

Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile (*).

I. *Complementi e varianti.* – II. *Caso dello sforzo assiale – flessione – torsione di Eulero-Prandtl-Greenhill.*

NOTA I.

1. PREMESSE E GENERALITÀ. – È di attualità lo studio della stabilità di strutture in profili sottili, tirati a freddo da lamiere in nastri. Questi profili (cfr. fig. 1) per aver poca resistenza torsionale, danno luogo ad aspetti assai diversi di instabilità rispetto ai casi tipici: di Eulero, per lo sforzo assiale; di Prandtl-Michell, per la flessione deviata; di Greenhill, per la torsione.

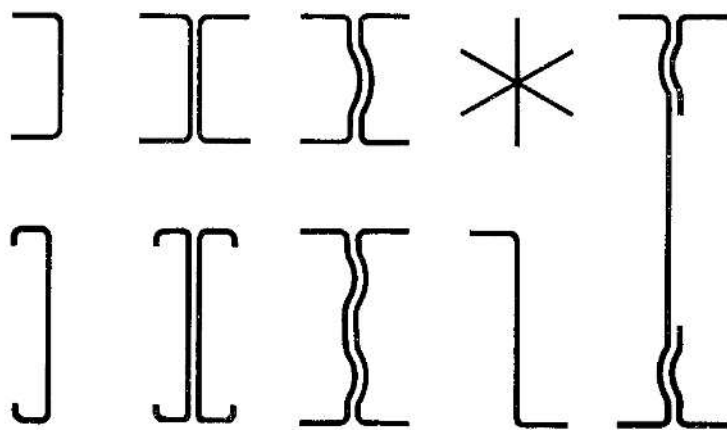


Fig. 1 (**).

In questi casi la torsiorigidezza interviene solo per la flessione deviata con un ruolo essenziale, ma non nel caso di Eulero e, ciò che più sorprende sulle prime, non nel caso di Greenhill, cioè dell'instabilità sotto l'azione di un momento torcente. Il non intervento per il caso di Eulero consegue dal dimensionamento, relativo alle misure globali, degli spessori dei profili di ferriera che si considerano nelle costruzioni metalliche ordinarie, spessori che vengono ridotti invece ad $1/5$, ed anche meno, nei profili tirati a freddo di cui qui si tratta.

Nella impostazione del problema della stabilità dei profili sottili, è fondamentale una ricerca apparsa in « L'Ossature métallique » dovuta a Timoshenko [1]. In questa, con rara intuizione, si scrivono direttamente le equa-

(*) Dai « Rendiconti Acc. dei Lincei », Serie VIII, vol. XXXII, fasc. 6. – Giugno e dal vol. XXXIII, fasc. 1-2 – Ferie – Luglio-Agosto 1962.

(**) Gli incurvamenti, stampati a freddo, (imbutiture), costituiscono autentici, necessari, irrigidimenti.

zioni alle variazioni per una assegnata configurazione di equilibrio che, per l'asta, è la configurazione rettilinea. Rimane là essenziale la nozione di centro C, cosiddetto *centro del taglio* o di *scorrimento*, comunemente trascurata, attesa la torsiorigidezza dei profili ordinari o di ferriera. Tale centro C viene assunto come centro di una possibile rotazione rigida φ della sezione resistente. Per quanto segue si può non riferirsi a C ma ad un a priori arbitrario centro di rotazione O che si potrà naturalmente far poi coincidere con C o con il baricentro G per confronti e verifiche. Aggiungendosi agli spostamenti u, w di O secondo due assi x, z che si identificano con quelli *centrali di inerzia* della sezione resistente, una rotazione φ (cfr. fig. 2), se x_o, z_o sono le coordinate di O e x, z , quelle di un punto generico P della sezione, si avrà per lo spostamento u^*, w^* di P,

$$(I) \quad u^* = u + (z_o - z) \varphi, \quad w^* = w - (x_o - x) \varphi$$

e per quello u_G^*, w_G^* del baricentro G, in cui hanno origine x, z ,

$$(I a) \quad u_G^* = u + z_o \varphi, \quad w_G^* = w - x_o \varphi.$$

Nell'indirizzo di Timoshenko, O in C, stanno tutti [2] i lavori sulla instabilità dei profili sottili nei casi di Eulero, di Prandtl e combinati per

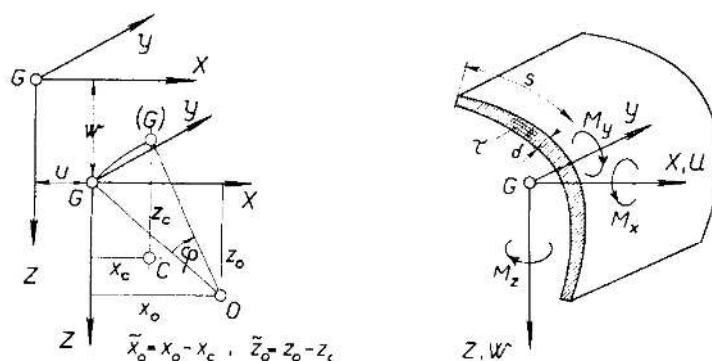


Fig. 2.

quanto riguarda il carico eccentrico. Non risulterebbe studiato il caso di Greenhill della instabilità al momento torcente.

Or qui si cerca di portare qualche contributo alla problematica accennata:

1° considerando, come si è detto, O distinto da C; ciò che consentirà una qualche generalità nei risultati;

2° dandone una sufficientemente precisa impostazione energetica nello spirito del criterio di stabilità secondo Dirichlet ⁽¹⁾;

(1) Inutile dire che il criterio del Dirichlet consente, attraverso l'algoritmo variazionale, una rapida o quantomeno più sicura deduzione delle equazioni alle variazioni nei casi più complessi e, soprattutto, la scrittura per disteso delle condizioni agli estremi. Non solo, ma consente anche, nei casi difficili delle caratteristiche variabili, l'adozione sistematica dei cosiddetti *metodi diretti* (serie minimizzanti) del calcolo variazionale.

3° studiando la stabilità alla torsione e combinazioni dei tre casi di Eulero-Prandtl-Greenhill dello sforzo assiale, della flessione e torsione.

Conseguenza di 1° è che i momenti M_x, M_z rispetto agli assi centrali x, z anziché dalle relazioni (cfr. fig. 2) indipendenti da φ ,

$$(2) \quad M_x = EJ_x w'' \quad , \quad M_z = -EJ_z u''$$

con J_x, J_z momenti centrali di inerzia, vengono qui espressi dalle relazioni,

$$(2)^* \quad M_x = EJ_x w_C^{*''} \quad , \quad M_z = -EJ_z u_C^{*''} \quad ,$$

con

$$(2a)^* \quad u_C^{*''} = (u + \tilde{z}_0 \varphi)'' \quad , \quad w_C^{*''} = (w - \tilde{x}_0 \varphi)''$$

dove, per x_c, z_c coordinate di C,

$$(2b)^* \quad \tilde{x}_0 = x_0 - x_c \quad , \quad \tilde{z}_0 = z_0 - z_c \quad .$$

Resta così rispettata la proprietà tipica del centro del taglio C secondo cui non induce flessione una rotazione che in esso ha centro perché, per definizione,

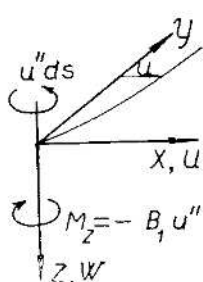


Fig. 3.

