

Stabilità trasversale degli archi da ponte (*).

PRESENTAZIONE. — Qui si riferisce intorno a qualche studio dell'A. sulla stabilità trasversale e nel piano di strutture da ponte ad archi collegati in parallelo. Dopo un breve esame che mira a togliere talune oscurità in definizioni usuali della teoria della flessione delle barre curve (e della stessa teoria flessionale delle superficie) si dà una espressione generale del metodo energetico per l'analisi della stabilità. Questa espressione consente l'applicazione sistematica del metodo in ogni caso, senza ricorsi ad accorgimenti o quasi-stratagemmi particolari, di dominio di pochissimi. Si arriva così, anche in casi complicati, a formole definitive, pronte per i numeri, nelle quali appare in completa evidenza il vero gioco delle parti strutturali che concorrono alla formazione di quel *moltiplicatore critico* λ_{cr} della distribuzione dei carichi che dà la *sicurezza*. Dopo aver considerati gli aspetti limiti, quando il raggio di curvatura $R = R(\psi)$ della barra tende all' ∞ , che riguardano la deviazione laterale delle travate per flessione, torsione e sforzo assiale concomitanti ed aver anche esaminato l'azione delle forze aerostatiche e di quelle aerodinamiche, avanguardie delle temibilissime vibrazioni autoeccitate, si considera il problema della stabilità oltre il campo elastico. Così si dà una espressione $E_T(\sigma)$ del modulo di elasticità in fase critica in funzione della sollecitazione specifica σ , immediatamente calcolabile dalle sempre attuali *rette di Tetmajer*. Quelle stesse che, nel piano $\sigma_{cr}, l/i$ (l/i è la *snellezza*) tagliano le bicentinarie non meno attuali *iperboli di Eulero* determinando una *snellezza limite* sotto alla quale tali iperboli sono autentiche ingannatrici.

Il modulo $E_T(\sigma)$ può, ove si creda, essere sostituito dal modulo $E(\sigma)$ effettivo o dall' $E_K(\sigma)$ della *teoria dei due moduli* di v. Kármán.

Quanto segue è, in un certo senso, la sintesi di questioni sulla stabilità affacciate all'A. in molti lustri di attività progettistica; questa si figura (**) nelle immagini intercalate nel contesto di opere già realizzate, tutte dalla S.A.I. Ferrobeton di Roma, scelte conformi ai vari aspetti particolari, da esse stesse man mano suggerite, dell'importantissimo problema di cui si tratta. La tendenza alla generalità, il desiderio di cercare di metter a punto e render sistematiche nozioni anche abituali, ma talvolta non prive di oscurità, deriva invece dalla Scuola. Là infatti, nell'intercambio di idee tra cultori di Meccanica pura avviene infatti di ritrovarsi inevitabilmente su le sempre attuali questioni di Stabilità in generale.

(*) Dagli «Atti della Accademia Nazionale dei Lincei», Anno CCCIX - 1962. Memorie Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VIII - vol. VI - sez. 1^a.

(**) G. KRALL, *Complementi a due Note sui ponti in cemento armato* (1947 e 1950) in «Tecnica Italiana» Trieste, n. 8, 1959, n. 1, 1960. *Ueber neuere Konstruktionsmethoden im Brückenbau*, Vortrag an der ETH Zürich, in «Schweitzer Archiv», n. 5, 1951.

SULLA STABILITÀ TRASVERSALE DEGLI ARCHI DA PONTE COLLEGATI IN PARALLELO E CON L'IMPALCATO.

1. — *Premesse e generalità.*

Intorno alla stabilità trasversale di un arco circolare solitario vincolato alle imposte è fondamentale una ricerca di S. Timoshenko ⁽¹⁾ e l'esposizione che di essa dà nel suo trattato ⁽²⁾. In questa, non solo si perviene a formole definitive per la pressione critica p_{cr} sull'estradosso dell'arco o per il momento critico M_{cr} applicato agli estremi (nell'ipotesi che possano rotare nel piano Π dell'arco) ma si danno le basi per più generali trattazioni e sviluppi della quistione.

In quanto segue si cercano questi sviluppi con riferimento ad archi da ponte non isolati, non necessariamente circolari, comunque caricati, trasversalmente collegati tra loro e quindi agenti in parallelo per virtù di traverse, collegati all'impalcato stradale attraverso le stilate.

Il problema della stabilità di strutture siffatte implica la ricerca del minimo moltiplicatore $\lambda = \lambda_{cr}$ dei carichi esterni (distribuiti sull'arco, momenti nel piano Π e ad esso normali) per il quale si hanno configurazioni (*soluzioni*) prossime a quella di equilibrio e quindi instabili per un celebre teorema di Poincaré sullo *scambio della stabilità*.

La nozione ⁽³⁾ del *moltiplicatore critico* λ_{cr} è essenziale in tutti quei casi in cui il carico non dipende da un solo parametro (come nel caso del solo sforzo assiale costante, o del solo momento flettente o infine, del solo momento torcente costante in un'asta); perciò di tale nozione ci varremo anche se questa non è ancora molto usuale non solo per la valutazione del grado di sicurezza con cui, in campo elastico, il moltiplicatore λ_{cr} si identifica ma anche, a titolo di complemento, per valutare (n. 27) le conseguenze, utili o dannose, delle variazioni, volute o per difetto di costruzione, della linea d'asse di un arco da ponte.

