

13. - Il λ_{cr} per la deviazione laterale per carico q_0 e flessione M_0 di un arco di apertura $2\psi_0$ come in fig. 22.

Consideriamo le condizioni agli estremi $s = 0, s = s_0$ corrispondenti a $\psi = 0, \psi = 2\psi_0, u = u_1 = \varphi = 0; u'' = u_1'' = \varphi'' = 0$. Poniamo quindi gli spostamenti proporzionali a

$$\sin \frac{\pi}{2R\psi_0} s = \sin \frac{\kappa s}{R},$$

con

$$\kappa = \frac{\pi}{2\psi_0}.$$

Otteniamo un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee negli incogniti fattori di $\sin \kappa s/R$.

Eguagliando a zero il discriminante, risulta l'equazione in λ , di cui la più piccola radice dà il λ_{cr} cercato,

$$(43) \quad \begin{vmatrix} \frac{B_1^* + C^* \kappa^2}{R} - \lambda \left(M_0 + q_0 \frac{h}{2} R \right) & , & \left(\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 \right) \kappa^2 \\ \frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 & , & \frac{B_1 \kappa^2 + C^{**}}{R} - \lambda (M_0 + q_0 R^2) \end{vmatrix} = 0$$

essendosi posto per brevità, con riguardo alle (35),

$$B_1^* = B_1 + B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2} \cdot (1 + \kappa^4) + \mathfrak{D} \varepsilon^2, \quad \mathfrak{D} = D - \kappa^2 \lambda N_0,$$

$$C^* = C + k_w^{(s)} \varepsilon^2 - 2 B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2},$$

$$C^{**} = C + k_u^{(t)} R^2 + (k_u^{(s)} + k_u^{(f)}) \frac{R^4}{\kappa^2},$$

ferma restando l'osservazione per M_0 che immediatamente segue alla (37). Ponendo $M_0 = 0, h = 0$ si ha la spinta critica $N_{cr} = \lambda_{cr} q_0 R$ o se si vuole, scrivendo $\lambda_{cr} q_0 = q_{cr}, N_{cr} = q_{cr} R$, e in 1^a approssimazione $\mathfrak{D} \sim D$,

$$(43 a) \quad N_{cr} = \lambda_{cr} q_0 R = \frac{B_1 \kappa^2 + C^{**}}{R^2} \left[1 - \frac{(B_1 + C)^2 \kappa^2}{(B_1^* + C^* \kappa^2)(B_1 \kappa^2 + C^{**})} \right].$$

Per $C^* = C, C^{**} = C + k_u^{(t)} R^2, B_1^* = B_1$, e $h = 0$, quindi per l'arco solitario soggetto a carico radiale sull'asse, si ha in conformità con una nota formola di Timoshenko *a meno del termine costante* $k_u^{(t)}$ indipendente da R , per cui cfr. osservazioni seguenti,

$$(43 b) \quad N_{cr} = \frac{C}{R^2} \frac{(1 - \kappa^2)^2}{1 + \frac{C}{B_1} \kappa^2} + k_u^{(t)}.$$

Va rilevato che la (43 a) è una definizione esplicita di $N_{cr} = \lambda_{cr} N_0$ solo in quanto si trascuri il termine, a priori incognito, $\kappa^2 \lambda N_0$ che interviene in

$\mathfrak{D}\varepsilon^2$ ponendo quindi $\mathfrak{D}\varepsilon^2 \sim D\varepsilon^2$. Trovata così una 1ª approssimazione $N_{cr}^{(1)} = \lambda_{cr}^{(1)} N_0$ di N , se ne ricava una 2ª, $N_{cr}^{(2)}$, ponendo $\mathfrak{D}\varepsilon^2 = D\varepsilon^2 - \varkappa^2 N_{cr}^{(1)}$. Naturalmente per $\varkappa \rightarrow \infty$ e conseguentemente $R \rightarrow \infty$ così che $R/\varkappa \rightarrow L/\pi$, per $k_u^{(s)}$ e $k_w^{(f)}$ nulli per semplicità, si ha dalla (43),

$$(43\ b)^* \quad \lambda_{cr} N_0 = \pi^2 \frac{B_1}{L^2} + k_u^{(s)} \quad , \quad \lambda_{cr} N_0 = \pi^2 \frac{B_2 + \mathfrak{C}}{L^2} + k_w^{(f)} \quad , \quad (\mathfrak{C} = C \left(\frac{L}{\pi\varepsilon}\right)^2) ,$$

cioè i carichi di Eulero secondo u e per svergolamento secondo φ più un termine costante $k_u^{(s)}$ rispettivamente $k_w^{(f)}$ indipendente da L .

La presenza di questi termini, in certo senso paradossali, porta a limitare il campo di validità delle presenti deduzioni salvo perfezionamenti secondo gli sviluppi dei nn. 16-17. Troveremo in particolare che dovrà essere, posto

$$\bar{N} \sim \pi^2 \frac{D\varepsilon^2}{1.2} ,$$

$\bar{N} \gg k_u^{(s)}$ e tanto, che si possa porre, nell'ordine di approssimazione di lavoro,

$$\frac{\bar{N}}{1 + \frac{\bar{N}}{k_u^{(s)}}} \simeq k_u^{(s)} .$$

Per $N_0 = 0, M_0 \neq 0, h = 0$, si ha invece l'equazione per $\lambda_{cr} M_0 = M_{cr}$,

$$(44) \quad \left(\frac{B_1^* + C^* \varkappa^2}{R} - \lambda M_0 \right) \left(\frac{B_1 \varkappa^2 + C^{**}}{R} - \lambda M_0 \right) - \left(\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 \right)^2 \varkappa^2 = 0$$

e questa dà, per l'arco solitario, quindi per $C = C^* = C^{**}, B_1^* = B_1$,

$$\lambda^2 M_0^2 - \frac{B_1 + C}{R} \lambda M_0 + \frac{B_1 C (1 - \varkappa^2)}{R^2} = 0$$

ovvero

$$(44)' \quad \lambda_{cr} M_0 = M_{cr} = \frac{B_1 + C}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{B_1 + C}{2R}\right)^2 - \frac{B_1 C}{R^2} (1 - \varkappa^2)} ,$$

in conformità con un'altra formola del Timoshenko desunta scrivendo direttamente le equazioni alle variazioni.

Per la pratica, ove N_0 sia variabile e così M_0 si assumeranno i valori massimi come uniformemente applicati e si risolverà direttamente la (43) che darà, come si può provare in rigore, un limite inferiore di λ_{cr} ; ciò che è quanto meno a favore della sicurezza.

14. - Il λ_{cr} per inflessione nel piano Π per carico q_0 di un arco come in fig. 22.

Consideriamo il sistema (41) in v, w e consideriamo soluzioni non estensionali per le quali si ha quindi

$$v' - \frac{w}{R} = 0 .$$

Risulta allora la sola equazione in w ,

$$(41 a) \quad B_2 w^{(iv)} + \frac{B_2}{R^2} \left(2 w'' + \frac{w}{R^2} \right) + (\lambda q_0 R - k_w^{(s)}) w'' + \lambda q_0 \frac{w}{R} = 0.$$

Le condizioni agli estremi $s = 0$, $s = s_0$ o se si vuole $\psi = 0$, $\psi = 2\psi_0$ sono $w=0$, $w''=0$ per la cerniera; $w=0$, $w'=0$ per l'incastro; $w=0$, $w'' + kw' = 0$ (con k costante elastica che dà il momento reagente alla rotazione $w' = 1$) per l'incastro elastico.



Fig. 23.

Per la cerniera, posto corrispondentemente ad una inflessione sinusoidale, necessariamente con nodo centrale,

$$(45) \quad w = \sin \frac{\pi}{R\psi_0} s = \sin \frac{2\pi s}{R}$$

si trova da (41 a)

$$\frac{1}{R^4} B_2 \left[\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{1}{R^2} k_w^{(s)} \left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 = \lambda q_0 \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1 \right]$$

e da qui

$$(46) \quad \lambda_{cr} R q_0 = N_{cr} = \frac{B_2}{R^2} \left[\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1 \right] + k_w^{(s)} \frac{\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2}{\left(\frac{\pi}{\psi_0} \right)^2 - 1}.$$

Per $k_w^{(s)} = 0$ si ritrova una nota formola di Timoshenko. La (46) vale anche se è sovrapposto uno stato flessionale $M_0 = M_0(\varphi)$. Infatti, per w prive di estensione ($e_w^{(1)} = 0$) si annulla $\kappa_w^{(2)}$ (cfr. la (6)''' del n. 5) ed i momenti M_0 non portano contributo al lavoro del 2° ordine Ω_2^* .

Ove le caratteristiche geometriche elastiche e di carico non siano costanti occorre rifarsi al principio variazionale da cui sono state derivate le (41). Riscriviamolo per completezza con riguardo ai soli termini che contengono v, w .

Si ha

$$\delta\Phi = 0$$

con

$$\Phi = W + \lambda (\Omega_2^* - \Omega_2),$$

$$(37 a) \quad W = \frac{1}{2} \int B_2 \kappa_\psi^2 ds + \frac{1}{2} \int k_w^{(s)} w'^2 ds + \frac{1}{2} \int D e_\psi^{(1)2} ds$$

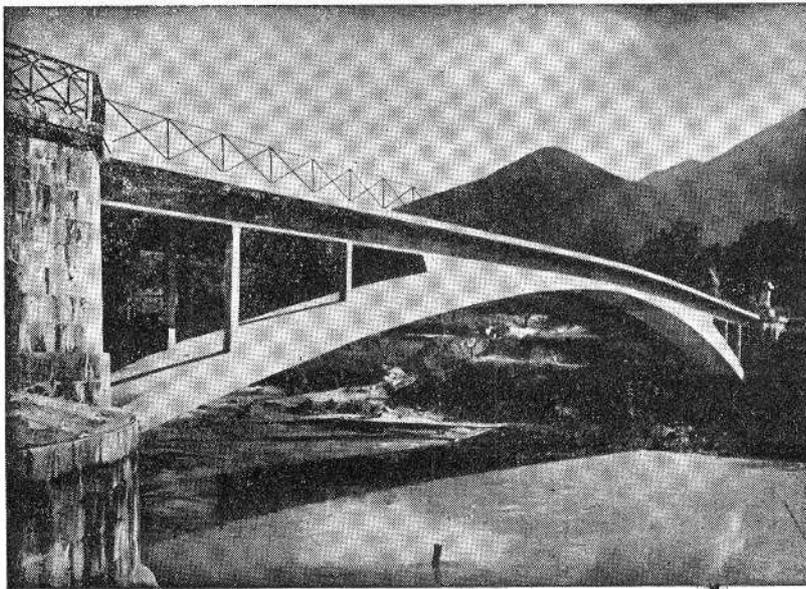


Fig. 24.

con

$$\kappa_\psi = \frac{1}{R} \left(\frac{\ddot{v}}{R} + \frac{w}{R} \right) \quad e_\psi^{(1)} = \frac{v-w}{R}$$

e

$$\Omega_2^* = - \int N_0 e_\psi^{(2)} ds \quad , \quad e_\psi^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2)$$

$$(38 b) \quad \Omega_2 = - \int q_0 d_2 A \quad , \quad d_2 A = \frac{1}{2} (v^2 + w^2 + \dot{w}v - v\dot{w}) d\psi.$$

Anche per questa (46) valgono le considerazioni fatte per la (43). Per $\kappa \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty$ così che $R/\kappa \rightarrow L/\pi$ si ha

$$(46)' \quad N_{cr} \rightarrow 4 \pi^2 \frac{B_2}{L^2} + k_w^{(s)},$$

quindi il 2° carico di Eulero nel piano Π , anziché trasversalmente a Π , più il termine costante $k_w^{(s)}$, indipendentemente da L . In base alle accennate con-

siderazioni dei seguenti nn. 16-17 la validità delle presenti deduzioni resterà limitata ai valori di $k_w^{(s)}$ per cui, posto, con riguardo ad un h_s medio

$$\bar{N} = \frac{Dh_s^2}{4L^2} \pi^2,$$

risulti $\bar{N} \gg k_w^{(s)}$ così che

$$\frac{\bar{N}}{1 + \frac{\bar{N}}{k_w^{(s)}}} \simeq k_w^{(s)}.$$

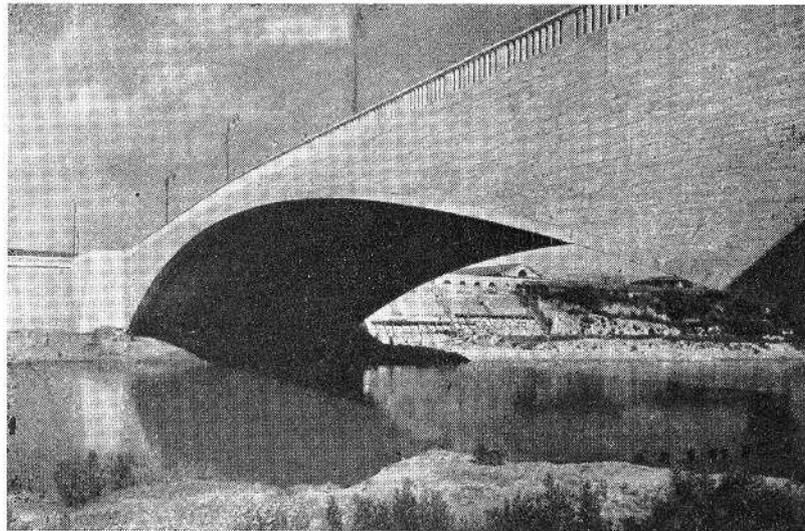
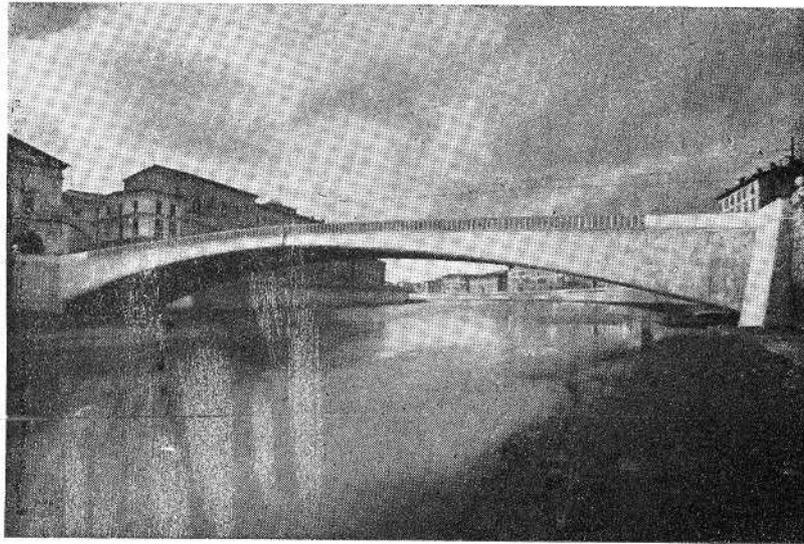


Fig. 25.

E per stilate alte e sottili, ad es. come nella fig. 23 (che illustra un ponte sul Biedano in provincia di Viterbo), è ben facile che tale condizione sia ampiamente soddisfatta.

Per l'arco circolare sottoposto a carico, normale all'asse, q_0 per unità di lunghezza d'arco, è $N_0 = q_0 R$.

Per i coefficienti $k_w^{(s)}$ valgono le (20) o le (20)* per valori sensibili di ρ_w secondo le (20 a)* di cui all'Osservazione del n. 9.

Valori elevati del λ_{cr} sono sempre desiderabili anche per evitare cedimenti viscosi negli archi ribassati. Si ottengono evidentemente elevando B_2 e $k_w^{(s)}$. La fig. 24 illustra il *Ponte Maria Cristina* ($L = 75,00$ m) sul Calore a Benevento dove il B_2 si eleva con una struttura scatolare attese le esili stilate ($k_w^{(s)} \sim 0$).

La fig. 25 illustra: il nuovo *Ponte di Mezzo* sull'Arno a Pisa ($L = 72,00$ m); qui la volta (un telaio a due cerniere) è sottile ed i veli di stilate diventano addirittura lastre-timpani; il *Ponte Africa* sul Tevere a Roma ($L = 92,00$ m) costituito da una volta relativamente sottile ($s = 40$ cm) con due timpani interni e due esterni a filo. Evidentemente, i timpani costituiscono l'irrigidimento più efficace.

