

Ciò posto, si entri con lo sviluppo (135) nella (131) e si operi alla Fourier per il calcolo dei coefficienti incogniti A_q . Si ottiene, posto

$$(137) \quad \gamma_q^{(p)} = \int_0^l N_q(x) \omega_p(x) \omega_q(x) dx,$$

$$\omega_p(x) = \sum_q \gamma_q^{(p)} \omega_q(x),$$

$$(138) \quad A_q = \frac{\gamma_q^{(p)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}},$$

e la (135) si scrive, con riguardo alle (137) e (138),

$$(135 a) \quad \omega(x) = \sum_q A_q \omega_q(x) = \sum_q \frac{\gamma_q^{(p)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}} \omega_q(x).$$

Da questa, che esprime la rotazione $\omega = \omega(x)$ in ogni punto dell'asta presso-inflessa, si risale con una integrazione alla configurazione effettiva, cioè agli spostamenti $w = w(x)$.

Con questi risultati si può ormai affrontare la (127); dopo averla portata nella forma (131) basta ammettere che nello sviluppo (135) di ω , funzione di x e t , i coefficienti incogniti A_q siano funzioni a priori incognite di t e porre quindi

$$(139) \quad \omega(x, t) = \sum_q A_q(t) \omega_q(x).$$

Con tale posizione, dalla (127), operando alla Fourier e derivando rispetto a t , si ha in analogia con la soluzione (138) della (131), almeno per p indipendente da t ,

$$(140) \quad \dot{A}_q \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}\right) - \frac{\lambda}{\lambda_q} \Phi(t) A_q - \gamma_q^{(p)} \Phi(t) = 0.$$

Le soluzioni $A_q(t)$ di questo sistema di equazioni lineari indipendenti del 1° ordine, debbono, per $t = 0$, assumere i valori, conformi alla (138),

$$A_q(0) = \frac{\gamma_q^{(p)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}}$$

in quanto, prima che abbia agito la viscosità, cioè per $t = 0$, deve esser $\omega(x, 0) = \omega_p(x)$ con $\omega_p(x)$ dato dalla (135 a), quindi,

$$\omega(x, 0) = \omega(x) = \sum_q \frac{\gamma_q^{(p)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}} \omega_q(x).$$

Le $A_q(t)$, soluzioni della (140) così precisate sono,

$$(141) \quad A_q(t) = \frac{\gamma_q^{(p)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}} \{ \quad \}_q$$

essendo, per $\Phi(t)$ come da (124),

$$(141)' \quad \{ \}_{\varrho} = 1 + \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \left(e^{-\frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}} \alpha (e^{-\beta t} - 1)} - 1 \right).$$

Per tali $A_{\varrho}(t)$ la (139) risolve la (127). Si rileva che gli indici $\{ \}_{\varrho}$ rappresentano i coefficienti di amplificazione ($\{ \}_{\varrho} = 1$ per $t = 0$) delle singole componenti della soluzione (135), (138). Per $\lambda < \lambda_1$, come deve essere, poiché $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$; si constata che $\{ \}_{\varrho}$ decresce con ϱ e si ha

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \{ \}_{\varrho} = 1 + \alpha (1 - e^{-\beta t}).$$

Da qui appare quanto sia importante avere bassi valori di λ/λ_1 , e quindi automaticamente di ogni $\lambda/\lambda_{\varrho}$, per evitare l'amplificazione viscosa conseguente allo sforzo assiale. Per grandi rigidezze, cioè per $\lambda/\lambda_1 \ll 1$ lo sforzo assiale non agisce per effetto viscoso. Per la (141) si può dare l'espressione approssimata, di calcolo facile, indipendente dalla conoscenza delle ω_{ϱ} ,

$$\omega(x, t) \cong \omega_p(x) \cdot \{ \}_{1}$$

tanto più precisa quanto più $\omega_p(x)$ si avvicina alla 1ª autofunzione $\omega_1(x)$ siccome praticamente avviene.

Nel caso degli archi, dove si ripetono passo per passo queste considerazioni, per avere un λ_1 elevato si ricorre alla timpanatura delle costole almeno ove si tratti di archi tesi, quindi con spinte H elevate (cfr. ad es. fig. 25) che possono avvicinarsi pericolosamente alla spinta critica H_{cr} . A titolo di illustrazione e controllo delle (139) e (141) si osservi che

a) per $\alpha \rightarrow 0$ (viscosità $\rightarrow 0$) la (141) dà

$$(141 a) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_{\varrho}(t) = \frac{\gamma_{\varrho}^{(\beta)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}}$$

e quindi, in conformità con la (135), (138), (135 a),

$$\omega(x, t) \rightarrow \omega_p(x) \quad , \quad w(x, t) \rightarrow w_p(x);$$

b) per $\lambda/\lambda_1 \rightarrow 0$ (sforzo assiale $\lambda N_0 \rightarrow 0$)

$$(141 b) \quad A_{\varrho}(t) = \gamma_{\varrho}^{(\beta)} \{ 1 + \alpha (1 - e^{-\beta t}) \}$$

e quindi

$$\omega(x, t) = \omega_p(x) \{ 1 + \alpha (1 - e^{-\beta t}) \} \quad , \quad w(x, t) = w_p(x) \{ 1 + \alpha (1 - e^{-\beta t}) \};$$

c) per piccoli valori di $\lambda/\lambda_{\varrho}$ è infine

$$(141 c) \quad A_{\varrho}(t) \cong \frac{\gamma_{\varrho}^{(\beta)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} (1 - e^{-\beta t}) \right\}$$

e quindi

$$w(x, t) \cong \frac{\omega_p(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} (1 - e^{-\beta t}) \right\}.$$

Non occorre dire che se lo sforzo effettivo è N_0 , è $\lambda = 1$ e quindi al posto di λ/λ_1 si può porre N_0/N_{cr} .

Osservazione su alcune limitazioni superiori delle (135)-(138) e (139)-(141).

Della serie (135)-(138) si può dare una limitazione superiore che merita rilevare per alcune notevoli relazioni, utili in generale, che occorrono per il suo calcolo.

Con riguardo alla (133), atteso il carattere positivo definito del nucleo $\Omega(x, \xi)$ si ha:

1° l'espressione bilineare di $\Omega(x, \xi)$,

$$(142) \quad \Omega(x, \xi) = \sum_q \frac{\omega_q(x) \cdot \omega_q(\xi)}{\lambda_q};$$

2° la relazione di Fourier per una $\omega_p(x)$ arbitraria ma sviluppabile in serie di ω_q ,

$$(143) \quad \int_0^l N_0 \omega_p^2(x) dx = \sum_q \gamma_q^{(\rho)^2}$$

con

$$\gamma_q^{(\rho)} = \int_0^l N_0 \omega_p(x) \omega_q(x) dx.$$

Si richiama ancora, indipendentemente da quanto sopra, la disuguaglianza di Schwarz per una serie di prodotti $a_q \cdot b_q$,

$$(144) \quad \sum_q a_q \cdot b_q \leq \sqrt{\sum_q a_q^2 \cdot \sum_q b_q^2}.$$

Ciò posto nella (135 a) si metta in evidenza il termine $\omega_p(x)$.

Si ha

$$\omega(x) = \omega_p(x) + \sum_q \gamma_q^{(\rho)} \cdot \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_q}} \cdot \frac{\omega_q}{\lambda_q}$$

e poiché λ/λ_q decresce con q , per $\lambda < \lambda_1$ come deve essere, segue in virtù delle (142), (143), (144), la limitazione superiore

$$(145) \quad \omega(x) \leq |\omega_p(x)| + \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} \Omega(x, x) \cdot \int_0^l N_0 \omega_p^2(x) dx}.$$

A titolo di esempio si consideri un'asta semplicemente appoggiata agli estremi con carico $p_0 = \text{cost.}$ soggetta a sforzo assiale λN_0 . Si ha

$$\omega_p(x) = w'_p(x) = \omega_\lambda \cdot \varphi(x)$$

con

$$\omega_\lambda = \frac{p_0 l^3}{24 B} \quad , \quad \varphi(x) = 1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3.$$

Da qui

$$\int N_0 \omega_p^2 dx = \left(\frac{p_0 l^3}{24 B}\right)^2 \cdot \frac{17}{35} \cdot N_0 l.$$

Per $\Omega(x, x)$, rotazione in x prodotta dal momento $M = 1$ in $\xi = x$, si ha

$$(146) \quad \Omega(x, x) = \frac{l}{3B} \cdot \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 \right].$$

Per λ_1 , infine

$$\lambda_1 = \frac{N_{cr}}{N_0} \quad \text{con} \quad N_{cr} = N_1 = \frac{\pi^2 B}{l^2}.$$

Segue dalla (145)

$$(145 a) \quad \omega(x) \leq \omega_\lambda \left\{ |\varphi(x)| + \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{0,485 \pi^2}{3} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 \right]} \right\}.$$

Per il calcolo delle ω_0 si ricorre all'equazione differenziale piuttosto che all'equazione integrale, che serve invece a fornire immediata e con carattere generale tutta una serie di teoremi utili nella particolare problematica che si considera.

L'equazione del caso specifico è

$$Bw^{(iv)} + \lambda N_0 w'' = 0$$

e, in termini di $\omega = w'$,

$$B\omega''' + \lambda N_0 \omega' = 0.$$

Per $w = w'' = 0$ agli estremi $x = 0, l$ si hanno, in corrispondenza ai valori λ_0 di λ ,

$$N_0 \lambda_0 = \frac{(\rho\pi)^2 B}{l^2}, \quad (\rho = 1, 2, \dots),$$

le soluzioni normalizzate

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{N_0 l}} \cos \rho\pi \frac{x}{l}.$$

Infatti si ha, in conformità con la prima delle (134),

$$\int_0^l N_0 \omega_0^2 dx = 1.$$

Ciò posto, l'espressione bilineare di $\Omega(x, \xi)$ diviene

$$\Omega(x, \xi) = \sum_0 \frac{\omega_0(x) \omega_0(\xi)}{\lambda_0} = \frac{2l}{B} \sum_0 \frac{\cos \rho\pi \frac{x}{l} \cdot \cos \rho\pi \frac{\xi}{l}}{(\rho\pi)^2}.$$

In mezzeria essa dà

$$\Omega\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{2l}{B} \sum_{2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\rho\pi)^2} = \frac{l}{12B}$$

in conformità con la (146).

Si noti, per evitare perplessità nei controlli dimensionali, che le ω_q normalizzate non sono, atteso il fattore $\sqrt{2|N_o l}$, prive di dimensione siccome si conviene alle rotazioni.

30. — *Divario per costruzione, $w_o = w_o(x)$, dalla linea d'asse di un arco e viscosità.*

Con riguardo agli sviluppi dal numero precedente, si consideri un'asta soggetta a sforzo assiale $\lambda N_o(x)$, deformata per costruzione secondo una $w_o = w_o(x)$. Se $w = w(x)$ è lo spostamento trasversale totale dall'asse teorico (rettilineo nel caso attuale) da cui si conta w_o , sarà $w - w_o$ lo spostamento elastico e

$$(147) \quad [B(w'' - w_o'')]'' + \lambda(N_o w')' = 0$$

l'equazione in w .

