

essendo ovviamente

$$(84 a) \quad C_{me} = C_m - \varepsilon C_p$$

Poiché p_o è rivolto verso l'alto, ed $\varepsilon > 0$ è a sinistra di \mathfrak{S} , tale posizione rende manifesta la definizione di momento aereodinamico *positivo* in senso *picchiante* cioè antiorario, opposto quindi al senso *cabrante*, che è il senso positivo per l'angolo di torsione φ ; l'angolo tra V e la corda dicesi *incidenza* φ_o . L'angolo di torsione φ è contato dalla posizione della *corda* per il profilo in equilibrio.

Si noti che C_p, C_m, C_{me} sono funzioni di φ_o secondo le (83), (84 a) per il profilo rettilineo e secondo formule teoriche e sperimentali ben note in Aviazione per altri tipi di profili. Da qui, a partire da φ_o , in particolare $\varphi_o = 0$, una variazione $\delta\varphi$ dell'incidenza provoca una variazione di portanza e di momento, (dal valore nullo se era $\varphi_o = 0$),

$$(85) \quad \delta p_o = \Gamma_p \delta\varphi \quad , \quad \delta m_{oe} = \Gamma_{me} \delta\varphi$$

$$\Gamma_p = C'_p \rho V^2 \cdot (2s) \quad , \quad \Gamma_{me} = C'_{me} \rho V^2 \cdot (2s)^2$$

C'_p, C'_{me} essendo le derivate dei coefficienti di portanza e di momento C_p e C_{me} , rapporto a φ . Per la lastra piana, in un intorno del 1° ordine di $\varphi_o = 0$ è per le (83) $C'_p = \pi$, $C'_m = 0$ quindi $C'_{me} = -\varepsilon\pi$. Per il centro elastico \mathfrak{S} al mezzo si ha evidentemente $\varepsilon = 0,25$, quindi $C'_{me} = -0,25 \cdot \pi = -0,7854$. Noti C_p, C_{me} per un'incidenza φ_o del vento (vento al sottotrave) calcolate le azioni aereodinamiche p_o ed m_{oe} , se la travata è *ancorata* (eventualmente dal solo suo peso) agli estremi $x = 0, l$, si troveranno momenti torcenti $M_t = M_t(x)$ dati da

$$M_t(x) = m_{oe}^* \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

dove, se con m^* si indicano momenti torcenti non derivabili da azioni di portanza, per le convenzioni fatte sui segni è

$$m_{oe}^* = -m_{oe} + m^* .$$

Per lo studio della stabilità alla torsione (elastica), che nulla ha a che vedere con la ben ovvia stabilità al ribaltamento (rigido), ove si tratti di una struttura leggera si potrà porre,

$$M_t = |m_{oe}^*| \cdot \frac{l}{2} = \text{cost.}$$

a tutto favore della stabilità. Ma le equazioni generali (42), (42 a), specifiche per tale ricerca, vanno perfezionate con l'aggiunta di nuovi termini che derivano dalle variazioni $\delta\varphi$ dell'incidenza φ_o calcolati secondo le (85). Naturalmente, poiché le equazioni generali si riferiscono già a variazioni u, w, φ (piccole del 1° ordine) degli spostamenti iniziali, si porrà nelle suddette (85) φ per $\delta\varphi$ e resterà inteso che φ è l'angolo di torsione elastica.

Infine, per quanto riguarda le superficie investite, le forze si calcolano come usualmente: se C_r è il *coefficiente di resistenza* si ha una forza applicata r per unità di lunghezza,

$$(86) \quad r = \frac{1}{2} C_r \rho V^2 \begin{cases} (2s), & \text{per un profilo alare, con } C_r \text{ coefficiente di resistenza} \\ d_o, & \text{per una lastra normale a } V \text{ di altezza } d_o, (C_r = 2). \end{cases}$$

Il fattore $1/2$ è introdotto universalmente; esso interviene presso molti autori (americani particolarmente) anche a fattore nelle (82); allora però C_p e C_m sono doppi di quelli qui considerati.

Nel caso nostro si congloberà r nelle forze orizzontali q_u che, assieme con quelle verticali q_v sollecitano (cfr. fig. 37), applicate con eccentricità δ_u e δ_v rispetto ad \mathcal{E} , la travata che si considera.

Per lo studio della stabilità non resta ormai che il calcolo di $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^*, W$. Nel caso specifico cominciamo da \mathcal{L}_2 . Si ha, con riguardo alle forze secondo le (85) che si manifestano variando φ_o di φ e riferendosi addirittura e necessariamente alla variazione $\delta \mathcal{L}_2$ di \mathcal{L}_2 per variazioni $\delta \varphi, \delta w$,

$$(87) \quad \delta \mathcal{L}_2 = - \int (\Gamma_p \varphi \delta w + \Gamma_{me} \varphi \delta \varphi) dx + \int [\Sigma \vec{q}_i \times (\mathcal{E} - O_i)] \varphi \delta \varphi dx.$$

Il segno — nel primo termine interviene giacché valori > 0 di $\Gamma_p \varphi$ e $\Gamma_{me} \varphi$ sono opposti a w e φ cioè a δw e $\delta \varphi$ (si noti che è generalmente $\Gamma_{me} < 0$).

Il secondo termine si spiega facilmente:

Sia \vec{q}_i la forza generica, per unità di lunghezza, applicata nel punto O_i della sezione rigida $x = \text{cost}$.

Ove questa faccia una rotazione φ attorno al centro elastico \mathcal{E} , il lavoro fatto da \vec{q}_i risulta (cfr. fig. 38) quando si ponga

$$\begin{aligned} |\mathcal{E} - O_i| &= d_i, \quad |\vec{q}_i| = q_i, \\ \mathcal{L} &= - q_i d_i [\cos \varphi_{oi} - \cos (\varphi_{oi} + \varphi)] = \\ &= - \varphi \cdot q_i d_i \sin \varphi_{oi} - \frac{\varphi^2}{2} q_i d_i \cos \varphi_{oi} + \dots, \end{aligned}$$

indicando . . . termini di ordine superiore al 2° in φ .

Evidentemente, il 2° termine nella espressione di \mathcal{L} , che attualmente solo interessa, si può scrivere, poiché

$$- \frac{\varphi^2}{2} q_i d_i \cos \varphi_{oi} = \frac{\varphi^2}{2} q_i d_i \cos (\pi - \varphi_{oi}),$$

nella forma sintetica sopraindicata. Occorre appena rilevare che

$$(87 a) \quad \gamma^* = \Sigma \vec{q}_i \times (\mathcal{E} - O_i)$$

non è il momento (torcente) della distribuzione di forze applicate \vec{q}_i rispetto ad \mathcal{E} . Detto momento, sia scritto per completezza, è

$$m^* = \left| \sum \vec{q}_i \wedge (\mathcal{E} - O_i) \right|.$$

E con ciò si può passare al calcolo di Ω_2^* e di W .

Siano M_{o_v}, M_{o_H} , più brevemente M_v ed M_H i momenti nella travata prodotti dai carichi q_v e q_H secondo w ed u . Sia M_t il momento torcente, N_o lo sforzo assiale.

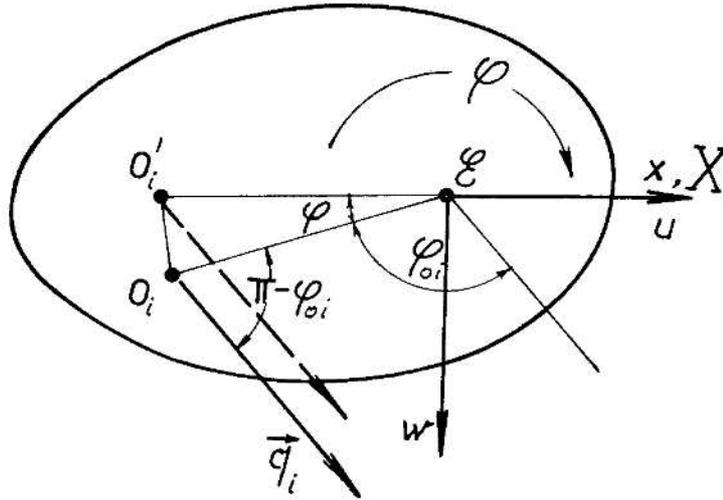


Fig. 38.

Indicata con B_{2i}, B_{1i} la flessoridezza secondo w rispettivamente secondo u della generica trave i^{ima} del complesso, con D_i la corrispondente tensoridezza, considerate le loro eccentricità $\epsilon_{i_v}, \epsilon_{i_H}$ rispetto al centro elastico \mathcal{E} del complesso suddetto, si introducano le eccentricità ponderate, rispetto a w ed a u (anziché soltanto a w come in precedenza si è fatto)

$$\epsilon_v^2 = \frac{\sum_i B_{2i} \epsilon_{i_v}^2}{B_2}, \quad \epsilon_H^2 = \frac{\sum_i B_{1i} \epsilon_{i_H}^2}{B_1}$$

con

$$B_2 = \sum_i B_{2i}, \quad B_1 = \sum_i B_{1i}$$

e, posto $D = \sum_i D_i$,

$$\epsilon_{d_v}^2 = \frac{\sum D_i \epsilon_{i_v}^2}{D}, \quad \epsilon_{d_H}^2 = \frac{\sum D_i \epsilon_{i_H}^2}{D}.$$

Ammetteremo per brevità $\epsilon_v \sim \epsilon_{d_v}, \epsilon_H \sim \epsilon_{d_H}$ ed N distribuito proporzionalmente alle D_i . Si ha allora per Ω_2^* (19),

$$(88) \quad \Omega_2^* = -\frac{\lambda}{2} \int N_o [(w'^2 + u'^2) + (\epsilon_{d_v}^2 + \epsilon_{d_H}^2) \varphi'^2] dx + \\ + \lambda \int (M_v u'' \varphi - M_H w'' \varphi) dx + \frac{\lambda}{2} \int M_t (w'' u' - u'' w') dx.$$

(19) Cfr. per più dettagli, G. KRALL, *Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile*, Nota I, II, in « Rend. Acc. Lincei », fasc. 6 e 1-2 ferie, 1962.

Per il calcolo di W nell'aspetto più generale basta introdurre accanto ai coefficienti $k_w^{(s)}$, $k_u^{(t)}$ di reattività rispetto alle rotazioni w' ed u' i coefficienti k_w e k_u di reattività rispetto a w ed a u ed infine di reattività k_φ alla torsione φ .

Merita accennare, a titolo illustrativo, anche al caso di appoggi su galleggianti. Allora, se A_g è l'area di galleggiamento, ad esempio normale a w , δ_{M_t} la *distanza metacentrica trasversale*, P il dislocamento, Δ l'intervallo tra galleggiante e galleggiante, si ha subito, essendo γ_a il peso specifico del liquido, tenendo presente che l'asse longitudinale dei galleggianti è trasversale al ponte,

$$k_w = \frac{A_g \gamma_a}{\Delta}, \quad k_w^{(s)} = \frac{P \delta_{M_t}}{\Delta}.$$

Per la reattività torsionale k_φ , si ha, δ_{M_l} essendo la *distanza metacentrica longitudinale*,

$$k_\varphi = \frac{P \delta_{M_l}}{\Delta}.$$

A parte l'ovvio significato dei coefficienti k_w , $k_w^{(s)}$ merita richiamare lo studio della stabilità di un ponte di barche con trave continua, arcuato con la convessità contro corrente, impostato su le rive.

Ove i galleggianti non siano ancorati il carico q_H è dato dalla resistenza (divisa per Δ) che il galleggiante incontra al moto con la velocità V della corrente. Gli ancoraggi funzionano in ogni caso come le funi di cui si parla nello studio dei coefficienti $k^{(f)}$ che, in tale caso, poiché u sta nel piano dell'arco, agiscono su w , sicché si ha, secondo le (23), con simboli noti,

$$k_w = \frac{EF}{L}$$

o le più precise formole già indicate. Per quanto precede si ha in definitiva per W , ammettendo $k_{wi}^{(s)}$, $k_{ui}^{(t)}$ proporzionali alle $B_{2,i}$, $B_{1,i}$,

$$(89) \quad W = \frac{1}{2} \int \{ B_2 (w''^2 + \varepsilon_v^2 \varphi''^2) + B_1 (u''^2 + \varepsilon_H^2 \varphi''^2) + C \varphi'^2 + k_\varphi \varphi^2 \} dx + \\ + \frac{1}{2} \int \{ k_w^{(s)} (w'^2 + \varepsilon_v^2 \varphi'^2) + k_u^{(t)} (u'^2 + \varepsilon_H^2 \varphi'^2) + k_w w^2 + k_u u^2 \} dx.$$

Naturalmente le (88) e (89) valgono nelle ipotesi che per il complesso di travi siano soddisfatti i vincoli di rigidità di forma (per virtù dei quali ad esempio, gli spostamenti u_i, w_i della trave generica sono $u_i = u + \varepsilon_{iH} \varphi$, $w_i = w + \varepsilon_{iV} \varphi$) e che ognuna lavori in modo indipendente dall'altra secondo la teoria ordinaria della flessione come si è visto ad esempio nel caso della travata tubolare reticolare.