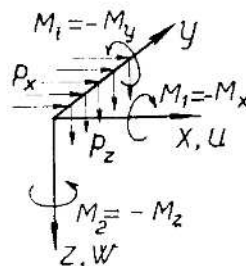
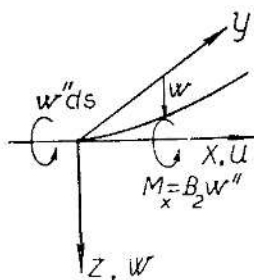


Fig. 4.

non induce rotazione una distribuzione flettente di forze normali all'asse della barra passanti, sezione per sezione, per C. Dalle $(2a)^*$ e $(2b)^*$ per $O \rightarrow C$ quindi per $(x_0, z_0) \rightarrow (x_c, z_c)$ si ha $(u_C^{*''}, w_C^{*''}) \rightarrow (u'', w'')$ sicché le $(2)^*$ si identificano con le ordinarie (2). Non occorre dire che le $(2a)^*$ si giustificano rilevando che una rotazione φ attorno ad O equivale a φ attorno a C più le traslazioni $(z_0 - z_c) \varphi$ secondo x , $-(x_0 - x_c) \varphi$ secondo z ; solo queste danno flessione. Sicché, $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$ salvo, come vedremo, eventualmente nel caso di Greenhill, intervengono solo nei termini con B_1, B_2 a fattore. Nelle seguenti deduzioni i termini inconsueti si sottolineano. Particolarizzando i risultati, ad esempio per $\tilde{x}_0 = 0, \tilde{z}_0 = 0$, cioè per O in C, si ricade nell'ambito di [1] e [2]; invece, per $x_0 = z_0 = 0$, cioè per O in G si ritrovano risultati di una importante ricerca [3] di R. Kappus. Questa viene sempre citata senza che, curiosamente, ne sia rilevata la diversità di impostazione (O in G, talvolta, anziché in C) e le conseguenti diversità dei risultati. Infine, dopo questi confronti di controllo, nelle espressioni dei valori critici $N_{cr}, M_{cr}, M_{t,cr}$ o del moltiplicatore critico λ_{cr} di (N, M, M_t) concomitanti si metteranno in evidenza i parametri x_0, z_0 (si eliminerà $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$ con le $(2b)^*$); dal punto di vista variazionale si potranno rinforzare quei minimi critici estremandoli ulteriormente rispetto

a x_0, z_0 . Ma i casi limiti sopra considerati (O in C rispettivamente O in G) danno indici quantitativi ampiamente sufficienti per la problematica di cui si tratta.

Concludendo, si può ancora osservare che in sede di soluzioni di equilibrio non uniche (e perciò instabili) quali qui si considerano, le accennate proprietà del centro C che discendono dal teorema di reciprocità del Betti, possono destare qualche incertezza e indurre a togliere, forse leggermente, la $\sim$ dappertutto e trattare x_0, z_0 : 1° come parametri estremanti, oppure; 2° identificarli con x_c, z_c dappertutto; 3° con x_c, z_c nei termini con N, M, M_c ponendo invece $x_0 = z_0 = 0$ nei termini con B_1, B_2 ; 4° viceversa di 3°. In conformità con quanto si è già detto, 3° e 4° riportano nello spirito delle [1] e [2] rispettivamente della [3].

2. PRECISAZIONI ULTERIORI. — Si consideri una barra inflessa con momento flettente variabile lungo l'asse. In fig. 2 viene posta in evidenza la sezione (profilo) resistente, il sistema di riferimento x, y, z con origine nel baricentro G della sezione stessa. Rispetto alle Note del Timoshenko è scambiata la y con la z , quindi v con w per restar conseguenti con nostri lavori precedenti. Tale sistema risulta destro (sinistrorso) purché alla successione di lettere x, y, z si sostituisca la x, z, y . Un tale sistema si considera anche per facilitare i raffronti in casi limiti con deduzioni di più A.

Il momento sia M_x , conseguente quindi a sole forze nel piano (y, z) . In queste circostanze la sezione è soggetta ad un taglio globale

$$V_x = - \frac{dM_x}{dy}$$

ed a sforzi di taglio specifici τ , diffusi, che si calcolano con formole note. Precisamente, se gli assi x, z sono, come vogliamo senz'altro ammettere, *assi centrali* d'inerzia, si ha

$$\tau \delta = - \frac{V_x}{J_x} \int_0^s z \delta(s') ds'.$$

In questa relazione è:

$\delta = \delta(s)$ lo spessore del profilo, funzione dell'arco s misurato sulla linea d'asse. Sullo spessore δ si pensa τ costante;

J_x il momento di inerzia rispetto ad x .

La forza specifica $\tau \delta(s)$ si chiami, come al solito, *flusso del taglio in s*.

Si osserva subito che gli sforzi $\tau \delta$ ammettono un risultante (asse centrale) che, salvo evidenti condizioni di simmetria, non passerà generalmente per il baricentro G della sezione. Su y , spiccato da G, per ipotesi, incidono invece le forze esterne agenti.

Sia C il punto, cosiddetto *centro del taglio*, in cui l'asse centrale parallelo a z interseca l'asse x . Se C non sta in G, e $\overline{CG}$ è la distanza tra i due punti, si provoca un momento torcente

$$V_x \cdot \overline{CG}.$$

Questo momento si trascura nei calcoli ordinari, attesa, come si è detto, una sensibile torsiorigidezza dei profili metallici standard e tanto più delle sezioni resistenti ordinarie del cemento armato. Ma per i profili in lamiera sottile di barre ottenute semplicemente stampando a freddo lamiere sottili, ciò non è più lecito.

Ammettiamo dunque, che allo spostamento u, w della sezione corrisponda una rotazione φ attorno ad un centro arbitrario O .

Sieno x_0, z_0 (cfr. fig. 2) le coordinate di O con riferimento agli assi centrali x, z . Rispetto a questi si ha:

$$(3) \quad \int_A x dA = 0, \quad \int_A z dA = 0, \quad \int_A xz dA = 0,$$

con dA elemento d'area della sezione che si considera.

I momenti centrali di inerzia della sezione si scrivano

$$(4) \quad \int_A x^2 dA = J_z = J_1, \quad \int_A z^2 dA = J_x = J_2$$

con che

$$(4a) \quad B_1 = EJ_1 = EJ_z, \quad B_2 = EJ_2 = EJ_x,$$

sono le flessiorigidezze per flessione secondo u rispettivamente w . Per la flessione secondo u (ovvero x), secondo w (ovvero z), valgono le (2), o meglio, come proponiamo per quanto detto, le (2)*.