Passando nel campo viscoso, considerando anche un'eventuale $p = p(x, t)$ si avrà per $w = w(x, t)$ l'equazione, deducibile secondo il criterio dianzi accennato,

$$(148) \quad [B(w'' - w_o'')]'' + \lambda(N_o w')' + \int_0^l \lambda(N_o w')' \Phi(\tau) d\tau = \\ = p(x, t) + \int_0^l p(x, \tau) \Phi(\tau) d\tau.$$

Attesa la linearità e le considerazioni già fatte per l'azione di $p(x)$ o $p(x, t)$ si può qui porre senz'altro $p = 0$ con che si è ridotti alla considerazione dell'azione di w_o , quando è $N_o \neq 0$, nell'ambito elastico ordinario ed in quello elastoviscoso.

Si osserva che, ferma restando la definizione di $G(x, \xi)$ e di $\Omega(x, \xi)$ secondo le (128) (130), si ha, conforme alla (147), l'equazione

$$(149) \quad \omega(x) = \omega_o(x) + \lambda \int_0^l N_o(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi) d\xi$$

con

$$\omega(x) = w'(x) \quad , \quad \omega_o(x) = \int_0^l \frac{\partial G}{\partial x} B w_o^{(IV)}(\xi) d\xi = w_o'(x).$$

Da qui, se per ω_o vale lo sviluppo

$$\omega_o = \sum_q \gamma_q^{(0)} \omega_q(x)$$

con

$$\gamma_q^{(0)} = \int_0^l N_o(x) \omega_o(x) \omega_q(x) dx,$$

segue la soluzione

$$(150) \quad \omega(x) = \sum_{\varrho} \frac{\gamma_{\varrho}^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \omega_{\varrho}(x)$$

e la limitazione superiore

$$(151) \quad \omega(x) \leq |\omega_0(x)| + \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} \Omega(x, x) \cdot \int_0^l N_0 \omega_0^2 dx}$$

Integrazione della (148) per $p = 0$.

Posto

$$(152) \quad \omega(x, t) = \sum_{\varrho} A_{\varrho}(t) \omega_{\varrho}(x)$$

con operazioni analoghe a quelle che, dalla (127), passando per la (131), hanno condotto alla (140), si trova, per i coefficienti $A_{\varrho}(t)$,

$$(153) \quad \dot{A}_{\varrho} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}\right) - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}} \Phi(t) \cdot A_{\varrho} = 0.$$

Da qui, integrando con la condizione che sia $\omega(x, 0) = \omega(x)$, dato dalla (150), si ha per $A_{\varrho}(t)$,

$$(153 a) \quad A_{\varrho}(t) = \frac{\gamma_{\varrho}^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \cdot \Gamma_{\varrho}(t)$$

con $\Gamma_{\varrho}(t)$, funzione crescente di t , data da

$$(153 b) \quad \Gamma_{\varrho}(t) = e^{\frac{\frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \alpha (1 - e^{-\beta t})}$$

Segue, se per semplicità si ammette che sia $\omega_0 \sim \gamma_1^{(0)} \omega_1$,

$$(152 b) \quad \omega(x, t) \cong \frac{\omega_0}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \Gamma_1(t).$$

Appare da qui e dalla (153) quanto sia importante avere valori alti di λ_1 e quindi, a parte il fatto di tener piccolo λ , valori piccoli di λ/λ_1 perché la viscosità non porti a deformazioni che possono essere anche più volte quelle iniziali di costruzione, posto che la struttura ed il materiale li consenta. Da qui, come per la (120 a) del n. 27, ed in particolare della (141) si ha che la σ^* effettiva è soluzione della equazione

$$(154) \quad \sigma = \lambda \sigma_0 \varrho(\sigma | t)$$

con

$$(154 a) \quad \varrho(\sigma | t) = 1 + \frac{(\Gamma_1 - 1) + \frac{1}{K}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \cdot \begin{cases} -\pi^2 \frac{w_1^{(0)} y_{\max}}{l^2}, \\ -\chi_1^2 \frac{u_1^{(0)} x_{\max}}{R^2}, \\ -\chi_2^2 \frac{w_2^{(0)} y_{\max}}{R^2}, \end{cases} \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda \sigma_0}{E(\sigma) \cdot K} \right)$$

Il tempo t , secondo la (153 b) interviene in Γ_1 . Poiché l'effetto complessivo della viscosità cresce con t si potrà porre senz'altro $t = \infty$ con che

$$(153 c) \quad \Gamma_1 \rightarrow e^{-\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{\lambda}{\lambda} \sigma}$$

In tal guisa t si elimina ed ϱ diventa funzione $\varrho = \varrho(\sigma)$ dell'unica variabile σ se è $\sigma > \sigma_p$ limite di proporzionalità.

La soluzione grafica della (154) per $t = t_1$, con t_1 determinato valore di t , finito od ∞ , (quindi per Γ_1 dato dalla (153 b) rispettivamente dalla (153 c)), riesce espressiva. Considerate le linee $y_1 = \sigma$, $y_2 = \lambda \sigma_0 \varrho(\sigma | t_1)$ il loro punto di incontro P ha per ascissa la σ^* cercata; e questa deve essere inferiore al limite σ_p . Si rileva subito come la viscosità restringa i limiti ammissibili per $\lambda \sigma_0$ e per $w_1^{(o)}$, $u_1^{(o)}$, $w_1^{(o)}$ per i sistemi di cui ai casi a), b), c).

Nessun dubbio quindi sulla necessità di fronteggiare la viscosità nell'ambito delle strutture sottili, nel modo più ovvio evitandola, impiegando materiali nei quali questa non si manifesta apprezzabilmente o, quando si sta nel campo dei cementi armati, impiegando inerti che la riducono al minimo.

Naturalmente si prevederanno dei λ/λ_1 , più piccoli che possibile. Inutile ripetere che il λ_1 moltiplicatore critico della particolare struttura e rispettiva condizione di carico che si considera è relativo alla deviazione secondo u o w a seconda che la deformazione per costruzione u_0 o w_0 ha luogo secondo u o w od u e w contemporaneamente.

APPENDICE

Trave elastica con reattività elastica, alla rotazione ed agli spostamenti, diffusa nell'intervallo tra gli estremi $x = 0, l$.

Introdotte le costanti $k_w^{(s)}$ e k_w di cui il significato è evidente in Fig. 1 l'equazione in w si scrive, in conformità con le (90) (90 a) del n. 22 e con particolare riguardo alle Osservazioni alla fine del n. 16,

$$(1) \quad B_2 w^{(iv)} + (N_0 - k_w^{(s)}) w'' + k_w w = \begin{cases} 0, \\ q_0(x). \end{cases}$$

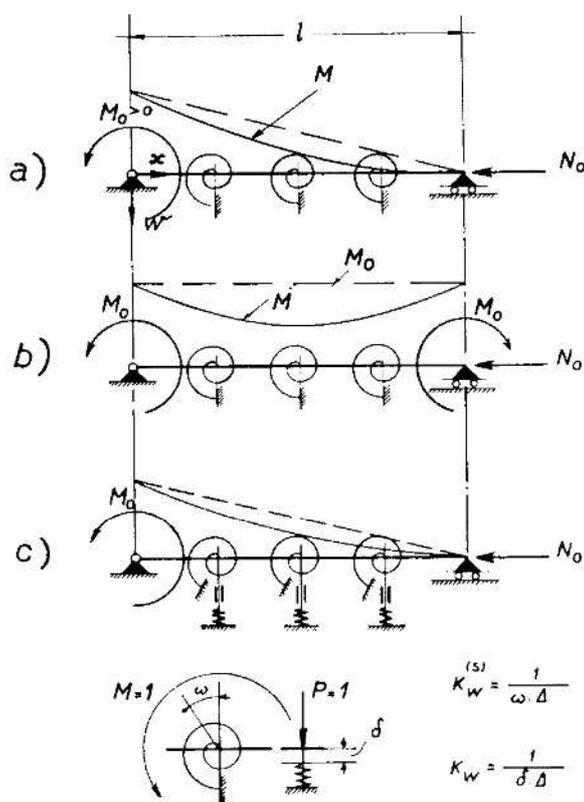


Fig. 1.

essendo $q_0 = q_0(x)$ rappresentativa di una distribuzione di carico funzione di x , indicata precedentemente anche con q , quando occorreva distinguerla dalla componente q_H secondo u . Per u si ha l'equazione, in cui intervengono le costanti $k_u^{(t)}$ e k_u ,

$$(1 a) \quad B_1 u^{(iv)} + (N_0 - k_u^{(t)}) u'' + k_u u = \begin{cases} 0, \\ q_H(x). \end{cases}$$

Per $q_0 = 0$ (caso omogeneo) si hanno soluzioni non nulle quando intervengono perturbazioni agli estremi, ad esempio date da momenti M_0 come in fig. 1, o perturbazioni puntuali nell'intervallo conseguenti a forze applicate concentrate che danno luogo a discontinuità nelle derivate terze (taglio) delle quali ultime però, per brevità, qui non si tratta.

Se $k_w^{(s)}$, k_w , N_0 ($N_0 > 0$ corrisponde a sforzo assiale di compressione) sono nulli in $0 - l$, il momento $M = B_1 w''$ (*) varia linearmente tra i due valori estremi ed è costante se questi sono uguali. Per $k_w^{(s)} \neq 0$, $k_w = 0$ invece, allontanandosi dagli estremi M si estingue o si amplifica per $(N_0 - k_w^{(s)}) < 0$ o > 0 . Agli effetti dell'analisi qualitativa della stabilità nei casi prima considerati (archi compresi) per deboli reattività si potrà porre $M_0 = \text{cost.}$ in $0 \leq x \leq l$; i valori critici λ_{cr} di λ risulteranno in ogni caso inferiori - quindi a favore della sicurezza - a quelli effettivi; altrimenti, il porre $M_0 = \text{cost.}$ equivale a pensare ad una distribuzione di momenti nell'intervallo, continua o discreta, con il passo Δ , tale da compensare lo smorzamento conseguente alla trasmissione del momento ai vincoli elastici distribuiti idealmente o discreti.

La (1) o (1 a) si ritrova nella letteratura tecnica a meno dei termini, di ovvia scrittura, che derivano da $N_0 = 0$ e $k_w = 0$. Utili sono le applicazioni fatte ai telai a molti piani e quindi a molte briglie ed alle travi Vierendeel con molti pannelli e quindi con molti montanti; tante briglie e tanti montanti, sufficientemente avvicinati, da poterli sostituire con una cortina continua di cui il vincolo elastico rotazionale è sintetizzato appunto dal termine $k_w^{(s)} w''$ o $k_u^{(t)} u''$. La scrittura esplicita di $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(t)}$ e così di k_w o k_u è suggerita chiaramente, dalla fig. I che è riferita ad una trave unica con vincoli elastici discreti nell'intervallo della campata trasformati in vincoli diffusi. Per il caso del telaio a più piani o della Vierendeel a molti pannelli, (che è un telaio a più piani ruotato di 90° nel, o dal suo piano II a seconda che la flessione avviene secondo w od u), basterà fissare l'attenzione su un caso unico. Si considererà precisamente la Vierendeel nel piano verticale II di w e solo per qualche momento, tanto per chiarire il significato dei simboli, nel piano di u .