Valgono inoltre quelle condizioni di simmetria e di adeguato riferimento (ad esempio al baricentro di masse proporzionali a $B_{1,i}$, $B_{2,i}$) per cui

gli sforzi conseguenti ad u oppure a w od a φ fanno lavoro nullo per le deformazioni susseguenti a (w, φ) oppure a (u, φ) od a (u, w) .

Tutto ciò premesso l'algoritmo variazionale porge, in conformità con la condizione di labilità (26 a) del n. 10,

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta w', B_2 w^{(iv)} + \lambda (N_o - k_w^{(s)}) w'' - \lambda (M_H \varphi)'' + \lambda M_I u''' + k_w w + \lambda \Gamma_p \varphi = 0 \\ \delta \varphi |, - [C + k_w^{(s)} \varepsilon_v^2 + k_u^{(t)} \varepsilon_H^2 - \lambda N_o (\varepsilon_{dv}^2 + \varepsilon_{dH}^2)] \varphi'' + (B_2 \varepsilon_v^2 + B_I \varepsilon_H^2) \varphi^{(iv)} + \\ \quad + \lambda (M_V u'' - M_H w'') + [\lambda (-\gamma^* + \Gamma_{me}) + k_\varphi] \varphi = 0 \\ \delta u, B_I u^{(iv)} + \lambda (N_o - k_u^{(t)}) u'' + \lambda (M_V \varphi)'' - \lambda M_I w''' + k_u u = 0. \end{array} \right.$$

Le condizioni ai limiti $x = 0, l$ risultano, tenendo anche conto dei contributi dei momenti M_H, M_V, M_I ivi applicati,

$$(90 a) \quad [B_2 w'' + \lambda (-M_H \varphi + M_I u')] \delta w' + [B_I u'' + \lambda (M_V \varphi - M_I w')] \delta u' + \\ + [(C + k_w^{(s)} \varepsilon_v^2 + k_u^{(t)} \varepsilon_H^2) \varphi' - \lambda (M_V u' - M_H w') - \lambda N_o (\varepsilon_{dv}^2 + \varepsilon_{dH}^2) \varphi - \\ - (B_2 \varepsilon_v^2 + B_I \varepsilon_H^2) \varphi'''] \delta \varphi + [-B_I u''' - \lambda (N_o - k_u^{(t)}) u' + \lambda M_I w'' - \lambda M_V \varphi'] \delta u + \\ + [-B_2 w''' - \lambda (N_o - k_w^{(s)}) w' + \lambda M_I u'' + \lambda M_H \varphi'] \delta w + [B_2 \varepsilon_v^2 + B_I \varepsilon_H^2] \varphi'' \delta \varphi = 0.$$

Tali condizioni sono senz'altro soddisfatte se in $x = 0, l$ è $u = w = 0, \varphi = 0$ (e quindi $\delta u = \delta w = 0, \delta \varphi = 0$) e, ove non sia $u' = w' = 0, \delta \varphi' = 0$ quando si annullino le [] a fattore di $\delta u', \delta w', \delta \varphi'$. Se u, w, φ non si annullano agli estremi allora debbono annullarsi le [] a fattore delle corrispondenti variazioni. Il significato di tali parentesi è evidente: esse esprimono l'eguaglianza tra momenti e taglio provocati dagli spostamenti e rotazioni $u, w, \varphi; u', w', \varphi'$ in $x = 0, l$ conseguenti ad M_V, M_H, N_o non nulli e momenti e taglio delle forze interne, $+B_2 w'', -B_I u''$ rispettivamente $B_2 w''' + k_w^{(s)} w'$ e $B_I u''' + k_u^{(t)} u'$.

A) Un caso particolare di instabilità per torsione pura.

Delle (90) si consideri la sola 2ª equazione, che deriva variando φ , scritta per $N_o = 0, M_V = M_H = 0$ e con tutti i k ed $\varepsilon = 0$ oltre a $\Gamma_{me} = 0$. Si ha

$$C\varphi'' + \lambda\gamma^*\varphi = 0,$$

con γ^* dato dalla (87 a), rappresentativo *non* del momento torcente per unità di lunghezza ma del prodotto interno, per ipotesi costante rispetto ad x ,

$$\gamma^* = \sum_i \vec{q}_i \times (\mathcal{E} - O_i),$$

\vec{q}_i essendo le forze (per unità di lunghezza) applicate nei punti O_i della sezione generica $x = \text{cost.}$

Si vede subito che, per $\varphi = 0$ agli estremi $x = 0, l$, si hanno soluzioni non nulle nell'intervallo se $\lambda = \lambda_{cr}$ così che

$$\lambda_{cr} \gamma^* = \gamma_{cr}^* = \pi^2 \frac{C}{l^2}$$

Poiché γ^* ha le dimensioni di una forza (più specificatamente, di un momento per unità di lunghezza) si può dire che la distribuzione \vec{q}_i diviene critica se γ_{cr}^* eguaglia il carico di Eulero di una asta lunga l e di flessorigidità $B=C$.

Naturalmente può esser $\gamma_{cr}^* = 0$ e considerevole ed annullarsi invece il momento torcente

$$m^* = \sum_i \vec{q}_i \wedge (\mathcal{E} - O_i)$$

ed aversi egualmente instabilità.

Può esser a sua volta $m^* = 0$ e considerevole ed esser $\gamma^* = 0$; il momento torcente m^* però, non dà luogo a fenomeni di instabilità rispetto a φ se non interviene *anche* la flessione e lo sforzo assiale come si è visto al n. precedente.

B) *Stilata come in fig. 39 con forza H applicata in testa.*

Si orienta w normalmente al piano della stilata. Agli estremi $x = 0, l$ sia $w = 0, \varphi = 0$. Le traverse sono sufficientemente rigide perché la devia-

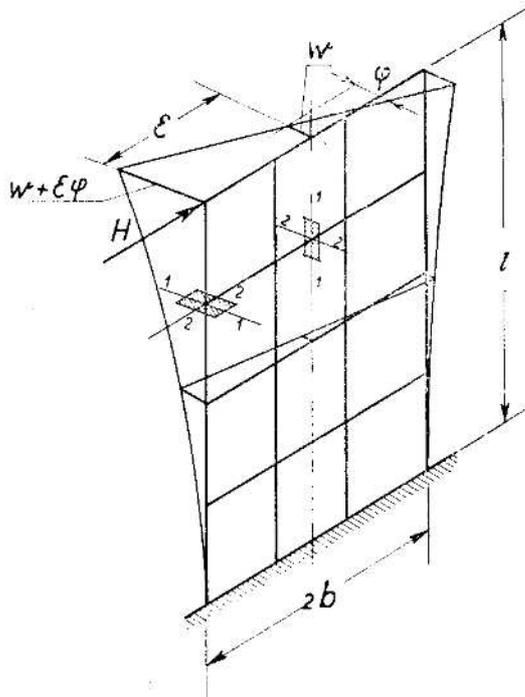


Fig. 39.

zione laterale abbia luogo così che rimangano praticamente indeformate e si generi in conformità un'orditura di una superficie rigata. Se la stilata è libera in testa: all'estremo $x = l$ (in testa) è $B_2 w'' = 0, B_2 w''' + k_w^{(s)} w' = H$; all'estremo $x = 0$ (alla base) è $w = 0, \varphi = 0$.

Nel caso specifico è

$$M_H = H(l - x) \leq M_o = Hl$$

$$k_w = k_w^{(s)} = 0, \quad M_v = M_t = 0, \quad \Gamma_p = 0, \quad \gamma^* = 0, \quad \Gamma_{me} = 0, \quad q_H = q_v = 0,$$

$$B_2 \varepsilon_v^2 = 2 \cdot b^2 \left(1,0^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) B_{2i} = 2,22 b^2 B_{2i}, \quad \varepsilon_H = 0, \quad \varepsilon_{dH} = 0, \quad u = 0,$$

$$k_\varphi = k_u^{(s)} = 0, \quad B_2 = 4 B_{2i}, \quad C_2 = 4 C_i \quad (i \text{ generico}), \quad \varepsilon_{d,v} = \varepsilon_v.$$

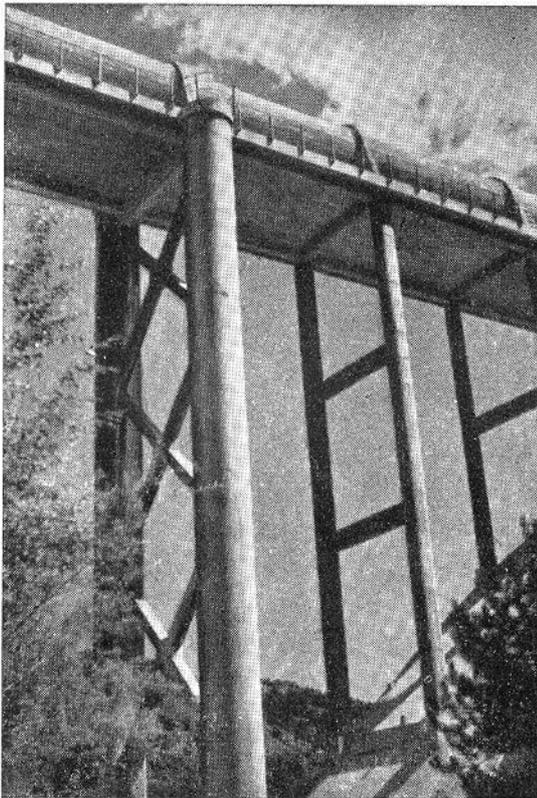


Fig. 40.

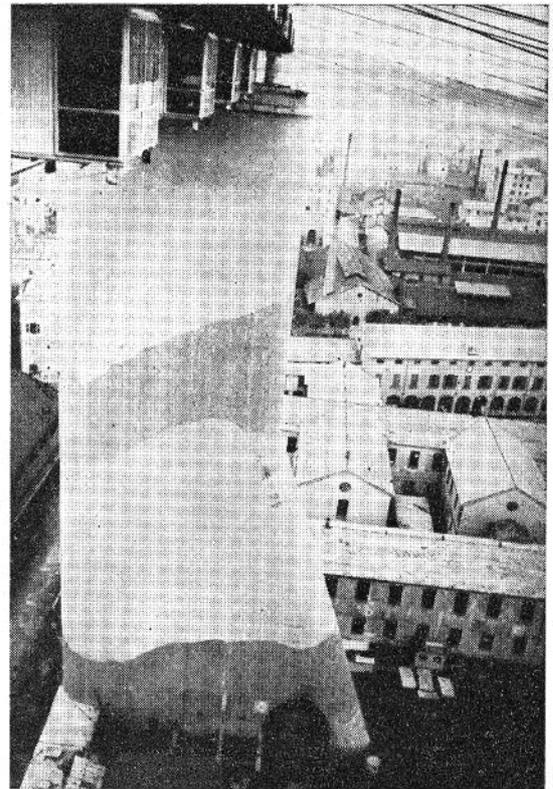


Fig. 41.