Per la torsione, pensando al contributo delle ali di una sezione ad I, si pone

$$(5) \quad M_t = -C\varphi' + C_1\varphi''' \quad , \quad \frac{d}{dy} = ()',$$

con C e C_1 dati, per un profilo a poligonale aperta, di lato generico lungo m_i e spessore δ_i , da

$$(5a) \quad C = \frac{G}{3} \sum_i m_i \delta_i^3,$$

e per le ali di un I di altezza h , essendo J_1 il momento di inerzia di un'ala per flessione nel suo piano, quindi rispetto all'asse passante per l'anima (normale all'ala) alta h ,

$$(5b) \quad C_1 = \frac{E J_1 h^2}{2},$$

E, G essendo i moduli d'elasticità flessionale e torsionale. Ma per un profilo generico si pone

$$C_1 = E C_w.$$

con C_w cosiddetta *warping-rigidity* per cui cfr. 2ª op. cit. in [1] Chap. V e Nota successiva alla presente.

3. IL PRINCIPIO DEL DIRICHLET. — Ciò posto, agiscano sul sistema uno sforzo assiale N , un momento flettente M di componenti M_x, M_z , un momento torcente M_t , orientato secondo l'asse della barra che si considera.

Per il principio del Dirichlet, a cui si riporta l'analisi della stabilità, ampiamente illustrato in nostre Note antiche e recenti [4],

$$(6) \quad \delta\Phi = 0,$$

occorre calcolare il funzionale di u, w, φ ,

$$(6a) \quad \Phi = W + \lambda (\varphi_2^* - \varphi_2)$$

con $W, \varphi_2^*, \varphi_2, \lambda$ aventi il significato noto (energia elastica di deformazione, lavoro di 2° ordine delle forze interne rispettivamente dei carichi dei quali λ è il moltiplicatore ⁽²⁾) che passiamo a precisare proprio specificandone ordinatamente la scrittura.

A) Energia elastica di deformazione W .

Si richiami alla mente l'espressione della energia elastica di deformazione di una barra elastica che, in tutta generalità, pensiamo corrente in un letto elastico reagente agli spostamenti u_G^*, w_G^* ed alle rotazioni $u_G^{*'}, w_G^{*'}$. Si ha, con significato evidente dei simboli, sostituendo in questa u con u_G^* e w con w_G^* dati dalle (1a) e ricordando la (2)*,

$$(7) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \{ B_1 (u + \bar{z}_0 \varphi)''^2 + B_2 (w - \bar{x}_0 \varphi)''^2 + C \varphi'^2 + C_1 \varphi''^2 \} dy + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \{ k_u (u + z_0 \varphi)^2 + k_w (w - x_0 \varphi)^2 + k_u^{(r)} (u + z_0 \varphi)'^2 + k_w^{(r)} (w - x_0 \varphi)'^2 \} dy,$$

k_u, k_w essendo le caratteristiche del letto elastico espresse dalle reazioni, passanti per G , opposte allo spostamento $u = 1, w = 1$ del tratto $\Delta s = 1$ nel senso di u rispettivamente di w ; $k_u^{(r)}$ e $k_w^{(r)}$ momenti di reazione alla rotazione $u' = 1$ rispettivamente $w' = 1$, sempre di $\Delta s = 1$, di asse z rispettivamente x .

Si pensa naturalmente, per semplicità, in ogni caso praticamente realizzato, che tutti i componenti ad indici misti, di significato ovvio, $k_{uw}, k_{u\varphi}, \dots$; siano nulli.

(2) Il valore $\lambda = \lambda_{cr}$ per cui si ha instabilità misura evidentemente la sicurezza (alla instabilità). Se, ad esempio, $\lambda_{cr} = 4$, vuol dire che l'instabilità si ha moltiplicando i carichi per 4.

B) *Calcolo del lavoro di 2° ordine $\mathfrak{L}_2^*$ degli sforzi interni.*

Per lo sforzo assiale N si hanno sollecitazioni

$$(8) \quad Y_y = \sigma_y = -\frac{N}{A}$$

con N eventuale funzione di y . Per $\mathfrak{L}_2^*$ si ha

$$(9) \quad \mathfrak{L}_2^* = \int_{\mathfrak{S}} \{ X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots \} dS,$$

l'integrazione essendo estesa al volume del corpo elastico. La funzione integranda è il prodotto interno del tensore sforzo conseguente ai carichi per le componenti $e^{(2)}$ di 2° ordine della deformazione e .

Per $e_{yy}^{(2)}$ si ha

$$(10) \quad e_{yy}^{(2)} = \frac{1}{2} (u^{*'}{}^2 + w^{*'}{}^2)$$

e da qui, attese le (1),

$$(11) \quad \mathfrak{L}_2^* = -\frac{1}{2} \int_0^l dy \int_A \frac{N}{A} \{ [u + (z_0 - z) \varphi]^2 + [w - (x_0 - x) \varphi]^2 \} dA.$$

Per la flessione (caso di Prandtl-Michell) sieno M_1, M_2 i momenti esterni presi come in [1] in senso opposto (cfr. fig. 4) ad $M_x, M_z > 0$. Sia dunque

$$(12) \quad M_1 = -M_x, \quad M_2 = -M_z.$$

Con riguardo alle convenzioni, evidenti nelle figg. 1 e 4, lo sforzo si riduce alla sola componente Y_y data da

$$(13) \quad Y_y = \frac{M_1}{J_x} z - \frac{M_2}{J_z} x.$$

Il lavoro degli sforzi interni $\mathfrak{L}_2^*$ risulta pertanto

$$(14) \quad \mathfrak{L}_2^* = \int_0^l dy \int_A Y_y e_{yy}^{(2)} dA.$$

Ora si ha per $e_{yy}^{(2)}$ ancora l'espressione (10), sicché

$$(14a) \quad \mathfrak{L}_2^* = \frac{1}{2} \int_0^l dy \int_A \left| \frac{M_1}{J_x} z - \frac{M_2}{J_z} x \right| \{ (u + (z_0 - z) \varphi)^2 + (w - (x_0 - x) \varphi)^2 \} dA.$$

Premettendo sempre il riferimento ad assi x, z centrali di inerzia, posto

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\int z^3 dA + \int zx^2 dA}{J_x} - 2z_0 \\ \beta_2 &= \frac{\int x^3 dA + \int xz^2 dA}{J_z} - 2x_0 \\ r_0^2 &= x_0^2 + z_0^2 + \frac{J_x + J_z}{A} \end{aligned} \right.$$

ad φ_2^* si può dare la forma concisa, definitiva,

$$(16) \quad \varphi_2^* = \frac{1}{2} \int_0^l \{ (M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2) \varphi'^2 - 2 (M_1 u' \varphi' + M_2 w' \varphi') \} dy.$$

A questa va aggiunto, ove M sia variabile, il termine di significato evidente

$$(17) \quad \varphi_2^{**} = - \int_0^l (M_1 u_G^{**} + M_2 w_G^{**}) \varphi dy.$$

Infine va considerato il contributo $\delta \varphi_2^{***}$ di $M_1 \varphi, M_2 \varphi$ agli estremi per $\delta u_G^{**}, \delta w_G^{**}$

$$\delta \varphi_2^{***} = [M_1 \varphi \cdot \delta u_G^{**} + M_2 \varphi \delta w_G^{**}]_0^l.$$

Per la torsione M_t .