Se le briglie sono due soltanto e le flessorigidità sono eguali si porrà

$$(2) \quad k_w^{(s)} = \frac{12 B_2^{(s)}}{h \Delta} \quad , \quad k_u^{(t)} = \frac{12 B_1^{(t)}}{d \Delta}$$

e con riguardo alle figg. II, III,

$$(3) \quad B_2 = B_{2,1} + B_{2,2} = 2 B_{2,1} \quad , \quad B_1 = B_{1,1} + B_{1,2} = 2 B_{1,2}$$

Se n sono le briglie di flessorigidità eguali quelle interne, eguali alla metà delle interne quelle esterne,

$$(2 a) \quad k_w^{(s)} = \sum_i \left(\frac{12 B_2^{(s)}}{h \Delta} \right)_{i,i-1} \quad , \quad k_u^{(t)} = \sum_i \left(\frac{12 B_1^{(t)}}{d \Delta} \right)_{i,i-1}$$

e

$$(3 a) \quad B_2 = (n-1) B_{2,m} \quad , \quad B_1 = (n-1) B_{1,m}$$

per m generico tra 2 e $n-1$; il simbolo $(\quad)_{i,i-1}$ alludendo agli elementi del montante o della traversa tra la briglia $(i-1)^{\text{ima}}$ ed i^{ima} .

L'integrazione della (1) od (1 a) non richiede certo difficoltà, comunque, alle soluzioni note si aggiungono qui altre, utili in molti casi della pratica.

Prima di procedere, non si può non rilevare la circostanza, alla quale già si è accennato nella trattazione che precede questa Appendice, secondo cui talune deduzioni che si traggono direttamente dalle (1) od (1 a) o equivalenti o dalle loro soluzioni non sono ragionevoli quando B_2 o B_1 sono piccoli di fronte ai $B_2^{(s)}$ o $B_1^{(t)}$ che concorrono alla formazione dei coefficienti $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(t)}$. In particolare, se $B_2 = 0$ (si ometterà, o pressoché, da qui in poi l'ormai ovvio riferimento alla (1 a)), si hanno, per $q_0 = 0$ soluzioni finite anche per $k_w = 0$; così si ha un carico critico $= 0$ dato da

$$(4) \quad N_{cr} = k_w^{(s)}$$

(*) Atteso l'orientamento della terna u, v, w si ha $\kappa_w = w''$ e quindi $M = B_2 w''$ mentre nel senso di u , $\kappa_u = -u''$ e quindi $M = -B_1 u''$ come usualmente, (cfr. n. 5).

mente rigide rispetto ai montanti e si esclude quindi a priori la possibilità che relativamente ad essi sia $B_2 \sim 0$. Ma se così non è, occorre riesaminare il modello della fig. II prima di passare dal discreto al continuo e tener conto che alla flessione globale w , eguale per tutte le briglie (attesa la tacitamente premessa rigidità *estensionale* dei montanti), si aggiunge una w_i locale, ondulante nell'intervallo generico Δ tra due montanti, con un nodo al centro di ogni intervallo. Tale w_i flessionale è conseguente alla reazione del montante ed alla elasticità della briglia, come ben si vede e si va a vedere in quest'ordine di questioni. La Fig. II *a* illustra il nuovo modello e consente di arrivare facilmente al perfezionamento della (1) così da eliminare parzialmente le difficoltà. Tale perfezionamento, come si vedrà a calcoli fatti, si riduce alla pura e semplice sostituzione nella (1) od (1 *a*) del $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(l)}$ con un $k_w^{*(s)}$ o $k_u^{*(l)}$ dato da

$$(5) \quad k_w^{*(s)} = \frac{k_w^{(s)}}{1 + \rho_s}, \quad k_u^{*(l)} = \frac{k_u^{(l)}}{1 + \rho_l}$$

con ρ_s o ρ_l che si scriverà anche ρ semplicemente,

$$(5 a) \quad \rho_s = \frac{\sum_i \left(\frac{12 B_2^{(s)}}{h \Delta} \right)_{i,i-1}}{\sum_i B_{2,i}}, \quad \rho_l = \frac{\sum_i \left(\frac{12 B_1^{(l)}}{d \cdot \Delta} \right)_{i,i-1}}{\sum_i B_{1,i}}$$

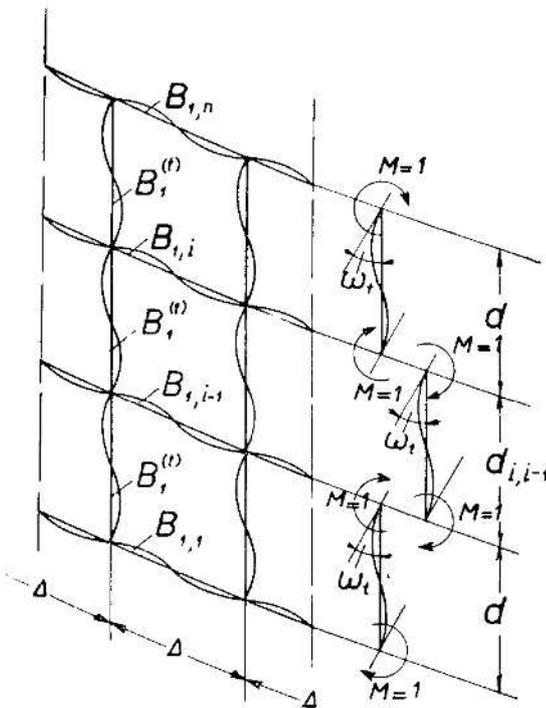


Fig. III.

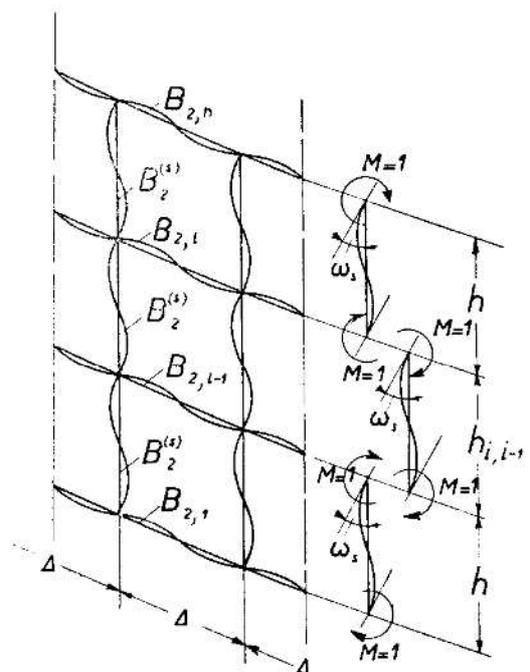


Fig. IV.

Tale relazione vale però, come appare dalla fig. III o fig. IV, quando si considerino le elementari condizioni di equilibrio e congruenza dei nodi, purché siano tra loro eguali le $B_{2,i}$ delle briglie interne ed uguali a $1/2 B_{2,i}$, le flessorigidità delle briglie esterne ed analogamente, per la flessione secondo u , eguali le $B_{1,i}$ delle briglie interne, eguali a $1/2 B_{1,i}$ le flessorigidità delle briglie esterne.

Se due sole sono le briglie deve esser $B_{2,1} = B_{2,2} = 1/2 B_2$, condizione questa senz'altro soddisfatta, come lo è più o meno per i telai a più piani (almeno piano per piano). Ancora debbono esser eguali gli elementi

$$\left(\frac{12 B_2^{(s)}}{h \Delta} \right)_{i,i-1}$$

per ogni i , il che si realizza facilmente. Si osserva dalle (5), (5 a) che, se $B_2 \rightarrow 0$, $\rho_i \rightarrow \infty$ e $k_w^{*(s)} \rightarrow 0$ e vien quindi effettivamente meno la flessorigidità globale della struttura.

Influenza dello sforzo assiale N_0 sui valori di ρ .

Le precedenti relazioni premettono che lo sforzo assiale in ogni asta di briglia sia piccolo di fronte al corrispondente carico di Eulero (riferito alla lunghezza Δ). In ogni caso, ammesso che l'asta i^{ima} prenda uno sforzo proporzionale a $B_{2,i}$ (il che traduce la più rispondente ipotesi della proporzionalità dello sforzo alla rigidità estensionale $D_i = EA_i$ se i raggi di inerzia delle aree A_i sono praticamente eguali siccome è facile ottenere), introdotto il parametro

$$(6) \quad \nu^2 = \frac{N_0 \Delta^2}{B_2}, \quad (B_2 = \sum_i B_{2,i})$$

si sostituirà nelle (5), (5 a) ρ con ρ^* dato da

$$(5)^* \quad \rho^* = \rho \cdot \Psi(\nu)$$

con $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$, (φ_1, φ_2 essendo note funzioni di cui il significato appare in fig. V dove si leggerà Δ in luogo di h , lunghezza dell'asta presso-inflessa).

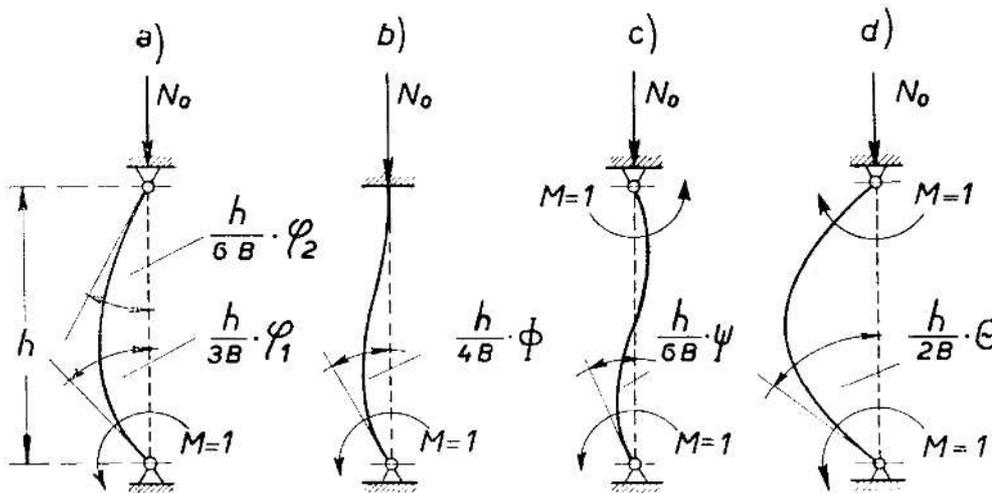


Fig. V.