Quanto al metodo per il calcolo del λ_{cr} ci rifacciamo al criterio del Dirichlet secondo la formulazione data da A. Föppl nel suo *Drang und Zwang (Stress and Strain)*. Secondo questa, il λ_{cr} viene ad esser definito come il minimo del funzionale.

$$(*) \quad \lambda_{cr} = \frac{W}{\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2}$$

W essendo l'energia elastica di deformazione, \mathcal{L}_2^* , \mathcal{L}_2 i lavori di 2° ordine, delle forze interne rispettivamente delle forze esterne (di carattere idrostatico ad

(1) S. TIMOSHENKO, *Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie*, «Z. f. M.», 1923, Heft. 5.

(2) S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, 7.10. McGraw-Hill, New-York, 1961.

(3) G. KRALL, *Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico*, «Rend. Acc. Lincei», fasc. 12, vol. I, 1946; *Stabilità dell'equilibrio elastico*, «Annali di Matematica pura ed applicata», ser. IV, Tomo XXIX, 1949; cfr. anche A. GALLI, *Scienza delle Costruzioni*, Vol. III: *Stabilità dell'equilibrio*. Ed. Pellerano-Del Gaudio, Napoli, 1956.

esempio) in termini degli *elementi variabili* di (*); u, v, w , spostamenti del punto generico del sistema.

Il criterio del Dirichlet-Föppl ed accanto a questo, più espressivo ma meno generale, di Bryan Timoshenko, sono i soli criteri energetici praticamente perseguibili. Naturalmente, in riguardo, dal punto di vista dell'*Elasticità per spostamenti finiti* si resta più o meno agnostici, in attesa del meglio. L'attesa si profila però in ogni caso assai lunga quando si legga l'ancora insuperata trattazione in merito data dal Trefftz nei *Proceedings of the 3rd International Congress of Applied Mechanics*, vol. III, Stockholm 1930. Ritornando al criterio del Dirichlet rileviamo subito ch'esso consente di superare, come vedremo, quelle difficoltà che incontra il metodo abituale del Bryan-Timoshenko nello studio delle barre curve. Difficoltà che si evitano tacitamente scrivendo direttamente, con intuizioni eccezionali ⁽²⁾, le equazioni – che sono poi le euleriane di (*) – degli equilibri prossimi ad una configurazione assegnata, quella di cui si studia la stabilità qualitativa o, per non abbandonare ⁽¹⁾ il metodo energetico, avvalendosi di una, la più facilmente intuibile, di quelle equazioni come condizionante le soluzioni che dà il metodo stesso. Ciò avviene sempre (cfr. ad esempio ⁽²⁾) nello studio delle pressioni critiche degli anelli, degli archi, degli involucri cilindrici ed infine nello studio delle barre soggette a torsione. Naturalmente per l'impiego del criterio del Dirichlet-Föppl occorre procurarsi elementi geometrici notevoli della deformazione quali i termini del 2° ordine: $e^{(2)}$ della deformazione; $d_2 A$ dell'area o volume racchiuso da una linea o superficie chiusa e la sua trasformata per u, v, w ; $\kappa^{(2)}$ delle caratteristiche della flessione, come si vedrà (n. 2) non sempre propriamente identificabili con le variazioni di curvatura come porta a credere la classica definizione di *change of curvature* ⁽⁴⁾ datane dal Love.

Quanto alle $\kappa^{(2)}$, qui faticosamente scritte (nn. 10, 14) per via geometrica intuitiva, merita rilevare che il prof. G. Ferrarese, qualche tempo dopo una sua utilissima revisione del presente lavoro, ha dato formole generali per le $\kappa^{(2)}$ et ultra valide addirittura per un solido tubolare a 4 parametri (u, v, w, φ). L'importanza di queste formole appare già in queste pagine, nei brevissimi complementi inseriti, in sede di stampa degli estratti, nei nn. 5, 10, 14. La nozione delle $e^{(2)}$, $\kappa^{(2)}$ e $d_2 A$ consente la immediata scrittura di \mathcal{L}_2^* ed \mathcal{L}_2 in ogni caso. Poiché non ci sono dubbi sulla scrittura per W secondo Love ⁽⁴⁾, con la (*) si è così ridotti ad un solo problema di ordinario calcolo delle variazioni.

Non occorre dire che nella espressione del λ_{cr} si cercherà di far apparire, per non ridursi a più o meno vane considerazioni, in formole definitive, pronte per i numeri, il vero gioco delle parti, cioè delle singole membrature che compongono la struttura. Così si potrà valutare in ogni singola fase di costruzione che conduce alla realizzazione dell'opera la *sicurezza*, data dal λ_{cr} , rispetto alla *deviazione laterale*. Non occorre dire come questa sia la più insidiosa forma di instabilità che si conosca nell'ambito statico; lo attesta tutta una casistica,

(4) A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cap. XXIV, Cambridge, University Press, 1927.

quasi classica di fatali inganni ⁽⁵⁾ o, nella miglior ipotesi, di precauzioni eccessive, frequenti nelle costruzioni in ferro ed in cemento armato particolarmente, dove la abbastanza recente nozione di viscosità ⁽⁶⁾ dei giovani calcestruzzi, negli effetti legata al λ_{cr} , può far calcare la mano sui controventamenti assai più che non occorra sicché alla fine restano, sin troppo evidenti, i segni di non uniformi e quindi inutili robustezze.