Riferendosi ad u_G^*, w_G^* , con riguardo alle componenti $M_t u_G^{**}$ e $M_t w_G^{**}$, di $M_t = -M_y$, per le variazioni angolari u_G^{**}, w_G^{**} della linea d'asse, si ha

$$(18) \quad \delta \varphi_2^* = \int_0^l M_t (w_G^{**} \delta u_G^{***} - u_G^{**} \delta w_G^{***}) dy.$$

Attese le espressioni (1 a) per u_G^*, w_G^* la (18) diviene

$$(18a) \quad \delta \varphi_2^* = \int_0^l M_t \{ (w - x_0 \varphi)' \delta (u + \tilde{z}_0 \varphi)'' - (u + z_0 \varphi)' \delta (w - \tilde{x}_0 \varphi)'' \} dy.$$

potendosi forse non considerare, eventualmente, la $\sim$ su x_0, z_0 nelle espressioni di $\delta (u + \tilde{z}_0 \varphi)'', \delta (w - \tilde{x}_0 \varphi)''$ o, per semplicità, considerarla anche nelle $(w - x_0 \varphi)', (u + z_0 \varphi)'$ o, infine, non considerarla affatto.

Con ciò si ha ormai quanto occorre per scrivere Φ per disteso ed applicare direttamente l'algoritmo variazionale per $\delta u, \delta w, \delta \varphi$ variazioni di u, w, φ . Si ottiene in conformità il sistema lineare in u, w, φ delle (19) con le condizioni (19 a) agli estremi $x = 0, l$.

$$\begin{aligned}
 & (B_1 u'')'' + \lambda [(Nu')' + (M_1 \varphi)'' + (Nz_0 \varphi)' + (M_1 w)'' - (M_1 x_0 \varphi)'] + (B_1 \tilde{x}_0 \varphi)'' - [k_u^{(i)}(u + z_0 \varphi)']' + k_u(u + z_0 \varphi) = 0, \\
 & (B_2 w'')'' + \lambda [(Nw')' + (M_2 \varphi)'' - (Nx_0 \varphi)' - (M_1 u)'' - (M_1 z_0 \varphi)'] - (B_2 \tilde{x}_0 \varphi)'' - [k_w^{(i)}(w - x_0 \varphi)']' + k_w(w - x_0 \varphi) = 0, \\
 & [\tilde{x}_0 B_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)']'' - [\tilde{x}_0 B_2 (w - \tilde{x}_0 \varphi)']'' + (C_1 \varphi)'' - (C\varphi)' - \lambda [(M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2 - N\tau^2) \varphi]' + \lambda [N(z_0 u - x_0 w)']' + \\
 & + \lambda (M_1 u'' + M_2 w'') + \lambda [M_1 (\tilde{x}_0 u + \tilde{x}_0 w)']'' + \lambda (M_1 z_0 - M_2 x_0) \varphi + [x_0 k_w^{(i)}(w - x_0 \varphi)' - z_0 k_u^{(i)}(u + z_0 \varphi)']' + k_u z_0 (u + z_0 \varphi) - \\
 & - \lambda [M_1 (x_0 \tilde{x}_0 - z_0 \tilde{x}_0) \varphi]'' - k_w x_0 (w - x_0 \varphi) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Le condizioni agli estremi che seguono dal principio variazionale risultano:

$$\begin{aligned}
 & \{B_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)'' + \lambda [M_1 \varphi + M_2 (w - x_0 \varphi)']\} \delta u' - \{[B_1 (u + z_0 \varphi)']' - k_u^{(i)}(u + z_0 \varphi)' + \lambda [M_1 (w - \tilde{x}_0 \varphi)']' + \lambda (M_1 \varphi)' + \lambda N(u + z_0 \varphi)'\} \delta u = 0 \\
 & \{B_2 (w - \tilde{x}_0 \varphi)'' + \lambda [M_2 \varphi - M_1 (u + z_0 \varphi)']\} \delta w' - \{[B_2 (w - x_0 \varphi)']' - k_w^{(i)}(w - x_0 \varphi)' - \lambda [M_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)']' + \lambda (M_2 \varphi)' + \lambda N(w - x_0 \varphi)'\} \delta w = 0 \\
 & \{\tilde{x}_0 B_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)'' - \tilde{x}_0 B_2 (w - \tilde{x}_0 \varphi)'' + C_1 \varphi'' + \lambda [M_1 (\tilde{x}_0 w' + \tilde{x}_0 u)' - M_1 (x_0 \tilde{x}_0 - z_0 \tilde{x}_0) \varphi]' + (M_1 z_0 - M_2 x_0) \varphi]\} \delta \varphi' - \{[\tilde{x}_0 B_1 (u + \tilde{x}_0 \varphi)']' - \\
 & - [\tilde{x}_0 B_2 (w - \tilde{x}_0 \varphi)']' + (C_1 \varphi)''\} - C\varphi' + \lambda [M_1 (\tilde{x}_0 w' + \tilde{x}_0 u)']' + \lambda (M_1 u' + M_2 w') - z_0 k_u^{(i)}(u + z_0 \varphi)' + x_0 k_w^{(i)}(w - x_0 \varphi)' + \lambda [M_2 \beta_2 - \\
 & - M_1 \beta_1] \varphi' - \lambda [M_1 (x_0 \tilde{x}_0 - z_0 \tilde{x}_0) \varphi]' + (M_1 z_0 - M_2 x_0) \varphi + \lambda N(z_0 u' - x_0 w' + \tau^2 \varphi)'\} \delta \varphi = 0.
 \end{aligned}
 \tag{19a}$$

Osservazione:

Si rilevi che le derivate prime e seconde M' , M'' di M si possono esprimere per tramite delle componenti V , p del taglio rispettivamente del carico distribuito su l'asse y . Si ha precisamente, con riguardo alla fig. 5.

$$M'_1 = V_z, \quad M'_2 = -p_z; \quad M'_1 = -V_x, \quad M'_2 = p_x.$$

In una Nota successiva a questa vedremo in atto le (19), (19a) tanto nei confronti di controllo con tutti i casi limite noti, quanto nella trattazione di casi nuovi. La estensione di questi risultati agli archi (considerata per i profili ordinari in 2ª op. cit. in [1] Chap. VII e, con riguardo al principio del Dirichlet ed agli archi da ponte in generale, in [5]) viene sistematicamente trattata dal prof. G. Ferraresi in due Note [6] su questi stessi «Rendiconti».

NOTA II.