Le rotazioni agli estremi prodotte nelle evidenti condizioni a), b), c), d) della fig. V sono (come indicato) date dai noti valori in assenza di sforzo assiale N_0 moltiplicati per le note funzioni φ_1, φ_2 , e le facilmente deducibili Φ, Ψ, Θ dell'argomento ν dato da:

$$(7) \quad \nu^2 = \frac{N_0 h^2}{B}, \quad B = EJ, \quad (h = \Delta),$$

$$\varphi_1 = \frac{3}{\nu^2} \left(1 - \frac{\nu}{\tan \nu} \right), \quad \varphi_2 = \frac{6}{\nu^2} \left(\frac{\nu}{\sin \nu} - 1 \right), \quad \Phi = \frac{4\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{3\varphi_1},$$

$$\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2, \quad \Theta = \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3},$$

$$\varphi_1^{(0)} = 1, \quad \varphi_2^{(0)} = 1, \quad \Phi(0) = 1, \quad \Psi(0) = 1, \quad \Theta(0) = 1.$$

Per quanto sopra si ha per la Ψ ,

$$(7a) \quad \Psi(\nu) = 6 \left\{ \frac{2}{\nu^2} - \frac{1 + \cos \nu}{\nu \sin \nu} \right\}.$$

ν	0	0,5	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
φ_1	1,0000	1,0171	1,0737	1,0912	1,1114	1,1345	1,1610	1,1915	1,2266	1,2673	1,3147	1,3704	1,4365
φ_2	1,0000	1,0300	1,1304	1,1617	1,1979	1,2396	1,2878	1,3434	1,4078	1,4830	1,5710	1,6750	1,7993
Φ	1,0000	1,0084	1,0349	1,0427	1,0515	1,0612	1,0718	1,0837	1,0968	1,1112	1,1271	1,1448	1,1641
Ψ	1,0000	1,0042	1,0170	1,0207	1,0249	1,0294	1,0342	1,0396	1,0454	1,0516	1,0584	1,0658	1,0737
Θ	1,0000	1,0214	1,0926	1,1147	1,1402	1,1695	1,2032	1,2421	1,2870	1,3392	1,4001	1,4719	1,5574

ν	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	π	4,493	2π
φ_1	1,5158	1,6124	1,7325	1,8854	2,0864	2,3618	2,7619	3,3963	4,5550	7,3486	$\pm \infty$	0	∞
φ_2	1,9494	2,1336	2,3641	2,6596	3,0502	3,5890	4,3766	5,6315	7,9343	13,5057	$\pm \infty$	-1,6653	∞
Φ	1,1853	1,2087	1,2346	1,2633	1,2954	1,3311	1,3708	1,4158	1,4664	1,5243	$\frac{16}{\pi^2}$	$\pm \infty$	0
Ψ	1,0822	1,0912	1,1009	1,1112	1,1226	1,1346	1,1472	1,1611	1,1757	1,1915	$\frac{12}{\pi^2}$	1,6653	∞
Θ	1,6603	1,7861	1,9430	2,1434	2,4076	2,7708	3,3001	4,1413	5,6814	9,4009	∞	-0,5551	0

Manifestamente, per $\nu \rightarrow 0$, $\Psi \rightarrow 1$; per ν piccolo di fronte all'unità si può porre $\Psi \simeq 1 + \frac{\nu}{60} \nu^2$; per $\nu \rightarrow 2\pi$, $\Psi \rightarrow \infty$. In questo caso N_0 è il 2° carico di Eulero dell'asta semplicemente appoggiata agli estremi lunga Δ che flette con un nodo; per tale valore del carico assiale la flessorigidità vien meno, $\rho^* \rightarrow \infty$ e $k_{wv}^{*(s)} \rightarrow 0$ come è intuitivo; ma, naturalmente, l'asta non arriva a tale condizione in quanto vien meno assai prima, per flessione senza nodo sotto al 1° carico di Eulero.

Dimostrazione delle (5). Principio variazionale per le (1).

La dimostrazione cui si allude riesce sostituendo al sistema schematico della fig. II quello assai più conforme all'effettivo indicato nella fig. II a. Da questa si rileva subito che il montante (ci si riferisce per semplicità a due sole aste di briglia, con i $B_{2,i}$ eguali ad

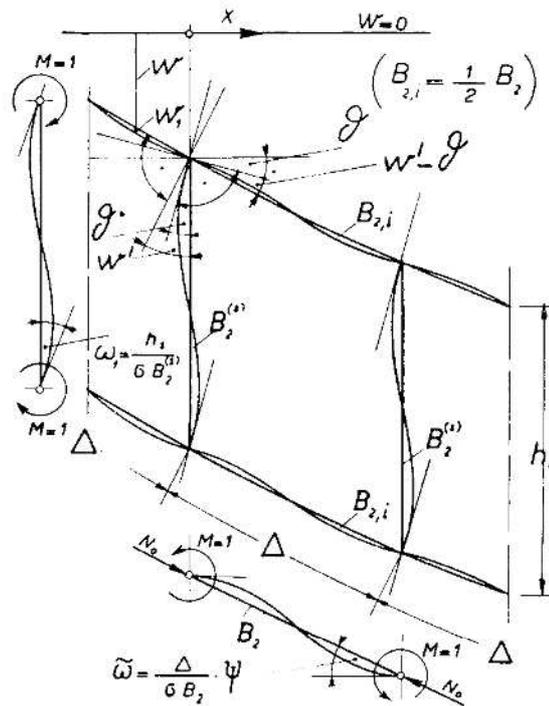


Fig. II a.

$1/2 B_2$) anziché fare la rotazione w' agli estremi, per il cedimento elastico locale della briglia, fa una rotazione $\vartheta < w'$. Per la rigidità del nodo (montante-briglia) la briglia farà una rotazione suppletiva $w' - \vartheta$ agli estremi dell'intervallo Δ ed alla w si sovrapporrà, ondulante, con un nodo in ogni intervallo, una w_1 che si passa a calcolare. Occorre subito notare che alla rotazione ϑ agli estremi, il montante oppone un momento ad ogni estremo

$$\frac{6 B_2^{(s)}}{h} \vartheta.$$

Questo momento si trasmette in parti eguali nelle due aste (tra loro eguali) concorrenti nel nodo e provoca la rotazione $w' - \vartheta$. Dall'eguaglianza

$$(8) \quad w' - \vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{6 B_2^{(s)}}{h} \vartheta \right) \cdot \frac{\Delta}{6 B_{2,i}}, \quad (B_{2,i} = \frac{1}{2} B_2)$$

si ha, posto

$$(8 a) \quad \rho = \frac{B_2^{(s)}}{B_2} \cdot \frac{\Delta}{h},$$

$$(8 b) \quad \vartheta = \frac{w'}{1 + \rho}, \quad w' - \vartheta = w' \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Nota ϑ è nota la w_1 funzione addizionale di w . Essa soddisfa l'equazione

$$(9) \quad B_{2,i} w_1^{(iv)} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

si annulla in $x = 0, \Delta$ (si pensi ad una coordinata che si potrà chiamare egualmente con x , contata da un nodo lungo l'intervallo Δ) ed ivi si ha

$$(9a) \quad w_1(0) = w_1(\Delta) = 0, \quad w_1'(0) = w_1'(\Delta) = w' - \vartheta.$$

Posto $x : \Delta = \xi$ si ha dalla (9) con le condizioni (9a),

$$w_1 = (w' - \vartheta) \cdot \Delta \cdot (2\xi^3 - 3\xi^2 + \xi)$$

e

$$(9b) \quad w_1' = (w' - \vartheta) \cdot (6\xi^2 - 6\xi + 1), \quad w_1'' = \frac{6(w' - \vartheta)}{\Delta} \cdot (2\xi - 1).$$

Occorre appena rilevare che l'azione di k_w coefficiente della reazione elastica a w , non interviene con riguardo a w_1 giacché si pensa localizzata nei nodi e *mai* diffusa sugli intervalli.

Ciò posto, per trovare w [la w_1 è ormai vincolata dalle (9b) a w] si scriva il principio variazionale della energia per l'equilibrio

$$(10) \quad \delta(W + P) = 0.$$

L'energia elastica W risulta somma di tre termini,

$$W = W_b + W_m + W_a.$$

W_b per le briglie, W_m per i montanti, W_a per gli appoggi elastici intermedi applicati nei nodi briglie montanti. Si ha ordinatamente,

$$(11a) \quad W_b = \frac{1}{2} \int_0^l B_2 (w'' + w_1'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l B_2 w''^2 dx + \int_0^l B_2 w'' w_1' dx + \frac{1}{2} \int_0^l B_2 w_1''^2 dx.$$

Sul 1° termine a destra, nulla da osservare. Sul 2° si può affermare che è praticamente nullo, attesa la pratica antisimmetria di w_1 nell'intervallo Δ , sicché

$$(11) \quad \int_0^l B_2 w'' w_1' dx \sim 0.$$

Sul 3° infine, attesa la (9b), si dà con riguardo alle (8a) e (8b), integrando in ogni intervallo Δ $(2\xi - 1)^2$ tra 0 e 1, l'espressione che tornerà utile,

$$\frac{1}{2} \int_0^l B_2 w_1''^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{12 B_2}{\Delta} (w' - \vartheta)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{12 B_2^{(s)}}{h \cdot \Delta} \cdot \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot w'^2 dx.$$

Per W_m si ha, sempre mediando in Δ e sommando nell'intervallo $0 - l$,

$$(11b) \quad W_m = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{12 B_2^{(s)}}{h} \cdot \vartheta^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{12 B_2^{(s)}}{\Delta \cdot h} \cdot \frac{w'^2}{(1 + \rho)^2} dx.$$

Per W_a , poiché la reattività elastica a w è concentrata nei nodi ove w_1 si annulla, si ha infine

$$(11c) \quad W_a = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{w^2}{\delta w} dx,$$

δw significando (cfr. la citata fig. I) lo spostamento che la forza 1 provoca su l'appoggio del nodo generico.

Posto quindi

$$(12) \quad k_w^{(s)} = \frac{12 B_2^{(s)}}{\Delta h} \quad , \quad k_w^{*(s)} = \frac{k_w^{(s)}}{1 + \rho} \quad , \quad \rho = \frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h} \quad , \quad k_w = \frac{1}{\Delta \cdot \delta w}$$

si ha in definitiva

$$(11 d) \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l B_2 w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_w^{*(s)} w'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_w w^2 dx.$$

Per l'energia potenziale dei carichi q_0 ed N_0 si ha

$$(13) \quad P = - \int_0^l q_0 (w + w_1) dx - \frac{1}{2} \int_0^l N_0 (w' + w_1')^2 dx.$$

Essendo, attesa l'ondulanza di w_1 ,

$$(11 e) \quad \int_0^{\Delta} q_0 w_1 dx \sim 0 \quad , \quad \int_0^{\Delta} N_0 w_1' dx \sim 0$$

la (13) si riduce a

$$(13)^* \quad P = - \int_0^l q_0 w dx - \frac{1}{2} \int_0^l N_0 w'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l N_0 w_1'^2 dx.$$

Dalla condizione di stazionarietà (10) rispetto a w si ha la (1) con $k_w^{*(s)}$ in luogo di $k_w^{(s)}$ c. d. d.
L'algoritmo variazionale porta, oltre alla (1) in $0 - l$, alle condizioni agli estremi $x = 0, l$

$$(1)' \quad (B_2 w'') \delta w' - [B_2 w''' + (N_0 - k_w^{*(s)}) w'] \delta w = 0.$$

Sono queste senz'altro soddisfatte dalle combinazioni $w = 0, w' = 0$ dello *estremo a snodo* o $w = 0, w' = 0$ dello *estremo incastrato*, od infine dalle

$$w'' = 0 \quad , \quad B_2 w''' + (N_0 - k_w^{*(s)}) w' = 0$$

dell'*estremo libero*.

