie che hanno per tangenti in P gli assi x, y .

Orbene, dette:

a) $e_1 = e_1^{(1)} + e_1^{(2)}$, $e_2^{(1)} = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}$, $e_{12} = \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ le componenti della deformazione (corrispondenti nel piano cartesiano alle e_{xx}, e_{yy}, e_{xy});

b) x', y', z' le coordinate del punto P' ottenuto da P di Ω con uno spostamento definito da una terna u, v, w funzione continua con le derivate prime e seconde di α, β ; essendo x', y', z' una terna *fissa*.

Con origine in P' sieno definiti rispetto ad Ω' deformata di Ω , assi x, y, z così come la terna prima considerata per Ω .

(Convorrà identificare poi tale terna di Ω con x', y', z').

I coseni direttori di x, y, z , rispetto a x', y', z' sono raccolti nella matrice,

	x'	y'	z'
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

c) definito con ds' l'elemento lineare di Ω' deformata di Ω , con χ' l'angolo che formano le $\alpha = \text{cost.}$, $\beta = \text{cost.}$ su Ω' , si ha

$$(6 a) \quad ds'^2 = A^2 (1 + e_1)^2 d\alpha^2 + B^2 (1 + e_2)^2 d\beta^2 + 2 AB (1 + e_1) (1 + e_2) \cos \chi' d\alpha d\beta.$$

Se le α, β coincidono con le linee di curvatura di Ω e sono quindi ortogonali, con che il ds^2 definito dalla (4) si riduce a

$$(6 b) \quad ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

risulta $\cos \chi = 0$ e $\cos \chi'$ dell'ordine di e .

Poiché $\cos \chi' = \omega = e_{12}$ si potrà anche scrivere

$$(6\ c) \quad ds'^2 = A^2 (1 + e_1)^2 d\alpha^2 + B^2 (1 + e_2)^2 d\beta^2 + 2AB (1 + e_1) (1 + e_2) \omega d\alpha d\beta.$$

In base all'espressione (5) di ds' segue per i coseni direttori l_1, m_1, n_1 della tangente in P' alla curva $\beta = \text{cost.}$,

$$A (1 + e_1) l_1 = \frac{\partial x'}{\partial \alpha}, \quad A (1 + e_1) m_1 = \frac{\partial y'}{\partial \alpha}, \quad A (1 + e_1) n_1 = \frac{\partial z'}{\partial \alpha}$$

e, essendo $(l_2 \sin \chi' + l_1 \cos \chi'), (m_2 \sin \chi' + m_1 \cos \chi'), \dots$; i coseni direttori della tangente in P' alla curva $\alpha = \text{cost.}$, sarà

$$(7) \quad \begin{cases} B (1 + e_2) (l_2 \sin \chi' + l_1 \cos \chi') = \frac{\partial x'}{\partial \beta}, \\ B (1 + e_2) (m_2 \sin \chi' + m_1 \cos \chi') = \frac{\partial y'}{\partial \beta}, \\ B (1 + e_2) (n_2 \sin \chi' + n_1 \cos \chi') = \frac{\partial z'}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Ma, poiché $\cos \chi' = \omega$ con ω piccolo del 1° ordine se l'originario ds era ortogonale e, a meno di termini d'ordine superiore al 2°,

$$\sin \chi = 1 - \frac{\omega^2}{2},$$

risulta al posto delle (7)

$$(7\ a) \quad \begin{cases} B (1 + e_2) \left[l_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) + l_1 \omega \right] = \frac{\partial x'}{\partial \beta}, \\ B (1 + e_2) \left[m_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) + m_1 \omega \right] = \frac{\partial y'}{\partial \beta}, \\ B (1 + e_2) \left[n_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) + n_1 \omega \right] = \frac{\partial z'}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Si ha infine, per i coseni direttori l_3, m_3, n_3 della normale in P' alla Ω' ,

$$l_3 = m_1 n_2 - m_2 n_1, \quad m_3 = n_1 l_2 - n_2 l_1, \quad n_3 = l_1 m_2 - l_2 m_1.$$

Segue dalle (6) quadrando e sommando

$$(8) \quad e_1 = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right)^2} - 1.$$

Dalle (7 a), con le stesse operazioni, attese le condizioni di ortogonalità, si ha

$$B^2 (1 + e_2)^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right)^2 + \omega^2 \right] = \left(\frac{\partial x'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta} \right)^2$$

ovvero, trascurando il termine in ω^4 ,

$$(9) \quad e_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta} \right)^2} - 1.$$

Infine, per moltiplicazione di (6) per (7 a) si ha sommando

$$AB(1 + e_1)(1 + e_2)\omega = \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \frac{\partial x'}{\partial \beta} + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{\partial y'}{\partial \beta} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial z'}{\partial \beta}$$

e quindi, poiché il termine a destra è del 1° ordine, si potrà ritenere dal quoziente $1 : (1 + e_1)(1 + e_2)$ la sola parte del 1° ordine $1 - e_1^{(1)} - e_2^{(1)}$ e scrivere in definitiva

$$(10) \quad \omega = \frac{1}{AB} (1 - e_1^{(1)} - e_2^{(1)}) \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \frac{\partial x'}{\partial \beta} + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{\partial y'}{\partial \beta} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial z'}{\partial \beta} \right).$$

Ciò posto, non resta che esprimere $\frac{\partial x'}{\partial \alpha}, \dots$; per tramite di u, v, w , per avere e_1, e_2, ω .