4. IL CASO DELLO SFORZO ASSIALE ECCENTRICO. — Siano costanti tutti i coefficienti elastici di forma ed in particolare sia $k_u^{(n)} = k_w^{(n)} = 0$. È $M_t = 0$ ed i momenti M_x, M_z sono conseguenti ad eccentricità e_x, e_z dello sforzo assiale costante N sicché, con riguardo alle convenzioni di segno evidenti in fig. 2 della Nota I,

$$M_2 = N e_x, \quad M_1 = -N e_z.$$

Le (19) divengono allora, poiché è inutile l'introduzione del parametro λ di cui gli uffici passano ad N ,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 u^{(IV)} + N u'' + k_u u + B_1 \tilde{z}_0 \varphi^{(IV)} + N (z_0 - e_z) \varphi'' + k_u z_0 \varphi = 0 \\ B_2 w^{(IV)} + N w'' + k_w w - B_2 \tilde{x}_0 \varphi^{(IV)} - N (x_0 - e_x) \varphi'' - k_w x_0 \varphi = 0 \\ (C_1 + \tilde{z}_0^2 B_1 + \tilde{x}_0^2 B_2) \varphi^{(IV)} - [C - N (e_z \beta_1 + e_x \beta_2 + r_0^2)] \varphi'' + \\ + (k_u z_0^2 + k_w x_0^2) \varphi + (\tilde{z}_0 B_1 u^{(IV)} - \tilde{x}_0 B_2 w^{(IV)}) + N [(z_0 - e_z) u'' - \\ - (x_0 - e_x) w''] + k_u z_0 u - k_w x_0 w = 0. \end{array} \right.$$

Per $\tilde{x}_0 = \tilde{z}_0 = 0$ cioè per $x_0 = x_c, z_0 = z_c$ si hanno evidentemente le equazioni della teoria ordinaria dei profili sottili.

Con le posizioni soddisfacenti alle condizioni agli estremi, fissi ma a snodo e quindi $u = w = 0$; $u'' = w'' = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi'' = 0$; A_1, A_2, A_3 essendo costanti a priori incognite,

$$u = A_1 \sin \frac{m\pi}{l} y, \quad w = A_2 \sin \frac{m\pi}{l} y, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{m\pi}{l} y, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

si ottiene l'equazione (21) di compatibilità nel parametro N .

Questa equazione algebrica di 3° grado in N parla da sé: esistono tre carichi di Eulero-Prandtl per assegnate eccentricità e_x, e_z in corrispondenza ad ogni intero m . Va considerato per ogni carico quel valore di m che lo rende minimo. Se $k_u = 0, k_w = 0$, questo valore è $m = 1$. In particolare esistano piani di simmetria e sia:

$$1) \quad x_0 = 0, z_0 = 0, e_x = 0, e_z \neq 0; \quad \tilde{x}_0 = 0, \tilde{z}_0 \neq 0,$$

rispettivamente

$$2) \quad x_0 \neq 0, z_0 = 0, e_x \neq 0, e_z = 0; \quad \tilde{x}_0 \neq 0, \tilde{z}_0 = 0.$$

Allora, considerati i carichi di Eulero per $m = 1$ e di svergolamento virtuale in assenza di ogni accoppiamento

$$\begin{aligned}
& B_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + k_u \\
& , \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad , \quad \quad \quad B_1 \tilde{x}_0 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - N (x_0 - e_x) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \\
& \quad \quad \quad + k_u z_0 \\
& \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad , \quad \quad \quad B_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + k_w \\
& \quad \quad \quad , \quad \quad \quad - B_2 \tilde{x}_0 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + N (x_0 - e_x) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \\
& \quad \quad \quad - k_w x_0 \\
& \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad , \quad \quad \quad - \tilde{x}_0 B_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + N (x_0 - e_x) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - , \quad \quad \quad [C_1 + B_1 \tilde{x}_0^2 + B_2 \tilde{x}_0^2] \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \\
& \quad \quad \quad + k_u z_0 \\
& \quad \quad \quad - k_w x_0 \\
& \quad \quad \quad + [C - N (e_x \beta_1 + e_x \beta_2 + r^2)] \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \\
& \quad \quad \quad + k_u z_0^2 + k_w x_0^2
\end{aligned}$$

$$(22) \quad \tilde{N}_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B_1, \quad \tilde{N}_2 = \frac{\pi^2}{l^2} B_2, \quad \tilde{N}_3 = \frac{C + (C_1 + B_1 \tilde{z}_0^2 + B_2 \tilde{x}_0^2) \frac{\pi^2}{l^2}}{r_0^2}.$$

Con r_0^2 dato alla (15) e $C_1 = EC_w$, posto ancora

$$\rho^2 = e_z \beta_1 + e_x \beta_2$$

si hanno le equazioni da cui calcolare i tre carichi critici N_1, N_2, N_3 nei due casi specificati, con il rilievo che per $\tilde{N}_3$ e r_0^2 vanno adoperate le espressioni (15) e (22) per $\tilde{x}_0 = 0, x_0 = 0$ rispettivamente per $\tilde{z}_0 = 0, z_0 = 0$,

$$(23) \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & \tilde{N}_1 \tilde{z}_0 - N(z_0 - e_z) \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & 0 \\ \tilde{N}_1 \tilde{z}_0 - N(z_0 - e_z) & 0 & \tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2) \end{vmatrix} = 0$$

con $\rho^2 = e_z \beta_1, x_c = 0, x_0 = 0$;

$$\begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & -[\tilde{N}_2 \tilde{x}_0 - N(x_0 - e_x)] \\ 0 & -[\tilde{N}_2 \tilde{x}_0 - N(x_0 - e_x)] & \tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2) \end{vmatrix} = 0$$

con $\rho^2 = e_x \beta_2, z_c = 0, z_0 = 0$.

Da qui le equazioni più espressive, di cui è ben ovvia la discussione,

$$(23 a) \quad (\tilde{N}_2 - N) \{ [\tilde{N}_1 \tilde{z}_0 - N(z_0 - e_z)]^2 - (\tilde{N}_1 - N) [\tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2)] \} = 0;$$

$$(23 b) \quad (\tilde{N}_1 - N) \{ [\tilde{N}_2 \tilde{x}_0 - N(x_0 - e_x)]^2 - (\tilde{N}_2 - N) [\tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2)] \} = 0.$$

Per $z_0 = z_c = e_z$ rispettivamente $x_0 = x_c = e_x$ si ritrovano i carichi critici della teoria ordinaria

$$N_1 = \tilde{N}_1, N_2 = \tilde{N}_2, N_3 = \frac{\tilde{N}_3}{1 + \frac{e_z \beta_1}{r_0^2}}$$

rispettivamente

$$N_1 = \tilde{N}_1, N_2 = \tilde{N}_2, N_3 = \frac{\tilde{N}_3}{1 + \frac{e_x \beta_2}{r_0^2}}.$$