Va ben rilevato che le deduzioni che seguono sono valide solo e soltanto nel campo elastico. Ove questo sia superato il moltiplicatore critico λ_{cr} perde ogni significato e dà perciò una sicurezza illusoria, quindi ingannevole. In tal caso occorre sostituire alla nozione ordinaria di modulo d'elasticità quella, concettualmente non proprio adamantina, di moduli variabili con le sollecitazioni.

Come si sa, un tale rilievo, anzi richiamo, che risale a Navier, non ebbe inizialmente un gran seguito e solo dopo tutta una serie di gravi disastri (notevole quello del ponte di Münchenstein nel 1891) ebbe inizio un esame, prevalentemente sperimentale, della stabilità oltre il campo elastico. Merito particolarissimo spetta, notoriamente, a Tetmajer. I risultati delle sue sistematiche esperienze su aste caricate di punta, aventi tutta la praticamente possibile gamma di snellezze, sono compendiate in quelle *rette*, che portano il suo nome, e tagliano le *iperboli di Eulero* limitandole al campo elastico oltre al quale esse si sostituiscono praticamente sino alla rottura. L'estensione spontanea dei risultati di Tetmajer a quanto si ottiene in appresso, ed in generale del resto, è contemplata nel n. 25. Di questo occorre tenere assolutamente conto quando la sollecitazione critica σ_{cr} calcolata con i metodi classici in appresso esposti supera il limite di proporzionalità del materiale con cui si lavora.

2. - Flessione di una linea curva piana.

Si consideri, cfr. fig. 1, una linea piana \mathcal{L} data nella forma

$$(1) \quad R = R(\psi)$$

con $R = R(\psi)$ raggio di curvatura nel generico punto P fissato dalla anomalia ψ che la normale \vec{n} (in P) forma con una direzione assegnata. A titolo di esempio interessante per gli sviluppi che seguono si rilevi che l'equazione

$$R = \frac{a}{\cos^n \psi}$$

definisce per $n = 0, -1, 2, 3$; *il cerchio, la cicloide, la catenaria, la parabola*; linee particolarmente vicine agli assi di archi da ponte.

(5) D. B. STEINMANN, *Bridges and Their Builders*, G. P. Putnam's Sons New York, 1941; cfr. anche «Civil Engineering», ottobre 1945.

(6) G. KRALL, *Statica dei mezzi elastici viscosi*, «Rend. Acc. Lincei», fasc. 3, 4, vol. II, 1947 e op. cit. in (***) di pag. 5.

Ciò posto, con riferimento al sistema mobile z, y con centro in P coincidente con la normale \vec{n} e la tangente \vec{t} in P, si diano ai punti di \mathcal{L} spostamenti w, v secondo z, y ,

$$w = w(\psi) \quad , \quad v = v(\psi)$$

che considereremo piccoli del 1° ordine.

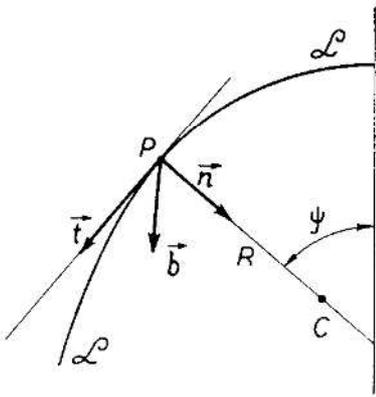


Fig. 1.

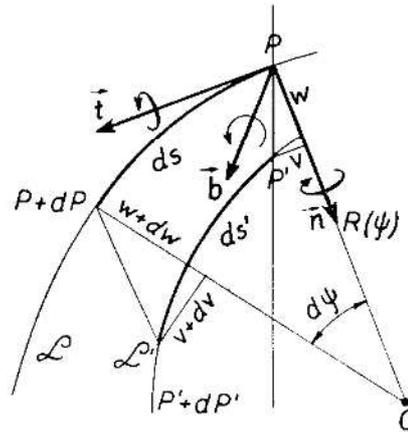


Fig. 2.

Si genera in tal guisa una curva \mathcal{L}' prossima ad \mathcal{L} della quale si richiede il raggio di curvatura variato $R' = R'(\psi)$.

Avendosi (cfr. fig. 2) con riguardo all'elemento lineare ds ,

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \frac{d\psi}{ds}$$

sarà, con simboli evidenti,

$$(2 a) \quad \frac{1}{R'} = \frac{d\psi'}{ds'}$$

essendo, a meno di termini d'ordine superiore al 1°,

$$(2 b) \quad ds' = ds + dv - w d\psi \quad , \quad d\psi' = d\psi + d\left(\frac{v}{R}\right) + d\left(\frac{dw}{ds}\right)$$