Ponendo (*) nelle equazioni (90) ridotte in conformità,

$$w = A_1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x \right), \quad \varphi = A_2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x \right),$$

si ha l'equazione in λ ,

$$(91) \quad \begin{vmatrix} B_2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 - \lambda N_o & , & \lambda M_o \\ \lambda M_o & , & B_2 \left(\frac{\pi \varepsilon_v}{2l} \right)^2 + C - \lambda N_o \varepsilon_v^2 \end{vmatrix} = 0$$

e dà qui il λ_{cr} come radice inferiore dell'equazione quadratica che segue. Trascurando $\lambda N_o \varepsilon_v^2$ di fronte a C , posto

$$C^* = C + B_2 \varepsilon_v^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2$$

(*) Non si soddisfa però alla condizione in $x = l$; $B_2 w''' = H$.

si trae

$$(91 a) \quad \lambda_{cr} = \frac{C^* N_o}{2 M_o^2} \left\{ \sqrt{1 + \pi^2 \left(\frac{M_o}{N_o l} \right)^2 \frac{B_2}{C^*}} - 1 \right\}.$$

Ove sia piccolo, siccome avviene per stilate in cemento armato, il 2° termine del radicale in raffronto ad 1, conviene sviluppare la radice sino al 3° termine; si ha allora

$$(91 b) \quad \lambda_{cr} \cong \frac{B_2}{N_o} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{M_o}{N_o l} \right)^2 \frac{B_2}{C^*} \right\}.$$

Esempi di stilate del tipo ora considerato: la fig. 40 illustra le stilate di un ponte canale ($2R = 330$ cm.) sull'alto Tagliamento a Tamariona. Il tiro in testa deriva dal vento e da eventuali azioni sismiche, trasversali all'asse ponte, notevoli atteso il peso dell'acqua nel tubo. La fig. 41 infine, illustra una torre in parete sottile ($s_{med} = 18$ cm.) alta 65,00 m. con un tiro di $H = 540$ to. È una delle 8 torri di un impianto di teleferiche Helling dei Cantieri Ansaldo di Genova; impianto ormai superato che va ad esser sostituito da uno più moderno.

C) *Struttura da ponte investita da vento come in cit. fig. 37.*

Per questa si ha $B_1 \sim \infty$ e quindi $u = 0$; è inoltre $k_u = k_w = 0$; $k_w^{(s)} = k_u^{(t)} = 0$. Si trascura dapprima l'azione aerostatica torcente M_t dovuta al vento agli effetti della stabilità alla torsione. Si considera invece q_H , dovuto al vento su l'area investita, applicato al bordo di attacco.

Dalle equazioni generali di stabilità (90), rilevando che

$$M_H = \frac{q_H x(l-x)}{2} \leq \frac{q_H l^2}{8} = M_{oH} = M_o,$$

si ha

$$(92) \quad B_2 w^{(iv)} + \lambda N_o w'' - \lambda (M_H \varphi'' - \Gamma_p \varphi) = 0 \\ - \lambda M_H w'' + \lambda (-q_H \delta_H + \Gamma_{me}) \varphi - (C - \lambda N_o \varepsilon_{d,v}^2) \varphi'' + B_2 \varepsilon_v^2 \varphi^{(iv)} = 0.$$

Da qui, posto $M_H = M_{oH} = M_o$, $\varepsilon_{d,v} = \varepsilon_v$,

$$C^* = C + B_2 \left(\frac{\pi \varepsilon_v}{l} \right)^2,$$

si trova, con le solite posizioni per gli estremi snodati,

$$(93) \quad \left| \begin{array}{cc} B_2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - \lambda N_o \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 & , \quad \lambda \left[M_o \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \Gamma_p \right] \\ \lambda M_o \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 & , \quad \lambda (-q_H \delta_H + \Gamma_{me}) + (C^* - \lambda N_o \varepsilon_v^2) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \end{array} \right| = 0.$$

Da qui si ha il $\lambda = \lambda_{cr}$ moltiplicatore critico della condizione di carico M_H, N_o e conseguente a V (la velocità critica del vento è, poiché V interviene in Γ_p e Γ_{me} con $V^2, V_{cr} = \sqrt{\lambda_{cr}} V$).

A titolo di controllo espressivo consideriamo i seguenti sottocasi:

Caso di Prandtl-Michell; $N_o = 0, V = 0,$

$$(93 a) \quad M_{cr} = \lambda_{cr} M_o = \frac{\pi}{l} \sqrt{B_2 C^*}.$$

Caso di Eulero; $M_H = 0, V = 0$

$$(93 b) \quad N_{cr} = \lambda_{cr} N_o = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 B_1.$$

Caso di Reissner, solo vento V con incidenza φ_o , per C_{me} calcolato in $\varphi = \varphi_o,$

$$(93 c) \quad V_{cr} = \sqrt{\lambda_{cr}} V = \frac{\pi}{l \cdot (2.5)} \sqrt{\frac{C^*}{-C_{me} \cdot \rho}}$$

Le (93 a) (93 b) (93 c) a meno dell'* in C sono le celebri formole di Prandtl-Michell, Eulero, Reissner.

23. - Applicazione dei metodi diretti del calcolo delle variazioni.

Prendiamo riferimento alla (87) del n. 22 ed escludiamo lo spostamento u , ritenendo $B_1 \sim \infty$.

Sia

$$w = A_1 w_1, \quad \varphi = A_2 \varphi_1$$

w_1, φ_1 essendo funzioni note soddisfacenti le condizioni agli estremi $x = 0, l$.

Posto come al solito $B_2 = \Sigma B_{2i}, C = \Sigma_i C_i$ introdotti i simboli

$$\alpha_1 = \int (B_2 w_1''^2 + k_w^{(s)} w_1'^2 + k_w w_1^2) dx$$

$$\alpha_2 = \int (C \varphi_1'^2 + B_2 \varepsilon_v^2 \varphi_1''^2 + k_w^{(s)} \varepsilon_v^2 \varphi_1'^2) dx.$$

si ha, con riferimento alle uniche variabili concorrenti al minimo, A_1, A_2 , l'equazione di compatibilità in λ

$$(94) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda \int N_o w_1'^2 dx & , & \lambda \int (-M_o \varphi_1 w_1'' + \Gamma_p w_1 \varphi_1) dx \\ \lambda \int -M_o \varphi_1 w_1'' dx & , & \alpha_2 + \lambda \int (-q_H \delta_H + \Gamma_{me}) \varphi_1^2 dx \end{vmatrix} = 0.$$

A titolo di esempio si consideri una mensola con sforzo H applicato in testa e sforzo assiale N_o ; con che

$$M_o = -H \cdot x.$$

Poniamo, senza troppo riguardo a tutte le condizioni all'estremo $x = 0$,

$$w_x = \left(1 - \sin \frac{\pi}{2l} x\right) \quad , \quad \varphi = \cos \frac{\pi}{2l} x.$$

Consideriamo M_o variabile ma trascuriamo di fronte ad Hl il momento flettente provocato da q_H tenendo però conto dell'azione concomitante con Γ_{me} .

Per q_H dipendente dalla resistenza su la striscia alta d_o si ha

$$q_H = \frac{1}{2} C_r \rho V^2 d_o,$$

ed il termine $q_H \delta_H$ si congloba in Γ_{me} introducendo un C_{me}^* ,

$$C_{me}^* = C_{me} - C_r \frac{d_o \delta_H}{2 \cdot (2s)^2}.$$

Quindi, posto

$$\Gamma_{me}^* = C_{me}^* \rho V^2 \cdot (2s)^2 \quad , \quad C^* = C + B_2 \left(\frac{\pi \epsilon_v}{2l}\right)^2,$$

$$(94 a) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\pi^2}{4} \frac{B_2}{l^2} - \lambda N_o & , \quad \lambda Hl \frac{1}{\pi} + \frac{8}{\pi^3} l^2 \lambda \Gamma_p \\ \lambda Hl \frac{1}{\pi} & , \quad C^* + \frac{4}{\pi^2} l^2 \Gamma_{me}^* \lambda \end{array} \right| = 0.$$

Da qui, a titolo di espressivi controlli, per

$$H = 0 \quad , \quad V = 0 \quad ,$$

$$N_{cr} = \lambda_{cr} N_o = \frac{\pi^2}{4l^2} B_2;$$

$$N_o = 0 \quad , \quad V = 0 \quad ,$$

$$M_{cr} = \lambda_{cr} Hl = \frac{\pi^2}{2l} \sqrt{B_2 C^*};$$

$N_o = 0$, $H = 0$, per $C_{me}^* < 0$, come si richiede per la stabilità,

$$V_{cr} = \sqrt{\lambda_{cr}} V = \frac{\pi}{(2l) \cdot (2s)} \sqrt{\frac{C^*}{-C_{me}^*}}.$$

24. - Caso generale: flessione e torsione concomitanti.

Consideriamo ora il caso più complesso in cui agisce anche il momento torcente M_t concomitante con M_v ed M_H e con le forze aereodinamiche.

Si rilevi che M_t , M_v ed M_H possono derivare da azioni aereostatiche conseguenti ad una incidenza $\varphi_o \neq 0$ di V ; a queste si aggiungono poi le azioni quasi aereodinamiche $\Gamma_p \varphi$, $\Gamma_{me} \varphi$ conseguenti a piccole variazioni dell'angolo di torsione $\varphi = 0$ corrispondente alla condizione di equilibrio. Si accenna ad azioni quasi aereodinamiche perché queste sono un aspetto particolarissimo ma notevole, diremo merostatico, di una classe di azioni aerodinamiche sostenute dalle scie vorticose che si liberano al bordo di uscita del profilo alare costituito dalla travata. Di queste qui non si discorre più oltre e si

rimanda per quanto è noto a lavori specifici pur riconoscendo l'interesse notevole che può avere il proseguire in quest'indirizzo più vasto le questioni qui poste.

Per semplicità di scrittura pensiamo nulli tutti i coefficienti k, ε, γ^* e sia nullo anche N_0 .

Le equazioni (90) divengono allora

$$(95) \quad \begin{cases} B_2 w^{(iv)} - \lambda M_H \varphi'' + \lambda M_t u''' + \lambda \Gamma_p \varphi = 0 \\ -C \varphi'' + \lambda M_V u'' - \lambda M_H w'' + \lambda \Gamma_{me} \varphi = 0 \\ B_1 u^{(iv)} + \lambda M_V \varphi'' - \lambda M_t w''' = 0. \end{cases}$$

La presenza di derivate d'ordine pari e dispari riporta alle difficoltà già rilevate.

Lasciando aperta la trattazione generale di siffatto sistema consideriamo la circostanza in cui per $x = 0, l$ è $u = w = 0, \varphi = 0; u' = 0, w'' = 0, \varphi'' = 0$.

In particolare si può conseguire comunque qualche formola utile immediata.

Si ponga $M_V = 0$ in quanto, attesa la larghezza del ponte, non si vuol pensare a possibilità di flessione deviata. Si ponga, A_1, A_2, A_3 essendo al solito fattori a priori incogniti, con riguardo ad estremi snodati secondo w , incastrati secondo u ,

$$(96) \quad u = A_1 (1 - \cos \sigma x) \quad , \quad w = A_2 \sin \sigma x \quad , \quad \varphi = A_3 \sin \sigma x$$

con $\sigma = 2\pi/l$ come al n. 21.

Si ottiene un sistema lineare algebrico in A_1, A_2, A_3 , di cui l'equazione di compatibilità è

$$(97) \quad \begin{vmatrix} -\lambda M_t \sigma^3 & B_2 \sigma^4 & \lambda (M_H \sigma^2 + \Gamma_p) \\ 0 & \lambda M_H \sigma^2 & C \sigma^2 + \lambda \Gamma_{me} \\ -B_1 \sigma & \lambda M_t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

equazione in λ che è facile controllare per i casi tipici di Prandtl-Michell, di Reissner, di Greenhill.

Per il caso generale si ha da (97) l'equazione in λ

$$y_1(\lambda) = y_2(\lambda)$$

con

$$(98) \quad \begin{cases} y_1(\lambda) = \lambda^2 M_t^2 (C \sigma^2 + \lambda \Gamma_{me}) \\ y_2(\lambda) = B_1 \{ [B_2 \sigma^2 (C \sigma^2 + \lambda \Gamma_{me})] - \lambda^2 M_H (M_H \sigma^2 + \Gamma_p) \}. \end{cases}$$

Da qui seguono tre formole notevoli:

a) per $M_H = 0, M_t = 0, V$ fisso quindi per Γ_{me}, Γ_p privi di moltiplicatore,

$$(98 a) \quad M_{H,cr} \left(M_{H,cr} + \frac{\Gamma_p}{\sigma^2} \right) = \sigma^2 \cdot B_2 \left(C + \frac{\Gamma_{me}}{\sigma^2} \right).$$

b) per $M_H = 0$, $M_t = 0$, V qualunque,

$$(98 b) \quad M_{l,cr} = \sigma \sqrt{B_1 B_2} \quad , \quad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l} \right),$$

sicch  le azioni aerodinamiche non influiscono sul $M_{l,cr}$,

c) per $M_H = 0$, $M_t = 0$, $V_{cr} = \sqrt{\lambda_{cr}} V$,

$$(98 c) \quad \lambda_{cr} = \sigma^2 \frac{C}{\Gamma_{me}} \quad , \quad (\Gamma_{me} < 0).$$

25. - Stabilit  oltre il campo elastico.