Ora si hanno, secondo Love, le seguenti relazioni fondamentali che legano $\frac{\partial x'}{\partial \alpha}, \frac{\partial x'}{\partial \beta}; \frac{\partial y'}{\partial \alpha}, \frac{\partial y'}{\partial \beta}$, ecc. a u, v, w secondo x', y', z' e corrispondenti derivate,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x'}{\partial \alpha} = A + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{Aw}{R_1}, \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial z'}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{Au}{R_1}, \\ \frac{\partial x'}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y'}{\partial \beta} = B + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{Bw}{R_2}, \\ \frac{\partial z'}{\partial \beta} = \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Bv}{R_2}. \end{array} \right.$$

Queste espressioni introdotte nelle (8), (9), (10) danno, ove si trascurino potenze d'ordine superiore al 2° in u, v, w , le cercate componenti delle deformazioni $e_1 = e_1^{(1)} + e_1^{(2)}, e_2 = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}, \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ con la voluta precisione, cioè compresi i termini di 2° ordine.

Con ciò il nostro problema è risoluto nello spirito della trattazione del Love.

Senza scrivere qui per disteso le espressioni di $e_1^{(2)}; e_2^{(2)}; \omega^{(2)}$ (quelle di $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \omega^{(1)}$ sono note) ci limiteremo a calcolare quelle relative ai casi specifici che tratteremo. Ma prima premettiamo, notevole, la seguente

Osservazione. — Per le superfici cilindriche che esclusivamente vien fatto di considerare nel nostro problema, converrà ridursi ad un ds^2 che scriveremo nella forma

$$(4 a) \quad ds^2 = dx^2 + R^2(\psi) d\psi^2$$

essendo $R = R(\psi)$ il raggio di curvatura della base, espresso in funzione dell'angolo ψ che la normale nel punto generico P fa con una direzione assegnata.

Per il caso della direttrice circolare, ψ è addirittura l'anomalia del riferimento polare, e $R = \text{cost.}$

Per la base ellittica, ove il conteggio di ψ si inizi dall'asse minore

$$R(\psi) = a \cdot \frac{K^2}{(\sin^2 \psi + K^2 \cos^2 \psi)^{3/2}}, \quad K = \frac{b}{a},$$

a, b essendo i semiassi.

Alla espressione (4 a) del ds^2 per l'ellisse si arriva facilmente trasformando l'elemento lineare $ds^2 = dy^2 + dz^2$ della direttrice ellittica, riferita agli assi ortogonali y, z

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

con le relazioni immediate

$$y = a\alpha(K, \psi), \quad z = b\beta(K, \psi)$$

nelle quali

$$\alpha(K, \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2 \cot^2 \psi}}, \quad \beta(K, \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tan^2 \psi}{K^2}}}.$$

Altre possibili direttrici della volta cilindrica sono fornite dall'equazione intrinseca

$$R(\psi) = \frac{a}{\cos^n \psi}$$

che per $n = 0$ dà il cerchio, $n = -1$ la cicloide, $n = 2$ la catenaria, $n = 3$ la parabola. I casi $n = 2, 3$ non hanno, come è noto, pratico interesse nell'ambito delle volte autoportanti. Ciò posto, passiamo a scrivere per disteso le espressioni di e_1, e_2, ω per il ds^2 ora definito.

Si ha senz'altro, $A = 1, B = R(\psi)$.

Le (11) porgono, identificando ψ con β , poiché $R_1 = \infty$,

$$\begin{aligned} R_2 &= R(\psi), & \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial \alpha} &= 1 + u', & \frac{\partial x'}{\partial \beta} &= u, \\ \frac{\partial y'}{\partial \alpha} &= v', & \frac{\partial y'}{\partial \beta} &= R + v - w, \\ \frac{\partial z'}{\partial \alpha} &= w', & \frac{\partial z'}{\partial \beta} &= w + v. \end{aligned}$$

essendosi posto per i termini a destra

$$\frac{\partial}{\partial x} = ()', \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = ()'.$$