15. - *Equazione in w per deformate prive di estensione di un arco circolare in un mezzo elastico soggetto a condizione di carico antisimmetrico.*

Si ha dalle (41) per

$$e = \frac{w}{R} - v' = 0,$$

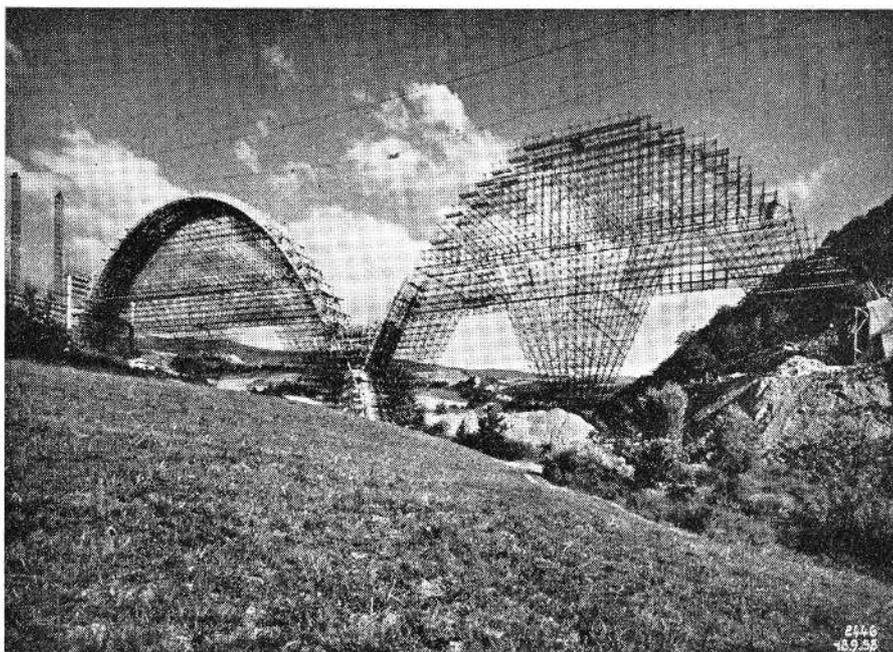


Fig. 26.

considerando il termine noto, additivo, che deriva da una distribuzione radiale, $p = p(s)$, antisimmetrica, del tipo

$$p(s) = p_0 \sin \omega s \quad , \quad \omega = \frac{2\alpha}{R} \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{2\psi_0} ,$$

l'equazione del IV ordine in w , aspetto non omogeneo della (41 a),

$$(41 b) \quad B_2 w^{(iv)} + \frac{B_2}{R^2} \left(2 w'' + \frac{w}{R^2} \right) + \lambda q_0 \left(\frac{w}{R} + R w'' \right) = \\ = p_0 \sin \omega s - k_w w + k_w^{(s)} w''$$

con le note condizioni agli estremi; ad esempio, per lo snodo, $w = w'' = 0$.

Torna questa molto utile nello studio di un arco corrente, in fase costruttiva, su una centina uniforme, del noto, impiegatissimo tipo a parete piena, tubolare, della Innocenti. Tale centina costituisce un vero letto elastico di cui la costante k_w è facilmente apprezzabile come vedremo; l'arco che vien fatto di considerare non è l'arco definitivo, ma il suo primo rotolo (o strato) se si usa il sistema del getto a rotoli (strati) successivi con l'avvertenza di attendere l'indurimento del precedente.

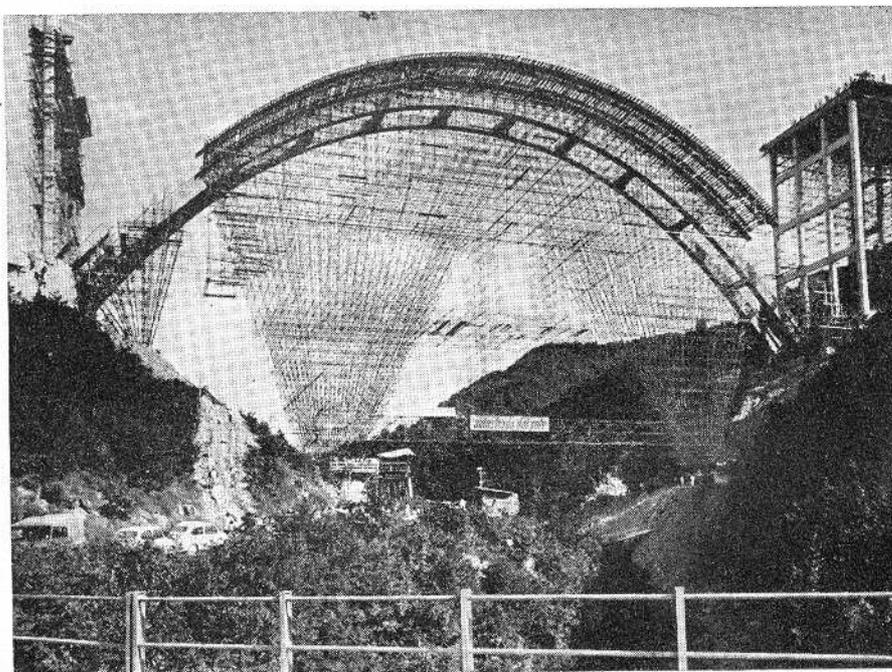


Fig. 26 a.

Due esempi in merito sono illustrati nelle figg. 26-26 a, relative ai recentissimi ponti del Merizzano, cfr. fig. 27, e del Gambellato, cfr. fig. 27 a, per l'Autostrada del Sole sul tratto Bologna-Firenze.

Si è affacciata proprio in questi due casi la curiosità di indagare quali sforzi di flessione poteva indurre, in sede esecutiva, una eventualmente non ben considerata distribuzione dei getti incoerenti del rotolo successivo al primo. Il primo rotolo indurito aiuta la centina per i carichi uniformemente distribuiti, la centina aiuta il rotolo per i carichi non uniformi che danno grande flessione, ad esempio, ove il carico fosse ripartito su una sola metà dell'arco. Orbene, proprio la (41 b) consente ragionevoli apprezzamenti degli sforzi indotti, non solo, ma serve anche nello studio dell'arco completato

con le stilate e l'impalcato. Le stilate, con la loro resistenza flessionale, portano al termine $k_w^{(s)}$ che contribuisce molto alla riduzione della flessione dell'arco.

Naturalmente qui si sta ragionando su una schematizzazione alquanto discosta dalla realtà per quanto riguarda i carichi, pensati agenti radialmente anziché diretti secondo la verticale.

Va rilevato che nella (41 b), $N_0 = Rq_0$ è lo sforzo assiale preesistente nell'arco; λ un suo moltiplicatore. Nel caso del primo rotolo, se la centina non ha ceduto, lo sforzo preesistente è nullo. Risulterà comunque non nullo perché alla condizione di carico antisimmetrico centripeto su una metà dell'arco, centrifugo sull'altra, si aggiunge una distribuzione uniforme, centripeta, di intensità costante (cfr. fig. 28) \geq al massimo $p_m = p_0$ della antisimmetrica; la distribuzione costante dà lo sforzo assiale N_0 sopraindicato per $q_0 = p_m$. Quanto agli altri simboli, è

$B_2 = EJ_2$ la flessorigidezza dell'arco

k_w la reazione opposta dalla centina allo spostamento i del tratto i ; data con riguardo ad un valore medio, in linea di larga massima, dal valore che si ammette quasi costante,

$$k_w = \frac{E_f F}{H \Delta}$$

essendo

E_f il modulo di elasticità del ferro

$F/\Delta = f_e$ la sezione resistente dei tubi portanti riferita all'unità di lunghezza lungo l'asse dell'arco

H l'altezza media di questi tubi.

Infine, come al solito, $k_w^{(s)}$ è la resistenza elastica alla rotazione derivante dalle stilate (che interviene quindi solo a ponte ultimato).

Per $k_w^{(s)}$, se $B_2^{(s)}$ è la flessorigidezza di una stilata, h_s la sua altezza, Δ l'intervallo tra stilata e stilata, si ha, come sempre, cfr. n. 9,

$$k_w^{(s)} \cong \frac{4 B_2^{(s)}}{h_s \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{1 + \rho_w}, \quad \rho_w = \frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h_s}.$$

Si riterrà che le stilate siano dimensionate così che risulti $k_w^{(s)}$ praticamente costante.

L'importantissima equazione (41 b) è la generalizzata dell'equazione di Timoshenko per gli archi circolari soggetti a carico radiale, precisamente la

$$(41 c) \quad B_2 w'' + \frac{B_2}{R^2} w + \lambda q_0 R w = 0$$

(cfr. *Theorie of Elastic Stability*, p. 225) di cui è la discendente per il caso in cui l'arco sta su un letto elastico bilaterale ($k_w \cdot w$) dotato anche di resistenza elastica rotazionale ($-k_w^{(s)} w'$), e sopporta un carico esterno antisimmetrico (che non dà estensione).



Fig. 27. - Viadotto sul Torrente Merizzano per l'Autostrada del Sole sul tratto Firenze-Bologna. Comprende, principali, N. 2 arcate di luce $L = 87,50$ m; freccia $f = 41,00$ m. La pila centrale è alta 20,0 m, ha struttura scatolare nervata in parete sottile.

Dalla (41 e) si ha, come dalla (41 b) per $k_w = 0$, $k_w^{(s)} = 0$, $q_0 = \text{cost.}$, $p_0 = 0$, tentando la soluzione antisimmetrica

$$w = A \sin 2\kappa\psi, \quad \left(\kappa = \frac{\pi}{2\psi_0}\right),$$

il noto carico critico per flessioni nel piano Π , (cfr. la (46) del n. 14),

$$(46 a) \quad N_{cr} = \lambda_{cr} q_0 R = \frac{B_2}{R^2} (4\kappa^2 - 1).$$

Di questo N_{cr} ci serviremo in seguito per riassumere il termine che lo esprime (quello a destra della (46 b), nei calcoli che seguono anche quando $k_w \neq 0$, $k_w^{(s)} \neq 0$).

Ciò posto, consideriamo il carico antisimmetrico $p_0 \sin 2\kappa\psi$. Tentiamo la soluzione precedente

$$w = A \sin 2\kappa\psi$$

con l'intento di calcolare A (e non le condizioni per cui $A = 0$ anche se $p_0 = 0$). Troviamo subito dalla (41 b) per $k_w = 0$, $k_w^{(s)} = 0$,

$$A = \frac{p_0}{\frac{B_2}{R^4} (4\kappa^2 - 1)^2 \left(1 - \frac{\lambda N_0}{N_{cr}}\right)}$$

con l' N_{cr} della (46 a) ora considerato. Si vede subito il carattere critico della circostanza $\lambda N_0 \rightarrow N_{cr}$ ovvero $\lambda \rightarrow \lambda_{cr}$ con $\lambda_{cr} = N_{cr} : N_0$.

Per $k_w \neq 0$, $k_w^{(s)} \neq 0$, la situazione è assai più favorevole; sempre per N_{cr} dato dalla (46 a) si ha

$$A = \frac{p_0}{\frac{B_2}{R^4} [4\kappa^2 - 1]^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda N_0}{N_{cr}} + \frac{k_w^{(s)}}{N_{cr}} \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 - 1} + \frac{k_w R^2}{N_{cr}} \frac{1}{4\kappa^2 - 1} \right\}}$$

Il momento flettente è dato (*) da $M = -B_2 w''$; risulta, sempre con N_{cr} dato dalla (46 a),

$$(47) \quad M = 4\kappa^2 p_0 R^2 \frac{\sin 2\kappa\psi}{[4\kappa^2 - 1]^2 \left\{ \left(1 - \frac{\lambda N_0}{N_{cr}}\right) + \frac{k_w^{(s)}}{N_{cr}} \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 - 1} + \frac{k_w R^2}{N_{cr}} \frac{1}{4\kappa^2 - 1} \right\}}$$

Per $\lambda N_0 / N_{cr} = 1$, non si ha instabilità ed il momento flettente è, per $k_w^{(s)} = 0$

$$(47 a) \quad M = p_0 R^2 \cdot \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 - 1} \cdot \frac{\sin 2\kappa\psi}{\frac{k_w R^2}{N_{cr}}} = p_0 \frac{4\kappa^2}{R^2} \frac{B_2}{k_w} \sin 2\kappa\psi.$$

Occorre appena rilevare come il 2° e 3° termine nella { } al denominatore è fortemente stabilizzante. Per $R \rightarrow \infty$, $\kappa \rightarrow \infty$ così che $(R : \kappa) \rightarrow L/\pi$; $N_{cr} \rightarrow N_E = 4\pi^2 \cdot \frac{B_2}{L^2}$, 2° carico di Eulero, e si ha

$$M = p_0 \frac{N_E}{k_w} \sin 2\pi \frac{x}{L}.$$

(*) Poiché la u qui non interviene si appone l'usuale segno $-$ a $B_2 w''$; perciò $M > 0$ dà compressione all'estradosso dell'arco.

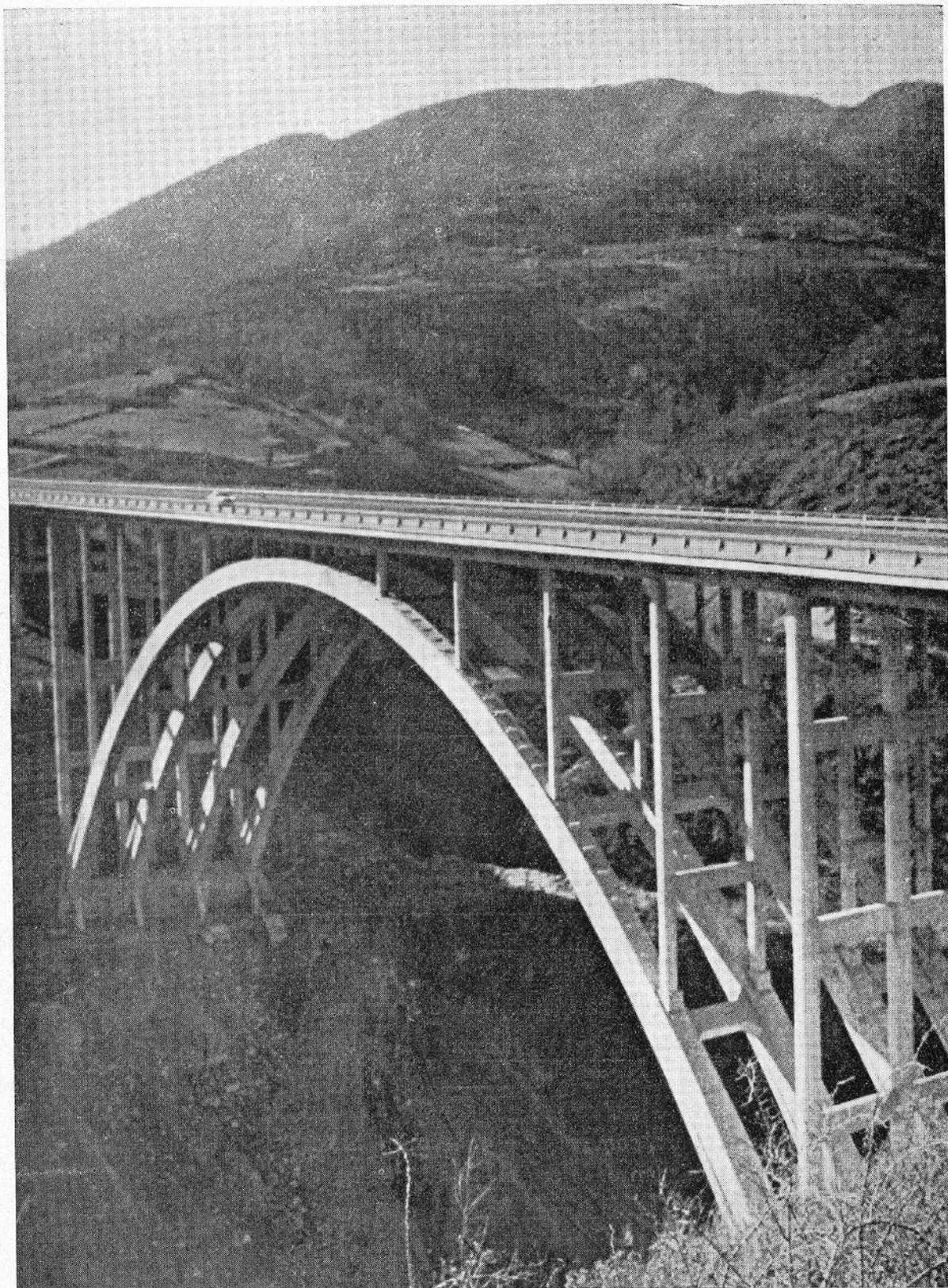


Fig. 27 a. - Viadotto del Gambellato per l'Autostrada del Sole sul tratto Firenze-Bologna. Comprende, principale, un'arcata di luce $L = 123,70$ m, freccia $f = 36,70$ m e due viadotti di accesso da $3 \times 20,00$ m rispettivamente $2 \times 20,00$ m.