Ove si voglia tener conto dell'influenza che ha lo sforzo assiale N_0 su la flessoridezza dell'asta di briglia, sforzo che si riterrà equiripartito su le singole aste proporzionalmente alle $B_{2,i}$ (ciò che per raggi d'inerzia eguali corrisponde alla più spontanea ripartizione secondo le aree resistenti A_i), si dovrà sostituire alla (9) l'equazione, per quanto si è detto priva del termine $k_w \cdot w_1$, che risulta estremando $(W + P)$ rispetto a w_1 ,

$$(9)^* \quad B_2 w_1^{(iv)} + N_0 w_1'' = 0.$$

Le condizioni agli estremi $x = 0, \Delta$ sono

$$w_1(0) = w_1(\Delta) = 0 \quad , \quad w_1'(0) = w_1'(\Delta) = w_1'' = 0.$$

La w_1 così definita, salvo condizioni critiche che subito appariranno, ha l'andamento della w_1 soluzione della (9) e così dicasi per le sue derivate prime e seconde. Restano pertanto valide le relazioni di compensazione secondo cui si annullarono gli integrali di $B_2 w'' w_1''$ e $q_0 w w_1$.

Poiché $M = 1$ applicato (cfr. caso c della fig. V) a tutti e due gli estremi $x = 0, \Delta$ dà, per cose note, la rotazione

$$\omega = \frac{M \Delta}{6 B_2} \cdot \Psi(v),$$

con $\Psi(v)$ e v definiti dalle (6) e (7 a), sarà, agli estremi,

$$B_2 w_1'' = (w' - \vartheta) \frac{6 B_2}{\Delta \cdot \Psi(v)}$$

Ma questo è il momento del montante che ruota di ϑ agli estremi, diviso per 2, attesa la ripartizione nelle due aste di briglia concorrenti nel nodo, precisamente,

$$\frac{1}{2} \frac{6 B_2^{(s)}}{h} \cdot \vartheta.$$

Si dovrà avere quindi, analogamente con la (8),

$$(8)^* \quad w' - \vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{6 B_2^{(s)}}{h} \vartheta \right) \cdot \frac{\Delta}{6 B_2} \cdot \Psi(v), \quad (2 B_{2,i} = B_2)$$

e ponendo

$$(8a)^* \quad \rho^* = \rho \cdot \Psi(v) \quad , \quad \rho = \frac{B_2^{(s)}}{B_2} \cdot \frac{\Delta}{h},$$

$$(8b)^* \quad \vartheta = \frac{w'}{1 + \rho^*} \quad , \quad w_1' = w' - \vartheta = \frac{\rho^*}{1 + \rho^*} \cdot w' \quad , \quad B_2 w_1'' w_1' \Big|_0^\Delta = \frac{12 B_2^{(s)}}{h} \cdot \frac{\rho^*}{(1 + \rho^*)^2} \cdot w'^2$$

Da qui, sommando l'energia del montante W_m secondo la (11 b), posto

$$(12)^* \quad k_w^{** (s)} = k_w^{(s)} \frac{1}{1 + \rho^*} \quad , \quad k_w^{(s)} = \frac{12 B_2^{(s)}}{h \Delta}$$

si ha concisamente

$$W = W_b + W_m + W_a = \frac{1}{2} \int_0^l B_2 (w''^2 + w_1''^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_w^{** (s)} w'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_w w^2 dx.$$

Per l'energia potenziale dei carichi vale la (13)*.

Nell'espressione di $W + P$, w e w_1 appaiono indipendenti e il principio variazionale si applica sulla stessa $W + P$ del caso in cui l'azione locale (sull'asta di briglia nel tratto Δ) di N_0 si trascurava salvo però la materiale sostituzione di $k_w^{(s)}$ con $k_w^{** (s)}$ dato dalla (12)*. Si vede dalla (8)* come la flessorigidità B_2 può essere minorata da N_0 e dar luogo a piccoli valori relativi della flessorigidità delle briglie in raffronto a $B_2^{(s)}$ indipendentemente da un suo valore primiero anche notevole. Questa minorazione di B_2 per sforzo assiale, ammettendo il nodo nell'intervallo Δ , va considerata in linea teorica soltanto, giacché per gli ordinari possibili valori di v la Ψ si mantiene superiormente prossima all'unità; ad esempio, per $v = \pi$, corrispondente a λN_0 addirittura eguale al 1° carico di Eulero dell'asta lunga Δ incernierata agli estremi, è appena $\Psi(\pi) = 12/\pi^2$; per $v = 2\pi$, cioè solo per il 2° carico di Eulero è $\Psi(2\pi) = \infty$.

Pertanto la Ψ si può porre praticamente eguale ad 1 e limitarsi alla considerazione dei k^ .*

Verifica della stabilità delle singole aste.

Va però ben rilevato che le aste di briglia si debbono verificare localmente alla deviazione flessionale senza nodo in Δ con riguardo allo sforzo assiale $\lambda N_{0,i}$, che ad ognuna compete secondo la ripartizione dell' λN_0 globale proporzionalmente ai $B_{2,i}$, eventualmente incrementato della reazione del montante data, per le briglie esterne, da

$$\pm \frac{1}{h_s} (k_w^{* (s)} \Delta) \cdot \vartheta = \pm k_w^{* (s)} \cdot \frac{\Delta}{h_s} \cdot w'$$

con il $k_w^{* (s)}$ della (12) in ogni caso.

Tale verifica si fa nei termini seguenti. Considerata una configurazione senza nodi in Δ come in Fig. VI, si cercherà quel valore di λN_0 per cui questa è una possibile configurazione di equilibrio indifferente. Poiché i montanti per tale configurazione delle briglie perdono anch'essi il nodo, alla rotazione ϑ oppongono, essendo per essi $v = 0$, (cfr. il caso *d*) della fig. V), il momento

$$M_m = \frac{2 B_2^{(s)}}{h} \vartheta.$$

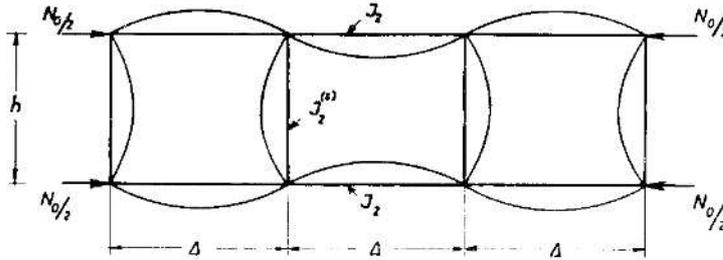


Fig. VI.

Alla stessa rotazione ϑ agli estremi le aste di briglia lunghe Δ soggette a sforzo assiale oppongono invece, poiché per esse è $v \neq 0$, il momento

$$(14) \quad M_b = \frac{2 B_{2,i}}{\Delta} \cdot \vartheta \Theta(v)$$

con

$$\Theta(v) = \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3} = \frac{lg \frac{v}{2}}{\frac{v}{2}},$$

qui in appresso tabellata oltre i valori di $v = \pi$, interessanti come si vedrà tra un momento.

v	π	3,40	3,60	3,80	4,00	4,20	4,40
$\Theta(v)$	$\pm \infty$	-4,5274	-2,3813	-1,5406	-1,0925	-0,8142	-0,6245
4,60	4,80	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00	2π
-0,4866	-0,3816	-0,2988	-0,2164	-0,1502	-0,0950	-0,0475	0

Poiché le due aste di briglia concorrenti nel nodo con il montante sono eguali per ipotesi, si dovrà avere per l'equilibrio:

$$2 M_b + M_m = 0$$

ovvero, per quanto sopra,

$$(15) \quad \Theta(v) + \frac{1}{\rho} = 0$$

essendo, in conformità con le (6), (12),

$$v^2 = \frac{\lambda N_0 \Delta^2}{B_2} \quad , \quad \rho = \frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h} \quad , \quad \left(\frac{1}{2} B_2 = B_{2,1} = B_{2,2} \right)$$

con λN_0 sforzo assiale totale, cioè $1/2 \lambda N_0$ per asta.

Se le aste di briglia sono n e sono eguali le flessorigidezze delle aste interne, eguali alla metà quelle esterne, è

$$v^2 = \frac{\lambda N_0 \Delta^2}{B_2} \quad , \quad \rho = \frac{(n-1) B_2^{(s)}}{B_2} \cdot \frac{\Delta}{h} \quad , \quad B_2 = \sum_i B_{2,i}$$

con λN_0 sforzo totale, ripartito proporzionalmente ai $B_{2,i}$ sulle varie aste, quindi $\lambda N_0 : (n-1)$ sulle aste interne, $(1/2) \lambda N_0 : (n-1)$ sulle aste esterne.

Trovata, avvalendosi della tabella ora riportata la radice $v = v^*$ della (15) si ha subito il carico critico

$$\lambda N_0 = \frac{v^{*2} B_2}{\Delta^2}$$

Evidentemente, poichè è $\rho > 0$ e $B_2^{(s)} > 0$, è $v^* > \pi$ (da ciò la Tab. per Θ oltre $v = \pi$), per $\rho = 0$, cioè per $B_2^{(s)} = 0$, è $v^* = \pi$, le aste di briglia risultano snodate agli estremi e si ha per esse il minimo carico critico, il 1° di Eulero,

$$\lambda_{cr} N_0 = N_{cr} = \frac{\pi^2 B_2}{\Delta^2}$$

Occorre appena rilevare che la (15) è l'analogia, per il caso che si considera, di una nota formula del Timoshenko per il carico critico di un telaio rettangolare con nodi rigidi e due aste parallele sollecitate da sforzo assiale.

Superamento del limite di proporzionalità σ_p .

Naturalmente occorrerà estendere la verifica anche oltre il campo lineare. Ammesso allora un $E = E(\sigma)$ conveniente, introdotta l'area totale A delle sezioni resistenti A_i delle singole aste,

$$A = \sum_i A_i$$

ammesso eguale per tutte il raggio giratore di inerzia i_2 , con che $E A_i \cdot i_2^2 = B_{2,i}$, posto

$$\frac{\lambda N_0}{A} = \lambda \sigma_0 = \sigma$$

la (6) si scriverà

$$(6a) \quad v^2 = \frac{\lambda N_0}{B_2} \Delta^2 = \frac{1}{E(\sigma)} \cdot \frac{\lambda N_0}{A} \cdot \left(\frac{\Delta}{i_2}\right)^2 = \frac{\sigma}{E(\sigma)} \cdot \left(\frac{\Delta}{i_2}\right)^2$$

Il parametro v diviene quindi una funzione di σ ,

$$(6a)' \quad v = v(\sigma) = \frac{\Delta}{i_2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{E(\sigma)}}$$

Ammettendo, a favore della stabilità, che le aste dei montanti abbiano lo stesso $E(\sigma)$ delle aste di briglia, la (15) si scriverà

$$(15a) \quad \Theta(v(\sigma)) + \frac{1}{\rho} = 0$$

e questa equazione, una volta tabellata la $v = v(\sigma)$ non è men facilmente risolvibile della (15).

Nota la radice σ^* il λN_0 critico è

$$N_{cr} = \lambda_{cr} N_0 = \sigma^* A$$

Se si ammette che i montanti meno sollecitati mantengano l'E costante E (o), la (15 a) si scriverà

$$(15 b) \quad \Theta(v(\sigma)) + \frac{E(\sigma)}{E(o)} \cdot \frac{J_2}{J_2^{(s)}} \cdot \frac{h_s}{\Delta} = 0$$

con $J_2 = J_{2,1} + J_{2,2}$ e $J_2^{(s)}$ momenti d'inerzia delle briglie rispettivamente dei montanti.