Segue da qui con la notazione

$$\frac{d}{d\psi} = \left(\quad \right) \cdot$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{d\psi}{ds} \frac{1 + \left(\frac{v}{R}\right)' + \left(\frac{\dot{w}}{R}\right)'}{1 + \frac{\dot{v}}{R} - \frac{w}{R}}$$

ovvero, sviluppando, attesa la (2), la variazione di curvatura, che dovrebbe esser quindi la nota *change of curvature*,

$$(3) \quad \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{w}}{R}\right)' + \frac{v}{R} \left(\frac{1}{R}\right)' + \dots$$

indicando... termini d'ordine superiore in w, v . Questa per $R = \text{cost.}$ risulta, con riguardo ai soli termini del 1° ordine, indipendente dagli sposta-

menti tangenziali $v = v(\psi)$ attribuiti ai punti di \mathcal{L} nella più generale deformazione w, v . Ora si rilevi che, secondo la 1^a delle (2 b), l'elemento ds' di \mathcal{L}' si può scrivere nella forma

$$ds' = ds(1 + e_\psi)$$

con

$$(4) \quad e_\psi = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{1}{R}(\dot{v} - w).$$

Da qui, se w, v sono tali che risulti $e_\psi = 0$, ove sia cioè

$$(5) \quad \dot{v} = w,$$

la deformazione dicesi priva di estensione o *non estensionale*; in tal caso la (3) si può anche scrivere nella forma equivalente

$$(3 a) \quad \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{w}}{R} + \frac{v}{R} \right)'$$

A questo punto è utile rilevare che, a partire dal classico Love ⁽⁷⁾ e di conseguenza in ogni trattato di elasticità si definisce, scrivendo ds per $Rd\psi$, variazione di curvatura κ , nel caso generale la (3 a), con che

$$(6) \quad \kappa = \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{w}}{R} + \frac{v}{R} \right)';$$

nel caso *non estensionale* la (3), con che

$$(6 a) \quad \kappa = \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{w}}{R} \right)' + \frac{w}{R^2} + \frac{v}{R} \left(\frac{1}{R} \right)'$$

Questo significa però che κ è definito (tacitamente) nella forma

$$(6 b) \quad \kappa = \frac{d\psi' - d\psi}{ds}$$

cioè come variazione angolare specifica rapportata al ds originario in ogni caso, estensionale o non; ma questa κ dà la effettiva variazione di curvatura solo per $e_\psi = 0$.

Agli effetti dei risultati elastostatici non derivano da ciò inconvenienti pur che per *change of curvature* si intenda *caratteristica della deformazione* secondo la teoria linearizzata ⁽⁸⁾. Questa caratteristica è data, nel caso generale dalla (6), nel caso non estensionale dalla (6 a) proprio come dice Love, giustamente, salvo al più con definizione che, per quanto precede, può apparire impropria. Rileviamo che le (6) e (6 a) sono date sempre per $R = \text{cost.}$ e manca quindi l'ultimo termine nella (6 a). Per quanto precede esse, come le (3) e (3 a) equivalenti salvo lo scambio di attribuzioni, sono valide per $R = R(\psi)$ dato secondo la (1). Si osservi ancora che, ove la linea \mathcal{L} anziché secondo la (1) sia data attraverso il suo elemento lineare ds nella forma deri-

(7) Cfr. Op. cit. in (4), cap. XXIV, art. 326, formole 26, e art. 334.

(8) Cfr. G. FERRARESE, *Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate*, «Rend. Acc. Lincei», fasc. 5, vol. XXX (1961).

vata dal ds^2 del cilindro, nelle evidenti coordinate q_1, q_2 , $ds^2 = B^2(q_1) dq_1^2 + dq_2^2$ per $q_1 = q, q_2 = \text{cost.}$, precisamente,

$$(1 a) \quad ds^2 = B^2(q) dq^2,$$

si ha secondo Love,

$$e_\psi = \frac{1}{B} \left(\frac{dv}{dq} \right) - \frac{w}{R}$$

e, in generale, scrivendo κ_w per κ ,

$$(6)' \quad \kappa_w = \frac{1}{B} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{B} \frac{dw}{dq} + \frac{v}{R} \right),$$

e quindi nel caso non estensionale, cioè per $e_\psi = 0$,

$$(6 a)' \quad \kappa_w = \frac{1}{B} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{B} \frac{dw}{dq} \right) + \frac{w}{R^2} + \frac{v}{B} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Tali relazioni, ove con riguardo al ds della (1 a) si ponga $B = R(\psi)$, $q = \psi$, ricadono nelle (6), (6 a) precedenti e si riconferma il curioso scambio di attribuzione rispetto alle (3), (3 a).

Le (6)' e (6 a)' sono nient'altro che una particolarizzazione delle più generali espressioni delle variazioni di curvatura $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{1,2} = \tau$ date certamente nel senso della (6 b) dal Love (9) per una superficie di ds^2 generale

$$ds^2 = A^2 dq_1^2 + 2AB \cdot \cos \chi dq_1 dq_2 + B^2 dq_2^2$$

deformata con spostamenti u, v, w in modo analogo a quello descritto per una linea.

Premesse queste osservazioni che possono evitare qualche difficoltà nella lettura di molte trattazioni in merito, passiamo allo studio della flessione di \mathcal{Q} fuori dal suo piano Π , cioè della cosiddetta *flessione deviata*.

3. - Flessione deviata di una barra piana curva di equazione d'asse $R = R(\psi)$.