Segue

$$e_1 = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 = u' + \frac{v'^2 + w'^2}{2}$$

quindi

$$(12 a) \quad e_1^{(1)} = u' \quad , \quad e_1^{(2)} = \frac{v'^2 + w'^2}{2}$$

$$e_2 = \frac{1}{R} \sqrt{\dot{u}^2 + (R + \dot{v} - w)^2 + (\dot{w} + v)^2} - 1 = \frac{1}{R} (\dot{v} - w) + \\ + \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2)$$

quindi

$$(12 b) \quad e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} \quad , \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2)$$

$$\omega = \frac{1}{R} \left(1 - u' - \frac{\dot{v} - w}{R} \right) [(1 + u') \dot{u} + v' (R + \dot{v} - w) + w' (\dot{w} + v)] = \\ = \left(\frac{\dot{u}}{R} + v' \right) + \frac{1}{R} \left[\frac{w\dot{u}}{R} - \frac{\dot{v}\dot{u}}{R} - Ru'v' + w'\dot{w} + w'v' \right]$$

e quindi

$$(12 c) \quad \omega^{(1)} = \frac{\dot{u}}{R} + v' \quad , \quad \omega^{(2)} = \frac{w\dot{u} - \dot{v}\dot{u}}{R^2} + \frac{\dot{w}w' + vw'}{R} - u'v'.$$

Queste espressioni (12 a, b, c) sono dunque valide per una volta cilindrica con direttrice esprimibile nella forma intrinseca del tipo

$$(13) \quad R = R(\psi)$$

R = raggio di curvatura, ψ angolo della normale con una direzione prefissata. Esse rivestono quindi una generalità e in pari tempo una semplicità di cui vedremo l'importanza. Per $R \rightarrow \infty$, con che, posto $R\beta = y$ e

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{1}{R} (\quad)^* = \frac{\partial}{\partial y} \quad ,$$

risulta in coordinate cartesiane

$$e_1^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ e_2^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \omega^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \omega^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Rileverò ancora che le $e_1^{(2)}$ $e_2^{(2)}$ sono state calcolate per via geometrica e con riguardo al solo cilindro circolare, quindi per $R = \text{cost.}$, dal Flügge; per via analitica, sempre per $R = \text{cost.}$, compresa la $\omega^{(2)}$, da A. Galli. Ma dette espressioni trovate per $e_1^{(2)}$ ed $\omega^{(2)}$ non coincidono per un termine con le nostre (12 b, c) per $R = \text{cost.}$ Ciò è dovuto alla circostanza (l'osservazione è del prof. L. Broglio) che la v è misurata in quegli sviluppi non come abitualmente secondo la tangente (asse y) in P, ma sull'arco di cerchio passante per P. Si tratta quindi di definizioni diverse della componente v , che si

fanno sentire sui termini di 2° grado negli spostamenti. Naturalmente tali divari scompaiono per $R \rightarrow \infty$, cioè per il cilindro ridotto al piano cartesiano.

Il risultato effettivo sta nell'aver conseguite espressioni delle $e_1^{(2)}$, $e_2^{(2)}$, $\omega^{(2)}$ invarianti rispetto alla forma della direttrice con rispetto alla base geometrica (4 a) nella quale interviene il solo raggio di curvatura dell'equazione intrinseca. Poiché gli sforzi T_1 , T_2 , S si calcolano sempre con riferimento a detta equazione intrinseca è chiaro che solo così si può accedere al calcolo di $\varrho^{(2)}$.

4. CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI CURVATURA κ_1 , κ_2 , κ_{12} . — Sono sufficienti, poiché nei nostri calcoli partiamo da distribuzioni non flessionali di sforzi interni limitati alle T_1 , T_2 , S (escludendo la flessione $G_1 = G_2 = G_{12} = 0$) le espressioni limitate ai termini del 1° ordine, date dal Love e che qui trascrivo per completezza

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{A R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{aligned} \right.$$

Da queste si ha, con riguardo al ds^2 dato dalla (6 a), quindi per $A = 1$, $B = R_2 = R$, $R_1 = \infty$; $\alpha = x$, $\beta = \psi$,

$$(14 a) \quad \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{v}{R} \right), \quad \kappa_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \psi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{R} \right).$$

5. OSSERVAZIONI SULLE VARIAZIONI DI CURVATURA (*). — Merita rilevare subito, a scanso di ambiguità, che le κ , anche se sono chiamate dal Love (e quindi da tutti, attesa l'universalità del trattato) *change of curvature*, in verità non rappresentano la variazione di curvatura della linea o superficie per v , w o u , v , w bensì la *variazione angolare specifica riferita al ds originario*, anziché a quello variato ds' , o meglio le *caratteristiche di deformazione*. Ciò risulta anche da un susseguente lavoro del prof. G. Ferrarese dove si deducono classicamente, utilissime in quest'ordine di problemi, le caratteristiche di deformazione e la variazione di curvatura di un solido tubolare a quattro parametri.