Con riguardo ad un'asta di lunghezza l , soggetta a sforzo assiale, cui resiste con una sezione d'area F e minimo raggio d'inerzia i , si introduca la retta di Tetmajer

$$(99) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \beta \cdot \frac{l}{i}$$

nel piano $(\sigma_{cr}, l/i)$ della sollecitazione critica specifica σ_{cr} e della snellezza l/i . Le costanti α, β sono determinate sperimentalmente per i vari tipi di materiali e non risentono sensibilmente n  la forma della sezione n  le condizioni di vincolo agli estremi di cui si tien conto solo nella valutazione di un l virtuale in sostituzione del valore effettivo. Tale retta taglia e limita l'iperbole di Eulero,

$$(100) \quad \sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

per un valore $(l/i)_p$ di l/i che segna il punto in cui scambiano la validit  le (99), (100); la (99) vale per $l/i < (l/i)_p$, la (100) per $(l/i) > (l/i)_p$ cio  per $\sigma_{cr} >$ rispettivamente $<$ di σ_p *limite di proporzionalit * (inferiormente prossimo a σ_E *limite di elasticit *). Sembra spontaneo sostituire le (99) e (100) con una formola unica, da considerare equazione in σ , di cui la sola radice reale sia la $\sigma = \sigma_{cr}$ effettiva; questa si scrive

$$(101) \quad \sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E_T(\sigma)}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Qui   $E_T(\sigma)$ un modulo virtuale di elasticit , funzione di σ , dato con riguardo alle (99), (100), che la (101) deve rispecchiare, da

$$(102) \quad E_T(\sigma) \begin{cases} E = E_0 = \text{cost.} & \text{per } \sigma \leq \sigma_p, \\ \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{\pi^2 \beta^2} & \text{per } \sigma \geq \sigma_p. \end{cases}$$

Si noti a titolo di esempio che, per i noti tipi correnti di acciaio A 37 UNI 743, $\sigma_f = 2400 \text{ Kg cm}^{-2}$, Aq 50 UNI 743, $\sigma_f = 3600 \text{ Kg cm}^{-2}$,   $\alpha = 2891$, $\beta = 8,18 \text{ Kg cm}^{-2}$ rispettivamente $\alpha = 5891$, $\beta = 38,18 \text{ Kg cm}^{-2}$.

Poiché la validità della (102) con tali specificazioni di α, β si ha per $60 \leq l/i \leq 100$, risulta $\sigma_p = 2891 - 8,18 \cdot 100 = 2073$ rispettivamente ancora $\sigma_p = 5891 - 38,18 \cdot 100 = 2073 \text{ Kg cm}^{-2}$ per i due tipi di acciaio. In conformità con la (102) si ha quindi per $\sigma \leq 2073 \text{ Kg cm}^{-2}$,

$$(102)' \quad A. 37; E_T(\sigma) = \begin{cases} 2,10 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}, \\ \frac{\sigma(2891 - \sigma)^2}{\pi^2 \cdot 8,18^2}, \end{cases} \quad ; \quad A. 4. 50; E_T(\sigma) = \begin{cases} 2,10 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}, \\ \frac{\sigma(5891 - \sigma)^2}{\pi^2 \cdot 38,18^2}. \end{cases}$$

Per il calcestruzzo con $\sigma_p = 150$, $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}^{-2}$ si può porre $\alpha \sim 400,0$, $\beta = 2,179 \text{ Kg cm}^{-2}$ con che

$$E_T(\sigma) = \begin{cases} 2,0 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}^{-2} & \text{per } \sigma \leq \sigma_p, \\ \frac{\sigma(400 - \sigma)^2}{\pi^2 \cdot 2,179^2} & \text{per } \sigma \geq \sigma_p. \end{cases}$$

Quanto alle due determinazioni (102), la 1ª è ovvia, la 2ª segue ponendo

$$\alpha - \beta \frac{l}{i} = \pi^2 \frac{E_T(\sigma)}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad \sigma = \alpha - \beta \frac{l}{i}$$

ed eliminando l/i . L'espressione di $E_T(\sigma)$ con i parametri α, β ritrovabili in ogni manuale d'ingegneria, è preferibile a quella del cosiddetto modulo tangente

$$(102 a) \quad E(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \text{cost. per } \sigma \leq \sigma_p \right),$$

calcolabile dalla linea (sperimentale) $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ nel piano (σ, ε) delle sollecitazioni specifiche σ e delle deformazioni ε . L'adozione di $E(\sigma)$ per $E_T(\sigma)$ nella (100) implica l'ipotesi che *tutta* la sezione resistente passi oltre il limite σ_p , ipotesi che è naturalmente a favore della stabilità. Il modulo $E(\sigma)$ secondo la (102 a) nell'ambito delle questioni di stabilità prende il nome di modulo di Engesser. A questo però, per avvicinarsi alla realtà, si sostituisce generalmente, il modulo $E_K(\sigma)$ di v. Kármán. È dato questo in funzione di $E(\sigma)$ della (102 a) e della forma della sezione resistente secondo una relazione, chiamata dei due moduli, che tien conto del superamento di σ_p in una sola parte della sezione resistente e precisamente là dove la pressione specifica, che deriva dallo sforzo assiale, si somma a quella che deriva dalla flessione legata al manifestarsi dell'instabilità.

Per completezza si rileva che per la sezione rettangolare si ha

$$(102 b) \quad E_K(\sigma) = \frac{4 E(\sigma) \cdot E}{(\sqrt{E(\sigma)} + \sqrt{E})^2}.$$

Per la sezione a doppio T, trascurando l'anima di fronte alle ali di sezione d'area F_i, F_e , per $F_i < F_e$,

$$(102 b)' \quad E_K(\sigma) = \frac{2 E(\sigma) F_i \cdot E F_e}{E(\sigma) F_i + E F_e},$$

e da qui, per $F_i = F_e$,

$$(102 b)'' \quad E_K(\sigma) = \frac{2 E E(\sigma)}{E + E(\sigma)}.$$

Poiché è $E(\sigma) < E$ risulta $E_K(\sigma) > E(\sigma)$; perciò λ_{cr} calcolato con l' $E_K(\sigma)$ è superiore al λ_{cr} calcolato con l' $E(\sigma)$. Quanto ad $E(\sigma)$, mancando dati sperimentali si potrà porre, per σ_r, σ di rottura,

$$(102 a)' \quad E(\sigma) = E \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_r}\right)^\gamma$$

con $\gamma \leq 1$ (1/2 ad es.). Quanto all' $E_T(\sigma)$, dovrebbe corrispondere, almeno per i profili ordinari di aste soggette a sforzo assiale, anche meglio dell' $E_K(\sigma)$, e ciò in quanto i dati sperimentali tengono non solo conto del parziale passaggio oltre il campo elastico della sezione resistente ma anche del parziale sussistere di tale condizione nell'intervallo tra gli estremi dell'asta.

Fatte queste premesse, lasciando libera la scelta tra l' $E(\sigma)$ di Engesser, l' $E_K(\sigma)$ di v. Kármán o l' $E_T(\sigma)$ qui proposto, che si potrebbe chiamare di Tetmajer, si noti che tutte le formole per i carichi critici in generale, ed in particolare quelle che qui precedono, possono esser poste nella forma di equazione in σ

$$(103) \quad \sigma = K \cdot \begin{cases} E(\sigma), \\ E_K(\sigma), \\ E_T(\sigma) \end{cases}$$

da intendersi soddisfatta per $\sigma = \sigma_{cr}$.

Qui, se agiscono *isolatamente* N_o od M_o od M_t è K dipendente dai soli dati geometrici della struttura e si calcola facilmente avvalendosi delle formole per il λ_{cr} quando, in base agli sforzi assiali N_o od ai momenti flettenti M_o od ai momenti torcenti $M_{t,o}$, si calcolino le corrispondenti σ_o e quindi $\sigma_{cr} = \lambda_{cr} \sigma_o$ e si ponga $E = 1$ e, con evidente ipotesi, $G = 1 : 2 (1 + \nu)$. Ciò passiamo a vedere su qualche esempio.

a) Stabilità di un'asta al carico di punta.

Poiché

$$\sigma_o = \frac{N_o}{A}, \quad \lambda_{cr} = \frac{1}{N_o} \frac{\pi^2 E J}{l^2}, \quad i^2 = \frac{J}{A}$$

risulta per quanto sopra

$$\sigma_{cr} = \lambda_{cr} \sigma_o = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

e quindi, posto $E = 1$,

$$(103 a) \quad K = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

La radice $\sigma = \sigma_{cr}$ della (103) si ha per tentativi o per via grafica, nel caso specifico particolarmente espressiva come appare in fig. 42 alla quale si riferisce la seguente

Osservazione. – Per strutture complesse, costituite da elementi diversi, non ogni elemento che concorre alla formazione del K può esser portato fuori dal campo elastico; allora l'espressione del contributo di quell'elemento va moltiplicata per $E : E_T(\sigma)$ (si noti che $E \geq E_T$) e K diviene a sua volta funzione di σ ; la retta σ/K nel diagramma fig. 42 si incurva verso l'asse σ e la radice σ_{cr} della (103) aumenta come è intuitivo. Però, poiché il contributo di elementi, secondari agli effetti portanti, ma essenziali per la stabilità (le traverse tra due costole in parallelo di un arco da ponte ad es.) è talvolta calcolato diffondendoli su la struttura sì che il loro effetto stabilizzante può risultare generalmente illusoriamente esaltato dalle formole

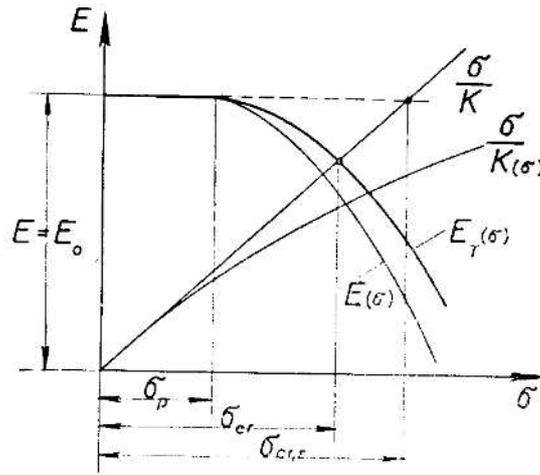


Fig. 42.

derivate in conformità, meglio è tenersi all' $E_T(\sigma)$ per tutta la struttura con vantaggio della sicurezza e della semplicità.