5. IL CASO DI EULERO. SFORZO ASSIALE N APPLICATO NEL BARICENTRO. RAFFRONTO CON LE FORMOLE DI R. KAPPUS [3]. - Con le notazioni (22) che scriviamo in forma leggermente variata, introducendo una espressione ridotta $\tilde{N}_3^*$ di $\tilde{N}_3$,

$$(22 a) \quad \tilde{N}_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B_1, \quad \tilde{N}_2 = \frac{\pi^2}{l^2} B_2, \quad \tilde{N}_3^* = \frac{C + C_1 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}{r_0^2}$$

essendo, al solito,

$$r_o^2 = x_o^2 + z_o^2 + i_p^2, \quad i_p^2 = \frac{J_x + J_z}{A} = \frac{J_2 + J_1}{A},$$

si ha l'equazione in N

$$(23\ c) \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & \tilde{N}_1 \tilde{z}_o - N z_o \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & -(\tilde{N}_2 \tilde{x}_o - N x_o) \\ \tilde{N}_1 \tilde{z}_o - N z_o & -(\tilde{N}_2 \tilde{x}_o - N x_o) & \tilde{N}_1 \tilde{z}_o^2 + \tilde{N}_2 \tilde{x}_o^2 + (\tilde{N}_3^* - N) r_o^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per il caso della simmetria rispetto ad un asse, poniamo l'asse x , è $z_e = 0$ e la (23 c), per $z_o = 0$, si riduce a

$$(23\ c)' \quad \tilde{N}_1 - N = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & -(\tilde{N}_2 \tilde{x}_o - N x_o) \\ -(\tilde{N}_2 \tilde{x}_o - N x_o) & \tilde{N}_2 x_o^2 + (\tilde{N}_3^* - N) r_o^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per $\tilde{x}_o = 0$ cioè per $x_e = x_o$ si ha secondo la teoria ordinaria

$$(\tilde{N}_2 - N)(\tilde{N}_3^* - N) - N^2 \frac{x_e^2}{r_o^2} = 0,$$

e da qui un $N_2 < \tilde{N}_2$, $N_3 > \tilde{N}_3^*$.

Qui rileviamo che secondo Kappus [3], in luogo della (23 c), prendendo norma da una rotazione attorno a G baricentro della sezione, è

$$(23\ c)_K \quad \tilde{N}_1 - N = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & ER_x \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \\ ER_x \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 & GJ_T + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 EC_K - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

In questa equazione GJ_T è la nostra C ; C_K (l'indice K sta qui per evitare ambiguità, ma in [3] sta scritto C) ed R_x sono dati da

$$C_K = \int w^2 dF + \frac{1}{F} \left(\int w dF \right)^2, \quad R_x = \int z w dF$$

w essendo la cosiddetta *Einheitsverwölbung* calcolabile secondo (9) di [3].

Per il caso del profilo a C, cfr. fig. 5, a), Kappus trova

$$C_K = \frac{sa^2 b^3}{12} \frac{2 + 15\beta + 26\beta^2}{(1 + 2\beta)^2}, \quad R_x = -\frac{sa^2 b^2}{3} \frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta}.$$

Ora, nel caso nostro, con riguardo a detto profilo a) della fig. 5, si ha, designando come in [3], s lo spessore (δ), a l'altezza (h) dell'anima, b la larghezza dell'ala, $\beta = b/a$,

$$e_C = b \cdot \frac{3\beta}{1 + 6\beta}, \quad e_G = b \cdot \frac{\beta}{1 + 2\beta}, \quad -x_e = e_C + e_G = b \cdot \frac{4\beta(1 + 3\beta)}{(1 + 2\beta)(1 + 6\beta)},$$

$$J_x = \frac{sa^3}{12} (1 + 6\beta), \quad \frac{1}{E} \cdot \tilde{N}_2 x_e = J_x x_e \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 = -\frac{sa^2 b^2}{3} \frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2$$

$$C_1 = EC_w, \quad C_w = \frac{sa^2 b^3}{12} \frac{2 + 3\beta}{1 + 6\beta}, \quad J_x x_e^2 = \frac{sa^2 b^3}{12} \left(\frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta} \right)^2 \frac{16\beta}{1 + 6\beta}.$$

Per completezza, con riguardo ai profili *b)* e *c)* della fig. 5, si ha, con $\beta = b/a$, per e_G , e_C , x_c e per la *warping constant* C_w

$$b) \quad e_G = e_C = \frac{a}{2}, \quad x_c = 0, \quad C_w = \frac{sb^3 a^2}{12} \cdot \frac{2 + \beta}{1 + 2\beta}$$

e, con $\beta_1 = b_1/a$, $\beta_2 = b_2/a$ solo e soltanto per le *c)* che seguono,

$$c) \quad e_G = \frac{a}{2} \frac{1 + 2\beta_1}{1 + \beta_1 + \beta_2}, \quad e_C = a \frac{\beta_1^3}{\beta_1^3 + \beta_2^3}, \quad C_w = \frac{sa^5}{12} \cdot \frac{\beta_1^3 \beta_2^3}{\beta_1^3 + \beta_2^3}.$$

Si constata agevolmente da quanto sopra che risulta

$$ER_x = EJ_x x_c, \quad C_K = C_w + J_x x_c^2$$

Pertanto la (23 c)_K di Kappus si scrive

$$(23 c)'_K \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & \tilde{N}_2 x_c \\ \tilde{N}_2 x_c & \tilde{N}_3^* r_o^2 + \tilde{N}_2 x_c^2 - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

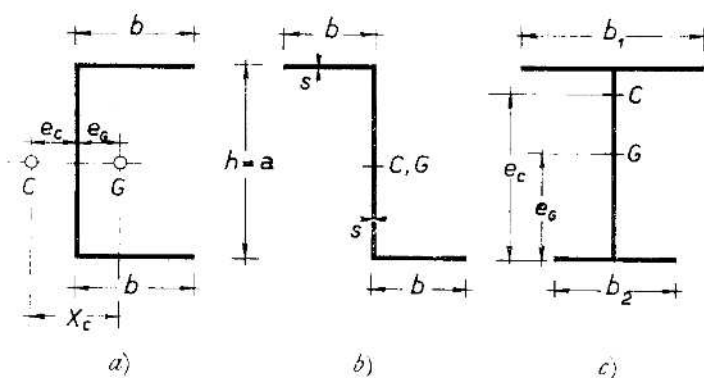


Fig. 5.

Per la rotazione attorno al baricentro G , si ha dalla ns. (23 c)', ponendo $x_o = 0$ e quindi $\tilde{x}_o = -x_c$,

$$(23 c)''_K \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & \tilde{N}_2 x_c \\ \tilde{N}_2 x_c & \tilde{N}_3^* r_o^2 + \tilde{N}_2 x_c^2 - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

cioè la (23 c)'_K c.d.d.

6. INSTABILITÀ AL MOMENTO TORCENTE. - Consideriamo la circostanza particolarmente semplice in cui è

$$M_x = M_z = 0, \quad N = 0, \quad M_t \neq 0.$$

Siano nulli tutti i k . È il caso dell'asta soggetta a sola torsione.