Sicché, mentre per una linea piana C_0 variata in una C con spostamenti v , w secondo la tangente $\vec{t}$ e la normale interna $\vec{n}$ la variazione di curvatura k è espressa con ovvi simboli da

$$(15) \quad k = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{d\psi'}{ds'} - \frac{d\psi}{ds},$$

(*) Cfr. nota in calce a p. 169.

la caratteristica κ , sin qui chiamata *change of curvature*, è invece espressa da

$$(16) \quad \kappa = \frac{d\psi' - d\psi}{ds}.$$

Sia la linea piana C_0 data nella forma:

$$(17) \quad R = R(\psi),$$

dove ψ è l'angolo che la normale $\vec{n}$ (nel punto generico P di C_0) forma con una direzione fissa assegnata arbitrariamente a priori (la normale in un punto, il vertice ad esempio) ed R è il raggio di curvatura di C_0 nel punto P . Siano, altresì, assegnati gli spostamenti v, w in funzione di ψ ; si trova per la parte di prim'ordine $\kappa_2^{(1)}$:

$$(16^{(1)}) \quad \kappa_2^{(1)} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{d\psi} + \frac{v}{R} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right)$$

e per la parte di second'ordine $\kappa_2^{(2)}$:

$$(16^{(2)}) \quad \kappa_2^{(2)} = - \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) \cdot e_2^{(1)} \right]$$

essendo $e_2^{(1)}$ la componente del prim'ordine della deformazione e_2 data da

$$(17^{(1)}) \quad e_2^{(1)} = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\psi} - w \right) = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}.$$

All'espressione (16⁽²⁾) di $\kappa_2^{(2)}$ si perviene in vario modo. Ad esempio osservando che

$$d\psi' = d\psi + d \left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) : (1 + e^{(1)}) \right],$$

sicché

$$\frac{d\psi' - d\psi}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) - \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) \cdot e^{(1)} \right] + \dots$$

Con ciò appare esplicito il termine del primo ordine $\kappa_2^{(1)}$ del Love e quello di second'ordine $\kappa_2^{(2)}$ qui assegnato in (16⁽²⁾).

Merita rilevare subito che per la variazione di curvatura (15) si ha invece:

$$k = \frac{d\psi' \frac{ds}{ds'} - d\psi}{ds};$$

e da qui, tenuto presente che

$$ds' = (1 + e) ds = (1 + e^{(1)} + e^{(2)} + \dots) ds$$

e che per la componente $e^{(2)}$ del secondo ordine della deformazione e si ha l'espressione, ove si ponga $u = 0$; perché qui si tratta di flessione pura nel

piano v, w)

$$(17^{(2)}) \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{2R^2} \left(\frac{dw}{d\psi} + v \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right)^2,$$

segue, apponendo l'indice deponente $_2$ alla k della (15),

$$(18) \quad \begin{aligned} k_2 &= k_2^{(1)} + k_2^{(2)} + \dots, \\ k_2^{(1)} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) - \frac{e_2^{(1)}}{R} \\ k_2^{(2)} &= - \left\{ \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) e_2^{(1)} \right] + e_2^{(1)} \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \right) + \frac{e_2^{(2)} - (e_2^{(1)})^2}{R} \right\} \end{aligned}$$

Le formule esatte per le $\kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}, \kappa_{12}^{(2)}$ non sono in tutto conformi e, ciò che è sorprendente, non sono univoche, nel senso che ci sono due modi, egualmente legittimi, di calcolarle con risultati non equivalenti per le κ_{12} , non solo del secondo ordine ma anche del prim'ordine secondo Love, almeno nel caso estensionale.

Si trae da qui la conclusione (cfr. anche pp. 216-217) che è trascurabile l'influenza sul λ_{cr} dei momenti (è dell'ordine h/R rispetto a quella degli sforzi assiali), ma nel caso non estensionale da noi considerato non si annulla la $\kappa_2^{(2)}$, mentre si annulla ancora la $\kappa_1^{(2)}$ e, secondo uno dei due modi di calcolo (quello che dà la $\kappa_{12}^{(1)}$ di Love), la $\kappa_{12}^{(2)}$.

Osservazione. - Questa non univocità del calcolo e dei risultati dello stesso viene posta in luce da G. Ferrarese ⁽²⁾ in un importante studio *Sulle deformazioni finite di una volta*.

La ragione sta nella circostanza che nella teoria del Love, sulla superficie trasformata C' per spostamenti u, v, w dei punti P di una assegnata superficie C , il calcolo delle $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ si riferisce ad una terna mobile ortogonale T'' , che ha comuni necessariamente due soli assi con la terna trasformata T' (ovviamente non ortogonale) della originaria T (ortogonale), sulla C , data dalla normale $\vec{n}$ e dalle due tangenti $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ alle linee di curvatura l_1, l_2 passanti per P .