Particolarmente stabilizzante è il termine in k_w ; ma anche il termine in $k_w^{(s)}$ è molto efficace per l'arco ultimato. Si ha per $k_w = 0$, $k_w^{(s)} = 0$

$$(47 b) \quad M = p_0 h_s \Delta \frac{B_2}{4 B_2^{(s)}} (1 + \rho_w) \sin 2 \kappa \psi.$$

Ora, passando ad un caso concreto, non si hanno evidentemente condizioni antisimmetriche di carico ma ad esempio distribuzioni di carico su una sola metà della luce. Ponendo (cfr. fig. 28),

$$p(s) = p_0 (1 + \sin 2 \kappa \psi)$$

si precisa una avventata e pericolosa (se non ci fosse la centina) distribuzione. Ora, la parte costante p_0 dà uno sforzo assiale $N_0 = R p_0$ costante e niente flessione, la parte variabile $p_0 \cdot \sin 2 \kappa \psi$ è il carico antisimmetrico considerato. Con ciò, poiché il peso del 1° rotolo va sulla centina, si assumerà per q_0 il valore costante p_0 . Tale valore potrà portarsi anche a $q_0 = 2 p_0$, a favore della stabilità, ritenendo che il carico del 1° rotolo migri, per eventuali

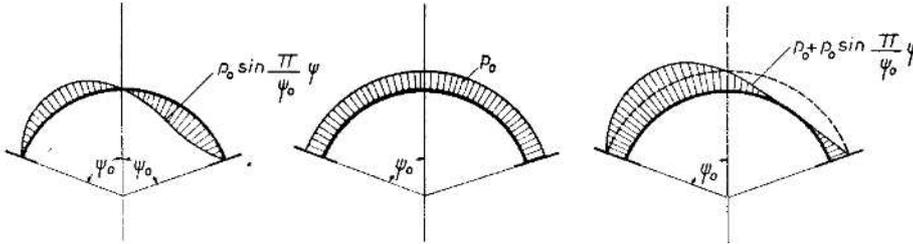


Fig. 28.

cedimenti, dalla centina sul rotolo stesso (non è infrequente vedere talvolta gli archi *disarmarsi* da soli).

A titolo di esempio, per il citato arco del Gambellato si ha per il primo rotolo

$$\begin{aligned} L &= 123,90 \text{ m.} & , & & f &= 36,70 \text{ m.} & , & & R &= 70,50 \text{ m.} \\ \psi_0 &= 61^\circ 20' & , & & 2 \psi_0 &= 122^\circ 40' & . \end{aligned}$$

Segue in conformità

$$2 \kappa = \frac{\pi}{\psi_0} = 2,9348 \quad ; \quad 4 \kappa^2 = 8,6130 \quad ; \quad R^2 = 4970,25.$$

Per J_2 , momento d'inerzia di due costole con riguardo ad un rotolo di spessore pari a metà dello spessore definitivo dell'arco, è $J_2 = 0,154 \text{ m}^4$. Il peso del rotolo (di due costole) è $2 p_0 = 7,00 \text{ tm}^{-1}$.

La distribuzione avventata è quindi

$$p_0 = 3,50 (1 + \sin 2 \kappa \psi)$$

e per questa si vuol calcolare il momento massimo nel 1° rotolo.

Il carico critico q_{cr} risulta dalla (46 a),

$$q_{cr} = \frac{0,154 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{70,50^3} (8,613 - 1) = 7,00 \text{ tm}^{-1},$$

$$N_{cr} = 493,5 \text{ to} \quad , \quad N_0 = 3,50 \cdot 70,5 = 246,75 \text{ to}.$$

Ma, ammettendo che metà peso del 1° rotolo possa migrare dalla centina sul rotolo stesso si ha un $q_0 = 3,50 + 3,50 = 7,00 \text{ tm}^{-1}$ (anziché i $3,50 \text{ tm}^{-1}$ teorici) quindi pari al q_{cr} . Si può applicare perciò a favore della stabilità la semplicatissima espressione (47 a) per M.

Valutiamo k_w pensando che i tubi lavorino a $\sim 1000 \text{ kg/cm}^2$. Poiché la centina è calcolata, poniamo per $8,00 \text{ tm}^{-1}$ ($> 7,00 \text{ tm}^{-1}$), vuol dire che si hanno $8,0 \text{ cm}^2$ di tubi per ml. misurato lungo l'asse. L'altezza media è, diciamo, $H = 18,00 \text{ m}$. Segue

$$k_w = \frac{E_f \cdot F}{H \cdot \Delta} = \frac{2,1 \cdot 10^7 \cdot 0,0008}{18,00 \cdot 1,00} = 933,3 \text{ tm}^{-2}$$

e

$$\frac{k_w R^2}{N_{cr}} = \frac{933,3 \cdot 70,50^2}{493,5} = 9399,7$$

e quindi

$$M_{\max, \min} = \pm p_0 \frac{4970,2}{9399,7} \cdot \frac{8,613}{8,613-1} = \pm 0,598 p_0 \text{ tm.}$$

$$\text{Per } p_0 = 3,50 \text{ tm}^{-1} \quad , \quad M_{\max, \min} = \pm 2,093 \text{ tm.}$$

16. - Osservazione sulla validità delle (43).

Il termine $[D\epsilon^2]$ nelle (40) premette, secondo 9. -, 1), 2), traverse sufficientemente rigide non solo nel piano tangente ma anche nel piano normale, per modo che, alla rotazione $\varphi = \varphi(s)$ delle sezioni delle costole-archi corrisponda una rotazione rigida $\varphi = \varphi(s)$ della sezione globale della struttura.

Ora, se per la cedibilità elastica flessionale degli archi una tale rigidezza (che è poi sempre relativa) delle traverse è, come subito vedremo, senz'altro ammissibile, non è così con riguardo alla cedibilità estensionale delle suddette costole, cedibilità che è $(i_2/R)^2$ volte inferiore, essendo i_2 il raggio d'inerzia della sezione (trasversale) resistente della costola. Pertanto, se i termini in $B_2 \cdot (\epsilon/R)^2$ possono senz'altro restare immutati, al termine $[D\epsilon^2]$ va applicato un fattore $\mu^2 < 1$ e nel contempo va aggiunto un altro corrispondente al contributo del lavoro di deformazione per la flessione delle traverse nel piano normale. Di questo termine si terrà conto sostituendo a μ^2 un $\mu^{*2} > \mu^2$ comprensivo di tutto.

Per il calcolo del fattore μ^2 si procede nei termini seguenti: agli estremi A e B della traversa indicata in fig. 29 si applichi un momento M. Se δ è la misura della cedibilità elastica degli appoggi A, B (spostamento provocato dalla forza $P = 1$ nel suo senso d'azione) la rotazione φ della congiungente AB, è

$$\varphi_1 = \frac{2M}{d} \cdot \frac{\delta}{d} = \frac{4M}{d^2} \delta.$$

Se la traversa AB è anche elastica, i momenti M ai due estremi provocano un'ulteriore rotazione φ_2 delle sezioni in A, B,

$$\varphi_2 = \frac{Md}{6 B_2^{(t)}}$$

La rotazione complessiva è quindi

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4M}{d^2} \delta \left(1 + \frac{d^3}{24 B_2^{(t)}} \cdot \frac{1}{\delta} \right)$$

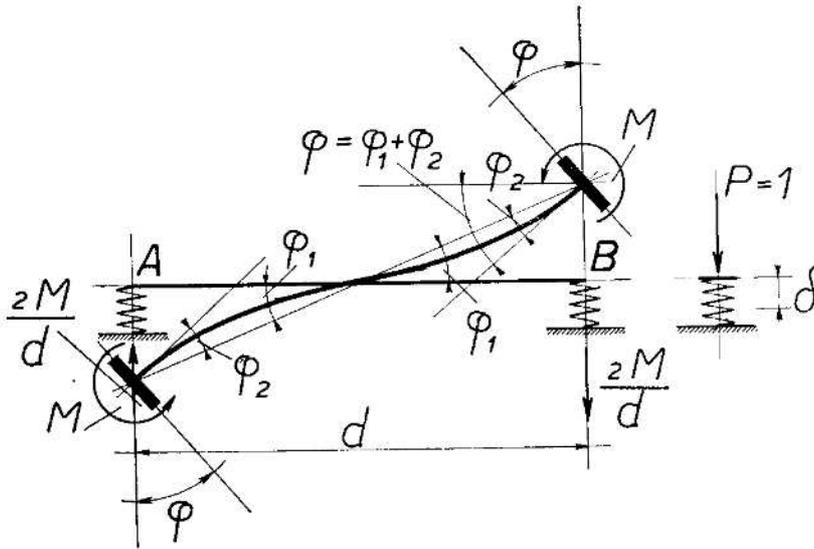


Fig. 29.

Da qui segue che per imprimere, a detti estremi, una rotazione φ occorre un momento M, in A ed in B, dato da:

$$(48) \quad M = \frac{\varepsilon^2}{\delta} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \varphi \quad , \quad \left(\varepsilon = \frac{d}{2} \right)$$

con

$$(48 a) \quad \alpha = 24 \cdot \frac{B_2^{(t)}}{d^3} \delta .$$

Il lavoro di deformazione è in conformità

$$\frac{1}{2} \cdot 2 M \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\delta} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \varphi^2 .$$

Da qui, poiché

$$(48 b) \quad \delta \cong \frac{R^2}{D_1 \Delta} \quad , \quad D_1 = A_1 E \quad , \quad (2 D_1 = D) ,$$

Δ essendo l'intervallo dominio di una traversa, rapportandosi al solito velo continuo, si avrà:

$$W = \frac{1}{2} \mu^* \int \frac{2 D_1 \varepsilon^2}{R^2} \varphi^2 ds$$

con

$$(49) \quad \mu^{*2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

essendo, per la (48 a) e (48 b),

$$(48 c) \quad \alpha = 24 \frac{B_2^{(t)}}{D_1 d^2} \cdot \frac{R^2}{\Delta d} \quad , \quad (2 D_1 = D).$$

Si rileva subito che, ove si trascurasse il lavoro di deformazione delle traverse, a μ^{*2} andrebbe sostituito un μ^2 che è il quadrato di μ^{*2} , precisamente,

$$(50) \quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2 = (\mu^{*2})^2 < \mu^{*2}.$$

Infatti, per φ_1 si hanno cedimenti $\pm \varepsilon \varphi_1$ degli estremi, quindi un lavoro

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \varepsilon^2 \varphi_1^2 \frac{1}{\delta} \quad , \quad \left(\delta = \frac{R^2}{D_1 \Delta} \right)$$

e poiché

$$\varphi_1 = \frac{4M}{d^2} \delta \quad , \quad \varphi = \frac{4M}{d^2} \delta \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha}$$

è anche

$$\varphi_1 = \varphi \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

e si ha quindi, per il lavoro di deformazione W' dell'arco corrispondente al dominio Δ di una traversa, ponendo al solito $D = 2 D_1$,

$$W' = \frac{1}{2} \frac{D \cdot \varepsilon^2}{R^2} \varphi^2 \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \Delta \quad , \quad (D = 2 D_1).$$

Da qui, con l'usato passaggio al continuo, moltiplicando per ds/Δ ed integrando

$$W' = \frac{1}{2} \mu^2 \int \frac{D \varepsilon^2}{R^2} \varphi^2 ds \quad , \quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2.$$

Per controllo si rilevi che il lavoro di deformazione W'' della sola traversa è

$$W'' = \frac{1}{2} \cdot 2 M \varphi_2$$

con

$$M = \frac{\varepsilon^2 \varphi}{\delta} \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Ma

$$\varphi_1 = \frac{4M}{d^2} \delta = \frac{M}{\varepsilon^2} \delta,$$

e

$$\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 = \varphi \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) = \frac{\varphi}{1 + \alpha}.$$

Segue per W'' ,

$$W'' = \int \frac{\varepsilon^2 \varphi^2}{\delta} \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{ds}{\Delta} = \frac{1}{2} \int \frac{D \varepsilon^2}{R^2} \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \varphi^2 ds.$$

Si ha quindi, per $W' = W - W''$ corrispondente ai soli archi

$$W' = \frac{1}{2} \int \frac{D\varepsilon^2}{R^2} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \right) \varphi^2 ds = \frac{1}{2} \int \frac{D\varepsilon^2}{R^2} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \varphi^2 ds$$

e da qui il fattore di riduzione μ^2 dato dalla (50). Che per i termini $B_2 \varepsilon^2/R^2$ non occorra praticamente applicare fattori riduttori si vede subito poiché il δ è, in regime flessionale, dell'ordine di

$$\delta = \frac{R^4}{B_2 \Delta (2\alpha)^4}$$

Infatti, scegliendo una distribuzione di carico antisimmetrica, che non dia luogo ad estensione, ad esempio ed in particolare $p = p_0 \sin 2\alpha\psi$, si hanno spostamenti

$$\delta = \frac{p_0 R^4}{B_2 (2\alpha)^4} \cdot \sin 2\alpha\psi$$

Se al tratto Δ compete una $P = 1$, è $p_0 = 1 : \Delta$ donde l'espressione di δ c.d.d.

Si ha quindi un fattore riduttore μ_{fl} ,

$$\mu_{fl} = \frac{1}{1 + \frac{1}{24} \frac{B_2}{B_2^{(0)}} \frac{\Delta d^3}{R^4} (2\alpha)^4}, \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2\psi_0} \right)$$

che è praticamente $\simeq 1$. Infatti, essendo Δ dell'ordine di d , e $d \sim 1/10 L$, $B_2 : B_2^{(0)} \sim 5$, $R : 2\alpha \sim \frac{L}{2\pi}$, con L lunghezza dell'arco, si ha per l'addendo dell'unità al denominatore il valore numerico $1/24 \cdot 5 \cdot (1/10)^4 \cdot (2\pi)^4 \cong 1/30$ che è trascurabile.

A questo punto rileviamo che, nell'espressione (38) di ξ_2^* , nel 2° termine, del 1° integrale che ha N_0 a fattore, si dovrà sostituire φ^2 con $(\mu\varphi)^2$ e quindi $\varepsilon_d^2 \varphi^2$ con $\mu^2 \varepsilon_d^2 \varphi^2$. Di conseguenza, poiché per le (49), (50) è $\mu^2 = \mu^{*2} \cdot \mu^{*2}$, nelle (43), in B_1^* si dovrà sostituire $\mathfrak{D} \varepsilon^2$ con

$$\mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2$$

dove

$$(51) \quad \mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \alpha^2 \lambda N_0.$$

Naturalmente, in 1ª approssimazione si porrà $\mathfrak{D}^* \cong D$, e si sostituirà quindi

$$\mathfrak{D} \varepsilon^2 \text{ con } \mu^{*2} D \varepsilon^2.$$

Poi, trovato così un $\lambda_{cr}^{(1)}$ di 1ª approssimazione, ove occorra, (ma non sarà generalmente il caso) si ripeterà il calcolo per

$$\mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 \text{ con } \mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \alpha^2 \lambda_{cr}^{(1)} N_0$$

e si troverà un $\lambda_{cr}^{(2)}$ di 2ª approssimazione.

Che sia $\mathfrak{D} \sim D$ risulta dal fatto che, dovendo essere $\lambda_{cr} N_0 = N_{cr} \leq A\sigma_p$, con σ_p limite di proporzionalità, sarà conformemente $\lambda N_0 < A E \frac{\sigma_p}{E} = D \frac{\sigma_p}{E}$; ma $\sigma_p : E$ è sempre dell'ordine del 1/1000 o 1/500 al massimo.

Valori elevati ordinari di κ^2 non cambiano la situazione; lo si constata del resto passando al limite le formole rigorose addirittura per $\kappa^2 \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$) come si vedrà tra poco per lo sforzo assiale critico di una Vierendeel, limite estremo di un arco contravventato con traverse.

Per quanto precede la (40 a) resta dunque immutata salvo la sostituzione, nel primo elemento del determinante (che vien eguagliato a zero) di $\mathfrak{D}\varepsilon^2$ con $\mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2$ essendo μ^{*2} dato dalla (49) e

$$\mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \kappa^2 \lambda N_0.$$

Con riguardo al caso notevole, anzi praticamente il più interessante, in cui manca la collaborazione dell'impalcato e questo, più o meno incoerente sino alla maturazione dei getti, gravita con tutto il suo peso sulle costole ad arco si ha, in conformità con le (43), (43 a), (43 b) del n. 13, quanto andiamo a scrivere.

Sia

$$k_w^{(s)} = 0 \quad , \quad k_u^{(f)} = 0 \quad , \quad k_u^{(s)} = 0 \quad ; \quad M_0 = 0,$$

e si trascuri il termine $\lambda q_0 \frac{h}{2} R$ con che C^{**} si riduce a:

$$C^{**} = C + k_u^{(f)} R^2.$$

In tal caso, tanto vale omettere la scrittura di C^{**} e portare $k_u^{(f)}$ (che è una forza) in addizione algebrica ad N). Si ha allora l'espressione, che mette subito in luce una circostanza curiosa, sulla quale occorrerà finalmente indugiarsi,

$$(43)' \quad \left| \begin{array}{cc} B_1^* + C^* \kappa^2 & (B_1 + C) \kappa^2 \\ \frac{B_1 + C}{R^2} & \frac{B_1 \kappa^2 + C}{R^2} - (N - k_u^{(f)}) \end{array} \right| = 0$$

dove, per la (51), con riguardo alla (49),

$$B_1^* = B_1 + B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2} \cdot (1 + \kappa^4) + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2,$$

$$C^* = C - 2 B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

$$C = \sum_i C_i \quad \mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \kappa^2 N, \quad (N = \lambda N_0).$$

Poiché praticamente è $\varepsilon \simeq 1/10 \cdot R$ si possono trascurare i termini con $(\varepsilon/R)^2$ a fattore.