Agli spostamenti v, w secondo \vec{t} ed \vec{n} nel piano Π dei punti P di \mathcal{Q} si aggiungano spostamenti $u = u(\psi)$ dell'ordine di v, w normalmente a Π quindi secondo la binormale \vec{b} . Si dà così luogo alla cosiddetta flessione deviata della barra. Per la variazione angolare specifica κ_u corrispondente ad u si potrà porre se è trascurabile la torsione φ ,

$$\kappa_u = - \frac{d^2 u}{ds^2} = - \frac{1}{R} \left(\frac{u}{R} \right)''.$$

(9) Cfr. op. cit. in (4), Cap. XXI, formole dell'art. 291. Per richiami ed applicazioni a ds^2 del tipo

$$ds^2 = R^2(\psi) d\psi^2 + dx^2$$

cfr. 1^a op. cit. in (3), formole (14) e (14 a).

Se interviene la torsione φ , la barra si disporrà, almeno nell'intorno di 2° ordine di P di \mathcal{L} , su la falda di un cono con l'asse normale a Π e passante per il centro C del cerchio osculatore in P di raggio $R = R(\psi)$. La 2ª curvatura della falda del cono, $\sin \varphi/R$ comporta una ulteriore variazione angolare da aggiungere a quella conseguente ad u e si ha quindi, per $\sin \varphi \simeq \varphi$, in conformità con le formole del Love, per $R(\psi) d\psi = ds$,

$$(7) \quad \kappa_u = \frac{\varphi}{R} - \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{u}}{R} \right).$$

4. - Variazione angolare specifica di torsione κ_φ .

In un'asta rettilinea si ha per definizione

$$\kappa_\varphi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dot{\varphi}}{R}.$$

Se l'asta è curva ed $R = R(\psi)$ è il raggio di curvatura nel punto generico di anomalia ψ , ove sia u lo spostamento normale al suo piano Π , conviene ritenere, secondo una schematizzazione diversa da quella, men certa, abituale, che il ds' deformato di ds sia elemento lineare di un'elica cilindrica circolare di raggio $R = R(\psi)$, inclinazione $u' = du/ds$. La torsione dell'elica, *destra* nel caso di cui si tratta,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \frac{u'}{1+u'^2} \simeq \frac{1}{R} u'$$

si addiziona a quella dianzi considerata e si ha quindi

$$(8) \quad \kappa_\varphi = \varphi' + \frac{1}{R} u' = \frac{1}{R} \left(\dot{\varphi} + \frac{\dot{u}}{R} \right).$$

5. - Espressione completa delle caratteristiche di deformazione κ . Termini $\kappa^{(1)}$, $\kappa^{(2)}$ del 1° e 2° ordine.

Indipendentemente dalle precedenti (e successive (31 b, c) del n. 10) deduzioni intuitive delle κ , si arriva, come ha fatto vedere il prof. G. Ferrarese ⁽¹⁰⁾, classicamente alla loro espressione completa addirittura per un solido tubolare a 4 parametri. Limitandosi ai termini del 1° e 2° ordine, per il caso piano, le formole del Ferrarese si scrivono

$$\kappa_w = \kappa_w^{(1)} + \kappa_w^{(2)}, \quad \kappa_u = \kappa_u^{(1)} + \kappa_u^{(2)}, \quad \kappa_\varphi = \kappa_\varphi^{(1)} + \kappa_\varphi^{(2)}$$

(10) G. FERRARESE, *Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva*. Apparirà nel fasc. 6, vol. XXXIV, giugno 1963 di questi « Rendiconti ».

con le $\varkappa^{(1)}$, termini del 1° ordine date dalle (6), (7), (8) che riscriviamo opponendo l'indice ⁽¹⁾

$$(6)' \quad \varkappa_w^{(1)} = \left(w' + \frac{v}{R} \right)', \quad (7)' \quad \varkappa_u^{(1)} = \frac{\varphi}{R} - u'', \quad (8)' \quad \varkappa_\varphi^{(1)} = \varphi' + \frac{1}{R} u'.$$

e le $\varkappa^{(2)}$, termini del 2° ordine dati da

$$(6)'' \quad \varkappa_w^{(2)} = - \left[\left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(w' + \frac{v}{R} \right)' \right] - \frac{1}{2R} (u'^2 + \varphi^2) + \varphi u'',$$

$$(7)'' \quad \varkappa_u^{(2)} = \left[u' \left(v' - \frac{w}{R} \right)' \right] + \varphi \left(w' + \frac{v}{R} \right)' - \frac{1}{2R} u' \left(w' + \frac{v}{R} \right),$$

$$(8)'' \quad \varkappa_\varphi^{(2)} = - \frac{1}{R} u' \left(v' - \frac{w}{R} \right) - \frac{1}{2} u'' \left(w' + \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{2} u' \left(w' + \frac{v}{R} \right)'.$$

Nel caso speciale di *flessione* nel piano di v e w ($\varphi = 0$, $u = 0$) le formule precedenti si riducono a

$$(8)''' \quad \varkappa_w^{(2)} = - \left[\left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(w' + \frac{v}{R} \right)' \right], \quad \varkappa_u^{(2)} = 0, \quad \varkappa_\varphi^{(2)} = 0.$$

Si vede da qui che, *se la deformazione è priva di estensione* ($e_w^{(1)} = 0$), è $\varkappa_w^{(2)} = 0$.

6. - Estensione specifica dell'asse della barra conseguente ad u , v , w .