Trattazione di alcuni esempi.

Ciò posto, conviene procedere all'esame di alcuni esempi notevoli. Si scriverà in seguito, sempre $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(t)}$ semplicemente ben sapendo che, ove i B_2 o B_1 non siano prevalenti sui $B_2^{(s)}$ o $B_1^{(t)}$, vanno introdotti i $k_w^{*(s)}$ o i $k_u^{*(t)}$ in conformità con le (5) a seconda che si considerano travi Vierendeel nel piano verticale, rispettivamente in quello orizzontale, nel qual caso dette travi hanno funzione controventante.

A) *Trave corrente su appoggi elastici con reattività allo spostamento trasversale ed alla rotazione come in fig. VII.*

Per le condizioni dello snodo agli estremi si ha

$$w(o) = w(l) = 0, \quad w'(o) = w'(l) = 0.$$

Sia il carico $q_o = q_o(x)$ sviluppabile in serie di Fourier, precisamente,

$$(16) \quad q_o(x) = \sum_n q_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

con q_n coefficiente calcolabile come al solito. Si ha, per $q_o = \text{cost.}$ nell'intervallo $0-l$ (fig. VII, a),

$$(16 a) \quad q_n = \frac{4q_o}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2};$$

per $q_o = \text{cost.}$ in $0 \leq x \leq l/2$, $q_o = 0$ in $l/2 \leq x \leq l$, (fig. VII, b),

$$(16 b) \quad q_n = \frac{4q_o}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{4};$$

per $q_o = \text{cost.}$ nell'intervallo Δ con centro in $x = x'$, (fig. VII, c)

$$(16 c) \quad q_n = \frac{2q_o \Delta}{l} \frac{\sin \lambda_n \frac{\Delta}{2}}{\lambda_n \frac{\Delta}{2}} \sin \lambda_n x', \quad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \right).$$

Infine, per un carico concentrato P in $x = x'$ (fig. VII, d), per $\Delta \rightarrow 0$, $q_o \Delta \rightarrow P$,

$$(16 d) \quad q_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x'.$$

La serie (16) per q_n secondo la (16 d) non converge e non è quindi in ogni caso derivabile; tuttavia si può impiegarla utilmente. Infatti, posto

$$(17) \quad w(x) = \sum_n w_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

con w_n coefficienti a priori incogniti si ha in rigore dalla (1), per $q_o = q_o(x)$ sviluppato secondo la (16) nei casi (16 a), (16 b, c) ed anche (16 d),

$$(17') \quad w_n = \frac{q_n}{B_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + (k_w^{(s)} - N_o) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + k_w}$$

Segue, per $M = B_2 w''$,

$$(18) \quad M(x) = \sum_n M_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

con

$$(18') \quad M_n = \frac{q_n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2}{1 + \frac{k_w^{(s)} - N_0}{B_2} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 + \frac{k_w}{B_2} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^4}$$

Il segno — appare giacché i momenti, attese le convenzioni generali che precedono, sono dati, con riguardo a w , da $B_2 w''$ ed hanno segno positivo se flettono l'asta in senso opposto

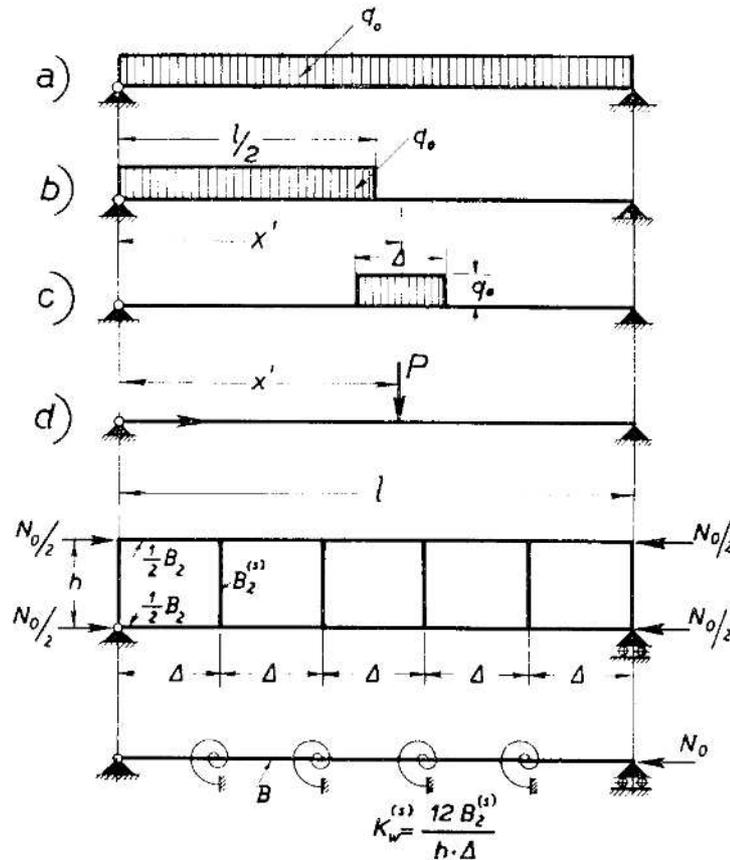


Fig. VII.

a $w > 0$ mentre con riguardo ad u , da $-B_1 u''$ ed hanno segno positivo se flettono nel senso di $u > 0$. Ma, anche se u qui non interviene è sembrato opportuno mantenere le convenzioni; in una trattazione autonoma di questo esempio si potrebbe porre invece senz'altro $M = -B_2 w''$.

Vedremo però nello studio delle stilate, dove l'inflessione è data da u , che tale diversità di segno praticamente non appare più. Dalla (17') si calcolano agevolmente i valori critici di λN_0 (se si pensa N_0 moltiplicato per un fattore λ), come quelli che annullano il denominatore dell'espressione di w_n . Non è detto che $\lambda_{cr} N_0$ minimo si abbia per il minimo u , cioè per $n = 1$, (posto che sia, con riguardo ad un generico carico $q_0 = q_0(x)$, $q_1 = 0$); la ricerca dell' u che rende λ_{cr} minimo riporta a nuove espressioni di λ_{cr} quando si tenga conto della flessibilità virtuale $B^{(n)}$ secondo la (61)' del n. 17.

Per il calcolo dei momenti $M^{(s)}$ nei montanti ove da questi si derivi il $k_w^{(s)}$, si ha, se Δ è l'intervallo che li interessa,

$$M_s = k_w^{(s)} \cdot \Delta \cdot w'(\bar{x}),$$

w' essendo la derivata di w calcolata in $x = \bar{x}$ ascissa del montante. Segue per il montante in $x = \bar{x}$,

$$(18'') \quad M_s(\bar{x}) = \frac{12 B_2^{(s)}}{h} \sum_n \frac{q_n \frac{n\pi}{l}}{B_2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + (k_w^{(s)} - N_o) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + k_w} \cos \frac{n\pi}{l} \bar{x}.$$

B) Momento M_o applicato al solo estremo $x = 0$. Sia $k_w = 0$ come in fig. 1 a

Posto nella (1) $w = e^{zx}$ si ha l'equazione caratteristica

$$z^2 (z^2 - \alpha^2) = 0$$

con

$$(19) \quad \alpha^2 = \frac{k_w^{(s)} - N_o}{B_2}$$

Da qui le radici

$$z_{1,2} = 0 \quad z_{3,4} = \pm \alpha, 0, \pm i\alpha, \quad \text{con } i = \sqrt{-1}; \quad \text{per } N_o \leq k_w^{(s)}$$

essendo $N_o > 0$ sforzo di compressione. Si hanno in conformità, designando $c_{1,2,3,4}$ costanti arbitrarie, le seguenti espressioni per l'integrale generale,

$$(20) \quad w = c_1 \begin{pmatrix} \text{Sh } \alpha x \\ x^3 \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \text{Ch } \alpha x \\ x^2 \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} + c_3 x + c_4,$$

per $N_o \leq k_w^{(s)}$.

Le condizioni sono

$$w(0) = w(l) = 0 \quad , \quad B_2 w''(0) = M_o \quad , \quad B_2 w''(l) = 0.$$

Si ha quindi, per $N_o < k_w^{(s)}$,

$$(21) \quad \begin{cases} w(x) = -\frac{M_o}{B_2 \alpha^2} \left\{ \text{Cth } \alpha l \text{ Sh } \alpha x - \text{Ch } \alpha x + \frac{l-x}{l} \right\}, \\ M(x) = M_o \{ \text{Ch } \alpha x - \text{Cth } \alpha l \text{ Sh } \alpha x \} \end{cases}$$

e per il momento nel montante in $x = \bar{x}$

$$(21)' \quad M_s(\bar{x}) = k_w^{(s)} \Delta w'(\bar{x}).$$

Per $N_o > k_w^{(s)}$ basta sostituire le funzioni iperboliche con quelle trigonometriche cambiando il segno a w .

Per $N_o = k_w^{(s)}$ tutto va come se lo sforzo N_o e la reattività $k_w^{(s)}$ si annullasse e si ha, come si sa,

$$(20)' \quad \begin{cases} w(x) = -\frac{M_o l^2}{B_2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ M(x) = M_o \frac{l-x}{l}; \end{cases}$$

il che risulta anche passando le (21) al limite per $\alpha \rightarrow 0$.

C) Momenti M_o applicati agli estremi $x = 0, l$. Sia $k_w = 0$ come in fig. 1 b.

Le condizioni sono

$$w(0) = w(l) = 0 \quad , \quad B_2 w''(0) = B_2 w''(l) = M_o.$$

Per il caso più interessante, $N_0 < k_w^{(s)}$, si ha

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x) = \frac{M_0}{B_2 \alpha^2 l} \left\{ \frac{1 - \text{Ch } \alpha l}{\text{Sh } \alpha l} \text{Sh } \alpha x + \text{Ch } \alpha x - 1 \right\}, \\ M(x) = M_0 \left\{ \frac{1 - \text{Ch } \alpha l}{\text{Sh } \alpha l} \text{Sh } \alpha x + \text{Ch } \alpha x \right\}, \end{array} \right.$$

e per il momento nel montante in $x = \bar{x}$,

$$(22') \quad M_s(\bar{x}) = k_w^{(s)} \Delta \cdot w'(\bar{x}).$$

Per $N_0 > k_w^{(s)}$ basta sostituire le funzioni iperboliche con quelle trigonometriche. Evidentemente si ha instabilità per $\alpha l = \pi$ cioè per

$$\lambda N_0 = N_{cr} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 B_2 + k_w^{(s)}$$

come si è già visto.

Se $x = 0$ la reattività $k_w^{(s)}$ è annullata dallo sforzo assiale oppure è contemporaneamente nullo N_0 e $k_w^{(s)}$; la trave si comporta allora come una trave ordinaria e si ha

$$(22'') \quad w(x) = \frac{M_0}{2 B_2} x(l-x), \quad M(x) = M_0$$

il che risulta anche passando le (22) al limite per $\alpha \rightarrow 0$.

D) *Momento M_0 applicato ad un estremo. Sia $k_w = 0$ come in fig. 1 c.*

Le condizioni ai limiti sono quelle di B).