La (43)' porge quindi, in proseguio alla (43 a) del n. 13,

$$(43 a)' \quad N_{cr} \simeq \frac{1}{R^2} \frac{B_1 C (\kappa^2 - 1)^2 + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 (B_1 \kappa^2 + C)}{B_1 + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 + C \kappa^2} + k_u^{(f)}.$$

Come si è detto, si porrà inizialmente $\mathfrak{D}^* \simeq \mathfrak{D} \simeq D$, poi, trovato l' $N_{cr} = N_{cr}^{(1)}$ di prima approssimazione, ove occorra, si ripeterà il calcolo ponendo nella (43 a)'

$$\mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \kappa^2 N_{cr}^{(1)}.$$

Se $\mu^{*2} \simeq 0$, come avviene se le traverse hanno poca altezza ($B_2^{(t)} \simeq 0$) misurata normalmente alla volta,

$$(43 b)' \quad N_{cr} \simeq \frac{C}{R^2} \frac{(1-\kappa^2)^2}{1 + \frac{C}{B_1} \kappa^2} + k_u^{(t)}, \quad (C = \sum_i C_i).$$

Se è, come avviene frequentemente,

$$\mu^{*2} D\varepsilon^2 \gg \frac{B_1 C (\kappa^2 - 1)^2}{B_1 \kappa^2 + C} \quad e \gg \text{di } B_1 + C\kappa^2$$

si può scrivere compendiosamente

$$(43 c)' \quad N_{cr} \simeq \frac{B_1 \kappa^2 + C}{R^2} + k_u^{(t)}.$$

Sono le (43, a, b, c)' ripetizioni varianti della (43 a, b) del n. 13, sempre con additivo il termine $k_u^{(t)}$ da calcolare secondo le (22)*; (22 a)* di 5) del n. 9 ripetute nelle seguenti (52) e con $\mu^{*2} < 1$ applicato a $D\varepsilon^2$.

Infine, se $2\psi_0 \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow \infty$ così che: $R \cdot 2\psi_0 \rightarrow L$ e quindi $R/\kappa \rightarrow L/\pi$, allora la volta tende ad una trave Vierendeel e si ha per lo sforzo assiale, come si constata passando attentamente al limite la (43 b)'

$$(43 d)' \quad N_{cr} \simeq \pi^2 \frac{B_1}{L^2} + k_u^{(t)}.$$

Osservazione sulla validità delle (43 a, b, c, d)'.

Osservando le (43 a, b, c, d)' si rileva la circostanza curiosa che, anche crescendo R quando $2\psi_0$ è finito, o crescendo L per $2\psi_0 = 0$, rimane costante il termine additivo $k_u^{(t)}$ sicché, in ogni caso, N_{cr} è indipendente da R o da L , e si ha quindi, per $R \rightarrow \infty$ od $L \rightarrow \infty$,

$$(43 f)' \quad N_{cr} \rightarrow k_u^{(t)}.$$

Avviene inoltre che questo $k_u^{(t)}$ può essere rilevante, anzi prevalente sul primo termine. È infatti dell'ordine del carico critico di una traversa, che è per il più non molto snella, sollecitata assialmente!

Infatti, avendosi dalle citate (22)*, (22 a)*, della *Osservazione* dopo 5) al n. 9,

$$(52) \quad k_u^{(t)} = \frac{12 B_1^{(t)}}{d \cdot \Delta} \frac{1}{1 + \rho}, \quad \left(\rho = \frac{B_1^{(t)} \cdot \Delta}{B_1 d} \right)$$

si potrà scrivere

$$k_u^{(t)} = \pi^2 \frac{B_1^{(t)}}{d^{*2}}$$

con

$$d^* = \sqrt{\frac{\pi^2}{12} (1 + \rho)} \sqrt{d \cdot \Delta};$$

da cui appare che, praticamente, d^* è eguale a d ed il carattere di carico critico di Eulero attribuito dalla (52) a $k_u^{(l)}$.

Per il caso $R/\alpha \rightarrow \frac{L}{\pi}$ corrispondente al passaggio al limite della volta ad una trave Vierendeel questa circostanza fu già rilevata da von Mises nella importantissima Memoria *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, «Z.f.A.M.», 1923 (pp. 406-422) dove si ritrova proprio la (43 d').

Senza insistere molto l'A. accenna alla necessità di dare una limitazione alla validità della (43 d'), che riguarda anzi in certo senso dubbia, considerando la deformazione assiale delle membrature, deformazione che è stata trascurata nelle sue deduzioni e in quanto qui precede per il caso degli archi.

Per la trave Vierendeel questa considerazione era sostanzialmente già fatta secondo un'impostazione diretta da Ritter, Engesser, Timoshenko. Risultato ne sono le notissime formole che si danno per il carico critico di travi composte da due briglie collegate in modo qualunque. Merita qui rilevare che queste si possono scrivere nella forma generale

$$(53) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{B_1}{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{B_1}{k_u^{(l)}}}$$

con

$$\bar{B}_1 = B_1 + \varepsilon^2 D \quad , \quad B_1 = 2 B_{1,1} \quad , \quad D = 2 D_1 = 2 EA_1 \quad ,$$

e $k_u^{(l)}$ definito per il caso delle sole traverse dalla prima delle (52) o dalle citate (22)* (22 a)*; in generale invece, dalle (58) in appresso riportate. Evidentemente è \bar{B}_1 il momento d'inerzia della sezione resistente formata dalle due briglie senza coefficienti riduttori per la flessibilità delle traverse. Quindi, se si pone

$$(53 a) \quad \bar{N}_{cr} = \pi^2 \frac{\bar{B}_1}{L^2} \quad ,$$

con che \bar{N}_{cr} è il carico critico virtuale di una Vierendeel con montanti praticamente infinitamente rigidi, la (53) si scrive anche

$$(53 b) \quad N_{cr} = \frac{\bar{N}_{cr}}{1 + \frac{\bar{N}_{cr}}{k_u^{(l)}}} \quad .$$

Da questa si vede chiaramente che, se $\bar{N}_{cr} \gg k_u^{(l)}$ si ha effettivamente, in conformità con la (43 d'),

$$(43 e)' \quad N_{cr} \simeq k_u^{(l)} \quad .$$

Quindi, se è $\bar{N}_{cr} \gg k_u^{(l)}$ come si ha senz'altro per montanti lunghi e sottili, è valida la (43 d') di von Mises e possiamo dire che sono valide anche le ns. (40) del n. 12 e derivate (43), (43 a, b, c) del n. 13 e (43 a, b, c, d') del n. 15 testé riportate. L'errore che si commette ad esempio con la (43 d') o ponendo $N_{cr} \cong k_u^{(l)}$ è, con \bar{N} dato dalla (53 a) che precede, pressapoco, dell'ordine di $\frac{\bar{N}_{cr} + k_u^{(l)}}{\bar{N}_{cr}}$ volte il valore effettivo.

Se $\bar{N} \simeq 9 k_u^{(0)}$, con $N \simeq k_u^{(0)}$ si commette un errore del 10%. Ma se $\bar{N} = k_u^{(0)}$, l'errore è del 100% in più, il che è naturalmente pericoloso. Occorre dunque estendere le ns. (40) e derivate (43 *a, b, c, d*) che senza precisazione particolare possono risultare senz'altro ingannevoli. Esse servono però nel modo migliore per la deduzione delle formole definitive per l' N_{cr} . Vedremo che si tratta di formole generali con le quali riesce anche tener conto della deformazione delle stesse traverse addirittura, e come è ovviamente desiderabile, di quella qualunque orditura di controventamento che si vuol considerare. Faremo poi vedere che, per $\frac{R}{x} \rightarrow \frac{L}{\pi}$ si ricade nella (53) di Timoshenko. Inoltre, ci si presenterà una possibile circostanza in cui si può avere un carico critico N_{cr} inferiore a quello trovato, considerando deformazioni prive di estensione (con nodo centrale per φ ed u) che non appaiono naturalmente nelle travi Vierendeel. Ma per intendere quanto segue occorre premettere una breve osservazione e qualche complemento sulla:

17. - *Deformazione di una trave elastica per flessione e taglio.*

Per una trave di flessorrigidezza \bar{B} , sezione ridotta con riguardo al taglio Q di area A' , modulo torsionale G , soggetta ad un carico $p = p(x)$, si ha in generale per l'inflessione w , l'equazione

$$(54) \quad (\bar{B}w'')'' - \left[\bar{B} \left(\frac{Q}{A'G} \right)' \right]' = p(x) \quad , \quad (B = EJ),$$

J essendo il momento di inerzia della sezione resistente a connessione rigida.

L'equazione (54) è la generalizzata della ordinaria e ben nota

$$(55) \quad \bar{B}w'' - B \left(\frac{Q}{A'G} \right)' = -M(x),$$

diciamo del Timoshenko, con M momento flettente. La (54) si ricava da questa assai facilmente con un'ulteriore doppia derivazione osservando che

$$(55 a) \quad M''(x) = -p(x).$$

Potrà sembrare quindi inutile una tale operazione, e lo è infatti se alla (54) non si associano le giuste condizioni ai limiti.

Per ricavarle basta scrivere il principio variazionale da cui la (54) deriva come euleriana. Si ha subito

$$(56) \quad \delta \int \left[\frac{1}{2} \bar{B}w'^2 - Bw'' \cdot \left(\frac{Q}{A'G} \right)' - p(x)w \right] dx = 0.$$

Il 1° e 3° termine sotto il segno integrale sono evidenti; il 2° si ricava attribuendo alla variazione

$$\left(\frac{Q}{A'G} \right)' dx$$

degli scorrimenti relativi delle sezioni x e $x + dx$, il significato di variazione angolare $d\theta$ delle facce dell'elemento, lungo dx , che ha centro in x . Poiché il momento flettente è $-\bar{B}w''$, il lavoro è $-\bar{B}w'' \cdot d\theta = -\bar{B}w'' \left(\frac{Q}{A'G}\right)' \cdot dx$.

Eseguendo la variazione sulla (56) con le regole solite, si ha la (54) con le condizioni ai limiti che seguono attraverso le note integrazioni p . p . e precisamente:

$$(54 a) \quad \left[\bar{B}w'' - \bar{B} \left(\frac{Q}{A'G} \right)' \right]_{x=0,L} \delta w' - \left[(\bar{B}w'')' - \left(\bar{B} \left(\frac{Q}{A'G} \right)' \right)' \right]_{x=0,L} \delta w = 0.$$

Per l'incastro è $\delta w = 0$, $\delta w' = 0$ e la (54 a) risulta senz'altro soddisfatta. Per il semplice appoggio è $\delta w = 0$ ma non $\delta w'$ e deve essere, in luogo dell'usuale $Bw'' = 0$ corrispondente allo snodo,

$$(54 b) \quad \left[\bar{B}w'' - \bar{B} \left(\frac{Q}{A'G} \right)' \right]_{x=0,L} = 0.$$

Questa condizione è importantissima per evitare di cadere attraverso la (54) e la (55) in errore, almeno in certi casi. Ad esempio, quando $p(x) = p_0 = \text{cost.}$ è $Q' = -p_0$, la (54) si riduce a $\bar{B}w^{IV} = p_0$. Se non si tenesse conto della (54 b) agli estremi, risulterebbe una deformata w indipendente dal taglio. La condizione

$$\bar{B}w'' \Big|_{x=0,L} = -\bar{B} \frac{p_0}{A'G}$$

che si ottiene dalla (54 b) per $A'G = \text{cost.}$, $Q' = -p_0$ dà invece una inflessione addittiva corrispondente ai momenti applicati agli estremi $M = \frac{\bar{B}p_0}{A'G}$; ora tale inflessione è, poiché $M = \text{cost.}$ su tutta la trave,

$$(54 c) \quad \Delta w = \frac{p_0 L^2}{2 A'G} \xi (1 - \xi) \quad , \quad \left(\xi = \frac{x}{L} \right)$$

in conformità con quanto è noto. Senza la (54 b) la (54) sarebbe stata fallace. A questo punto va fatta anche un'altra osservazione su un inganno, di cui non risulterebbe rilievo nella letteratura tecnica, inganno cui può portare, comunque, la (54) con le (54 a) e, naturalmente, la (55) ordinaria.

Si osservi infatti la (54 c). Si vede che questa dà agli estremi una rotazione, addittiva a quella ordinaria,

$$(54 d) \quad \omega_p = \frac{p_0 L^3}{24 \bar{B}} \begin{cases} 1 & \text{in } x = 0, \\ -1 & \text{in } x = L; \end{cases}$$

data da

$$\Delta w' \Big|_{x=0,L} = \frac{p_0 L}{2 A'G} \begin{cases} 1 & \text{in } x = 0, \\ -1 & \text{in } x = L. \end{cases}$$

Ora, una tale rotazione addittiva in realtà non c'è perché è nulla, pur essendo, *ma solo in media*, esatta la Δw .

Infatti, avendosi per la rotazione in $x = 0$ od $x = L$, conseguente al taglio, la relazione ovvia, sia intuitivamente sia applicando il principio dei lavori virtuali,

$$(57) \quad \Delta \omega = \frac{1}{L} \int \frac{Q}{A'G} dx,$$

si vede che, per $A'G = \text{cost.}$ e per Q qualunque purché sia ad es. Q antisimmetrico rispetto al mezzo, (per $p = p_0 = \text{cost.}$ è infatti $Q = p_0(L/2 - x)$). è sempre $\Delta\omega = 0$. Il risultato ingannevole si ottiene proprio derivando Δw per porre $\Delta w' = \Delta\omega$. La ragione dell'errore sta nell'assimilazione ad una linea, continua e derivabile, quella ottenuta per successivi scorrimenti relativi dei suoi punti (centri delle sezioni resistenti) assimilazione che è sintetizzata nella posizione

$$\left(\frac{Q}{A'G}\right)' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \sim w''$$

che va invece considerata valida soltanto *in media*.

Generalmente, questo rilievo non vien mai fatto. Comunque nelle trattazioni più notevoli ogni errore è sempre evitato. Nello studio della trave continua in parete alta od a traliccio, quindi particolarmente soggetta alle deformazioni del taglio si applica la nozione di ellisse di elasticità (cfr. le citate *Anwendungen* di Ritter, Bd. III Cap.); nello studio della trave tubolare o delle volte continue si applica invece la (57) e tutto va quindi per il meglio.

Ciò posto, passiamo a precisare l' $A'G$ virtuale da attribuire alla più generale trave composta da briglie collegate con parete *sottile*, con traverse, diagonali comunque disposte come si indica in fig. 30 schemi *a), b), c), d), e), f)*.

È facile constatare, seguendo le deduzioni delle *Anwendungen* di W. Ritter, che al fattore $1/A'G$ che sintetizza la resistenza al taglio (allo scorrimento) si può sostituire il fattore $1/k$ con k assimilabile al noto $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(t)}$, dato, per il caso *a)* da $A'G$, per *b)* dal $k_u^{(s)}$ delle (20)*, (20 a)* o dal $k_u^{(t)}$ delle (22)*, (22 a)* all'Osservazione del n. 9 e per i casi ulteriori dalle seguenti (58). In queste si riepilogano per completezza anche i citati casi *a), b)*, con qualche lieve necessaria variazione di simboli; l'intervallo Δ si indica con a , la distanza tra le briglie con b per chiamare d la lunghezza delle diagonali.