Le linee l'_1, l'_2 di C' - trasformate delle l_1, l_2 di C - non risultano generalmente anch'esse ortogonali e non è più ortogonale la terna $T'(\vec{n}', \vec{t}'_1, \vec{t}'_2)$. Perciò occorre adottare una convenzione per la scelta della terna ortogonale T'' di riferimento sulla C' ; si possono considerare due eventualità:

$\alpha)$ si sceglie la T'' con $\vec{n}'' = \vec{n}'$ e $\vec{t}''_1 = \vec{t}'_1$ e con l'asse $\vec{t}''_2$ ortogonale al piano $\vec{n}'' \vec{t}''_1$; questo $\vec{t}''_2$ non è, ovviamente, tangente alla l'_2 in P' ;

$\beta)$ anziché $\vec{t}''_1$ coincidente con $\vec{t}'_1$, si può scegliere $\vec{t}''_2 = \vec{t}'_2$ e l'asse $\vec{t}''_1$ ortogonale a $\vec{n}'' \vec{t}''_2$ (quindi non tangente alla l'_1).

(2) Cfr. « Rend. fisici Acc. Naz. dei Lincei », Vol. XXXVI, fascicoli 3, 4 e 6 (1964).

La convenzione α) è quella adottata dal Love; con la β) si hanno risultati diversi.

Dalle formule complete del Ferrarese si riporta qui qualche risultato interessante per le volte cilindriche.

Assumendo la convenzione α) ed essendo l_1, l_2 le generatrici ($x = \text{var.}$) rispettivamente le direttrici ($\psi = \text{var.}$) ed $R = \text{cost.}$ si ha per le $\kappa^{(1)}$ in generale

$$\kappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} + v \right), \quad \kappa_{12}^{(1)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} + v \right),$$

cioè le espressioni del Love.

Con la convenzione β) si ha invece:

$$\kappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2^{(1)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} + v \right), \quad \kappa_{12}^{(1)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} \right)$$

cioè le $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$ del Love, ma non più la $\kappa_{12}^{(1)}$.

Accennando appena alla questione, che nasce da questo risultato, per il calcolo del potenziale elastico, rileviamo che per le $\kappa^{(2)}$ relative a deformazioni prive di estensione si deduce dalle formule generali del Ferrarese:

$$\alpha) \quad \kappa_1^{(2)} = 0, \quad \kappa_2^{(2)} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \kappa_{12}^{(2)} = 0;$$

$$\beta) \quad \kappa_1^{(2)} = 0, \quad \kappa_2^{(2)} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\kappa_{12}^{(2)} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} + v \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \psi};$$

cioè rimangono immutate le $\kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}$, ma la $\kappa_{12}^{(2)}$ non si annulla nell'eventualità β), in conformità con i nostri risultati.

6. ESPRESSIONI DEL POTENZIALE ELASTICO PER LE SUPERFICI ELASTICHE DEL LAVORO DI 2° ORDINE Ω_2^* . - Si ha, secondo Love (detto ν il modulo di Poisson),

$$(19) \quad W = W_f + W_e$$

con W_f energia di flessione (potenziale elastico flessionale) della superficie, data da

$$(19 a) \quad W_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \{ \kappa_1^2 + 2\nu \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu) \kappa_{12}^2 \} d\Omega,$$

e W_e energia dell'estensione (potenziale elastico estensionale) della superficie, data da

$$(19 b) \quad W_e = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ e_1^2 + 2\nu e_1 e_2 + e_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \omega^2 \right\} d\Omega.$$

Nelle (19 a), (19 b) si è indicato con Ω il manto della volta.

Per il calcolo di $\mathfrak{L}_2^*$ dall'espressione generale

$$\mathfrak{L}_2^* = \int_S (X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots) dS$$

per un corpo elastico qualunque S , soggetto a sforzi $X_x, X_y, \dots$ corrispondenti all'equilibrio che si esamina, si ha per una volta sottile.

$$(20) \quad \mathfrak{L}_2^* = \int_{\Omega} (T_2 e_2^{(2)} + S \omega^{(2)} + T_1 e_1^{(2)}) d\Omega + \int_{\Omega} (G_1 \chi_1^{(2)} + G_{12} \chi_{12}^{(2)} + G_2 \chi_2^{(2)}) d\Omega$$

T_1, S, T_2 essendo le componenti dello sforzo superficiale, G_1, G_{12}, G_2 i momenti flettenti.

7. CALCOLO DEL LAVORO DI 2° ORDINE DELLE FORZE ESTERNE. — Per il passaggio dal contorno Ω_0 ($u = v = w = 0$) a quello Ω (per uno spostamento u, v, w assegnato) la trasformazione dell'elemento di superficie $d\Omega_0$ nel $d\Omega$ genera un elemento di volume dV , del quale interessa, per carichi idrostatici, la parte di secondo ordine in u, v, w , che indicheremo con $d_2 V$. Più precisamente, posto

$$dV = d_1 V + d_2 V$$

si ha

$$(21) \quad \begin{cases} d_1 V = -wR d\psi dx, \\ d_2 V = \frac{vw + v^2 + w^2 - vw - Ru'w + Rw'u}{2} d\psi dx. \end{cases}$$