L'equazione caratteristica diviene

$$(19') \quad B_2 z^4 + (N_0 - k_w^{(s)}) z^2 + k_w = 0$$

e da qui, per $N_0 < k_w^{(s)}$, posto

$$n = \frac{k_w^{(s)} - N_0}{B_2}, \quad \beta = \frac{k_w}{B_2},$$

le radici

$$z_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - \beta}}.$$

Per $n^2 < 4\beta$, fatte le posizioni

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta + \frac{n}{2}} \right)}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta - \frac{n}{2}} \right)},$$

omettendo le soluzioni espansive, il che è ammissibile nelle condizioni che si preciseranno subito, si ha

$$(23) \quad M(x) = M_0 e^{-\eta_1 x} \left(\cos \eta_2 x - \frac{n}{4 \eta_1 \eta_2} \sin \eta_2 x \right).$$

Se per $x = l$ non è $M(l)$ trascurabile, non è verificata cioè la condizione di estinzione (smorzamento) che consente di non considerare le soluzioni espansive, si sovrapporrà alla (23) un momento di ritorno $M_1(x)$ dato da

$$(23') \quad M_1(x') = -M(l) e^{-\eta_1 x'} \left(\cos \eta_2 x' - \frac{n}{4 \eta_1 \eta_2} \sin \eta_2 x' \right)$$

essendo

$$x' = l - x.$$

Per $n \rightarrow 0$ è

$$\gamma_{11} = \gamma_{12} = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4}} = \frac{1}{s_0}$$

se si pone

$$s_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta}} = \sqrt[4]{\frac{4 B_2}{k_w}}$$

e la (23) diviene

$$(23'') \quad M(x) = M_0 \cdot e^{-\frac{x}{s_0}} \cos \frac{x}{s_0}$$

Se in $x = l$ non è trascurabile il momento $M(l)$ calcolato con la (23''), momento che dovrebbe risultare nullo, si penserà applicato (in $x = l$) un momento $-M_1(l)$ e si sovrapporrà ad $M(x)$ della (23'') il momento di ritorno

$$M_1(x') = -M(l) e^{-\frac{x'}{s_0}} \cos \frac{x'}{s_0}, \quad (x' = l - x)$$

e, se in $x = 0$ non sarà $M_1(0)$ trascurabile si applicherà (in $x = 0$) un momento $-M_1(0)$ e si sovrapporrà ad $M(x) + M_1(x')$ il momento

$$M_2(x) = -M_1(0) e^{-\frac{x}{s_0}} \cos \frac{x}{s_0},$$

e così via.

E) *Casi notevoli nello studio delle stilate come in fig. VIII.*

Come appare in fig. VIII si considerano gli spostamenti u , quindi i momenti $M = -B_1 u''$ secondo le convenzioni precedenti. Le condizioni ai limiti siano:

Caso a); *estremo libero:*

$$\begin{aligned} B_1 u''' - k_u^{(t)} u' &= H, & -B_1 u'' &= 0, & \text{in } x=0 \text{ (in testa)} \\ u &= 0, & u' &= 0, & \text{in } x=h \text{ (al piede)}. \end{aligned}$$

Segue, ponendo

$$\alpha^2 = \frac{k_u^{(t)}}{B_1},$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} u(0) &= \frac{Hh}{B_1 \alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha h} \operatorname{Th} \alpha h \right), \\ u'(x) &= \frac{H}{B_1 \alpha^2} \left(\frac{\operatorname{Ch} \alpha x}{\operatorname{Ch} \alpha h} - 1 \right), & m_t(x) &= k_u^{(t)} \cdot u'(x), \\ M(x) &= \frac{H}{\alpha} \frac{\operatorname{Sh} \alpha x}{\operatorname{Ch} \alpha h}, & M(h) &= \frac{H}{\alpha} \operatorname{Th} \alpha h; \end{aligned} \right.$$

infine, il momento all'attacco pilastri nella traversa in $x = \bar{x}$ che interessa l'intervallo Δ è, se due sono i pilastri,

$$M_t(\bar{x}) = m_t(\bar{x}) \cdot \Delta = \pm 1/2 k_u^{(t)} \Delta \cdot u'(\bar{x}).$$

Per $\alpha \rightarrow 0$ si ha, a titolo di controllo,

$$(24') \quad u(0) = \frac{Hh^3}{3 B_1}, \quad M(h) = Hh.$$

Caso b); incastro in $x = h$ e incastro scorrevole in $x = 0$:

$$u = 0, \quad u' = 0 \quad \text{in } x = h; \quad u' = 0, \quad Bu''' = H \quad \text{in } x = 0.$$

Segue

$$(25) \quad \begin{cases} u(0) = -\frac{Hh}{B_1 \alpha^2} \left(1 + \frac{2}{\alpha h} \frac{1 - \text{Ch } \alpha h}{\text{Sh } \alpha h} \right), \\ m_1(x) = k_u^{(t)} u'(x) = H \frac{\text{Sh } \alpha x + \text{Sh } \alpha (h-x) - \text{Sh } \alpha h}{\text{Sh } \alpha h}, \\ M(0) = -M(h) = \frac{H}{\alpha} \frac{\text{Ch } \alpha h - 1}{\text{Sh } \alpha h}, \end{cases}$$

ed il momento nella traversa in $x = \bar{x}$, all'attacco di uno dei due pilastri, è

$$(25') \quad M_t(\bar{x}) = \pm 1/2 k_u^{(t)} \Delta \cdot u'(\bar{x}).$$

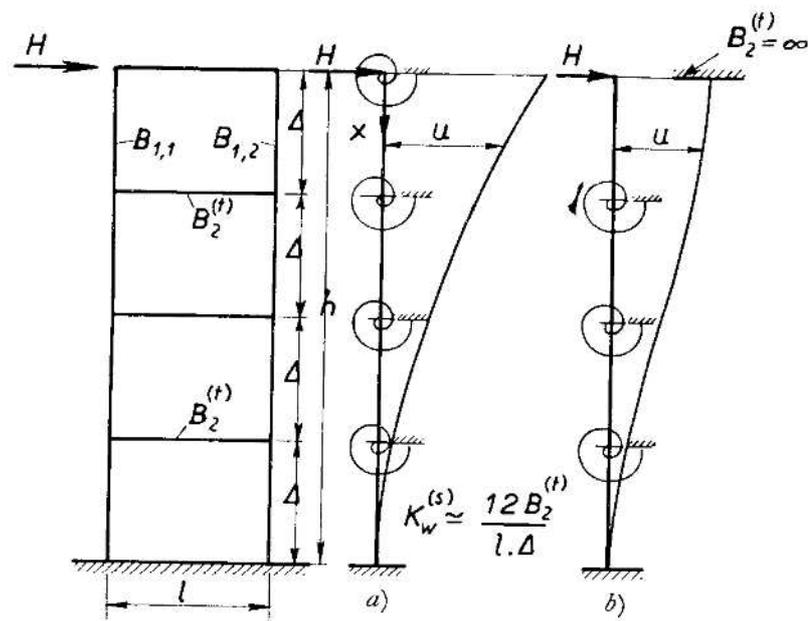


Fig. VIII.

Si rilevi che $M(0) = -M(h)$ e $M(h/2) = 0$. Infine, lo sforzo assiale nei montanti 1,2 alla sezione $x = \bar{x}$ è

$$N_1 = -N_2 = -\frac{I}{l} \int_0^{\bar{x}} m_1(x) dx.$$

A titolo illustrativo si consideri infine una stilata ad n montanti ed m piani, come in fig. IX.

Allora, poiché $(n-1)$ sono le traverse ad ogni piano, è

$$\alpha^2 = \frac{12}{l \Delta} \frac{(n-1) B_2^{(t)}}{B_1} \cdot \frac{1}{1 + \rho}, \quad \rho = \frac{(n-1) B_2^{(r)} \Delta}{B_1 l}, \quad B_1 = \sum_i^n B_{1i}.$$

Se Δ è l'altezza di ogni piano, è $h = m\Delta$. Posto $B_1^{(t)} : B_1' = \beta$ con $B_1' = B_{1i}$ per i generico, con che $B_1 = n B_1'$, è per ogni i ,

$$M_i(h) = \frac{1}{n} M(h) = H \sqrt{l \Delta} \sqrt{\frac{1}{12 \beta n (n-1)}} \begin{cases} \text{Th } \gamma \\ \text{Ch } \gamma - 1 \\ \text{Sh } \gamma \end{cases}$$

con

$$\gamma = m \left| \frac{12 \beta (n-1) \Delta}{n l} \right|$$

Poiché per i dimensionamenti ordinari è $\beta \sim 2/3$, $\Delta \sim l$ i fattori agli estremi di $\langle \dots \rangle$ sono ~ 1 ; risulta allora, per ogni i ,

$$M_i(h) = H \cdot \sqrt{l \Delta} \cdot \left| \frac{1}{12 \beta n (n-1)} \right|$$

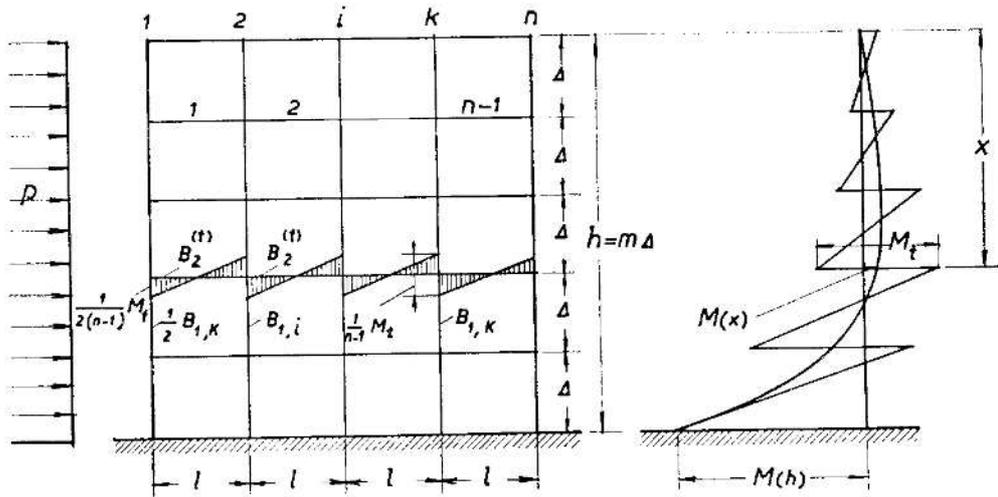


Fig. IX.

Per $\beta \sim 2/3$, $l \sim \Delta$, $n = 2$, si ha $M_i(h) \cong H \Delta / 4$ come si pone secondo un pratico criterio di calcolo. Naturalmente le formole sopra scritte vanno applicate con accorgimento e riguardo alle condizioni cui si riferiscono ed alle condizioni effettive del problema.

Infine, con riferimento ad $(n-1)$ telai contigui si consideri:

F) Il carico orizzontale p uniformemente distribuito (cfr. fig. IX) su tutta l'altezza h .