La (54) generalizzata diviene pertanto, scrivendo semplicemente k per $k_u^{(t)}$ o $k_w^{(s)}$,

$$(54)^* \quad (\bar{B}w'')'' - \left(\bar{B}\left(\frac{Q}{k}\right)'\right)'' = p(x)$$

essendo, per i casi *a), b), \dots f)*; della fig. 30, con simboli ovvi,

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad k = A'G, \\ b) \quad k = k^{(t)} = \frac{12 B^{(t)}}{ab} \cdot \frac{1}{1 + \rho}, \quad \rho = \frac{B_1^{(t)}}{2 B_{1,1}} \cdot \frac{a}{b} \\ c) \quad k = EA_d \frac{ab^2}{d^3} \frac{1}{1 + \beta}, \quad \beta = \left(\frac{b}{d}\right)^3 \frac{A_d}{A_b} \\ d) \quad k = EA_d \frac{ab^2}{d^3}, \\ e), f) \quad k = 2 EA_d \frac{ab^2}{d^3}. \end{array} \right.$$

Si rilevi che il caso *e*) è equivalente ad *f*) in quanto in tutti e due lavorano le sole diagonali; i traversi in linea teorica qui non lavorano affatto; natural-

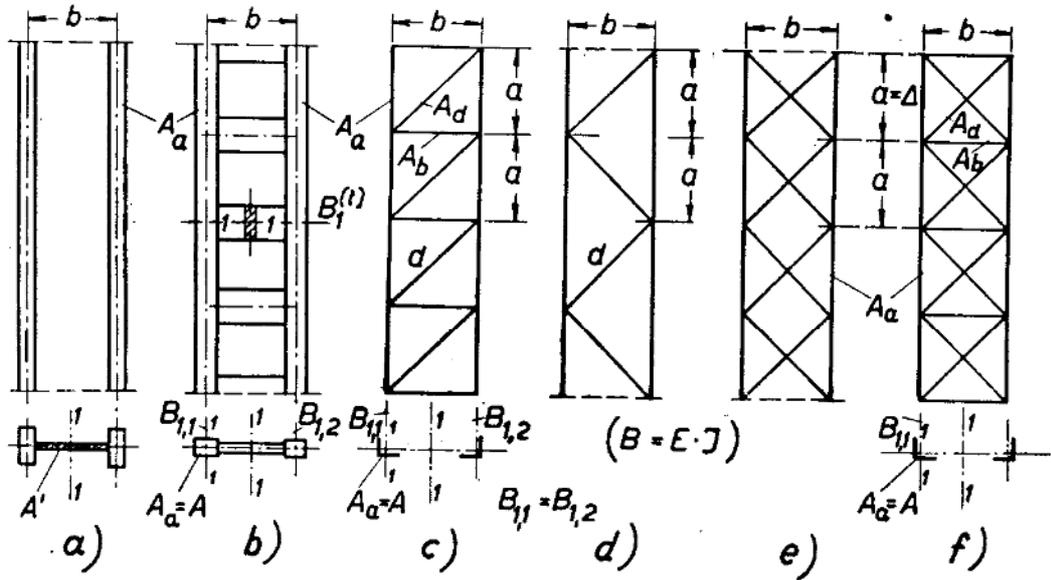


Fig. 30.

mente non è detto però ch'essi siano inutili giacché, ove una diagonale venisse meno, o per cause diverse lavorasse meno della diagonale incrociata, il traverso verrebbe in soccorso immediato.

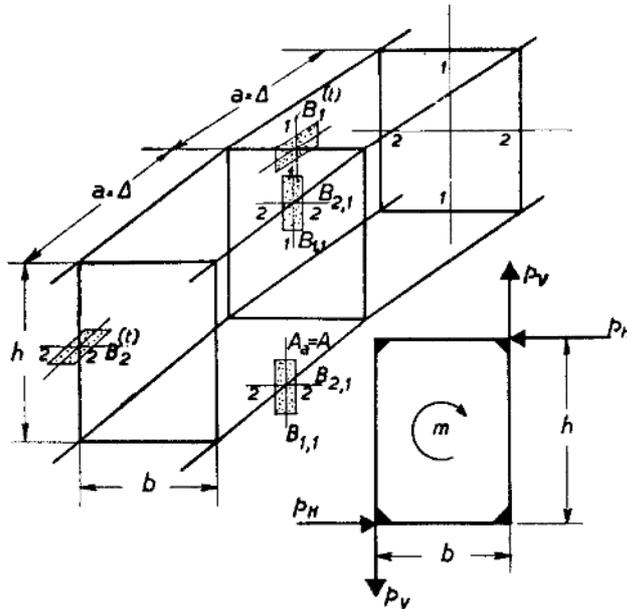


Fig. 8*.

Torsiorigidità di una trave tubolare, a sezione rettangolare $h \times b$ indeformabile, come in fig. 8 del n. 8 e 8. Introducendo i coefficienti di connessione k secondo le (58): k_1 per le travi orizzontali, k_2 per le travi verticali; ferma restando la definizione (12 c)'' delle aree virtuali A_1^* , A_2^* delle sezioni*

resistenti delle briglie, si ha, per momenti torcenti diffusi come $\sin \frac{n\pi}{L} x$, seguendo il criterio di Ritter già indicato al n. 8,

$$(12 c)^* \quad G\Theta = \frac{1 + \bar{\alpha}}{\frac{4L^2}{(n\pi)^2 b^2 h^2} \left(\frac{\bar{\alpha}}{EA_1^*} - \frac{1}{EA_2^*} \right) + \frac{2\bar{\alpha}}{k_1 h^2}}$$

o l'equivalente

$$(12 c)^{*'} \quad G\Theta = \frac{1 + \frac{1}{\bar{\alpha}}}{\frac{4L^2}{(n\pi)^2 h^2 b^2} \left(\frac{1}{\bar{\alpha} EA_2^*} - \frac{1}{EA_1^*} \right) + \frac{2}{\bar{\alpha} k_2 b^2}}$$

con

$$\bar{\alpha} = \frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{1 + \frac{(n\pi)^2}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \frac{EA_2^*}{k_2}}{1 + \frac{(n\pi)^2}{4} \left(\frac{b}{L} \right)^2 \frac{EA_1^*}{k_1}}$$

Per $L \gg h$, $L \gg b$ rimane residua la torsiorigidezza pura (indipendente dalla flessione) che in quest'ordine di problemi costituisce la parte essenziale. Si ha precisamente

$$\lim_{l \rightarrow \infty} G\Theta = \frac{h^2 b^2 (A_1^* + A_2^*) k_1 k_2}{h^2 A_2^* k_1 + b^2 A_1^* k_2}$$

Questa formola è valida anche per travi parete tipo a). Si ha infatti, indicando con c_1, c_2 gli spessori delle travi orizzontali larghe b , verticali alte h ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} G\Theta = G \cdot \frac{2 h^2 b^2 c_1 c_2}{h c_1 + b c_2},$$

in conformità con una formola ben nota.

Naturalmente le $(12 c)^*$ e $(12 c)^{*'}$ si riportano per travi reticolari e per $n = 1$, $L = l$, alle $(12 c)$ e $(12 c)'$ del n. 8. Queste ultime, quando si ponga in esse $(n\pi)^2$ in luogo di π^2 valgono ovviamente per n intero qualunque.

Infine, Θ e α sta per $\Theta^{(n)}$ e $\alpha^{(n)}$ ovvio essendo il riferimento alla armonica n^{ima} (con $n - 1$ nodi nell'intervallo $0 - L$) del momento torcente distribuito $m = m(x)$.

Cenno sulla integrazione della (54).*

Per l'impiego della importantissima (54)* converrà pensare $p(x)$ sviluppato in serie di Fourier del tipo

$$(59) \quad p(x) = \sum_n p_n \sin \lambda_n x \quad , \quad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \right)$$

coi coefficienti p_n specificati nell'Appendice per le varie condizioni di carico. Allora è

$$Q = \sum Q_n \cos \lambda_n x$$

con

$$Q_n = \frac{p_n}{\lambda_n}$$

Per \bar{B} e k costanti, posto

$$(60) \quad w = \sum_n w_n \sin \lambda_n x$$

si ha

$$w_n \cdot \bar{B} \lambda_n^4 - \bar{B} \lambda_n^2 \cdot \frac{p_n}{k} = p_n$$

e quindi, in definitiva, ripetiamo, con riguardo alle (58),

$$(60 a) \quad w_n = \frac{p_n L^4}{\bar{B} (n\pi)^4} + \frac{p_n L^2}{k (n\pi)^2};$$

o, introducendo la flessoridezza relativa alla armonica n^{ima} del carico $p = p(x)$,

$$(60 b)' \quad B^{(n)} = \frac{\bar{B}}{1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\bar{B}}{k}},$$

più concisamente

$$(60 b) \quad w_n = \frac{p_n L^4}{(n\pi)^4 B^{(n)}}.$$

Formola notevole la (60, a, b) per calcolare, nei casi pratici, l'inflessione w (non però le rotazioni agli estremi) degli svariati tipi di travi considerati nella fig. 30.

Caso in cui si ha sforzo assiale e deformazione per taglio.

Se agisce uno sforzo assiale N si ha, addittivo un carico p_N ed un taglio Q_N ,

$$p_N(x) = -(Nw')' \quad , \quad Q_N = Nw'$$

e la (54)* diviene

$$(54)** \quad \boxed{(\bar{B}w'')'' - \left(\bar{B}\left(\frac{Q}{k}\right)'\right)'' - \left(\bar{B}\left(\frac{Nw'}{k}\right)'\right)'' + (Nw')' = p(x)}.$$

Le condizioni agli estremi, per diretta sostituzione nel principio variazionale (56) di Q con $Q + Nw'$ ed aggiungendo il noto termine $-\frac{1}{2}Nw'^2$, si sintetizzano nella

$$\boxed{\left\{ \bar{B}w'' - \bar{B} \left[\left(\frac{Q}{k}\right)' + \left(\frac{Nw'}{k}\right)' \right] \right\} \delta w' - \left\{ (\bar{B}w'')' + Nw' - \left[\bar{B}\left(\frac{Q}{k}\right)' + \bar{B}\left(\frac{Nw'}{k}\right)' \right] \right\} \delta w = 0 \quad \text{in } x = 0, L.}$$

Per $p(x) = 0$ e \bar{B} , k , N costanti, la (54)** diviene

$$(54 a)** \quad \bar{B} \left(1 - \frac{N}{k}\right) w^{iv} + Nw'' = 0$$

e da questa si ha, per gli appoggi snodati in $x = 0, L$, posto

$$w = w_n \sin \lambda_n x$$

e posto ancora

$$\bar{N}_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \bar{B},$$

con che \bar{N}_n vien definito come l' n^{imo} carico critico per la flessorigidità \bar{B} (collegamenti rigidi, cioè per $k \simeq \infty$) le relazioni generali (cfr. la (60 b));

$$(61) \quad \boxed{N_n = \frac{\bar{N}_n}{1 + \frac{\bar{N}_n}{k}} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B^{(n)}}.$$

Da qui si vede che, per $\bar{N}_1 \gg k$ (k ha, ripetiamo, le dimensioni di una forza) sicché $\bar{N}_n = n^2 \bar{N}_1$ è, per $n > 1$, anche più fortemente maggiore di k , si ha in generale per ogni n , e sempre più rapidamente con n crescente,

$$N_n \sim k$$

e in particolare, indipendentemente dalla condizione $\bar{N}_1 \gg k$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = k.$$

Ciò significa che, per effetto del taglio, lo spettro critico N_n ($n = 1, 2, \dots$) anziché ordinarsi secondo i quadrati dei numeri interi si addensa sul valore, indipendente da L , $N_\infty = k$.

18. - *Estensione delle deduzioni del n. 17 al caso di archi collegati secondo gli schemi a), b), c), d), f) della fig. 30.*

Con quanto precede abbiamo ormai la possibilità di perfezionare le deduzioni fatte ai n.n. precedenti e di affrancarci dai dubbi ch'esse comportano per quel certo termine $k_w^{(s)}$ o $k_u^{(t)}$ che si addiziona costante al carico critico per la stabilità nel piano Π e trasversalmente a Π .

Sembra, per quanto precede, spontaneo porre nelle (40) del n. 12 o nella derivata (43) del n. 13, che dà l'equazione per il moltiplicatore critico di N_o ed M_o , al posto di B_r un \mathfrak{B}_r dato secondo la (54 a)***, e omettere il termine $\int k_u^{(t)} u'^2 ds$ nella espressione (37) di W con ché, in C^{**} della (43) del n. 13 viene a mancare il termine $k_u^{(t)} R^2$. Posto quindi

$$\mathfrak{B}_r = \bar{B}_r \left(1 - \frac{\lambda N_o}{k_u^{(t)}} \right)$$

la (43) al n. 13 si scrive, con $N_o = q_o R$,

$$(43)^* \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\mathfrak{B}_r^* + C^* x^2}{R} - \lambda \left(M_o + q_o \frac{h}{2} R \right) & , \quad \left(\frac{\mathfrak{B}_r + C}{R} - \lambda M_o \right) x^2 \\ \frac{\mathfrak{B}_r + C}{R} - \lambda M_o & , \quad \frac{\mathfrak{B}_r x^2 + C^{**}}{R} - \lambda (M_o + N_o R) \end{array} \right| = 0$$

con

$$\mathfrak{B}_1^* = \mathfrak{B}_1 + B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2} \cdot (1 + \chi^4) + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2$$

$$C^* = C + k_w^{(s)} \varepsilon^2 - 2 B_2 \frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

$$C^{**} = C + (k_u^{(s)} + k_u^{(f)}) \frac{R^4}{\chi^2} \quad , \quad \mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \chi^2 \lambda N_0$$

ferma restando l'osservazione fatta per la (43) che, in prima e ampiamente sufficiente approssimazione si potrà porre $\mathfrak{D}^* = D$. Indicato con $\lambda_{cr}^{(1)}$ il moltiplicatore critico così trovato si avrà l'approssimazione successiva ponendo $\mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \chi^2 \lambda_{cr}^{(1)} N_0$; $k_w^{(s)}$, $k_u^{(s)}$, $k_u^{(f)}$ essendo dati dalle (20)*, (20 a)*, (22)*, (22 a)*, (25) di 5) e 9) del n. 9 e μ^{*2} dalla (49) del n. 16.

Questa equazione (43)* è veramente l'equazione delle equazioni della stabilità trasversale. Si tratta ora di vederla in atto in alcuni casi particolari, utili in generale e interessanti a titolo di controllo della sua validità. Consideriamo il caso notevole:

$$N = N_0 = \text{cost.}, \quad M_0 = 0,$$

$k_w^{(s)}$, $k_u^{(s)}$, $k_u^{(f)}$ nulli (assenza di stilate e funi di controvento) e per $h = 0$.

Si trascura $B_2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{R^2}$ e $N_0 \varepsilon^2$. Si ha, inutile essendo l'introduzione del moltiplicatore λ ,

$$(43 a)^* \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1^* + C\chi^2 & (\mathfrak{B}_1 + C) \chi^2 \\ \frac{\mathfrak{B}_1 + C}{R^2} & \frac{\mathfrak{B}_1 \chi^2 + C}{R^2} - N \end{vmatrix} = 0$$

con

$$\mathfrak{B}_1 = \bar{B}_1 \left(1 - \frac{N}{k_u^{(f)}} \right),$$

$$\mathfrak{B}_1^* = \bar{B}_1 \left(1 - \frac{N}{k_u^{(f)}} \right) + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 = \mathfrak{B}_1 + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2.$$

Sviluppando si ottiene l'equazione, quadratica in N,

$$(62) \quad N = \frac{1}{R^2} \frac{\mathfrak{B}_1 C (\chi^2 - 1)^2 + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 (\mathfrak{B}_1 \chi^2 + C)}{\mathfrak{B}_1 + \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 + C\chi^2},$$

potendosi porre senz'altro $\mathfrak{D}^* = D$ salvo a ripetere il calcolo, una volta trovato l' $N_{cr}^{(1)}$ di prima approssimazione, per $\mathfrak{D}^* = D - \mu^{*2} \chi^2 N_{cr}^{(1)}$. Per avere una visione del gioco delle parti ricerchiamo per $\mathfrak{D}^* = D$ le radici, sempre reali, N_1 ed N_2 come ascisse, nel piano N, y, dei punti di intersezione della parabola

$$(62 a) \quad y_1 = N \left[\left(1 + \frac{\mu^{*2} D \varepsilon^2 + C\chi^2}{\bar{B}_1} \right) - \frac{N}{k_u^{(f)}} \right]$$

con la retta

$$(62 b) \quad y_2 = \left(1 - \frac{N}{k_u^{(f)}} \right) \frac{1}{R^2} [C (\chi^2 - 1)^2 + \mu^{*2} D \varepsilon^2 \chi^2] + \frac{\mu^{*2} D \varepsilon^2}{R^2} \frac{C}{\bar{B}_1}.$$

Queste y_1, y_2 , in generale si semplificano notevolmente. Infatti, se è, come soventemente, $\bar{B}_1 = D\varepsilon^2 + B_1 \simeq D\varepsilon^2$, ($D = 2 EA_1$), $\bar{B}_1 \gg Cx^2$, si può porre

$$(63) \quad \frac{\mu^{*2} D\varepsilon^2 + Cx^2}{\bar{B}_1} \simeq \mu^{*2}, \quad \frac{\mu^{*2} D\varepsilon^2 x^2}{R^2} \simeq \frac{\mu^{*2} \bar{B}_1 x^2}{R^2}, \quad \frac{Cx^2}{\bar{B}_1} \sim 0.$$

Segue

$$(62 a)' \quad y_1 \cong N \left(1 + \mu^{*2} - \frac{N}{k_u^{(l)}} \right), \quad (62 b)' \quad y_2 \cong \left(1 - \frac{N}{k_u^{(l)}} \right) \frac{\mu^{*2} D\varepsilon^2 x^2}{R^2}.$$

Nel grafico fig. 33 si vede bene quanto la soluzione effettiva può scostarsi dalla soluzione $N_{cr} = k_u^{(l)}$ e in un caso specifico come le (62 a)', (62 b)' possono sostituire le (62 a), (62 b). In formole, posto

$$(64) \quad \boxed{v_1 = \frac{D\varepsilon^2 x^2}{k_u^{(l)} R^2}, \quad v_2 = \frac{1}{2} [1 + \mu^{*2} (1 + v_1)]}, \quad \left(x = \frac{\pi}{2\psi_0} \right)$$

si ha concisamente dalle (62 a)', (62 b)' ricordando per μ^{*2} le (48 a, b, c), (49) del n. 16; per $k_u^{(l)} = k$ le importanti (58) del n. 17 che esprimono sinteticamente tutti i possibili collegamenti,

$$(65) \quad \boxed{N_{1,2} = k_u^{(l)} v_2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \mu^{*2} \frac{v_1}{v_2^2}} \right]}.$$

Poiché per definizione di v_1 e v_2 è, come facilmente si constata, $\mu^{*2} v_1 < v_2^2$, le radici sono sempre reali e positive; interesse pratico ha naturalmente la sola radice inferiore N_1 , quella che dà il carico critico N_{cr} .