Considerato l'elemento d'arco ds' deformato di ds si ha, con $e_\psi = e_w$,

$$e_\psi = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1.$$

Per ds' si trova, nullo essendo il contributo di φ ,

$$ds'^2 = (ds + dv - w d\psi)^2 + (dw + v d\psi)^2 + du^2$$

e da qui

$$e_\psi = \frac{1}{R} \sqrt{\dot{u}^2 + (R + \dot{v} - w)^2 + (\dot{w} + v)^2} - 1.$$

Sviluppando la radice si ha

$$(9) \quad e_\psi = e_\psi^{(1)} + e_\psi^{(2)} + \dots$$

con $e_\psi^{(1)}$ termine del 1° ordine della deformazione specifica e_ψ , dato dalla formola nota

$$(9a) \quad e_w^{(1)} = e_\psi^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R};$$

$e_\psi^{(2)}$ termine di 2° ordine della deformazione specifica e_ψ dato da

$$(9b) \quad e_w^{(2)} = e_\psi^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2).$$

Come si vedrà, questo termine $e^{(2)}$ è fondamentale nelle questioni di stabilità. I termini d'ordine superiore indicati con... si trascurano nel nostro ordine di approssimazione.

7. - Area ΔA racchiusa tra una linea piana \mathcal{L} e la sua deformata \mathcal{L}' corrispondente a v, w .

Con riguardo alla fig. 2 si ha, per l'area $\Delta A = A' - A$ racchiusa tra la deformata \mathcal{L}' e la originaria \mathcal{L} ,

$$(10) \quad \Delta A = A' - A = \int_{\mathcal{L}} d_1 A + \int_{\mathcal{L}} d_2 A$$

con

$$(10 a) \quad d_1 A = -Rw d\psi$$

elemento del 1° ordine in w , e

$$(10 b) \quad d_2 A = \frac{1}{2}(v^2 + w^2 + \dot{v}v - \dot{v}w) d\psi$$

elemento del 2° ordine in v, w .

La dimostrazione riesce facilmente considerando l'area racchiusa nel quadrangolo $P, P + dP; P', P' + dP'$. È interessante rilevare che la (10)

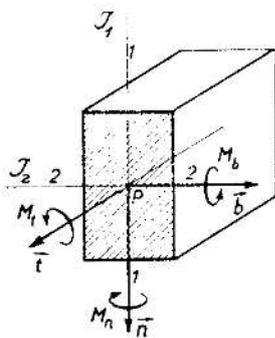


Fig. 3.

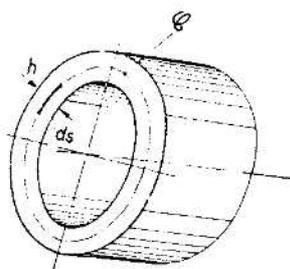


Fig. 4.

con le (10 a, b) è valida per v, w finiti. Partendo infatti dalle equazioni parametriche di \mathcal{L}

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

la deformata \mathcal{L}' di \mathcal{L} ha, per v, w finiti, corrispondenti a \vec{t}, \vec{n} , le equazioni

$$\xi(s) = x + vx' - wy'$$

$$\eta(s) = y + vy' + wx'$$

Da

$$2 \Delta A = \int_{\mathcal{L}} (\xi \eta' - \eta \xi') ds - \int_{\mathcal{L}} (xy' - yx') ds$$

si traggono le (10, a, b) valide per v, w finiti. Formole generali per l'incremento di volume di un corpo per una sua deformazione sono state date dal Picone in uno studio dell'INAC che prende lo spunto dalla elegante formola di Steiner (cfr. M. Picone, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Circolo matematico di Catania, 1923).

Il termine $d_2 A$ ha importanza notevole nelle questioni di stabilità di cui si va a trattare.

8. - Lavoro di deformazione elastica W conseguente ad u, v, w, φ , con particolare riguardo a travi tubolari a pareti reticolari.

Indichino

$$(11) \quad B_1 = E \mathfrak{J}_1, \quad B_2 = E \mathfrak{J}_2,$$

le flessorigidezze della sezione resistente d'area A in P sulla linea d'asse \mathcal{L} rispetto alle deformate flessionali trasversali u e nel piano di w . Manifestamente è E il modulo di elasticità del materiale, \mathfrak{J}_1 ed \mathfrak{J}_2 sono i momenti d'inerzia di A

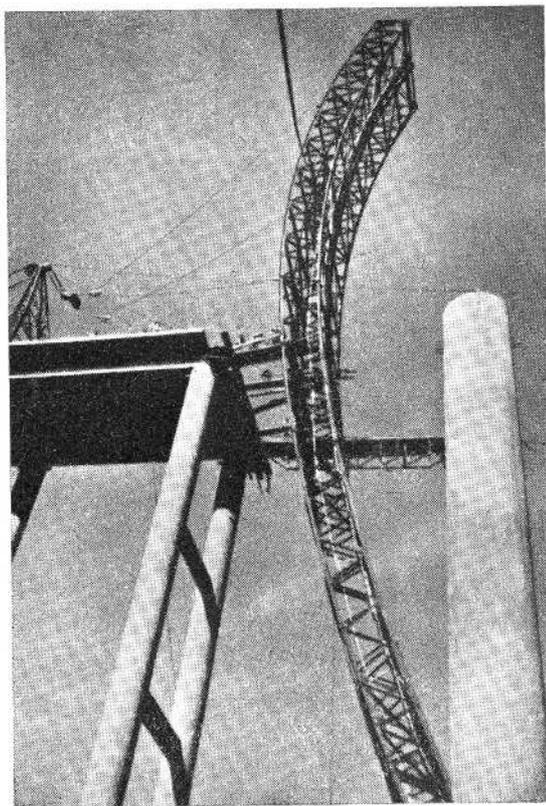


Fig. 5.