Nel caso di un tronco di cilindro (anche non circolare) a generatrici parallele all'asse x , indicati con ψ l'anomalia della normale principale alla direttrice e con $R(\psi)$ il raggio di curvatura, si ha:

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad A = 1, \quad B = R = R_2, \quad \frac{1}{R_1} = 0.$$

La (21) si estende nel modo seguente, valido per spostamenti finiti,

$$(21 a) \quad \begin{cases} d_1 V = -Rw dx d\psi, & d_2 V = \frac{1}{2} w^2 \left[1 + \frac{v^2}{w^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v}{w} \right) - R \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{w} \right) \right] dx d\psi \\ d_3 V = \frac{1}{3} w^3 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{w} \right) + \frac{v^3}{w^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{u}{w} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{w} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v}{w} \right) \right] dx d\psi. \end{cases}$$

Queste formule generali che esauriscono in rigore il calcolo del volume dello strato compreso tra Ω e la trasformata Ω' per deformazioni finite, sono dovute a G. Ferrarese (3).

8. ESEMPI ILLUSTRATIVI.

a) *Cilindro circolare indefinito soggetto a pressione p_0 sul manto.*

Per intendere l'impiego di queste formule si consideri a titolo di esempio un cilindro indefinito soggetto solo a pressione p_0 agente sul manto esterno.

(3) Cfr. « Rend. fisici Acc. Naz. dei Lincei », Vol. XXXVIII, fasc. 1 (1965).

Una terna non estensionale, come immediatamente si verifica, è data da

$$(6a) \quad u = 0, \quad v = \frac{1}{2} A \sin 2\psi, \quad w = A \cos 2\psi.$$

È dunque, in base alle (8), $e_1^{(1)} = e_2^{(1)} = \omega^{(1)} = 0$.

Si ha inoltre secondo le (14) e (12)

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{3A}{R_0^2} \cos 2\psi, \quad \kappa_{12} = 0;$$

$$e_1^{(2)} = 0, \quad e_2^{(2)} = \frac{9A^2}{8R_0^2} \sin^2 2\psi, \quad \omega^{(2)} = 0,$$

Poiché, evidentemente

$$\bar{T}_1 = 0, \quad \bar{T}_2 = -p_0 R_0, \quad \bar{S} = 0$$

segue, secondo le formule del n. 6

$$W_f = \frac{36\pi}{8} E J_0 \frac{A^2}{R_0^3}, \quad W_e = 0, \quad \mathfrak{L}_2^* = -\frac{9\pi}{8} A^2 p_0, \quad \mathfrak{L}_2 = \frac{3\pi}{8} A^2 p_0$$

e la (2) porge in definitiva, poiché l'unico parametro A si elide

$$\lambda_1 = \frac{36 E J_0 \frac{A^2}{R_0^3}}{9 A^2 p_0 + 3 A^2 p_0} = \frac{3 E J_0}{p_0 R_0^3}.$$

Posto $p_0 = 1$, λ_1 dà addirittura la *pressione critica*.

b) *Asta rettilinea con sforzo assiale* N_0 .

Si consideri ora un'asta rettilinea soggetta a sforzo assiale λN_0 . Fissando l'attenzione su inflessioni nel piano x, z ; x essendo coincidente con l'asse, si ponga,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \sum_0 C_q \sin \frac{\rho\pi}{l} x$$

e si trascuri la dimensione secondo z .

Allora è $e_{xx}^{(1)} = e_{xy}^{(1)} = e_{yy}^{(1)} = 0$ e quindi $W_e = 0$ mentre per W_f si ha, poiché $\kappa = w''$

$$W_f = \frac{1}{2} \int_0^l E J_0 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{l}{4} E J_0 \sum_0 C_q^2 \left(\frac{\rho\pi}{l} \right)^4.$$

Da $e_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ risulta, essendo $\bar{N}_x = -N_0 : A_0$ con A_0 area della sezione,

$$\mathfrak{L}_2^* = -\frac{l}{4} N_0 \sum_0 C_q^2 \left(\frac{\rho\pi}{l} \right)^2$$

e, poiché $u = v = w = 0$ agli estremi, $\mathfrak{L}_2 = 0$, segue dalla (2),

$$N_0 \lambda = \frac{E J_0 \sum_0 C_q^2 \left(\frac{\rho\pi}{l} \right)^4}{\sum_0 C_q^2 \left(\frac{\rho\pi}{l} \right)^2}$$

da cui, in base alle (3 b), che risultano a variabili separate, appare lo *spettro*

$$\lambda_\rho = \left(\frac{\rho\pi}{l}\right)^2 EJ_0, \quad (\rho = 1, 2, \dots).$$