Per $R \rightarrow \infty$, $2\psi_0 \rightarrow 0$ così che $R/x \rightarrow L/\pi$ non si può passare al limite sulla (65) ma occorre rifarsi alla (62) per riprendere i termini trascurati e non più trascurabili poiché si fa crescere x . Tali termini sono precisamente:

$$C(x^2 - 1)^2 \quad \text{e} \quad Cx^2.$$

Si ha allora, per x molto grande,

$$y_1 = N \frac{Cx^2}{\bar{B}_1}, \quad y_2 = \left(1 - \frac{N}{k_u^{(l)}} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 Cx^2$$

e quindi, da $y_1 = y_2$, in conformità con la (61) del n. 17,

$$N = \frac{\bar{N}}{1 + \frac{\bar{N}}{k_u^{(l)}}} \quad \text{con} \quad \bar{N} = \frac{\pi^2}{L^2} \bar{B}_1.$$

Ma occorre considerare con le (64), (65) quanto si va a dire nel n. seguente.

19. - N_{cr} per deformate trasversali prive di estensione.

Il termine $\mu^* D\varepsilon^2$ ha, come si è visto, un ruolo notevole. Infatti, quando lo si ometta - ad esempio se x della (48 a) del n. 16 è piccolo perchè i collegamenti hanno un basso $B_2^{(l)}$ - i tipi c), d), e), f), della fig. 30 del n. 17 - si hanno due radici N_1, N_2 di cui l'inferiore, quella che interessa,

resta sempre legata alla torsiorigidezza C secondo la (43 *b*) del n. 13 per $k_u^{(0)} = 0$, specifica dell'arco solitario. Si ha precisamente per $\bar{B}_1 \gg C\kappa^2$, dalla (62) del n. 18,

$$(66) \quad N_{1,2} = \begin{cases} \frac{C}{R^2} (1 - \kappa^2)^2 \\ k_u^{(0)} \end{cases}.$$

Quindi poiché all'espressione con C compete generalmente il valore inferiore anche se $C = \sum_i C_i$, sarà N sempre dell'ordine dell' N_{cr} dell'arco solitario, quindi in ogni caso alquanto basso se molto opportunamente non vien fatto un collegamento a sezione chiusa (trave tubolare) nel qual caso C è tanto elevato da portare ad un N_{cr} elevato anche secondo la originaria (43 *b*) di Timoshenko se è $k_u^{(0)} = 0$. Però, quando si usino le (43)* e (43 *a*)* e (62, *a*, *b*) del n. 18, può avvenire che il termine $\mu^* D\epsilon^2$ porti ad un N_1 superiore a quello che si può avere considerando una deformata priva di estensione - quindi tale per cui il $D\epsilon^2$ non interviene. Come è noto, l'assenza di estensione comporta almeno un nodo centrale, quindi un valore doppio di κ . Anche considerando gli archi solitari privi di collegamenti si ha già un valore di N_{cr} sensibilmente superiore a quello in assenza di nodi, dovendosi sostituire nella (43)* (43 *a*)* e derivata (66) per $\mu^* = 0$, 2κ a κ . Ma questo valore non corrisponde all'effettivo che può esser in ogni caso superiore in conseguenza della resistenza che oppone il controventamento alla formazione della deformazione priva di estensione. Per studiare questo caso importante rileviamo che dall'espressione della deformazione $e_\psi^{(1)}$ del 1° ordine data dalla (17) del n. 9, particolarizzata per $w = 0$, precisamente la

$$e_\psi^{(1)} = \frac{\dot{v}_i + \epsilon_i \varphi}{R},$$

si trae la condizione di non estensione quando le costole abbiano collegamenti che consentano un mutuo scorrimento relativo.

Si ha precisamente, da $e_\psi^{(1)} = 0$,

$$(67) \quad \dot{v}_i + \epsilon_i \varphi = 0$$

e quindi, integrando,

$$(67 a) \quad v_i = - \int \frac{\epsilon_i \varphi}{R} ds + c$$

con c costante arbitraria additiva. Dovendosi avere agli estremi $v_i(0) = v_i(2\psi_0) = 0$, posto

$$(68) \quad \varphi = A \sin n\kappa\psi, \quad \kappa = \frac{\pi}{2\psi_0}$$

si vede che, per $\epsilon_i = \text{cost.}$, posto $n = 2, 4, 6 \dots$; si ha $c = A \frac{\epsilon_i}{n\kappa}$ e quindi

$$(69) \quad v_i = A\epsilon_i \frac{1 - \cos n\kappa\psi}{n\kappa} \quad (n = 2, 4, 6 \dots).$$

Per 2 costole eguali è $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, quindi gli scorrimenti (spostamenti tangenziali) v_i sono eguali ed opposti. Ora, a questi scorrimenti corrisponde una deformazione dei traversi nel piano tangente alla volta passante per essi (ci limitiamo a questo solo tipo di collegamento) che può dare un contri-

buto per elevare l' N_{cr} . Questo contributo è praticamente nullo se i traversi sono sottili ($B_1^{(t)} \sim 0$) anche se alti, e cresce con il crescere di $B_1^{(t)}$.

Osservando la fig. 31 si trova facilmente che una forza $H = 1$ provoca, nelle evidenti ipotesi di deformazione, uno spostamento

$$(70) \quad \delta = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^3}{B_1^{(t)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot \Delta}{6 B_{1,r}} \cdot \frac{d}{2} \right\} = \frac{d^3}{12 B_1^{(t)}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{d} \frac{B_1^{(t)}}{B_{1,r}} \right\}.$$

Pertanto, allo spostamento $2v$ corrisponde una forza $H = 2v : \delta$ che fa un lavoro

$$\frac{1}{2} H \cdot 2v = \frac{1}{2} (2v)^2 \cdot \frac{12 B_1^{(t)}}{d^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{B_1^{(t)}}{B_{1,r}} \frac{\Delta}{d}}$$

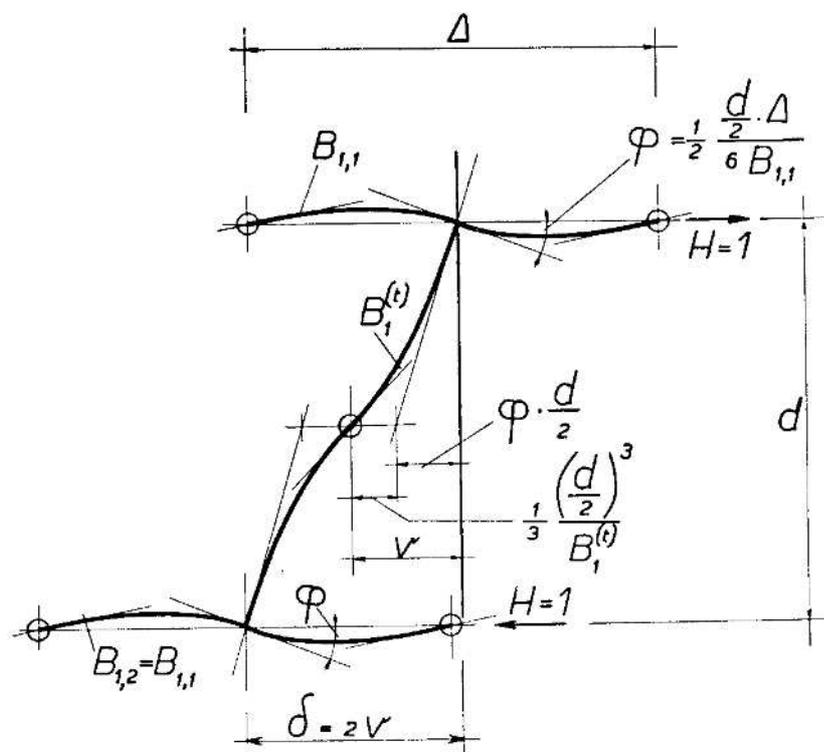


Fig. 31.

Questo lavoro va rapportato all'intervallo Δ . Quindi, ove si ponga

$$(71) \quad k_v = \frac{12 B_1^{(t)}}{\Delta d^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{B_1^{(t)}}{B_{1,r}} \frac{\Delta}{d}},$$

sarà da aggiungere, al complessivo lavoro di deformazione W , il termine

$$(72) \quad W_v = \frac{1}{2} \int k_v (2v)^2 ds.$$

Ponendo per v l'espressione (69) si ha con $L = 2 R \psi_0$,

$$(72 a) \quad W_v = \frac{1}{2} \int k_v A^2 (2\varepsilon)^2 \frac{(1 - \cos n\alpha\psi)^2}{n^2 \alpha^2} R d\psi = \frac{k_v}{2} \frac{A^2}{n^2 \alpha^2} \cdot (2\varepsilon)^2 \cdot \frac{3}{2} L,$$

Ora si può pensare che tutti i termini dell'equazione (43)* o della particolarezzazione (43 a)* siano ottenuti, anziché attraverso le euleriane (40), ponendo direttamente nel funzionale $\Phi = W + \lambda (\varrho_2^* - \varrho_2)$

$$(73) \quad u = A_2 \sin \kappa \psi \quad , \quad \varphi = A_1 \sin \kappa \psi \quad ,$$

con A_1, A_2 fattori a priori incogniti.

Allora, la variazione rispetto a φ ed u si riduce alla variazione rispetto alle due variabili A_1 ed A_2 . Salvo il fattore $L/2$ che deriva da

$$\int \sin^2 n \kappa \psi R d\psi = \frac{L}{2} \quad (L = 2 R \psi) \quad ,$$

le equazioni in A_1, A_2 che così si ottengono sono le stesse che si hanno ponendo le (73) nelle euleriane (40) per φ ed u , si intende modificate per il contributo di W_φ secondo la (72), (72 a). In tal guisa si è portati a scrivere una equazione di compatibilità analoga alla (43)* del n. 18 salvo a sostituire

$$(74) \quad \mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 \quad \text{con} \quad \mu^{**2} \mathfrak{D} \varepsilon^2$$

dovendosi subito rilevare che la tensio-rigidezza D si fa intervenire a solo titolo formale (sostituzione formale di $\mu^{*2} \mathfrak{D}^* \varepsilon^2 \simeq \mu^{*2} D \varepsilon^2$ con $\mu^{**2} D \varepsilon^2$) traendola non da elementi inerenti alla estensione (che non ha luogo) ma dalla flessorigidezza \bar{B}_1

$$\bar{B}_1 \simeq D \varepsilon^2.$$

Rilevando che $2 \varepsilon = d$, tenendo presente il fattore $L/2$ che è stato stralciato si ha così in definitiva

$$(74 a) \quad \mu^{**2} = \frac{36}{(2 \kappa)^2} \frac{R^2}{d \cdot \Delta} \frac{B_1^{(l)}}{B_1} \left(\frac{i_1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{B_1^{(l)} \Delta}{B_1 d}}$$

essendosi posto, per lasciare in evidenza, per analogia formale con le (43)*, (43 a)*, la tensorigidezza (che però non ha più ruolo),

$$B_1 = D i_1^2 = E J_1 : A.$$

Pertanto, per l' N_{cr} del caso non estensionale, la scrittura delle, poniamo (43)** e (43 a)** in luogo delle (43)* e (43 a)* si può anche omettere bastando dire che in queste ultime e derivate va semplicemente posto 2κ in luogo di κ , quindi $4 \kappa^2$ in luogo di κ^2 , e va sostituito μ^{*2} della (49) n. 16 con il μ^{**2} della (74 a), e \mathfrak{D}^* , della (51) n. 16, con D .

Ciò posto il problema della stabilità trasversale di archi-costole comunque collegati è più o meno risolto.

20. - Esempi numerici con riguardo all'arco sul Gambellato per il tratto Bologna-Firenze dell'Autostrada del Sole.

Con riguardo alle grandi arcate del Merizzano e del Gambellato passiamo senz'altro a tradurre in numeri i risultati ora conseguiti.

In base alle deduzioni che precedono possiamo ormai calcolare gli sforzi assiali critici N_{cr} per flessione, nel piano e fuori del piano Π , della grande

arcata del Gambellato. Consideriamo la fase esecutiva in cui si hanno due costole sole accoppiate con traverse, secondo le caratteristiche geometriche evidenti in figg. 32-32 a e qui in appresso riportate, destinate a sopportare tutto il peso, considerato incoerente sino alla maturazione, dell'impalcato.

Per il caso che si considera si ha

$$L = 123,71 \text{ m} \quad ; \quad f = 36,68 \text{ m} \quad ; \quad \text{risulta } \psi_0 = 61^\circ 20' = 3680'$$

$$R = 70,50 \text{ m} \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{2\psi_0} = \frac{10800}{7360} = 1,4675 \quad , \quad \alpha^2 = 2,1535 .$$

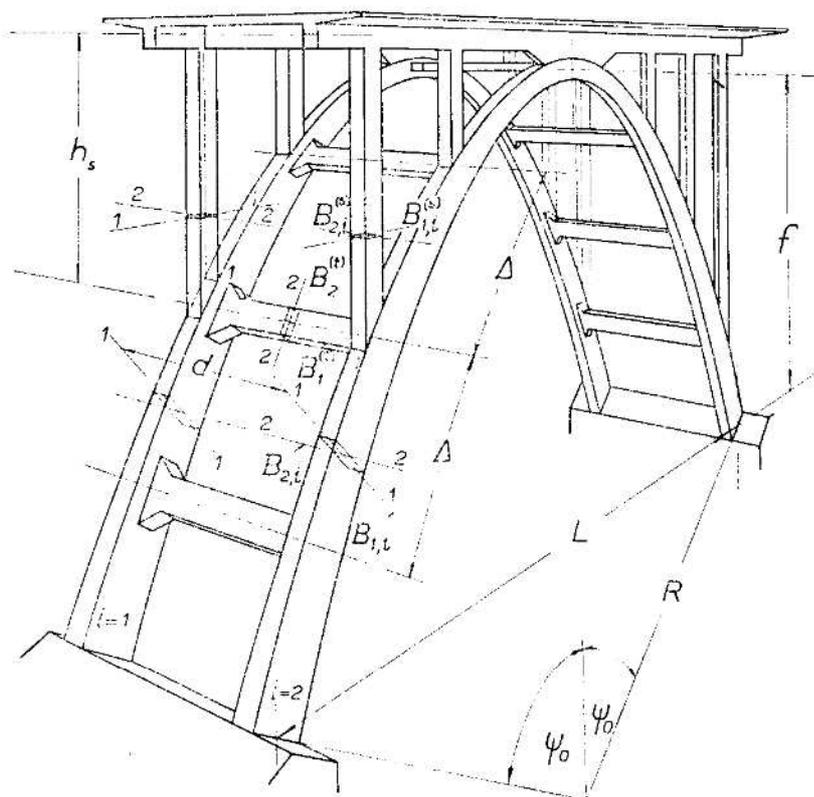


Fig. 32.