In luogo delle (25) poiché le briglie (orizzontamenti) vengono ad esser formate da $(n-1)$ traversi, si ha (*), posto

$$\alpha^2 = \frac{k_u^{(i)}}{B_1} = \frac{12 (n-1) B_2^{(i)}}{l \Delta B_1} \cdot \frac{1}{1 + \rho} \quad , \quad \rho = \frac{(n-1) B_2^{(i)} \Delta}{B_1 l} \quad , \quad B_1 = \sum_{i=1}^n B_{1,i}$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x) &= \frac{p}{B_1 \alpha^4} \left\{ \frac{(\alpha h)^2 - (\alpha x)^2}{2} + \frac{\text{Ch } \alpha (h-x) - \alpha h (\text{Sh } \alpha h - \text{Sh } \alpha x) - 1}{\text{Ch } \alpha h} \right\} \\ m_t(x) &= k_u^{(i)} u' - \frac{p}{\alpha} \left\{ -\alpha x + \frac{\alpha h \text{Ch } \alpha x - \text{Sh } \alpha (h-x)}{\text{Ch } \alpha h} \right\} \\ M(x) &= -B_1 u'' = \frac{p}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{\text{Ch } \alpha (h-x) + \alpha h \text{Sh } \alpha x}{\text{Ch } \alpha h} \right\} \end{aligned} \right.$$

Da qui, a titolo di controllo, per $\alpha \rightarrow 0$ (traversi privi di flessorigidità ma non di tensorigidità, necessaria per ripartire p , si ha

$$u = u(x) \rightarrow -\frac{p h^4}{24 B_1} \left[4 \frac{x}{h} - \left(\frac{x}{h} \right)^4 - 3 \right] \quad , \quad m_t \rightarrow 0 \quad , \quad M = M(x) \rightarrow -\frac{p x^2}{2} \quad ,$$

cioè la linea elastica ed i momenti di una mensola (di flessorigidità B_1) incastrata in $x = h$.

(*) Si cfr. la Nota di C. MINELLI, *Metodo di calcolo per travi Vierendeel con grande numero di traversi*, in « Ricerca scientifica », marzo, 1939.

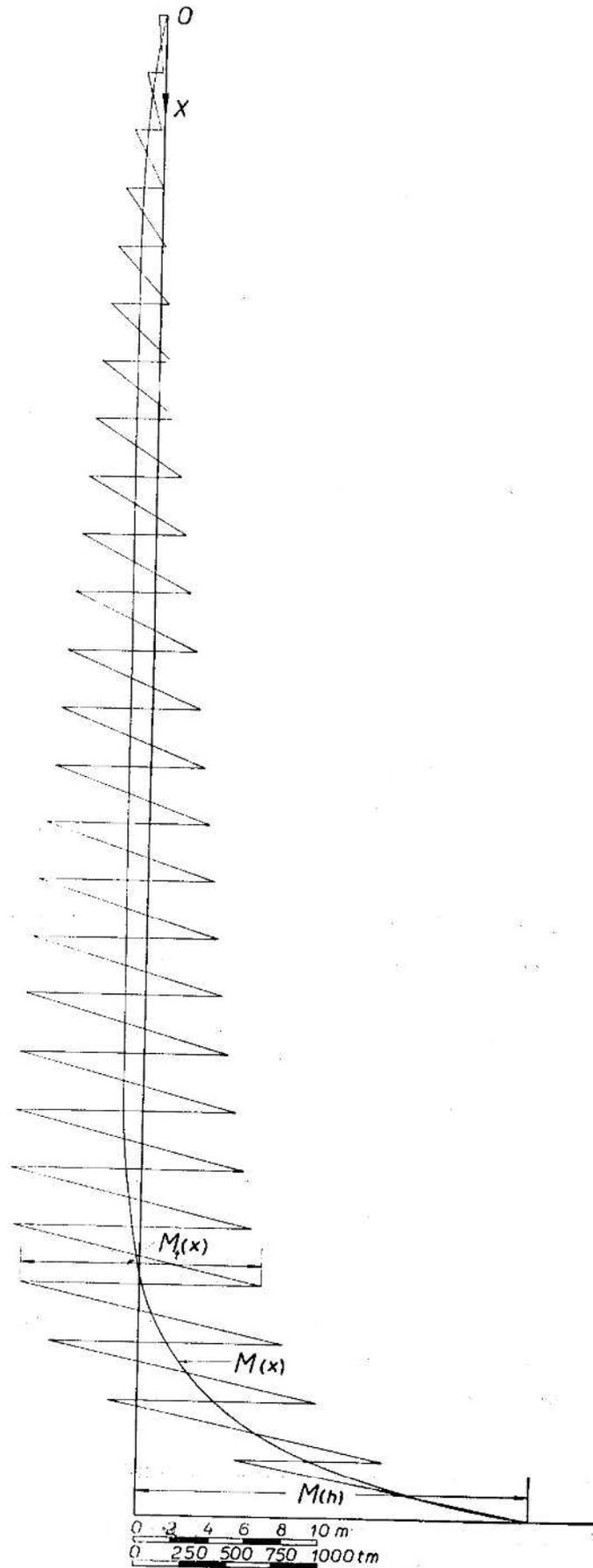


Fig. X.

Il momento M_t preso dagli $n-1$ traversi che formano la briglia generica $x=\bar{x}$, pensati associati in parallelo (per una ideale sovrapposizione degli $n-1$ telai elementari che costituiscono il telaio completo), è

$$(27) \quad M_t(\bar{x}) = m_t(\bar{x}) \cdot \Delta = k_u^{(0)} \cdot u'(\bar{x}) \cdot \Delta.$$

Tale momento va trasmesso alla maniera solita tra pilastri-montanti sopra e sotto l'orizzontamento $x=\bar{x}$ e attribuito agli $n-1$ traversi che lo costituiscono. Sommando i momenti nei montanti, dovuti ai traversi, agli $M(x)$, si ottiene la tipica linea dei momenti complessivi $M^*(x)$ a denti di sega sulla portante $M(x)$ (figg. IX-X). Gli $M(x)$ vanno ripartiti tra gli n pilastri-montanti in proporzione alle rispettive flessorigidità $B_{1,i}$. Per l'equilibrio dei nodi, nell'ordine di idee in cui ci si è messi, occorre ammettere che, praticamente, le flessorigidità siano tutte tra loro eguali, poniamo a $B_{1,0}$ per i pilastri interni, eguali a $1/2 B_{1,0}$ per i pilastri esterni. In tal guisa si ha

$$B_1 = \sum_i^n B_{1,i} = (n-1) B_{1,0}$$

e il momento $M_i^*(x)$ nel generico montante i^{imo} risulta, riferendosi adrittura ad M^* ,

$$M_i^*(x) = \frac{B_{1,i}}{B_1} M^*(x)$$

con $B_{1,1} = B_{1,n} = 1/2 B_{1,0}$, $B_{1,i} = B_{1,0}$ per $i = 2, 3, \dots, n-1$, sicchè si ha semplicemente

$$M_i^*(x) \simeq M^*(x) \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)}, & \text{per } i = 1, n \\ \frac{1}{n-1}, & \text{per } i = 2, 3, \dots, n-1. \end{cases}$$

Infine, per controllo, si rilevi che alla generica sezione $\bar{x} = \text{cost.}$ si ha

$$-\frac{1}{2} p \bar{x}^2 = M(\bar{x}) + \int_0^{\bar{x}} m_t(x) dx.$$

Nella fig. X si illustrano le (26) e (27) per quanto riguarda i momenti $M(x)$ ed $M_t(x)$ nel fascio pilastri e nel piano normale ai solai (*orizzontamenti*) di un insieme di telai multi-piani sotto la forza del vento. Qui, il riferimento è preso ad un quasi-grattacielo a Livorno, si immagina per semplicità che il risultante delle forze trasversali passi sempre per il *centro di torsione* di ogni orizzontamento considerato elasticamente vincolato, per moti rigidi nel proprio piano, dalla sottostante distribuzione di pilastri.

INDICE

	Pag.
Riassunto	5
1. - Premesse e generalità	» 6
2. - Flessione di una linea curva piana	» 8
3. - Flessione deviata di una barra piana curva di equazione d'asse $R = R(\psi)$	» 11
4. - Variazione angolare specifica di torsione κ_φ	» 12
5. - Espressione completa delle caratteristiche di deformazione κ . Termini $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}$ del 1° e 2° ordine	» 12
6. - Estensione specifica dell'asse di una barra curva conseguente ad u, v, w	» 13
7. - Area ΔA racchiusa tra una linea piana ξ e la sua deformata ξ' corrispondente a v, w	» 14
8. - Lavoro di deformazione elastica W conseguente ad u, v, w, φ con particolare riguardo a travi tubolari a pareti reticolari.	» 14
9. - Calcolo di W per N archi in parallelo tra loro trasversalmente collegati e solidali attraverso le stilate con l'impalcato	» 21
10. - Calcolo di ξ_2^*, ξ_2 , lavori di 2° ordine per un arco isolato soggetto a sforzo assiale, flessione e torsione	» 37
11. - Osservazione sull'applicazione al problema di cui si tratta dei criteri energetici del <i>Dirichlet</i> rispettivamente di <i>Bryan-Timoshenko</i>	» 40
12. - Equazioni alle variazioni in u, v, w, φ per una struttura da ponte ad arco di tipo generale (secondo la fig. 22).	» 42
13. - Il moltiplicatore critico λ_{cr} per la deviazione laterale per carico q_0 e flessione M_0 di un arco di apertura $2\psi_0$ (come in fig. 22)	» 46
14. - Il λ_{cr} per inflessione nel proprio piano Π per carico radiale q_0 di un arco (come in fig. 22)	» 47
15. - Equazione in w , per deformate prive di estensione, di un arco circolare in un mezzo elastico soggetto a condizione di carico antisimmetrico	» 51
16. - Osservazione sulla validità delle (43) di cui al n. 12	» 58
17. - Deformazione di una trave elastica per flessione e taglio	» 65
18. - Estensione delle deduzioni del n. 17 al caso di archi collegati secondo vari schemi ((a), b), c), d), f) della fig. 30))	» 71
19. - N_{cr} per deformate trasversali prive di estensione	» 73
20. - Esempi numerici con riguardo all'arco sul Gambellato per il tratto Bologna-Firenze dell'Autostrada del Sole	» 76
21. - Il λ_{cr} per l'asta rettilinea sottoposta simultaneamente a flessione M_0 , sforzo assiale N_0 e torsione M_t	» 82
22. - Stabilità di più travate associate, comunque caricate. Intervento di azioni aerostatiche (come in fig. 37)	» 85
23. - Applicazione dei metodi diretti del calcolo delle variazioni	» 96
24. - Caso generale: flessione e torsione concomitanti.	» 97
25. - Stabilità oltre il campo elastico	» 99
26. - Calcolo diretto della σ_{cr} effettiva da $\sigma_{cr}^{(0)}$ per $E = \text{cost.} = E_0$	» 105
27. - Divari dalla linea d'asse di un arco, voluti o per errore di costruzione	» 108
28. - Arco circolare con pressione radiale uniforme ed asse deviato nel suo piano Π	» 113
29. - Moltiplicatori critici e viscosità dei materiali	» 115
30. - Divario per costruzione, $w_0 = w_0(x)$, dalla linea d'asse di un arco e viscosità	» 124

Appendice:

Trave elastica con reattività elastica, alla rotazione ed agli spostamenti, diffusa nell'intervallo $0 \leq x \leq l$ tra gli estremi	» 127
---	-------