Ciò posto, consideriamo secondo questi concetti, principalmente legati al sussistere delle sezioni piane anche oltre σ_p , alcuni esempi che ricorrono nelle pagine precedenti.

b) *Stabilità trasversale di un arco con pressione uniforme q_0 all'estradosso.*

Si consideri la (43 a) per il $q_{cr} = \lambda_{cr} q_0$. Ammettendo che $G(\sigma)$ vari come $E(\sigma)$, chiamate con F_a, F_t le aree delle sezioni resistenti dell'arco e delle traverse, di momenti di inerzia J_i il primo, $J_i^{(t)}$ le seconde, fatte le posizioni

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{F_a} = \frac{q_0 R}{F_a}, \quad i_a^2 = \frac{J_i}{F_a}, \quad i_t^2 = \frac{J_i^{(t)}}{F_t}, \quad \omega = \frac{\Theta}{J_t},$$

è

$$(103 b) \quad K = K_a + K_t$$

con

$$K_a = \frac{\omega}{2(1+\nu)} \cdot \frac{i_a^2}{R^2} \cdot \frac{(1-\nu^2)^2}{1 + \frac{\Theta}{J_t} \nu^2}, \quad K_t \simeq 12 \frac{i_t^2}{\Delta \cdot h} \frac{F_t}{F_a},$$

essendo, per $2\psi_0$ apertura dell'arco,

$$\kappa = \frac{\pi}{2\psi_0}.$$

La (103), con la specificazione (103 b) per K , dà la radice $\sigma = \sigma_{cr} = \lambda_{cr} \sigma_0$ e quindi la pressione critica

$$q_{cr} = \lambda_{cr} \frac{\sigma_0 F_a}{R} = \lambda_{cr} \frac{N_0}{R}.$$

Ove si ammetta che il limite σ_p sia superato solo per l'arco, a K secondo la (103 b) si sostituirà un $K(\sigma)$ funzione di σ

$$(103 b)' \quad K(\sigma) = K_a + \frac{E}{E_T(\sigma)} \cdot K_t.$$

Poiché è $K(\sigma) > K$ la linea $\sigma/K(\sigma)$, che ha per tangente in $\sigma = \sigma_p$ la σ/K si incurva verso l'asse σ e la radice σ_{cr} aumenta. Per una struttura in ferro ciò si può anche ammettere, non forse per una in cemento armato. In questa infatti le traverse lavorano a sola flessione (ove non sieno artatamente pre-compresse) e poiché il modulo a trazione è assai inferiore al modulo a compressione che si può attribuire all'arco (*naturalmente* precompresso) anche in sede di sensibile flessione deviata, è consigliabile adoperare la (103 b) e semmai dare anzi un peso inferiore al K_t appunto con riguardo al lavoro a flessione pura ed al rapporto < 1 dei moduli $E_{tr} : E_c$.

c) *Stabilità alla flessione nel piano dell'arco.*

Si consideri la (46): da questa si ha subito σ_{cr} come radice dell'equazione (103) con

$$(103 c) \quad K = K_a + K_s$$

essendo

$$K_a = \frac{i_a^2}{R^2} \left[\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1 \right], \quad K_s = 4 \frac{i_s^2}{\Delta \cdot h} \frac{F_s}{F_a} \frac{\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2}{\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1},$$

e

$$i_a^2 = \frac{J_2}{F_a}, \quad i_s^2 = \frac{J_2^{(s)}}{F_s},$$

$J_2, J_2^{(s)}$ momenti d'inerzia delle sezioni resistenti dell'arco e delle stilate per flessione nel piano Π ; F_a, F_s corrispondenti aree efficaci, ψ_0 semiapertura, Δ intervallo tra le stilate.

d) *Stabilità alla flessione deviata di una trave.*

Con riguardo alla formola generale (91), posto con ovvi simboli,

$$\sigma_{cr} = \frac{M_{cr}}{W}, \quad W = \frac{J_2}{y_{\max}}$$

con y_{\max} distanza del bordo dall'asse neutro si ha

$$\sigma = K \cdot E_T(\sigma).$$

Qui, con i simboli che intervengono nella (91), tenuto presente che $B_1 = EJ_1$, $B_2^{(s)} = EJ_2^{(s)}$, $C = G\Theta$, $G = E : 2(1 + \nu)$, è, per $N_o = 0$, $\varepsilon_v = 0$,

$$(103 d) \quad K = \frac{\pi y_{\max}}{l} \sqrt{\frac{1}{2(1 + \nu)} \cdot \frac{J_1 \Theta}{J_2^2}}.$$

e) *Azione simultanea di M_o , N_o , M_l .*

Accanto all'espressione (103) per il calcolo di σ_{cr} nelle circostanze in cui agisce, indipendente, M_o od N_o od M_l , si consideri, nel caso generale della azione simultanea di N_o , M_o , M_l , il λ_{cr} che risulta da una qualsiasi delle equazioni sin qui riportate per determinarlo. Si può sempre porre

$$(104) \quad \lambda_{cr} = \Gamma \cdot E_T(\sigma)$$

con Γ funzione dei dati geometrici del sistema, del coefficiente di contrazione ν (nella solita ipotesi dell'invariante correlazione tra E e G) ed infine della sollecitazione esterna M_o , N_o , M_l . Poiché λ è un numero, Γ è l'inversa di una sollecitazione specifica. Infatti si ha nel caso della (103), poiché $\lambda_{cr} = \sigma_{cr} : \sigma_o$,

$$(105) \quad \Gamma = \frac{K}{\sigma_o}$$

con σ_o dato da $N_o : F$ o da $M_o : W$ etc.

Per ricavare dalla (104) un'equazione in σ basterà riferirsi alla sezione più sollecitata e porre $\sigma_{cr} = \lambda_{cr} \sigma_o$; si avrà subito

$$(104 a) \quad \sigma = \sigma_o \cdot \Gamma \cdot E_T(\sigma),$$

e l'unica radice è $\sigma = \sigma_{cr}$. Per σ_o , ove agisca concomitante N_o ed M_o ad es., si porrà

$$\sigma_o = \frac{N_o}{F} + \frac{M_o}{W}.$$

Ove agisca anche M_l si porrà σ_o eguale al massimo sforzo principale che è pur sempre una buona misura del cemento del materiale.

Ciò premesso passiamo ad alcune esemplificazioni.

Agisce N_o ed $M = H(l - x) < M_o = Hl$ su un sistema come in fig. 39.

Preso riferimento al λ_{cr} dato dalla (91), ove si ponga

$$C^* = G\Theta^* \quad , \quad \Theta^* = \sum \Theta_{2i} + 2(1 + \nu) J_2 \varepsilon_v^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2$$

con Θ_{2i} dato dalle (12 a, b, c) a seconda della sezione resistente che si considera,

$$B_2 = EJ_2 \quad , \quad J_2 = \sum J_{2,i} \quad , \quad G(\sigma) = \frac{E(\sigma)}{2(1 + \nu)} \quad , \quad \varepsilon_v^2 = \frac{\sum J_{2,i} \cdot \varepsilon_i^2}{J_2},$$

$$\sigma_o = \frac{N_o}{F} + \frac{M_o}{W},$$

l'equazione (104) in σ si scrive, attese le (91 a, b), con

$$(106) \quad \Gamma = \frac{N_o \Theta^*}{2 M_o^2} \left\{ \sqrt{1 + \pi^2 \left(\frac{M_o}{N_o l} \right)^2 2(1+\nu)} \frac{J_2}{\Theta^*} - 1 \right\} \cdot \frac{1}{2(1+\nu)}$$

o se il 2° termine del radicando è piccolo di fronte all'unità,

$$(106 a) \quad \Gamma = \frac{J_2}{N_o} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{M_o}{N_o l} \right)^2 2(1+\nu) \frac{J_2}{\Theta^*} \right\} \cdot \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Si consideri ancora il caso di M_o, M_t agenti concomitanti.

Dalla (81) si ha per Γ della (104) per $C_1 = 0$,

$$(107) \quad \Gamma = \frac{2\pi}{l} \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu) \frac{M_o^2}{J_1 \Theta} + \frac{M_t^2}{J_1 J_2}}}$$

e, posto

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{W} \quad , \quad \tau_o = \frac{M_t}{W_t} \rho_{\max}$$

$$\sigma_o = \frac{\sigma_{M_o}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{M_o}}{2} \right)^2 + \tau_o^2}$$

Concludendo, per qualunque espressione di E funzione decrescente di σ qui si ottengono sempre limitazioni inferiori di σ_{cr} (o di λ_{cr}) in quanto, se si parzializza la sezione dove è $\sigma \leq \sigma_b$ si ammette pur sempre che tale situazione sussista lungo tutta la struttura il che certamente non avviene. Senza entrare in merito sul come occorrerebbe procedere per alzare la limitazione inferiore del λ_{cr} poiché si finirebbe con l'uscire dalle pratiche (et ultra) possibilità resti ribadito che, in mancanza di meglio è essenziale attenersi a questa estensione oltre il σ_b della teoria ordinaria e ciò perché i più tranquillanti λ_{cr} possono, nelle strutture in cemento armato particolarmente, esser tanto insidiosi quanto i rami delle iperboli di Eulero oltre il campo di proporzionalità.

26. - Calcolo diretto della σ_{cr} effettiva da $\lambda_{cr}^{(o)}$ per $E = \text{cost.} = E_o$.

Alle deduzioni che precedono si può dare una forma sintetica quando è già risolta, sino al numero, l'analisi della stabilità nel campo lineare, ($\sigma < \sigma_b$) per un sistema qualunque.

Sia $\lambda_{cr}^{(o)}$ il moltiplicatore critico per $E = \text{cost.} = E_o$ calcolato, a seconda delle circostanze, con una delle tante formole note o qui riportate per i vari casi che più interessano nell'ambito dei problemi di cui si tratta.

Il $\lambda_{cr}^{(o)}$ sia riferito ad una qualsiasi distribuzione di sforzi assiali N_o , momenti flettenti M_o e momenti torcenti M_t . A questa corrisponde una ben determinata distribuzione di sollecitazioni. Sia σ_o la sollecitazione (possibilmente) principale massima. In condizioni critiche, atteso il significato del moltiplicatore λ_{cr} sarà

$$\sigma_{cr}^{(o)} = \lambda_{cr}^{(o)} \sigma_o.$$

Perché il $\lambda_{cr}^{(0)}$ abbia senso, rappresenti cioè il grado di *sicurezza*, occorre che sia

$$\sigma_{cr}^{(0)} < \sigma_p.$$

Se così non è, il σ_{cr} effettivo, per quanto precede, sarà radice dell'equazione in σ

$$(108) \quad \sigma = \sigma_{cr}^{(0)} \cdot \frac{E(\sigma)}{E_0}$$

e da qui, dividendo per σ_0 , si ha anche l'equazione in $\lambda = \sigma/\sigma_0$,

$$(108a) \quad \lambda = \lambda_{cr}^{(0)} \frac{E(\lambda\sigma_0)}{E_0}.$$

La radice $\lambda = \lambda_{cr}$ dà il moltiplicatore critico effettivo $\lambda_{cr} = \sigma_{cr} : \sigma_0$.

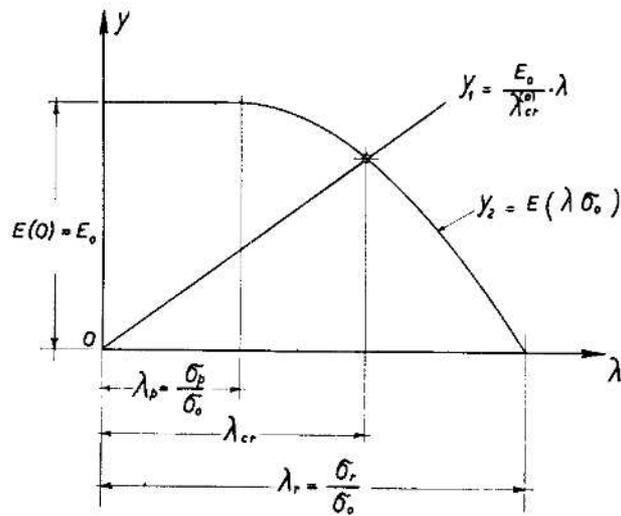


Fig. 43.

Come si vede, in tal guisa la valutazione di σ_{cr} o λ_{cr} è ridotta ad un calcolo quasi immediato quando sia noto l' $E(\sigma)$ adatto come appare in fig. 43. A titolo illustrativo, si considerino alcuni esempi:

Asta soggetta a sforzo assiale N_0 . Si ha

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A} \quad , \quad \sigma_{cr}^{(0)} = \frac{N_{cr}^{(0)}}{A} = \pi^2 \left(\frac{i}{l} \right)^2 E_0, \quad \left(i^2 = \frac{J}{A} \right)$$

e la (108) diviene, prendendo per $E(\sigma)$ l' $E_r(\sigma)$ della (102),

$$\sigma = \sigma_{cr}^{(0)} \begin{cases} 1 & \text{per } \sigma_{cr}^{(0)} \leq \sigma_p, \\ \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{E_0 \pi^2 \beta^2} & \text{per } \sigma_{cr}^{(0)} \geq \sigma_p \end{cases}$$

e da qui si ha la formola notevole, che sostanzialmente compendia tutto,

$$(109) \quad \boxed{\sigma_{cr} = \alpha - \pi\beta \sqrt{\frac{E_0}{\sigma_{cr}^{(0)}}}}$$

A titolo di controllo, sostituendo al valore numerico di $\sigma_{cr}^{(o)}$ la sua espressione euleriana, si ha

$$\sigma_{cr} = \alpha - \beta \frac{l}{i},$$

cioè proprio la σ_{cr} di Tetmajer secondo la (99).