Si assume

$h_{s,med} = 15,00 \text{ m}$, $d = 6,30 \text{ m}$, $\varepsilon = \frac{d}{2} = 3,15 \text{ m}$ e, con riferimento a valori medi delle sezioni resistenti delle costole,

$$A^{(1)} = 1,50 \times 1,10 = 1,65 \text{ m}^2 \quad ; \quad \mathfrak{A}_1^{(1)} = \frac{1}{12} 1,10 \times 1,50^3 = 0,3093 \text{ m}^4 ;$$

$$\mathfrak{A}_2^{(1)} = \frac{1}{12} \times 1,50 \times 1,10^3 = 0,1663 \text{ m}^4$$

$$A_1 = A_2 = 1,50 \times 2,18 = 3,27 \text{ m}^2 \quad ; \quad \mathfrak{A}_{1,1} = \mathfrak{A}_{1,2} = \frac{1}{12} \times 2,18 \times 1,50^3 = 0,6131 \text{ m}^4 ;$$

$$\mathfrak{A}_{2,1} = \mathfrak{A}_{2,2} = \frac{1}{12} 1,50 \times 2,18^3 = 1,2949 \text{ m}^4$$

$$A_1^{(2)} = \pi r^2 = 0,406 \text{ m}^2 \quad ; \quad \mathfrak{A}_1^{(2)} = \mathfrak{A}_2^{(2)} = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} 3,1416 \times 0,36^4 = 0,0126 \text{ m}^4 .$$

Ponendo provvisoriamente $E = 1$ si ha da $B_1 \cong E \cdot \mathfrak{J}_1$, $\varepsilon = \frac{d}{2}$;

$$\bar{B}_1 = 1 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 (A_1 + A_2) = D\varepsilon^2 = \frac{d^2}{2} A_1 = \frac{6,30^2}{2} \times 3,27 = 64,893 \text{ m}^4.$$

Per $\rho_w, k_w^{(s)}$ secondo le (20)* (20 a)*, per $n = 2$, dell'Osservazione a 5) del n. 9

$$\rho_w = \frac{B_2^{(s)} \cdot \Delta}{B_2 \cdot h_s} = \frac{0,0252 \times 14,50}{2,5898 \times 15,00} = 0,00940$$

$$k_w^{(s)} = \frac{12 \cdot B_2^{(s)}}{h_s \cdot \Delta} \cdot \frac{1}{1 + \rho_w} = \frac{12 \times 0,0252}{15,00 \times 14,50} \times \frac{1}{1,0094} = 0,0013772.$$

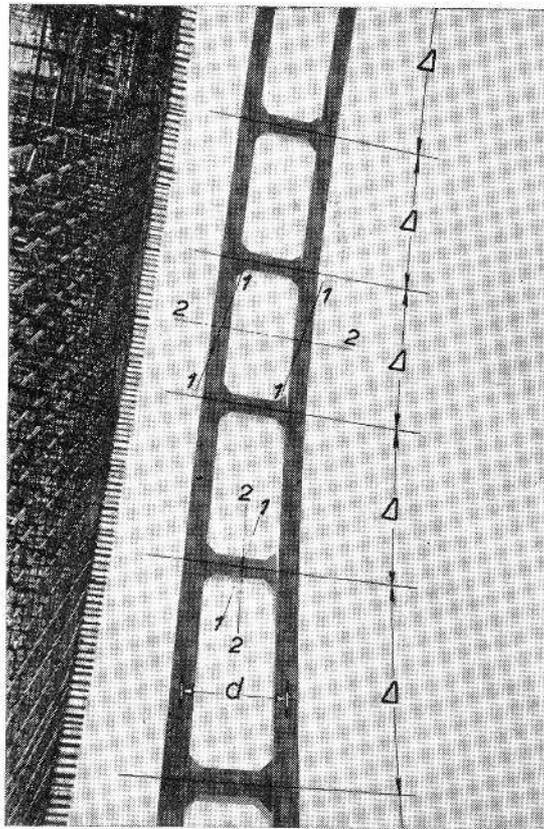


Fig. 32 a.

Sforzo assiale critico N_{cr} per flessione nel piano II.

Secondo la (46) del n. 14, posto $N_{cr} = R \cdot \lambda_{cr} q_0$, poiché $\pi/\psi_0 = 2\kappa$ si ha:

$$\begin{aligned} N_{cr} &= \lambda_{cr} \cdot R \cdot q_0 = \frac{B_2}{R^2} [4\kappa^2 - 1] + k_w^{(s)} \cdot \frac{4 \cdot \kappa^2}{4\kappa^2 - 1} = \\ &= E \cdot \frac{2,5898}{70,50^2} [4 \cdot 2,1535 - 1] + E \cdot 0,0013772 \cdot \frac{4 \cdot 2,1535}{4 \cdot 2,1535 - 1} = \\ &= E \cdot 0,0039673 + E \cdot 0,0015580 = E \cdot 0,0055253. \end{aligned}$$

Per $E = 2.000.000 \text{ tm}^{-2}$ è $N_{cr} = 11.506 \text{ to.}$

Sforzo assiale critico N_{cr} per flessione fuori dal piano II.

Dalle (22)*, (22 a)* a 5) del n. 9

$$\rho_u = \frac{B_1^{(l)} \Delta}{B_1 d} = \frac{0,3093 \times 14,50}{1,2262 \times 6,30} = 0,58055$$

e quindi

$$k_u^{(l)} = \frac{12 B_1^{(l)}}{d \Delta} \frac{1}{1 + \rho_u} = \frac{12 \times 0,3093}{6,30 \times 14,50} \cdot \frac{1}{1 + 0,58055} = 0,025706.$$

Per le (48 c), (49) del n. 16 si ha

$$\alpha = 24 \frac{\beta_2^{(l)}}{A_1 \cdot d^2} \cdot \frac{R^2}{\Delta \cdot d} = 24 \frac{0,1663}{3,27 \times 6,30^2} \times \frac{70,50^2}{14,30 \times 6,30} = 1,6727$$

e quindi

$$\mu^{*2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{1,6727}{2,6727} = 0,62584$$

e da qui secondo le (64) del n. 18, poiché $D\epsilon^2 = \bar{B}_1$,

$$v_1 = \frac{1}{k_u^{(l)}} \cdot \frac{\bar{B}_1 \cdot x^2}{R^2} = \frac{1}{0,025706} \cdot \frac{64,893 \cdot 2,1535}{70,50^2} = 1,0937$$

$$v_2 = \frac{1}{2} [1 + \mu^{*2} \cdot (1 + v_1)] = 1,155173.$$

Segue per N_{cr} secondo la (65) dello stesso n. 18,

$$N_{1,2} = k_u^{(l)} \cdot v_2 \left[1 \mp \sqrt{1 - \mu^{*2} \cdot \frac{v_1}{v_2}} \right] = E \cdot 0,029694 \cdot \begin{cases} 0,3021 = E \cdot 0,008971 \\ 1,6979 = E \cdot 0,050417. \end{cases}$$

Naturalmente interessa il solo valore inferiore

$$N_{cr} = E \cdot 0,008971 \text{ to. e per } E = 2,0 \cdot 10^6, N_{cr} = 17.942 \text{ to.}$$

Per una migliore interpretazione del gioco delle parti conviene procedere graficamente. Occorre tracciare allora nel piano (N, y) le linee y_1, y_2 date dalle (62 a, b) del n. 18 e prender anche riferimento alle (62 a, b)' per Cx^2 trascurabile di fronte a \bar{B}_1 .

Considerando dapprima Cx^2 non trascurabile passiamo al calcolo di $C = G\Theta$ con G modulo d'elasticità torsionale.

Poiché è $G = E : 2(1 + \nu)$, per $E = 1$ sarà $G = 1 : 2(1 + \nu)$. Con riguardo al calcestruzzo si pone $\nu = 1/10$ con che per $E = 1$ è $G = 1 : 2,2 = 0,45$. Le sezioni essendo nel caso specifico rettangolari di lati: $h = 2,18 \text{ m}$, $b = 1,50 \text{ m}$; segue per la (12 b) del n. 8,

$$\begin{aligned} \Theta_1 = \Theta_2 &= \frac{h \cdot b^3}{3} \left(1 - 0,630 \frac{b}{h} + 0,052 \frac{b^5}{h^5} + \dots \right) = \\ &= \frac{2,18 \cdot 1,50^3}{3} \left(1 - 0,630 \frac{1,50}{2,18} + 0,052 \frac{1,50^5}{2,18^5} + \dots \right) = 1,40915 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

e quindi, rapportandosi ad $E = 1$, posto $\nu = 0,1$, $C = G\Theta = \frac{2 \cdot 1,40915}{2 \cdot 1,10} = 1,28104 \text{ m}^4$.

Per la retta y_2 si hanno le seguenti intercette nei punti A, B rilevabili dalla (62 b) del n. 18 per $D\varepsilon^2 \sim B_1$,

$$\overline{OA} = k_u^{(t)} \cdot \left(1 + \frac{\mu^{*2}}{(\alpha^2 - 1)^2 + \mu^{*2} \frac{D\varepsilon^2}{C} \alpha^2} \right) = 0,025706 \cdot 1,00899 = 0,02594$$

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \frac{1}{R^2} [C(\alpha^2 - 1)^2 + \mu^{*2} D\varepsilon^2 \alpha^2 + C\mu^{*2}] + \frac{\mu^{*2} C}{R^2} = \frac{1}{70,50^2} [1,28104 \cdot (2,1535 - 1)^2 + \\ &+ 0,62584 \cdot 64,893 \cdot 2,1535 + 1,28104 \cdot 0,62584] + \frac{0,62584 \cdot 1,28104}{70,54^2} = \\ &= 0,01810 + 0,00161 = 0,01971. \end{aligned}$$

Per la parabola y_1 passante per O, l'intercetta OC è secondo la (62 a)

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \left(1 + \mu^{*2} + \frac{C\alpha^2}{B_1} \right) k_u^{(t)} = \left(1 + 0,62584 + \frac{1,28104 \cdot 2,1535}{64,893} \right) \cdot \\ &\cdot 0,025706 = 0,042886. \end{aligned}$$

Il massimo si ha al mezzo di OC e vale:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{k_u^{(t)}}{4} \left(1 + \mu^{*2} + \frac{C\alpha^2}{B_1} \right)^2 = \\ &= \frac{0,025706}{4} \left(1 + 0,62584 + \frac{1,28104 \cdot 2,1535}{64,893} \right)^2 = 0,017887. \end{aligned}$$

Per $C(\alpha^2 - 1)^2$ trascurabile di fronte a $\overline{B_1}$ è secondo le (62 a)' e (62 b)' dello stesso numero e direttamente dalle espressioni di \overline{OA} , \overline{OB} ed \overline{OC} soprascritte $OA' = OA = k_u^{(t)} = 0,025706$,

$$\overline{OB}' = \frac{\mu^{*2} D\varepsilon^2 \alpha^2}{R^2} = \frac{0,62584 \cdot 64,893 \cdot 2,1535}{70,50^2} = 0,017596$$

e

$$\overline{OC}' = (1 + \mu^{*2}) \cdot k_u^{(t)} = (1 + 0,62584) \cdot 0,025706 = 0,041792$$

$$y_{\max} = \left(\frac{1 + \mu^{*2}}{2} \right)^2 \cdot k_u^{(t)} = 0,81292^2 \cdot 0,025706 = 0,016987.$$

In fig. 33 sono sovrapposte le (y_1, y_2) per il caso di cui si tratta, considerando (linea piena) e *non* considerando (linea a tratto) il contributo di C e si ritrovano praticamente i valori calcolati con le approssimate e speditive (64), (65). Valori che portano però oltre il limite di proporzionalità e che debbono essere corretti come si dirà in appresso.

Infine si calcolano gli N_{cr} con la formola del Timoshenko per le costole isolate. Avendosi, in base ai dati, i valori di C e B_1 per $E = 1$ già impiegati,

$$C = \frac{2\Theta}{2 \cdot 1,10} = 1,28104 \quad , \quad B_1 = 2 \beta_1 = 2 \cdot 1,2262 = 2,4524$$

risulta per la flessione nel piano II applicando la (46) del n. 14 per $k_w^{(s)} = 0$

$$N_{cr} = \frac{B_2}{R^2} [4\alpha^2 - 1] = \frac{2,5898}{70,50^2} [4 \cdot 2,1535 - 1] = 0,0039673 E$$

e per la flessione fuori dal piano Π , applicando la (43 b) del n. 13 per $k_u^{(t)} = 0$,

$$N_{cr} = \frac{C}{R^2} \cdot \frac{(1 - \alpha^2)^2}{1 + \frac{C\alpha^2}{B_1}} = \frac{1,28104}{70,50^2} \cdot \frac{(1 - 2,1535)^2}{1 + \frac{1,28104 \cdot 2,1535}{2,4524}} = 0,00016138 \cdot E.$$

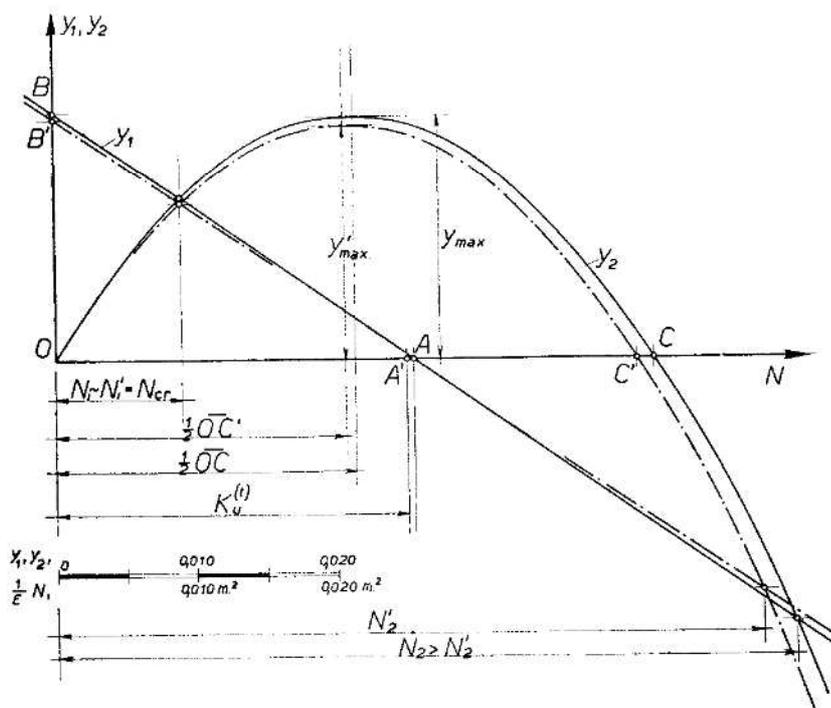


Fig. 33.

Infine per il caso della flessione fuori dal piano Π con una deformazione priva di estensione interessa in primo luogo il fattore μ^{**2} secondo la (74 a) del n. 19. Si trova

$$\begin{aligned} \mu^{**2} &= \frac{36}{4\alpha^2} \cdot \frac{R^2}{d \cdot \Delta} \cdot \frac{B_1^{(t)}}{B_1} \left(\frac{z_1}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{B_1^{(t)} \cdot \Delta}{B_{1,1} d}} = \\ &= \frac{36}{4 \cdot 2,1535} \cdot \frac{70,50^2}{6,30 \cdot 14,50} \cdot \frac{0,3093}{1,2266} \cdot \frac{0,187}{3,15^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{0,3093 \cdot 14,50}{0,6131 \cdot 6,30}} = 0,683639. \end{aligned}$$

Da qui si vede che si ha un μ^{**2} poco diverso dal μ^{*2} ; ne segue che dovendosi sostituire α con 2α le condizioni di stabilità sono più favorevoli. Si ha infatti ponendo nelle (64) (65) del n. 18, 2α in luogo di α , quindi $4\alpha^2$ in luogo di α^2 e μ^{**2} in luogo di μ^{*2} :

$$v_1 = \frac{1}{k_u^{(t)}} \cdot \frac{B_1 \cdot 4\alpha^2}{R^2} = \frac{1}{0,025706} \cdot \frac{64,803 \cdot 4 \cdot 2,1535}{70,50^2} = 4,37508$$

$$v_2 = \frac{1}{2} [1 + \mu^{**2} (1 + v_1)] = \frac{1}{2} [1 + 0,683639 (1 + 4,375084)] = 2,3373308$$

e da qui

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= k_u^{(0)} \cdot v_2 \left[1 \mp \sqrt{1 - \mu^{**2} \cdot \frac{v_1}{v_2^2}} \right] = \\ &= E \cdot 0,025706 \cdot 2,337308 \left[1 \mp \sqrt{1 - 0,683639 \cdot \frac{4,375084}{2,337308}} \right] = \\ &= E \cdot 0,0600828 \begin{cases} 0,32731589 = E \cdot 0,01966605 = N_{cr} \\ 1,67268411 = E \cdot 0,1004995. \end{cases} \end{aligned}$$

Risulta così un N_{cr} , non considerabile, più che doppio del precedente. Però, per traverse alte ma sottili può risultare un $\mu^{**2} \ll 1$ quindi un N_{cr} non estensionale inferiore all' N_{cr} con deformata senza nodi. Se ponessimo infatti $J_1^{(0)} \sim 0$ lasciando inalterato l' $J_2^{(0)}$, ad esempio aumentando l'altezza dei traversi, non resta che rifarsi alla (43 b) di Timoshenko poc'anzi considerata e porre 2κ in luogo di κ . Si ha allora

$$N_{cr} = E \cdot \frac{1,28104}{70,50^2} \frac{(1 - 4 \times 2,1535)^2}{1 + \frac{1,28104 \cdot 4 \cdot 2,1535}{2,4524}} = E \cdot 0,00271690.$$

un valore sensibilmente inferiore all'estensionale $N_{cr} = E \cdot 0,008971$ prima trovato!