Ma anziché la terna (12) si poteva, ferme restando le w_ρ , scegliere v_ρ così che risulti $e_{xx}^{(2)} = 0$. Riattaccandosi alla espressione completa di e_{xx} che per definizione è

$$e_{xx} = \sqrt{(1 + u')^2 + u'^2} - 1,$$

si trova che basta porre

$$u = - \int_0^x w'^2 dx$$

per avere, oltre a $W_* = 0$, anche $\Omega_2^* = 0$. Ma allora Ω_2 non è più nullo e si ha, in conformità con la posizione fatta da Timoshenko

$$\Omega_2 = \frac{\lambda N_0}{2} \int_0^l w'^2 dx$$

e quindi per la (2), ancora la stessa espressione per λ_ρ .

c) *Flessione deviata di una trave elastica soggetta ad un momento M nel suo piano.*

Si evita sempre, per quanto si è detto, il metodo energetico e direttamente si scrivono le equazioni alle variazioni. Però, poiché possediamo ormai le componenti del 2° ordine delle variazioni di curvatura $\kappa_w^{(2)}$, $\kappa_u^{(2)}$, $\kappa_\varphi^{(2)}$ (più precisamente le caratteristiche di curvatura) per un solido tubolare, anche a 4 parametri secondo G. Ferrarese, è facile applicare il solito criterio energetico del Dirichlet.

Secondo questo si ha com'è noto, $\lambda = \lambda_{cr}$ dal principio variazionale (3) che ripetiamo, $\delta\Phi = 0$ con

$$\Phi = W - \lambda (\Omega_2 - \Omega_2^*),$$

Nel caso specifica si ha per W_f

$$W_f = \frac{1}{2} \int_0^L (B_2 w''^2 + B_1 u''^2 + C \varphi'^2) dx;$$

essendo: B_1 , B_2 le flessorigidezze per flessione secondo w nel piano Π della trave, secondo u normalmente a Π , rispettivamente C la torsorigidezza.

Per Ω_2 si ha $\Omega_2 = 0$ e per Ω_2^* ,

$$\Omega_2^* = \int_0^L M \cdot \kappa_w^{(2)} dx.$$

Essendo per una barra piana curva, con R raggio di curvatura

$$\kappa_w = - \left[\left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(\dot{w}' + \frac{v}{R} \right) \right] - \frac{1}{2R} (u'^2 + \varphi^2) \varphi u'',$$

per $R = \infty$, siccome è per la barra rettilinea, risulta $\kappa_w^{(2)} = \varphi u''$ e

$$\mathcal{L}_2^* = \int_0^L M \varphi u'' dx$$

onde segue da $\delta\Phi = 0$ variando, w, u, φ , di $\delta w, \delta u, \delta \varphi$

$$(22) \quad \begin{cases} B_2 w^{IV} = 0 \\ (B_1 u'')'' + \lambda (M\varphi)'' = 0 \\ -(C\varphi')' + \lambda M u' = 0 \end{cases}$$

e da qui, avendosi dalla seconda delle (22)

$$(22 a) \quad Bu'' + \lambda M\varphi = a_1 x + a_2$$

segue, per $a_1 = a_2 = 0$, la celebre equazione di Prandtl-Mitchell,

$$(22 b) \quad (C\varphi')' + \lambda^2 \frac{M^2(x)}{B_1} \varphi = 0.$$

Da questa, per $B, C = \text{cost.}$, $M = \text{cost.}$ si ha per una trave semplicemente appoggiata, rispettivamente incastrata agli estremi,

$$(23) \quad M_{cr} = \left\langle \frac{\pi}{2\pi} \right\rangle \cdot \frac{1}{L} \sqrt{CB_1}.$$

Per una mensola con carico P all'estremo, libero rispettivamente con $\varphi' = 0$

$$(24) \quad P_{cr} = \left\langle \frac{4,013}{6,97} \right\rangle \cdot \frac{1}{L} \sqrt{CB_1}.$$

Per una trave semplicemente appoggiata, rispettivamente incastrata agli estremi, con un carico P al mezzo,

$$(25) \quad P_r = \left\langle \frac{16,93}{26,60} \right\rangle \cdot \frac{1}{L} \sqrt{CB_1}.$$

Per una trave semplicemente appoggiata, rispettivamente incastrata, con un carico uniforme q ,

$$(26) \quad q_{cr} = \left\langle \frac{28,30}{48,80} \right\rangle \cdot \frac{1}{L^2} \sqrt{CB_1}.$$

Per una mensola con carico costante q ,

$$(27) \quad q_{cr} = \frac{12,85}{L^2} \sqrt{CB_1}.$$

Per una trave semplicemente appoggiata con 2 carichi P simmetrici ad $1/3 \cdot L$ dagli estremi,

$$(28) \quad P_{cr} = \frac{10,26}{L} \sqrt{CB_1}.$$

d) *Torsione deviata di un'asta soggetta a momento torcente M_t .*

Anche per questo fondamentale esempio si evita sempre, per le ragioni dette, il metodo energetico.