Carico critico q_{cr} per la stabilità trasversale di un arco oltre il campo elastico. Con la relazione (43 a) si calcoli il $q_{cr}^{(o)}$. A questo corrisponde uno sforzo assiale

$$N_{cr}^{(o)} = q_{cr}^{(o)} \cdot R$$

ed una $\sigma_{cr}^{(o)}$

$$\sigma_{cr}^{(o)} = \frac{N_{cr}^{(o)}}{A}.$$

Sostituendo questo valore nella (109) si ha il σ_{cr} effettivo e quindi l'effettivo

$$q_{cr} = A \sigma_{cr} : R$$

oppure

$$q_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(o)}} q_{cr}^{(o)} \quad , \quad N_{cr} = q_{cr} \cdot R.$$

Con riguardo al minimo N_{cr} per la deviazione laterale dell'arco considerato al n. 20, $N_{cr} = E \cdot 0,008971 = 17,942 t_0$ si ha un $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}^{(o)} = N_{cr} : A = 17.942 : 6,540 = 2743 \text{ tom}^{-2} = 274,3 \text{ Kg cm}^{-2} > \sigma_p$ per $\sigma_p = 150 \text{ Kg cm}^{-2}$. Assumendo i valori suggeriti per α e β ; $\alpha = 400$, $\beta = 2,179 \text{ Kg cm}^{-2}$ il σ_{cr} effettivo, con riferimento alla (109), risulta

$$\sigma_{cr} = 400,0 - 2,18 \pi \sqrt{\frac{2,0 \cdot 10^5}{274,3}} = 214,9 \text{ Kg cm}^{-2}$$

cui corrisponde un N_{cr} effettivo, $N_{cr} = 6,540 \cdot 2149 = 14.054 \text{ to}$.

Osservazione.

Non occorre insistere sulla semplicità del procedimento. La (108) assurge alla (109), formola generale, quando si prende riferimento all' $E_T(\sigma)$.

Avvalendosi di altre espressioni per $E(\sigma)$, in particolare dell' $E_K(\sigma)$ od $E_T(\sigma)$ non è men facile calcolare il σ_{cr} o λ_{cr} procedendo per via grafica come si indica nelle figg. 43 e 44.

Nella fig. 43 si risolve l'equazione (108 a) cercando nel riferimento cartesiano (y, λ) l'incontro della retta

$$y_1 = \frac{E_0}{\lambda_{cr}^{(o)}} \lambda$$

con la linea

$$y_2 = \begin{cases} E_0 & \text{per } \lambda \leq \lambda_p \\ E(\lambda \sigma_0) & \text{per } \lambda \geq \lambda_p, \end{cases}$$

essendo $\lambda_p = \sigma_p : \sigma_0$ e $E(\lambda\sigma_0)$ una delle $E(\sigma)$, $E_K(\sigma)$, $E_T(\sigma)$ espressa in funzione di λ con la posizione

$$\sigma = \lambda\sigma_0.$$

A titolo d'esempio, per $E(\sigma) = E_T(\sigma)$ si ha

$$E_T(\lambda\sigma_0) = \frac{\lambda\sigma_0(\alpha - \lambda\sigma_0)^2}{\pi^2 \beta^2}.$$

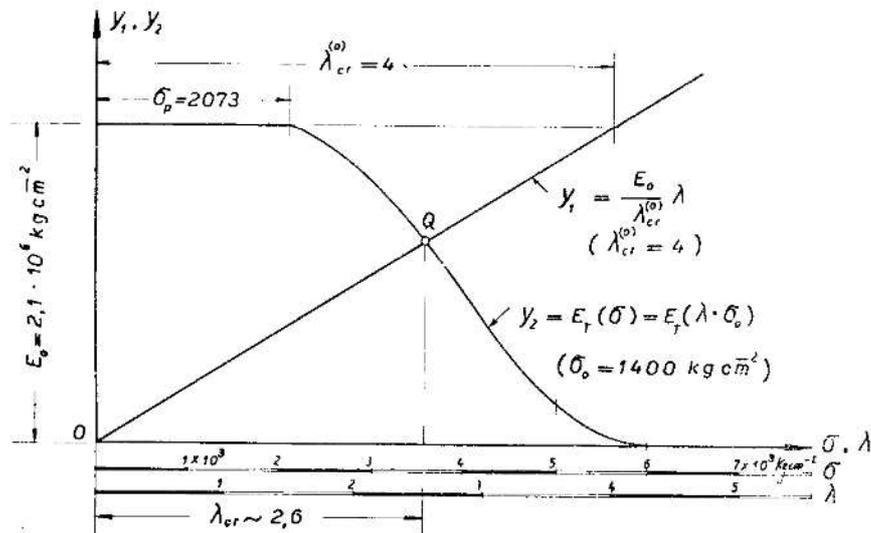


Fig. 44.

Infine, nella fig. 44 si particularizza α e β con riguardo ad un acciaio standard secondo i dati (102)' del n. 25. La sollecitazione di lavoro σ_0 è assunta $\sigma_0 = 1400 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$. Si ammette trovato un $\lambda_{cr}^{(0)} = 4$ quindi una sicurezza 4. Poiché $\lambda_{cr}^{(0)} \sigma_0 = 4 \cdot 1400 = 5600 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$ è $> \sigma_p$ si ricorre alla (102) con riguardo all' $E_T(\sigma)$. Si trova $\lambda_{cr} = 2,6$ in luogo di 4; quindi una sicurezza sensibilmente inferiore.

27. - Divari dalla linea d'asse di un arco, voluti o per errore di costruzione.

Divari dalla linea d'asse si realizzano talvolta deliberatamente, negli archi ad esempio, per conseguire un equilibramento tra gli sforzi di intradosso e d'estradosso, tal'altra, per costruzione errata, in Officina o nel montaggio in sito. In ogni caso possono essere fonte di sforzi notevoli, amplificati dalla viscosità (cfr. n. 29) quando si tratta di strutture in cemento armato. L'esistenza di tali divari rimette in discussione il significato stesso di sicurezza che viene ad esser riportata proprio nell'ambito delle strutture sottili ad una verifica delle sollecitazioni anziché ad una verifica della stabilità dell'equilibrio, che resta però in ogni caso essenziale proprio per queste verifiche.

Si osserverà qui inoltre come, considerando moduli d'elasticità variabili con le sollecitazioni σ (cfr. n. 25), si possono instaurare situazioni critiche

gravissime, delle quali occorre tener ben conto perché le sicurezze trovate siano giuste e veritiere.

Sui voluti divari di forma, per costruzione, nulla è da osservare intorno alla loro realizzazione, su quelli accidentali, per errore, merita richiamare l'esempio che può offrire il montaggio di un arco come appare in fig. 7 *a*.

Là si vede una fase del ribaltamento, dalle opposte sponde, dei due semiarchi che costituiscono l'arco completo. Può avvenire che gli assi delle cerniere, attorno alle quali avviene il ribaltamento, non siano paralleli e che, anche per difetto di montaggio dei singoli elementi che costituiscono il semiarco, a ribaltamento esaurito, le facce estreme non risultino sovrapponibili a meno di un ben determinato spostamento rigido relativo; oppure, ove non siano predisposti apparecchi ad hoc per il centraggio (in ogni caso non sempre sufficienti) alle cerniere di imposta, a meno di una vera e propria distorsione di Volterra.

La deformata dall'asse, spostamenti u_o, w_o , torsione φ_o e gli sforzi interni che risultano per una tale distorsione si fanno calcolare con i metodi ordinari dell'Elastostatica tecnica e non è qui certo il caso di intrattenersi su di essi.

Si terrà perciò presente il risultato come già conseguito, cioè la deformata $w_o = w_o(s)$, $u_o = u_o(s)$, $\varphi_o = \varphi_o(s)$ e si accantoneranno gli sforzi corrispondenti come secondari senza farli entrare nello stress iniziale $X_x^{(o)}$, $X_y^{(o)}$, \dots ; (ridotto per il caso dell'arco al suo aspetto globale, cioè allo sforzo assiale totale N_o ed al momento M_o e in taluni casi alla torsione M_t) specifico della configurazione di equilibrio di cui si analizza la stabilità. Orbene, è proprio N_o, M_o o, introducendo il moltiplicatore $\lambda, \lambda N_o$ e λM_o che, per u_o, w_o, φ_o sensibili, danno luogo a sforzi secondari notevoli e tanto da metter la struttura in pericolo, anche quando la stabilità è assicurata dall'esser sensibilmente $\lambda < \lambda_1 = \lambda_{cr}$.

La conoscenza del λ_1 , anzi, in linea teorica di tutto lo spettro dei moltiplicatori critici $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; si richiede però per poter valutare quegli sforzi. Ciò ha fatto vedere per primo il Timoshenko sull'esempio della trave con asse $w_o = w_o(x)$ deformato a partire dalla configurazione rettilinea, avvalendosi di quegli sviluppi trigonometrici che, magistralmente e con generale profitto, egli ha introdotto in una serie vastissima di problemi di Elastostatica tecnica.

Qui merita riprendere il problema trattandolo in generale, successivamente (cfr. n. 29) anche con riguardo alla viscosità (fluage) di quell'universale materiale da costruzione che è il calcestruzzo di cemento.

Deviazione dall'asse u_o, w_o e torsione φ_o di un arco circolare solitario soggetto a pressione uniforme.

Procedendo ordinatamente fissiamo l'attenzione sulle (40), equazioni alle variazioni dell'equilibrio di un arco circolare soggetto a pressione uniforme p_o e ad un momento M_o agli estremi. Per semplicità di scrittura e

per evidenza dei simboli supponiamo siano nulli tutti i coefficienti di accoppiamento k e che q_0 sia applicato all'asse.

Gli spostamenti orizzontali totali u e la torsione totale φ si contino dal piano verticale dell'arco II e da II si contino u_0, φ_0 . Gli spostamenti elastici saranno quindi $u - u_0, \varphi - \varphi_0$ e le equazioni per l'equilibrio si otterranno dalle (40) sostituendo u, φ con $u - u_0, \varphi - \varphi_0$ nei soli termini che derivano dall'energia elastica, termini caratterizzati evidentemente dall'aver a fattore le flessione - ed eventualmente estensione - rigidità. Le equazioni (40) divengono, per il problema in u, φ , e per l'arco solitario,

$$(40)' \quad -C\varphi'' + \left(\frac{B_1}{R^2} - \frac{\lambda M_0}{R}\right)\varphi - \left(\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0\right)u'' = \frac{B_1}{R^2}\varphi_0 - C\varphi_0'' - \frac{B_1 + C}{R}u_0'' \\ (\lambda M_0 - \frac{B_1 + C}{R})\varphi'' - \left(\frac{C}{R^2} - \lambda\frac{M_0}{R} - \lambda N_0\right)u'' + B_1 u^{(iv)} = \\ = -\frac{B_1 + C}{R}\varphi_0'' - \frac{C}{R^2}u_0'' + B_1 u_0^{(iv)}.$$

Un divario $w_0 = w_0(s)$ dall'asse contato nel piano II, nel problema in w, v dà luogo, in conformità con la (41 a) del n. 14, alla equazione

$$(41 a)' \quad B_2 w^{(iv)} + \frac{B_2}{R^2} \left(2w'' + \frac{w}{R^2}\right) + \lambda N_0 \left(w'' + \frac{w}{R^2}\right) = \\ = B_2 \left[w_0^{(iv)} + \frac{1}{R^2} \left(2w_0'' + \frac{w_0}{R^2}\right)\right].$$

Ciò posto siano le u_0, w_0, φ_0 sviluppabili in serie trigonometriche, con esse nulle agli estremi $s = 0, s = 2R\psi_0 = s_0$,

$$(110) \quad u_0 = \sum_m u_m^{(0)} \sin \alpha_m \frac{s}{R}, \quad w_0 = \sum_m w_m^{(0)} \sin \alpha_m \frac{s}{R}, \quad \varphi_0 = \sum_m \varphi_m^{(0)} \sin \alpha_m \frac{s}{R}$$

con $u_m^{(0)}, w_m^{(0)}, \varphi_m^{(0)}$ coefficienti noti calcolabili alla Fourier, e $\alpha_m = \frac{m\pi}{2\psi_0}$.