21. - Il λ_{cr} per l'asta rettilinea sottoposta simultaneamente a flessione M_o , sforzo assiale N_o e torsione M_t .

Riprendiamo le (42) in u, w, φ per $R \rightarrow \infty$; poniamo per semplicità eguali a zero tutti i k e consideriamo invece, ove si tratti di una sezione resistente a doppio T, la flessorigidezza delle ali resistente alla torsione φ . Se il momento di inerzia per flessione nel proprio piano di ognuna delle dette ali, tra loro distanti h è J_h , la torsione φ provoca spostamenti $h/2 \cdot \varphi$ e quindi un'energia elastica di deformazione, additiva

$$W_f = \frac{1}{2} \int C_1 \varphi'^2 dx \quad \text{con} \quad C_1 = \frac{1}{2} \cdot E J_h h^2 (*).$$

Le (42) completate divengono, tenendo conto di δW_f quando si varia φ ,

$$(42 a) \quad \begin{cases} B_2 w^{IV} + \lambda M_t u''' + \lambda N_o w'' = 0 \\ B_1 u^{IV} - \lambda M_t w''' + \lambda N_o u'' + \lambda M_o \varphi'' = 0 \\ C_1 \varphi^{IV} - C \varphi'' + \lambda M_o u'' = 0, \end{cases}$$

e le condizioni agli estremi, tenendo anche conto di M_o, M_t ivi applicati,

$$(42 a)' \quad \begin{cases} (B_2 w'' + \lambda M_t u') \delta w' - [B_2 w''' + \lambda N_o w' + \lambda M_t u''] \delta w = 0 \\ (B_1 u'' - \lambda M_t w' + \lambda M_o \varphi) \delta u' - [B_1 u''' + \lambda N_o u' - \lambda M_o \varphi' - \lambda M_t w''] \delta u = 0, \\ C_1 \varphi'' \delta \varphi' + [C \varphi' - C_1 \varphi''' - \lambda M_o u'] \delta \varphi = 0. \end{cases}$$

(*) Per un profilo generico si ha $C_1 = EC_w$ con C_w warping-constant. per cui cfr. op. cit. in (2).

Sia $M_0 = 0$ e in $x = 0, l$; $u = w = 0$. Le (42 a) si riducono allora al 2° ordine. Si ha precisamente

$$(42 b) \quad \begin{cases} B_2 w'' + \lambda N_0 w + \lambda M_l u' = 0 \\ B_1 u'' + \lambda N_0 u - \lambda M_l w' = 0. \end{cases}$$

Si constata infatti che l'annullarsi di u e w agli estremi porta a soddisfare automaticamente le condizioni che seguono dalle (42 a)'

$$(42 a)'' \quad B_2 w'' + \lambda M_l u' = 0 \quad , \quad B_1 u'' - \lambda M_l w' = 0$$

per qualunque determinazione di $\delta u', \delta w'$.

Se $B_1 = B_2 = B$ e $\lambda = 1$, le (42 b) si identificano con le note equazioni di Greenhill. Per queste si ha in rigore, con un artificio che riesce però nel solo caso specifico, la condizione di stabilità di Greenhill

$$(76) \quad \sqrt{4 B N_0 + M_l^2} \leq \sigma B,$$

essendosi posto, anche con riguardo a quanto segue,

$$(77) \quad \sigma = \frac{2\pi}{l}.$$

Lasciando aperta la ricerca del λ_{cr} per le (42 a) o (42 b) con $B_1 \neq B_2$, ricerca resa difficile dalla presenza simultanea di derivate d'ordine pari e dispari, (difficile quando si miri a formole compendiose del tipo della (76)) tentiamo qui qualche soluzione particolare. Soddisfi questa alle condizioni ai limiti (42 a)' involgendo, con riguardo alle figg. 34, 35, 36, l'*incastro* ($u' = 0$) per la flessione secondo u (quindi nel piano normale a quello del momento flettente M_0), lo snodo ($w'' = 0$) rispetto a w ; sia precisamente, A_1, A_2, A_3 designando fattori a priori incogniti

$$(78) \quad u = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x\right) \quad , \quad w = A_2 \sin \frac{2\pi}{l} x \quad , \quad \varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x\right)$$

oppure, quando $M_l = 0$,

$$(78 a) \quad u = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x\right) \quad , \quad w = A_2 \sin \frac{\pi}{l} x \quad , \quad \varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x\right).$$

Entrando con le (78) nelle (42 a), risulta un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee nelle A_1, A_2, A_3 di cui la condizione di compatibilità è, con riguardo alle (78),

$$(79) \quad \begin{vmatrix} B_2 \sigma^2 - \lambda N_0 & -\lambda M_l \sigma & 0 \\ \lambda M_l \sigma & -(B_1 \sigma^2 - \lambda N_0) & \lambda M_0 \\ 0 & \lambda M_0 & -c \end{vmatrix} = 0$$

con

$$(79)' \quad \sigma = \frac{2\pi}{l} \quad , \quad c = C_1 \sigma^2 + C$$

oppure, con riguardo alle (78 a) per $M_t = 0$,

$$(79 a) \quad \begin{vmatrix} B_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \lambda N_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(B_1 \sigma^2 - \lambda N_0) & \lambda M_0 \\ 0 & \lambda M_0 & -\mathcal{E} \end{vmatrix} = 0.$$

A titolo di controllo di queste equazioni in λ di cui la radice inferiore dà il λ_{cr} , consideriamo i casi estremi seguenti:

1) *Caso di Eulero*, $N_0 \neq 0$, $M_0 = M_t = 0$.

Si ha, come deve aversi,

$$(79, 79 a)_1 \quad \lambda_{cr} N_0 = N_{cr} = \begin{cases} B_1 \sigma^2 \\ B_2 \frac{\pi^2}{l^2} \end{cases} \quad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l} \right).$$

2) *Caso di Prandtl-Michell*, $M_0 \neq 0$, $N_0 = 0$, $M_t = 0$.

Si ha, per l'incastro secondo u ,

$$(79)_2 \quad \lambda_{cr} M_0 = M_{cr} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\mathcal{E} B_1}.$$

3) *Caso di Greenhill*, $M_t \neq 0$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$.

Si ha

$$(79)_3 \quad \lambda_{cr} M_t = M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{B_1 B_2}$$

che per $B_1 = B_2$ coincide con la formola di Greenhill.

4) *Caso di Eulero-Greenhill*, $N_0 \neq 0$, $M_t \neq 0$, $M_0 = 0$ (cfr. fig. 34).



Fig. 34.

Si ha l'equazione in λ

$$y_1(\lambda) = y_2(\lambda)$$

con

$$(79 a)_4 \quad y_1(\lambda) = (B_1 \sigma^2 - \lambda N_0) (B_2 \sigma^2 - \lambda N_0) \quad , \quad y_2 = \lambda^2 M_t^2 \sigma^2.$$

Da un grafico nel piano (y, λ) si riconosce immediatamente che il λ_{cr} risulta inferiore alle due radici di $y_1(\lambda) = 0$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{B_{1,2}}{N_0} \sigma^2.$$

Per $B_1 = B_2 = B$ si ha

$$(80) \quad \lambda_{cr} = \frac{B\sigma^2}{N_o + M_t \sigma}$$

5) *Caso di Eulero, Prandtl-Michell, Greenhill*, $N_o \neq 0$, $M_o \neq 0$, $M_t \neq 0$, (cfr. fig. 35).

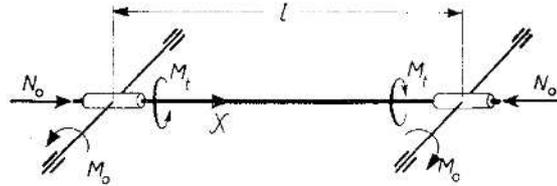


Fig. 35.

Si ha l'equazione in λ

$$y_1(\lambda) = y_2(\lambda)$$

con

$$(79)_5 \quad y_1(\lambda) = (B_2 \sigma^2 - \lambda N_o) [(B_1 \sigma^2 - \lambda N_o) \mathcal{E} - \lambda^2 M_o^2] \quad , \quad y_2(\lambda) = \lambda^2 M_t^2 \mathcal{E} \sigma^2$$

La discussione della $(79)_5$ nel piano (γ, λ) è immediata. In particolare, se $N_o = 0$, si ha il caso di Prandtl-Michell, Greenhill (cfr. fig. 36)



Fig. 36.

e per il λ_{cr}

$$(81) \quad \lambda_{cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \frac{\sqrt{B_1 B_2}}{M_t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{\mathcal{E}} \left(\frac{M_o}{M_t}\right)^2}}$$

22. - *Stabilità di più travate associate comunque caricate.*
Intervento di azioni aerostatiche come in fig. 37.

Accanto alla pressione del vento su le superficie investite (degli elementi strutturali e delle strisce di carico) va considerato, quando si tratta di strutture leggere, l'effetto di *portanza aerodinamica* sul piano d'impalcato, portanza che può arrivare a valori sì notevoli da provocare veri e propri rovesciamenti, del tutto imprevedibili in linea ordinaria di calcolo, di travate anche imponenti. Esempio gravissimo, quasi recente (1944), il rovesciamento

del ponte di Chester (Illinois) sul Mississippi⁽¹⁶⁾; una travata su due luci (2×400 m.) alta da 18,0 a 30,0 m., larga 8,7 m., pur essendo calcolata per vento a 160 km/h, per difetto di ancoraggio, che sembrò inutile, fu rovesciata e rovinata tutta nel fiume da un vento di velocità anche inferiore a quella prevista.

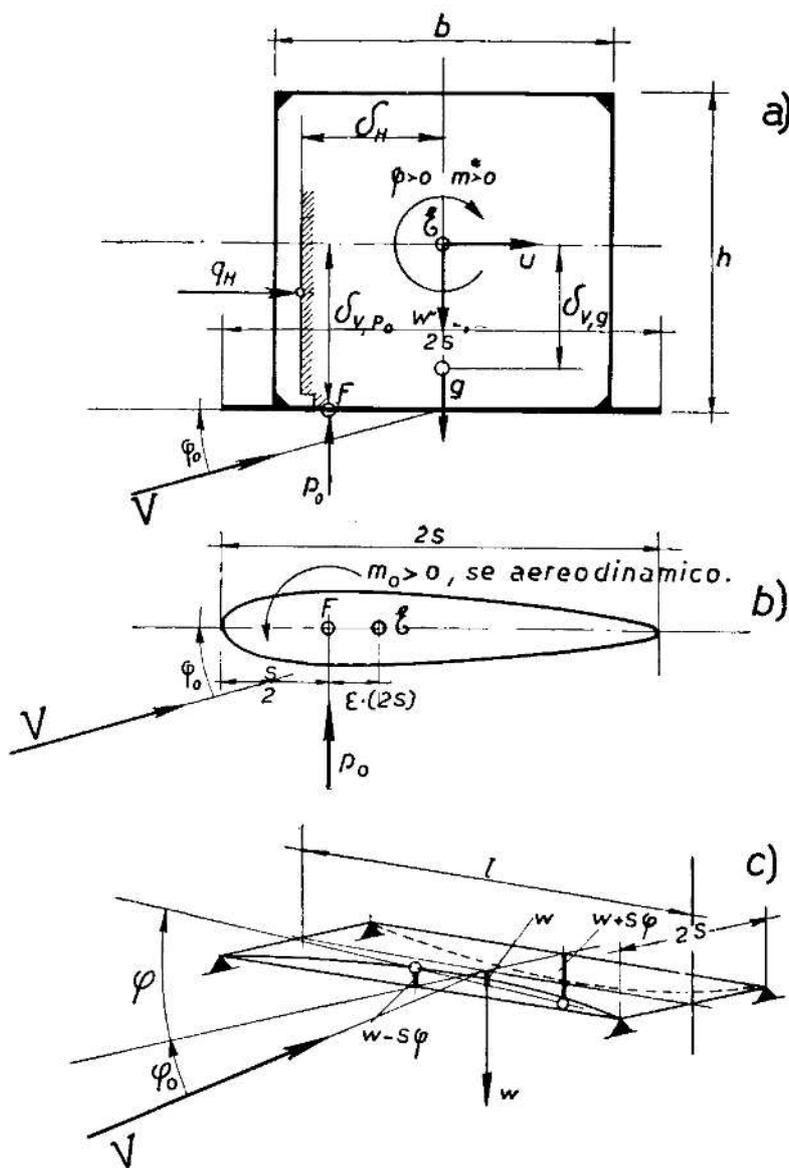


Fig. 37.

Evidentemente il piano d'impalcato funzionò come un'ala sotto vento spirante con tendenza verso l'alto, lieve ma sufficiente a dare il ribaltamento per effetto di *portanza* indipendentemente da certe forme di *instabilità aerostatica* che stanno alle soglie di più complesse *instabilità aerodinamiche* di

(16) Cfr. cit. in nota (5).

cui andiamo comunque a dire, almeno con riguardo alla prima, nel quadro generale delle considerazioni svolte.

Per l'azione di portanza su un profilo alare (cfr. fig. 37) valgono le relazioni notissime

$$(82) \quad p_o = C_p \rho V^2 \cdot (2s) \quad , \quad m_o = C_m \rho V^2 \cdot (2s)^2.$$

In queste è:

p_o la portanza (forza) per unità di profondità dell'ala di corda $2s$ che è misurata, al fuori tutto tra *bordo di entrata* (o d'attacco) e *bordo di uscita*. Tale forza è applicata in un punto notevole F , cosidetto *fuoco* del profilo alare, situato per convenzione universale ad *un quarto* (della corda $2s$) dal bordo di entrata;

m_o è il momento, riferito all'unità di lunghezza, che, per p_o in F , va applicato al profilo considerato rigido. I momenti aerodinamici positivi, per convenzione, hanno senso *picchiante* (antiorario per chi guarda il profilo ed ha il vento a sinistra). Ogni altro momento è, come φ , positivo in senso *cabrante*;

C_p, C_m coefficienti di *portanza* e di *momento*, funzioni (specifiche del profilo che si considera) della incidenza φ_o ;

V velocità della corrente di densità (massa per unità di volume) ρ . Per l'aria a $\sim 5^\circ$ è $\rho = 0,125 \text{ kg m}^{-3}$.

Per un profilo rettilineo è

$$(83) \quad C_p = \pi \sin \varphi_o \quad , \quad C_m = 0;$$

in questo caso a p_o in F corrisponde un momento $m_o = 0$; con ciò appare giustificata la scelta di F al quarto essendo il profilo rettilineo il più elementare e primiero profilo alare in Aviazione. Per profili di altri tipi, C_p e C_m si calcolano con metodi classici, teorici e sperimentali, di dominio dell'Aerodinamica. Si noti ancora che per i calcoli statici e dinamici, che seguono sempre quelli aereodinamici, il riferimento non si prende più in F ma in un punto elasticamente importantissimo, il cosidetto *centro elastico* \mathcal{E} . È questo, praticamente, il noto *centro di torsione o del taglio*, infine centro di oscillazione secondo φ . Se \mathcal{E} dista da F di $\varepsilon \cdot (2s)$ ed $\varepsilon > 0$ (in generale è $0 < \varepsilon < 1$) è contato verso destra, in direzione di V , che viene per convenzione sempre da sinistra, il momento $m_{o\varepsilon}$ da considerare in luogo di m_o è ⁽¹⁷⁾

$$(84) \quad m_{o\varepsilon} = C_{m\varepsilon} \rho V^2 (2s)^2$$

(17) Cfr. G. KRALL, *Autoeccitazione sotto vento costante dei ponti, delle torri e delle funi* in « Rend. Sem. Matematico di Milano », 1949. Là si riferisce l'eccentricità alla semicorda e si pone εl in luogo di $\varepsilon (2l)$ (la corda si indica con $2l$ anziché $2s$) poiché i calcoli aereodinamici sono là informati ai lavori di Prandtl-Birnbaum e Küssner nei quali le portanze ed i momenti (armonici) sono sempre riferiti alla semicorda e non alla corda come nelle espressioni ormai d'uso qui riportate. Però nella formola (4) di ⁽¹⁷⁾ quando si allude ai $C_{m\varepsilon}, C_m$ attuali si è posto inavvertitamente ε in luogo di $\varepsilon/2$ siccome occorre. Infatti, ε riferito ad l ($0s$) è doppio di ε riferito a $2l$ ($02s$) che interviene nelle formole (82), (84), (84a). Ciò non ha conseguenze nel resto del lavoro giacché tutti i calcoli sono fatti secondo le formole del Küssner e non secondo le (82) cui ivi si è accennato a solo titolo digressivo.