rispetto ad assi centrali, coincidenti per ipotesi con \vec{n} rispettivamente con \vec{b} . Per una sezione rettangolare (cfr. fig. 3) con il lato maggiore secondo \vec{n} siccome generalmente avviene, è $\mathfrak{J}_2 > \mathfrak{J}_1$ e quindi $B_2 > B_1$; ordinariamente B_1 rappresenta la minima flessorigidezza. Per la torsorigidezza

$$(12) \quad C = G\Theta,$$

con G modulo di elasticità torsionale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

ν coefficiente di contrazione o di Poisson, è Θ calcolabile con metodi classici in Elasticità.

In particolare, per una sezione cava di spessore sottile h eventualmente variabile con l'arco s della linea mediana, considerabile ciclo chiuso Θ (quindi per un tubo *senza* tagli longitudinali) si ha (cfr. fig. 4), secondo Bredt,

$$(12 a) \quad \Theta = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{h}},$$

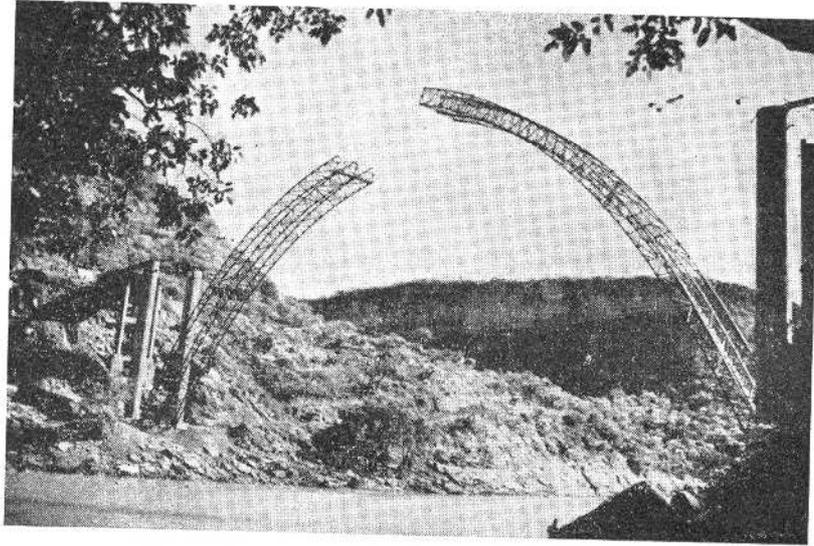


Fig. 6.

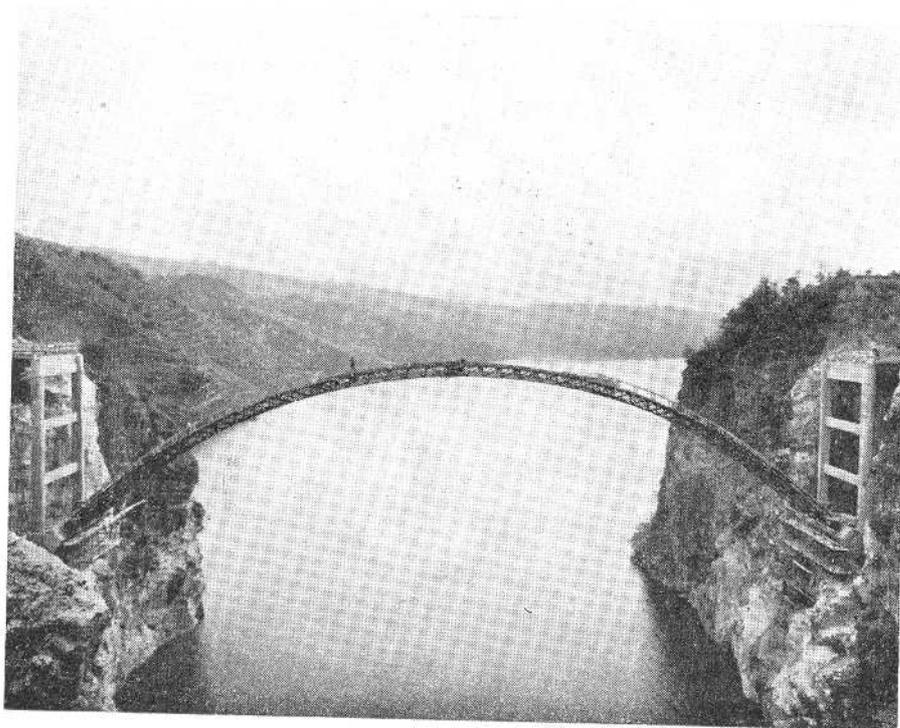


Fig. 7.

F essendo l'area racchiusa dal ciclo. Come si vede, Θ ha le dimensioni di un momento di inerzia.