Si ammettano per u, w, φ sviluppi analoghi, e

$$(111 a) \quad u = \sum_m u_m \sin \alpha_m \frac{s}{R}, \quad w = \sum_m w_m \sin \alpha_m \frac{s}{R}, \quad \varphi = \sum_m \varphi_m \sin \alpha_m \frac{s}{R}$$

u_m, w_m, φ_m essendo coefficienti incogniti,

$$(111 b) \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{2\psi_0}.$$

Cominciando ordinatamente dalle (40)' per gli sviluppi di u e φ si hanno, attraverso il solito procedimento, alla Fourier, le equazioni algebriche ad incognite separate in coppie per ogni m ,

$$\varphi_m \frac{1}{R} \left[\frac{B_1 + C\alpha_m^2}{R} - \lambda M_0 \right] + u_m \frac{\alpha_m^2}{R^2} \left[\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 \right] = \\ = \varphi_m^{(0)} \frac{1}{R} \left[\frac{B_1 + C\alpha_m^2}{R} \right] + u_m^{(0)} \frac{\alpha_m^2}{R^2} \left[\frac{B_1 + C}{R} \right] \\ (112) \quad \varphi_m \frac{\alpha_m^2}{R^2} \left[\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 \right] + u_m \frac{\alpha_m^2}{R^3} \left[\frac{B_1 \alpha_m^2 + C}{R} - \lambda M_0 - \lambda N_0 R \right] = \\ = \varphi_m^{(0)} \frac{\alpha_m^2}{R^2} \left[\frac{B_1 + C}{R} \right] + u_m^{(0)} \frac{\alpha_m^2}{R^3} \left[\frac{B_1 \alpha_m^2 + C}{R} \right].$$

La condizione di risolubilità di questi sistemi di due equazioni ognuno per le coppie di incognite φ_m, u_m ($m = 1, 2, \dots$) è data dall'esser λ diverso dalle radici $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ delle equazioni

$$(113) \quad D_m(\lambda) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

che si ottengono eguagliando a zero il discriminante di ogni sistema. Per il caso $M_0 = 0, N_0 = q_0 R$ della pressione radiale uniforme su cui particolarmente si va a soffermarci si ha

$$(113 a) \quad D_m(\lambda) = \frac{x_m^2 \left(B_1 C (1 - x_m^2)^2 - \lambda N_0 \frac{B_1 + C x_m^2}{R^2} \right)}{R^2 \left(B_1 + C x_m^2 \right)}$$

La condizione $\lambda = \lambda_m$ per qualunque m è assicurata quando sia $\lambda < \lambda_1$ e quindi $\lambda = \lambda_m$ per esser $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$.

Noti i coefficienti u_m, φ_m sono note le u e φ e da queste i momenti flettenti M_t e torcenti M_r ,

$$M_r = -B_1 (u - u_0)'', \quad M_t = C (\varphi - \varphi_0)'$$

dai quali, con ovvi simboli, si hanno le sollecitazioni

$$\sigma_r = \frac{M_r}{J_r} x_{\max} = E (u - u_0)'' \cdot x_{\max}, \quad \sigma_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{C (\varphi - \varphi_0)'}{W_t}$$

Con ciò il problema è risoluto, ma per controllo e per illustrazione di quanto sopra accennato conviene portare la soluzione del problema sino alla formula definitiva ad esempio per

L'arco circolare con pressione radiale uniforme q_0 ad asse deviato di u_0, φ_0 , per costruzione.

Dalle (112) si ha, con la regola di Cramer,

$$(114) \quad u_m = \frac{D_{u,m}(\lambda)}{D_m(\lambda)}, \quad \varphi_m = \frac{D_{\varphi,m}(\lambda)}{D_m(\lambda)}$$

con ovvio significato di $D_{u,m}(\lambda)$ e $D_{\varphi,m}(\lambda)$ e con $D_m(\lambda)$ dato dalla (113 a). Poiché da $D_m(\lambda) = 0$ si ha

$$\lambda_m = \frac{1}{N_0} \frac{B_1 C (1 - x_m^2)^2}{B_1 + C x_m^2},$$

converrà sostituire al $D_m(\lambda)$ secondo la (113 a), l'espressione

$$(113 b) \quad D_m(\lambda) = \frac{x_m^2}{R^2} N_0 \frac{B_1 + C x_m^2}{R^2} (\lambda_m - \lambda).$$

Sviluppando i numeratori delle (114), attesa la (113 b), si ha in definitiva

$$(114 a) \quad u_m = \frac{u_m^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}}, \quad \varphi_m = \varphi_m^{(0)} - \frac{u_m^{(0)}}{R} x_m^2 \cdot \frac{B_1 + C}{B_1 + C x_m^2} \cdot \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}}$$

Da qui appare come, in presenza di solo sforzo assiale λN_0 ; φ_0 non perturba u e non perturba φ .

Considerando gli sviluppi completi si ha in definitiva

$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_m \frac{u_m^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}} \sin \kappa_m \frac{s}{R}, \\ \varphi = \varphi_0 - \sum_m \frac{B_1 + C}{B_1 + C \kappa_m^2} \kappa_m^2 \frac{\frac{\lambda}{\lambda_m}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}} \frac{u_m^{(0)}}{R} \sin \kappa_m \frac{s}{R}. \end{array} \right.$$

Da qui, in conformità con le relazioni generali (*),

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2 = B_2 (w - w_0)'' \quad , \quad M_1 = -B_1 (u - u_0)'' \quad , \quad M_t = C (\varphi - \varphi_0)', \\ B_2 = E \mathfrak{J}_2 \quad , \quad B_1 = E \mathfrak{J}_1 \quad , \quad C = G \Theta, \\ \sigma_2 = \frac{M_2}{\mathfrak{J}_2} y_{\max} \quad , \quad \sigma_1 = \frac{M_1}{\mathfrak{J}_1} x_{\max} \quad , \quad \sigma_t = \frac{M_t}{W_t} \end{array} \right.$$

si hanno le sollecitazioni di flessione σ_1 , σ_2 e torsione σ_t .

Con riguardo al solo 1° termine della serie, che dà la soluzione esatta se $u_0 = u_1^{(0)} \sin \kappa_1 s/R$, $\varphi_0 = \varphi_1^{(0)} \sin \kappa_1 s/R$, si ha

$$(116 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = E \cdot \frac{u_1^{(0)} x_{\max}}{R^2} \cdot \kappa_1^2 \cdot \frac{\frac{\lambda}{\lambda_1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \cdot \sin \kappa_1 \frac{s}{R}, \\ \sigma_t = \frac{C}{W_t} \frac{u_1^{(0)}}{R^2} \cdot \frac{B_1 + C}{B_1 + C \kappa_1^2} \cdot \kappa_1^3 \cdot \frac{\frac{\lambda}{\lambda_1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} \cos \kappa_1 \frac{s}{R}. \end{array} \right.$$

La σ_1 si somma direttamente con la $\lambda \sigma_0 = \frac{\lambda N_0}{A}$ e, salvo composizione secondo Mohr con σ_t , posto

$$(117) \quad \sigma^* = \sigma_1 + \lambda \sigma_0,$$

ove σ_p sia il limite di plasticità, dovrà essere

$$(117 a) \quad \lambda^* = \frac{\sigma_p}{\sigma^*} > 1.$$

Il moltiplicatore λ^* dà la *sicurezza* in luogo di $\lambda_1 = \lambda_{cr}$ che è servito però a calcolarlo, ammettendo, sino a qui, $E = \text{cost}$.

(*) Per le convenzioni fatte, $M_1 < 0$, $M_2 > 0$ danno trazione al bordo *opposto* ad $u > 0$ rispettivamente $w > 0$.

Arco circolare con pressione radiale uniforme ed asse deviato nel suo piano II.

Per l'arco circolare deformato per costruzione nel piano II secondo una w_0, v_0 converrà ammettere che sia questa tale da consentire la scrittura di una $w - w_0, v - v_0$ priva di estensione, per la quale sia quindi

$$(v - v_0)' = \frac{1}{R} (w - w_0).$$

Se si pone in conformità, con riguardo a w, w_0 e v, v_0 nulli agli estremi $s = 0$ e $s = 2R\psi_0$,

$$w_0 = \sum_m w_m^{(0)} \sin \kappa_m \frac{s}{R}, \quad v_0 = \sum_m \frac{w_m^{(0)}}{\kappa_m} \left(1 - \cos \kappa_m \frac{s}{R} \right),$$

($m = 2, 4, 6, \dots$);

$$w = \sum_m w_m \sin \kappa_m \frac{s}{R}, \quad v = \sum \frac{w_m}{\kappa_m} \left(1 - \cos \kappa_m \frac{s}{R} \right),$$

somme di termini armonici per soli valori pari di m per le (41) o direttamente per la sola (41 a), si ha

$$w_m \left\{ \frac{B_2}{R^4} (\kappa_m^2 - 1)^2 - \frac{\lambda N_0}{R^2} (\kappa_m^2 - 1) \right\} = w_m^{(0)} \frac{B_2}{R^4} (\kappa_m^2 - 1)^2.$$

Da qui, con

$$\lambda_m = \frac{B_2}{N_0 R^2} (\kappa_m^2 - 1), \quad (m = 2, 4, 6, \dots),$$

$$w_m = \frac{w_m^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}}.$$

Segue per w la soluzione

$$w = \sum_{2,4,6,\dots} \frac{w_m^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}} \sin \kappa_m \frac{s}{R}.$$

Con riguardo alla sola $w_2^{(0)}$ si ha, per la sollecitazione σ_2 , in base alle (116),

$$(118) \quad \sigma_2 = \frac{B_2 (w - w_0)''}{\mathcal{I}_2} y_{\max} = -E \frac{\frac{\lambda}{\lambda_2}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}} \cdot \frac{w_2^{(0)} y_{\max}}{R^2} \cdot \kappa_2^2 \sin \kappa_2 \frac{s}{R}$$

onde, sommando σ_2 alla sollecitazione

$$\lambda \sigma_0 = \frac{\lambda N_0}{A}$$

si ha

$$(119) \quad \sigma_2^* = \sigma_2 + \lambda \sigma_0.$$

e la condizione di stabilità si scrive, introducendo il *limite di plasticità* σ_p ,

$$(119 a) \quad \lambda^* = \frac{\sigma_p}{\sigma_2^*} > 1.$$

In una struttura tubolare a travi pareti reticolari potrà avvenire che σ_1 , della (116 a), σ_2 della (118) e $\lambda\sigma_0$ si sommino in una stessa asta di briglia; si avrà allora

$$\sigma_2^* = \sigma_1 + \sigma_2 + \lambda\sigma_0.$$

Osservazione su la variabilità di E.

In quanto precede si è ammesso $E = \text{cost.}$ Se così non è, il valore λ^* dato dalle (117 a) e (119 a) è tanto illusorio quanto fuori del campo di proporzionalità è il $\lambda = \lambda_{cr}$ della teoria lineare.

Per arrivare ad un λ^* veritiero si ponga nella σ_1 della (116 a) o σ_2 della (118)

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} = \frac{K \cdot E}{\sigma_0},$$

non con $E = \text{cost.}$ ma con $E = E(\sigma)$.

Con ciò, per

$$\lambda_1 = \frac{K \cdot E(\sigma)}{\sigma_0}$$

σ_1 e σ_2 divengono funzioni di σ ; $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\sigma)$ nelle quali σ dovrà assumere l'apriori incognito valore σ^* , determinabile come radice di una delle equazioni che seguono dalle (117) o (119), da considerare a seconda del problema che si esamina, precisamente

$$(119 b) \quad \sigma = \sigma_1(\sigma) + \lambda\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_2(\sigma) + \lambda\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_1(\sigma) + \sigma_2(\sigma) + \lambda\sigma_0.$$

Per la sicurezza dovrà essere questa radice, che si indicherà ancora con σ^* , $\sigma^* < \sigma_p$ e quindi con riguardo a questa dovrà essere

$$\lambda^* = \frac{\sigma_p}{\sigma^*} > 1.$$

Concludendo, assegnata che sia la espressione di $E(\sigma)$, la determinazione di σ^* non richiede certo difficoltà; si riconduce semplicemente alla soluzione dell'equazione

$$(120) \quad \sigma = \lambda\sigma_0 \cdot L(\sigma),$$

$L = L(\sigma)$ essendo dato:

a) per l'asta con deformazione $w_1^{(0)}$, pressione assiale $\lambda\sigma_0$;

b) per l'arco circolare con deviazione $u_1^{(0)}$, pressione uniforme λq_0 , quindi sollecitazione assiale $\lambda\sigma_0$;

c) per l'arco circolare di cui a b) ma con deviazione $w_2^{(0)}$; dalle relazioni

$$(120 a) \quad L(\sigma) = 1 + \frac{\frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda \sigma_0}{E(\sigma) \cdot K}}{\dots} \begin{cases} \pi^2 \cdot \frac{w_1^{(0)} y_{\max}}{l^2} & \text{per } a) \text{ con } K \text{ dalla (103 a),} \\ \chi_1^2 \cdot \frac{u_1^{(0)} x_{\max}}{R^2} & \text{per } b) \text{ con } K \text{ dalla (103 b),} \\ \chi_2^2 \cdot \frac{w_2^{(0)} y_{\max}}{R^2} & \text{per } c) \text{ con } K \text{ dalla (103 c).} \end{cases}$$

Per $\sigma < \sigma_p$ limite di proporzionalità è $E = \text{cost.}$ e quindi anche $L = \text{cost.} = L(0)$.