Le (19) si riducono, inutile essendo in tal caso il moltiplicatore λ , a

$$(24) \quad \begin{cases} B_1 u^{IV} + M_t (w''' - x_o \varphi''') + \underline{B_1 \tilde{x}_o} \varphi^{IV} = 0, \\ B_2 w^{IV} - M_t (u''' + z_o \varphi''') - \underline{B_2 \tilde{x}_o} \varphi^{IV} = 0, \\ (B_1 \tilde{x}_o^2 + B_2 \tilde{x}_o^2 + C_1) \varphi^{IV} - C \varphi'' + \underline{\tilde{x}_o B_1} u^{IV} - \underline{\tilde{x}_o B_2} w^{IV} + M_t (\tilde{x}_o u''' + \tilde{z}_o w''') - \\ - M_t (x_o \tilde{z}_o - z_o \tilde{x}_o) \varphi''' = 0. \end{cases}$$

Le condizioni agli estremi sieno, con riguardo alle (19 a), $u = w = 0$, $B_1 u_C^{*''} + M_t w_C^* = 0$, $w' = 0$ con che, per $\tilde{x}_0 = 0$, $B_1 u'' = 0$; infine, $\varphi = 0$, $\varphi'' = 0$. Si hanno dunque estremi fissi con incastro rispetto a w , snodo rispetto ad u .

Ammettiamo dunque che sia $\tilde{x}_0 = x_0 = 0$, $\tilde{z}_0 = 0$. Alle (24), con le considerate condizioni agli estremi, si soddisfa allora ponendo

$$(25) \quad u = A_1 \sin \frac{2\pi}{l} y, \quad w = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} y \right), \quad \varphi = A_3 \sin \frac{2\pi}{l} y$$

con A_1, A_2, A_3 costanti a priori incognite.

Risulta, con tale posizione, un sistema di tre equazioni algebriche lineari omogenee nelle A_1, A_2, A_3 di cui l'equazione di compatibilità si scrive, ponendo compendiosamente

$$(26) \quad \Gamma = (C_1 + B_1 \tilde{z}_0^2) \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + C$$

$$(27) \quad \begin{vmatrix} 4\tilde{N}_1 & -M_t \frac{2\pi}{l} & B_1 \tilde{z}_0 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \\ M_t \frac{2\pi}{l} & -4\tilde{N}_2 & M_t z_0 \frac{2\pi}{l} \\ B_1 \tilde{z}_0 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 & -M_t \tilde{z}_0 \frac{2\pi}{l} & \Gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Da questa, se ha fattore di M_t nella 2ª riga di (27) ci fosse $\tilde{z}_0$ in luogo di z_0 o se la $\sim$ mancasse dappertutto, (cfr. osservazione dopo le (18), (18 a)), si avrebbe con qualche trasformazione,

$$(28) \quad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{B_1 B_2}$$

rispettivamente, togliendo la $\sim$ nei termini con M_t , e per $\tilde{z}_0 = 0$, cioè $z_0 = z_e$ nei termini con B_1, B_2 ,

$$(29) \quad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{B_1 B_2}{1 + \left(\frac{2\pi z_e}{l} \right)^2 \frac{B_1}{\Gamma}}}$$

Si rileva dalla (28) il fatto, sulle prime non immediato, già noto secondo Greenhill, che alla stabilità al momento torcente non concorre la torsiorigidità. La formola di Greenhill per un profilo, per cui $B_1 = B_2$, snodato agli estremi, si scrive in rigore

$$(30) \quad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} B$$

ed a questa riconduce anche la (28) che è riferita però all'incastro (rispetto a w). Sicché, attraverso l'impostazione qui considerata, che vorrebbe costituire un ulteriore perfezionamento della teoria dei profili sottili, per il caso del solo momento torcente M_t e nelle condizioni considerate, si trova semplicemente l' $M_{t,cr}$ di Greenhill valido per i profili in cui il centro del taglio si può ignorare. Togliendo invece la $\sim$ nei termini con M_t si ottiene, per $z_0 = z_e$,

un $M_{l,cr}$ secondo la (29) ridotto rispetto al valore dato dalla (28) e dalla (30) di Greenhill in particolare.

7. CASO LIMITE IN CUI NON SI CONSIDERA x_e, z_e COME NEI PROFILI ORDINARI. — Merita scrivere completo il sistema in u, w, φ per il caso di N_o, M_1, M_2, M_l concomitanti. Si ha dalle (19),

$$(19') \quad \begin{cases} B_1 u^{(IV)} + \lambda M_l w''' + \lambda N_o u'' + \lambda M_1 \varphi'' = 0 \\ B_2 w^{(IV)} - \lambda M_l u''' + \lambda N_o w'' + \lambda M_2 \varphi'' = 0 \\ C_1 \varphi^{(IV)} - (C - \lambda N_o r_o^2) \varphi'' + \lambda M_1 u'' + \lambda M_2 w'' = 0; \end{cases}$$

con r_o^2 secondo le (15) per $x_o = z_o = 0$,

$$r_o^2 = \frac{J_x + J_z}{A} = i_x^2 + i_z^2 = i_p^2.$$

Le condizioni ai limiti divengono

$$(19a') \quad \begin{cases} [B_1 u'' + \lambda M_l w' + \lambda M_1 \varphi] \delta u - [B_1 u''' + \lambda (N_o u' + M_1 \varphi' + M_l w'')] \delta u = 0 \\ [B_2 w'' - \lambda M_l u' + \lambda M_2 \varphi] \delta w - [B_2 w''' + \lambda (N_o w' + M_2 \varphi' - M_l u'')] \delta w = 0 \\ C_1 \varphi'' \delta \varphi + \{(C - \lambda N_o r_o^2) \varphi' - C_1 \varphi''' - \lambda (M_1 u' + M_2 w')\} \delta \varphi = 0. \end{cases}$$

Secondo la fig. 6 la verifica diretta di queste (19a') riesce senza difficoltà.

Sia $M_1 = M_2 = 0$ e in $x = 0, l; u = w = 0$. Le (19') si riportano allora al 2° ordine; si ha precisamente

$$(19'') \quad \begin{cases} B_1 u'' + \lambda N_o u + \lambda M_l w' = 0 \\ B_2 w'' + \lambda N_o w - \lambda M_l u' = 0. \end{cases}$$

Tali equazioni (19'') sono nel caso specifico, ($M_1 = M_2 = 0$), equivalenti alle (19') in quanto si verifica che per $u = w = 0$ agli estremi risultano soddisfatte automaticamente le (19a').