Poiché disponiamo però della componente del 2° ordine della caratteristica $\kappa_{\varphi}^{(2)}$ di curvatura, precisamente, con riguardo ad una barra piana curva di raggio R ,

$$(29) \quad \kappa_{\varphi}^{(2)} = -\frac{1}{R} u' \left(v' - \frac{w}{R} \right) - \frac{1}{2} u'' \left(v' + \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{2} u' \left(w' + \frac{v}{R} \right),$$

risulta per l'asta rettilinea, con $R = \infty$,

$$(29 a) \quad \kappa_{\varphi}^{(2)} = -\frac{1}{2} u'' v' + \frac{1}{2} u' w'.$$

Avendosi

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (B_2 w'^2 + B_1 u'^2) dx,$$

$$\mathcal{L}_2 = 0 \quad , \quad \mathcal{L}_2^* = -\frac{1}{2} \int_0^L M_t (u'' w' - u' w'') dx,$$

si ha da $\delta\Phi = 0$ con

$$\Phi = W - \lambda (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*)$$

variando w di δw , u di δu ,

$$(30) \quad \begin{cases} (B_2 w'')'' + \frac{\lambda}{2} (M_t u'')' + \frac{\lambda}{2} (M_t u')'' = 0, \\ (B_1 u'')'' - \frac{\lambda}{2} (M_t w'')' - \frac{\lambda}{2} (M_t w')'' = 0, \end{cases}$$

Per B_1, B_2, M_t , costanti, risultano le note equazioni di Grenhill,

$$(30 a) \quad B_2 w^{iv} + \lambda M_t u''' = 0 \quad ; \quad B_1 u^{iv} - \lambda M_t w''' = 0;$$

dalle quali si deduce, ad esempio; per una trave snodata agli estremi,

$$(31) \quad M_{tcr} = \lambda_{cr} M_t = \frac{2\pi}{L} \sqrt{B_1 B_2}.$$

Come si vede non interviene la torsiorigidezza C .

Per vari casi di associazione di M_t con M_o (flessione), N_o sforzo assiale, cfr. la Nota: *Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Mitchell-Prandtl e di Reissner*, riportata a p. 243 di questa Raccolta.
 e) *Volta autoportante (cfr. fig. 2) a direttrice semicircolare.*

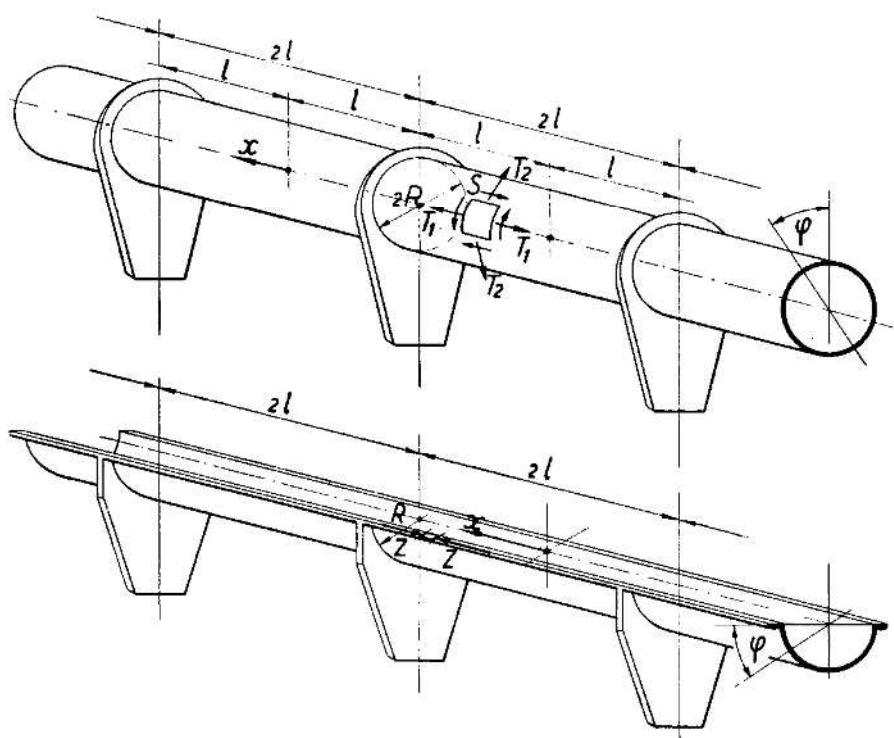


Fig. 2.

In merito alle applicazioni delle considerazioni generali precedenti, si sostituisce al n. 3 della Nota degli « Annali » il seguente Riassunto delle Note redatte in collaborazione con D. Caligo; *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*. In fig. 2 se ne indicano due tipi notevoli: il tubo e la vasca semicilindrica corrente su timpani e soggette al peso ingente del liquido, di cui ne abbiamo costruite nell'immediato dopo guerra, taluni notevolissimi a base semi-circolare $2h = 6,00$ m, $2l = 15,00$ m, sulla copertura di una torre-carbone alta 65,00 m.