Dal grafico per la soluzione della (120) appare come oltre certi valori per σ_0 o $u_1^{(0)}, w_1^{(0)}$ si possono non avere soluzioni reali quando y_1 non incontra y_2 e quindi tipiche condizioni di instabilità.

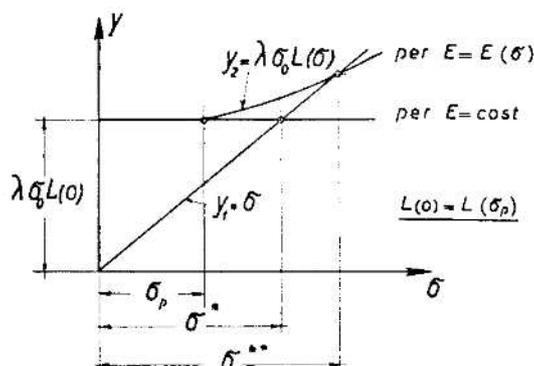


Fig. 45.

Si vedrà al prossimo n. 29 come per effetto della viscosità, che può assumere aspetti vistosi particolarmente nei calcestruzzi, sotto l'azione di σ_0 , anzi di $\lambda \sigma_0$, giacché si è considerato sempre il moltiplicatore λ (che nulla vieta di porre egual 1 quando non interessi riconoscere l'influenza di un comune moltiplicatore dei carichi) gli spostamenti $u_1^{(0)}, w_1^{(0)}$ iniziali crescono monotoni con il tempo t sino a raggiungere asintoticamente, praticamente in 2 o 3 anni, valori sensibilmente superiori. Può avvenire quindi che, se i valori iniziali di $u_1^{(0)}$ o $w_1^{(0)}$ non destano preoccupazioni, la loro maggiorazione nel tempo porti alla condizione critica per cui σ^* tende o si avvicina a σ_p .

Si hanno esempi gravi di strutture sottili (con λ_1 di conseguenza non molto elevati) rovinate dopo molti mesi dal disarmo. In esse la viscosità aveva nel tempo amplificati scostamenti iniziali dalla linea d'asse con le conseguenze prevedibili dal diagramma della fig. 45.

29. -- Moltiplicatori critici e viscosità dei materiali.

La nozione dei moltiplicatori critici, in particolare del loro minimo, è importante per valutare l'effetto esaltante che, in presenza di sforzi assiali, ha la viscosità sugli errori di forma o sui divari dalla linea d'asse conseguenti a carichi.

La viscosità si rende sensibile, di gran lunga più che in ogni altro materiale da costruzione, nei calcestruzzi giovani e diviene anzi temibile quando si impiegano per la loro preparazione taluni inerti (micacei) di cui generalmente non è noto quanto sono insidiosi.

Come si sa, la viscosità si riassume, secondo Witney, in una legge assai semplice; all'ordinario modulo d'elasticità E si sostituisce uno virtuale E_v dato da

$$(121) \quad E_v = \frac{E}{1 + \alpha \frac{e^{-\beta\tau} - e^{-\beta t}}{\tau}}$$

t e $\tau \leq t$ essendo gli istanti in cui si misura lo spostamento rispettivamente si applica il carico per lasciarlo agente nell'intervallo $t - \tau$. L'istante $t=0$, origine dei tempi, si fa coincidere con la dichiarazione di maturità del calcestruzzo, quindi con il giorno in cui si disarmano i puntelli e la struttura è chiamata a reggersi da sola. Per il calcestruzzo di cemento è pressapoco $2 \leq \alpha \leq 3$ e per t contato in anni, $\beta = 1$ (1 anno)⁻¹. Come si vede la viscosità si esaurisce praticamente in 2 o 3 anni.

Alla legge del Witney si può dare una espressione generale⁽¹⁸⁾ utile per la scrittura delle equazioni dell'equilibrio elastoviscoso che, pur nella sua estrema semplicità, ricorda le leggi della Meccanica ereditaria secondo la terminologia del Volterra, che di quella è stato il massimo cultore. Ad esempio, con riferimento al raccorciamento assiale w di una colonna sotto carico assiale $P = P(t)$ (eventualmente funzione del tempo t), mentre ordinariamente si ha

$$(122) \quad w(t) = k P(t)$$

con

$$k = \frac{1}{D} \quad , \quad D = EA \quad ;$$

in regime viscoso, ma pur sempre elastico, si ha invece

$$(123) \quad w(t) = k P(t) + k \int_0^t \Phi(\tau) P(\tau) d\tau$$

essendo, in conformità con la (121),

$$(124) \quad \Phi(\tau) = \alpha\beta e^{-\beta\tau}.$$

Nel linguaggio della Meccanica ereditaria $\Phi(\tau)$ è il *nucleo ereditario* o la *memoria* del materiale. In generale è Φ funzione di τ e di t istante in cui si misura, praticamente di $(t - \tau)$ e si parla allora di *nuclei del ciclo chiuso*.

Nel caso attuale Φ dipende dalla sola τ , riflette quindi una memoria indelebile e, secondo la specificazione (124), una facoltà di percezione decrescente con τ , cioè con l'età del materiale. Proprietà questa tipica dello stucco che lentamente indurisce e subisce, a parità di sollecitazione, impronte sempre

(18) Cfr. cit. (6).

minori. Naturalmente la proprietà elastica che si rispecchia nel 1° termine a destra della (123) non si riscontra nello stucco.

Raffrontando la (122) con la (123) si ha la regola:

per scrivere le equazioni integrodifferenziali dell'equilibrio elasto-viscoso basta applicare, nelle equazioni dell'equilibrio elastico, l'operatore lineare

$$(125) \quad [] + \int_0^t \Phi(\tau) \cdot [] d\tau$$

a tutti i termini che contengono forze esterne o sollecitazioni da esse derivanti.

Prendendo a titolo illustrativo l'equazione generale dell'asta presso inflessa (sforzo assiale λN_0 , eventualmente funzione di x , e carico trasversale esterno $p = p(x)$)

$$(126) \quad (Bw'')'' + \lambda (N_0 w')' = p(x),$$

si ha per quanto sopra, quando sia p anche funzione lenta di t ,

$$(127) \quad (Bw'')'' + \lambda (N_0 w')' + \lambda \int_0^t (N_0 w')' \Phi(\tau) d\tau = p(x, t) + \int_0^t \Phi(\tau) p(x, \tau) d\tau.$$

Ove alla (127) si voglia sostituire un'equazione alle sole derivate, basterà derivarla rispetto a t ; allora, posto

$$\frac{d}{dt} = (\dot{}) = ()'$$

si ha, in luogo della (127),

$$(127 a) \quad (Bw'')''' + \lambda (N_0 w')'' + (N_0 w')' \Phi = \dot{p}(x, t) + p(x, t) \Phi(t)$$

Da qui la regola:

per scrivere le equazioni differenziali dell'equilibrio elasto-viscoso basta applicare, nelle equazioni dell'equilibrio elastico, l'operatore $(\dot{})$ ai termini che non contengono forze esterne o sollecitazioni da esse derivanti; l'operatore

$$(\dot{}) + () \Phi$$

ai termini che contengono le forze esterne o sollecitazioni derivanti.

Si ottengono così equazioni differenziali a derivate parziali equivalenti alle primiere del tipo integrodifferenziali. Di esse si cercano soluzioni che per $t = 0$ coincidono con quelle dello equilibrio elastico ordinario, valide istante per istante.

Fer trovarle con sufficiente rigore di metodo conviene riferirsi ad una forma integrodifferenziale facilmente riportabile al tipo integrale del Fredholm. Conviene a questo punto qualche richiamo di nozioni, sia pur correnti, su le equazioni integrali dell'Elasticità tecnica.

Per l'equazione (126) in assenza di sforzo assiale, precisamente la

$$(126 a) \quad (Bw'')'' = p(x),$$

si ha la soluzione

$$(128) \quad w_p(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi$$

con $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ funzione di influenza o di Green, quella che dà lo spostamento in x che produce il carico $P = 1$ applicato in ξ o viceversa, in conformità con un teorema di reciprocità che si esprime nella proprietà di simmetria soprascritta. Nessun dubbio su la costruzione della $G(x, \xi)$; essa soddisfa, nell'intervallo $0 \leq x \leq l$, l'equazione

$$[BG''(x, \xi)]'' = 0,$$

ha una discontinuità in ξ , (discontinuità del *taglio* corrispondente a $P = 1$),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [BG''(x, \xi)]' \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = 1$$

e soddisfa agli estremi $x = 0$, $x = l$ le condizioni cui deve soddisfare la w .

Dalla (128), assimilando il termine $-\lambda(N_0 w)'$ al carico $p(x)$ della (126 a) si ha, equivalente alla (126),

$$(129) \quad w(x) = \int_0^l G(x, \xi) \{p(\xi) - \lambda(N_0 w)'\} d\xi.$$

Questa equazione integrodifferenziale si lascia ridurre facilmente al tipo più studiato delle equazioni di Fredholm, quelle a *nucleo polarsimmetrico, definito positivo*, secondo Hilbert. Precisamente, tenendo presenti le condizioni agli estremi cui soddisfa la w ($w = 0$ e $w' = 0$ oppure, $w = 0$ e $w'' = 0$) e la G per definizione, si integri p . p . l'ultimo termine della (129). Una successiva derivazione rispetto ad x porge, con le posizioni

$$(130) \quad w'_p(\xi) = \omega_p(\xi) \quad , \quad \omega_p(x) = \int_0^l \frac{\partial G}{\partial x} p(\xi) d\xi$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \xi} = \Omega(x, \xi),$$

l'equazione integrale non omogenea del Fredholm,

$$(131) \quad \omega(x) = \omega_p(x) + \lambda \int_0^l N_0(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi) d\xi.$$

Per $N_0(\xi) > 0$ in tutto l'intervallo $0 \leq \xi \leq l$ è $N_0(\xi) \Omega(x, \xi)$ effettivamente un nucleo *definito positivo*, polare, nel senso di Hilbert in quanto si ha per una $m(x)$ arbitraria

$$(132) \quad \int_0^l \int_0^l N_0(\xi) \Omega(x, \xi) m(x) m(\xi) dx d\xi > 0.$$

Ciò si constata analiticamente senza difficoltà e si riconosce ancor prima meccanicamente. Infatti, atteso il significato di $G(x, \xi)$ è $\Omega(x, \xi) = \Omega(\xi, x)$ la rotazione in x provocata dal momento $M = 1$ in ξ o viceversa; di conseguenza, il doppio integrale (132) esprime, a meno del fattore $1/2$, il lavoro di deformazione necessariamente > 0 fatto nell'applicazione di una distribuzione arbitraria di momenti $m = m(x)$ per unità di lunghezza.

In tali condizioni, considerata secondo la teoria dell'Hilbert l'equazione omogenea che si ottiene dalla (131) ponendo $\omega_p = 0$, precisamente

$$(133) \quad \omega(x) = \lambda \int_0^l N_0(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi) d\xi$$

si può affermare che, corrispondentemente ad una serie discreta di valori (autovalori) reali positivi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho, \dots, \lambda_\tau, \dots$; ordinabili in serie crescente, esistono soluzioni non nulle ω_ρ ($\rho = 1, 2, \dots$) costituenti un sistema ortonormale chiuso, per cui si ha

$$(134) \quad \int_0^l N_0(x) \omega_\rho(x) \omega_\tau(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{per } \rho = \tau, \\ 0 & \text{per } \rho \neq \tau, \end{cases}$$

per le ω_ρ e ω_τ soltanto. Da qui, quando sia data una funzione arbitraria $\omega(x)$ che possa esser esprimibile nella forma

$$\omega(x) = \int_0^l \Omega(x, \xi) \mu(\xi) d\xi,$$

con $\mu = \mu(\xi)$ funzione del tutto arbitraria, salvo ad avere quadrato integrabile, si ha lo sviluppo

$$(135) \quad \omega(x) = \sum_\rho A_\rho \omega_\rho(x)$$

con i coefficienti A_ρ calcolabili alla Fourier, quindi secondo le relazioni che conseguono dalle proprietà (134) di ortonormalità,

$$(136) \quad A_\rho = \int_0^l N_0(x) \omega(x) \omega_\rho(x) dx.$$