Se $B_1 = B_2 = B$, posto $\lambda = 1$, le (19'') si identificano con le note equazioni di Greenhill. Per queste si ha in rigore, con un artificio che non riesce però per $B_1 \neq B_2$, la condizione di stabilità

$$(31) \quad \sqrt{4 B N_o + M_l^2} \leq \sigma B \quad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l} \right).$$

Da questa, introducendo la nozione di moltiplicatore λ dei carichi, quindi di N_o ed M_l , si ha l'equazione quadratica in λ

$$(32) \quad M_l^2 \lambda^2 + 4 B N_o \lambda - \sigma^2 B^2 = 0.$$

La radice inferiore dà il λ_{cr} . Si constata subito che uno sforzo di trazione ($N_o < 0$) aumenta il λ_{cr} rispetto alla torsione.

Lasciando aperta la ricerca del λ_{cr} per le (19'), con le (19a') si danno qui soltanto alcune soluzioni particolari.

Si considerino le condizioni $u = w = 0, \varphi = 0, u' = 0, w'' = 0, \varphi' = 0$ in $x = 0, l$ corrispondenti allo snodo rispetto a w , all'incastro rispetto ad

u e φ agli estremi. Queste condizioni sono conformi alle (19 a'), come si constata direttamente.

Si hanno allora, per $M_2 = 0$; A_1, A_2, A_3 designando fattori a priori incogniti, le soluzioni

$$(33) \quad u = A_1 (1 - \cos \sigma y), \quad w = A_2 \sin \sigma y, \quad \varphi = A_3 (1 - \cos \sigma y); \quad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l} \right).$$

Entrando con queste nelle (19'), risulta un sistema lineare omogeneo in A_1, A_2, A_3 di cui la condizione di compatibilità si scrive, convenendo di porre

$$(34) \quad \Gamma^*(\lambda) = C_1 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + C - \lambda N_0 r_0^2,$$

$$(35) \quad \begin{vmatrix} B_1 \sigma^2 - \lambda N_0 & \lambda M_t \sigma & -\lambda M_t \\ \lambda M_t \sigma & B_2 \sigma^2 - \lambda N_0 & 0 \\ -\lambda M_t & 0 & \Gamma^*(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

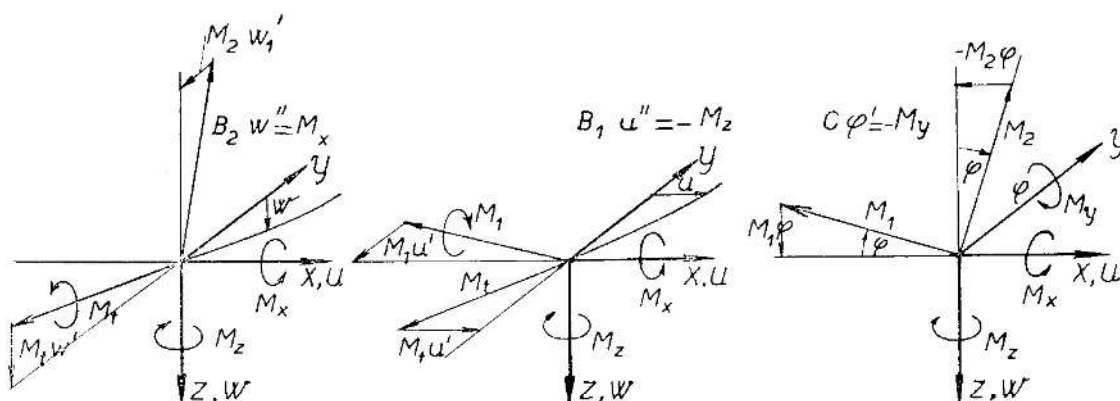


Fig. 6.

Da qui si hanno le relazioni, di controllo per la loro evidenza:

$$a) \quad M_t = 0, N_0 \text{ fisso}, N_0 r_0^2 \ll \mathcal{E}, \mathcal{E} = C_1 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + C$$

$$(35 a) \quad M_{t,cr} = \lambda_{cr} M_t \cong \sqrt{(B_1 \sigma^2 - N_0) \mathcal{E}};$$

$$b) \quad M_t = 0, N_0 \text{ fisso},$$

$$(35 b) \quad M_{t,cr} = \lambda_{cr} M_t \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{(B_1 \sigma^2 - N_0) (B_2 \sigma^2 - N_0)};$$

$$c) \quad \text{per } N_0 = 0, M_t = 0$$

$$(35 c) \quad M_{t,cr} = \lambda_{cr} M_t = \frac{2\pi}{l} \sqrt{B_1 B_2}$$

che è eguale alla (28).

8. CASO DELLE σ_{cr} OLTRE IL CAMPO ELASTICO. - Con riguardo ai profili sottili ed a quelli ordinari, va rilevato che, se per una distribuzione di sforzi N_0 e momenti M_1, M_2, M_t si ha una sollecitazione principale mas-

sima σ_0 in una zona sensibile della struttura e $\lambda_{cr}^{(0)}$ è il moltiplicatore critico di tale distribuzione, sarà $\sigma_{cr}^{(0)} = \lambda_{cr}^{(0)} \sigma_0$ la massima σ principale nella condizione critica di instabilità. Se risulta $\sigma_{cr}^{(0)} \geq \sigma_p$ limite di proporzionalità (più o meno coincidente con il limite di elasticità) il λ_{cr} , che si indicherà con $\lambda_{cr}^{(0)}$, diventa illusorio. Ma si può sempre calcolare da questo un λ_{cr} da intendersi come limite inferiore dell'effettivo. Si ha precisamente [5],

$$(36) \quad \lambda_{cr} = \lambda_{cr}^{(0)} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}}$$

con

$$(36 a) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \pi \beta \cdot \sqrt{\frac{E_0}{\sigma_{cr}^{(0)}}}$$

α e β essendo le costanti delle formole di Tetmayer; ad esempio, per l'acciaio di qualità, Aq. 50,

$$\alpha = 5891 \text{ Kg cm}^{-2} \quad , \quad \beta = 38,18 \text{ Kg cm}^{-2} \quad , \quad E_0 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

Per le applicazioni cfr. Mem. cit. in [5], nn. 25-26, pp. 475-484 e Nota V, cit. in [7].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. TIMOSHENKO, *Théorie de la flexion, torsion et flambage à parois minces et à section ouverte* « L'Ossature métallique », n. 7-8 (1947); ID., *Theory of elastic stability*, Chap. V, 2^a ed. New-York, London (1961).
- [2] Si cfr. F. ed H. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, Chap. III, Graw-Hill Book Company New-York, London (1952).
- [3] R. KAPPUS, *Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenen Profil im elastischen Bereich*, « Luftfahrtforschung », Bd. 14 (1938).
- [4] G. KRALL, *Stabilità dell'equilibrio elastico*, « Annali di Matematica », Bologna 1949.
- [5] — *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, « Memorie fisiche dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. VI e *Ponti in cemento armato*, « Tecnica italiana », n. 8 (1959) e n. 1 (1960), Trieste.
- [6] G. FERRARESE, *Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile*. Questo fasc. di questi « Rendiconti ».
- [7] G. KRALL e D. CALIGO, *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*. Questi « Rendiconti », Nota V in Vol. XXXI, fasc. 1-2 — Ferie — 1961.