Per completezza, onde rendere autonoma la presente Memoria si rilevi che se l'area A è rettangolare di lati h, b si ha, come è noto, per $h > b$,

$$(12 b) \quad \Theta = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,630 \frac{b}{h} + 0,052 \left(\frac{b}{h} \right)^5 - \dots \right).$$

Se l'elemento resistente risulta dalla composizione di aste (cfr. figg. 7, 10, 11) come nelle strutture in carpenteria metallica ⁽¹²⁾ allora, con riguardo alle

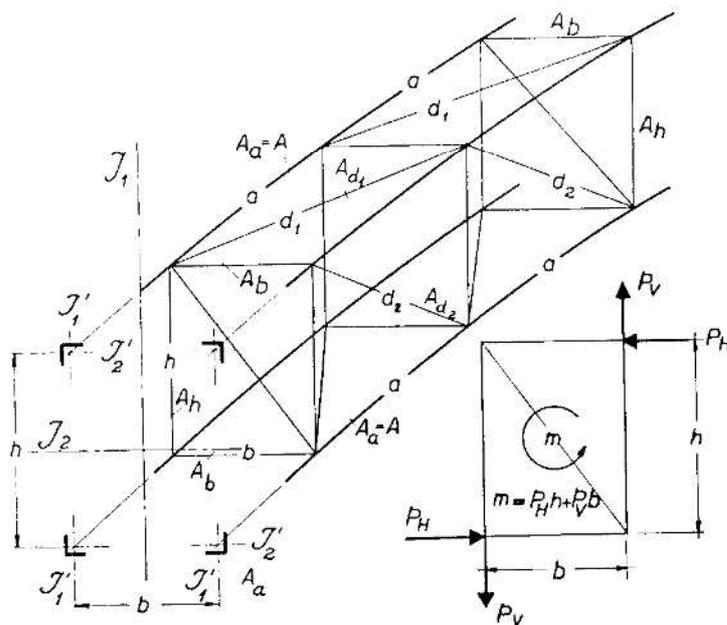


Fig. 8.

figg. 8, 9 si ha per i momenti di inerzia $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$, di ogni singola trave-parete,

$$(11 a) \quad \mathfrak{J}_i = \mu_i \bar{\mathfrak{J}}_i \quad \text{con} \quad \bar{\mathfrak{J}}_i = 2 \mathfrak{J}'_i + \frac{1}{2} b^2 A_a$$

(11) Ricorrono per queste assai frequenti le questioni di stabilità, particolarmente in quelle centine metalliche per ponti in cemento armato destinate a diventare armature metalliche definitive dei getti di calcestruzzo che debbono sostenere e nei quali vengono incorporate. Ideate da I. Melan già agli albori del cemento armato da ponte furono lentamente abbandonate per i pesi eccessivi delle carpenterie richieste per sostenere zavorramenti di materiale incoerente equivalenti, anche nella distribuzione, al carico totale o quasi della struttura portante definitiva. Tali zavorramenti si allontanano gradualmente con il proseguire dei getti per far sì che il regime statico e quindi le deformazioni delle membrature non vengano turbate durante il loro indurimento. Informandomi alle moderne nozioni sulla *viscosità* (fluage) dei giovanissimi calcestruzzi (eseguiti con *ferrici a basso ritiro*, scelti ad hoc nella produzione nazionale) si può evitare, attraverso fasi e tempi di lavorazione adeguati, ogni zavorramento chiamando al lavoro ogni getto appena indurito ed affidando alla viscosità il livellamento asintotico degli sforzi. Riducendo i pesi delle carpenterie a quasi un terzo di quelli classicamente occorrenti, il vecchio sistema Melan è ridiventato attuale. Per richiamare alcuni tra gli esempi più significativi, realizzati con questo criterio, accenniamo alle fig. 5, 6, dove si illustra una centina-armatura, $L = 120$ m., peso 105 to., per un arcata sul Nilo; al recente Ponte alla Circonvallazione sull'Arno a Pisa, sull'Adige a Cavarzere, sull'alto Tagliamento per una condotta ($2r = 3,40$ m.) della Sade (cfr. fig. 10 dove si indica la corrispondente centina, $L. 100$ m., peso 85 to.), descritti tutti nelle Note, citate in ⁽¹²⁾ pag. 5, di «Tecnica Italiana». Infine, nella fig. 7 e 11 è illustrata la centina-armatura del costruendo Ponte del Castellaz (Trento).

e μ_1 fattore di riduzione, nel quale oltre agli elementi del pannello interviene la lunghezza globale l ; precisamente

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + \pi^2 \frac{\bar{\delta}_1}{A d_1 l^2} \frac{d_1^3}{a b^2} (1 + \varepsilon_1)}, \quad \text{con } \varepsilon_1 = \left(\frac{b}{d_1}\right)^3 \frac{A d_1}{A_b}.$$

Analogamente si ha per $\bar{\delta}_2$,

$$(11a) \quad \bar{\delta}_2 = \mu_2 \bar{\delta}'_2 \quad \text{con} \quad \bar{\delta}'_2 = 2 \bar{\delta}'_2 + \frac{1}{2} h^2 A_a$$

e μ_2 dato, in conformità con l'espressione di μ_1 , da

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + \pi^2 \frac{\bar{\delta}'_2}{A d_2 l^2} \frac{d_2^3}{a h^2} (1 + \varepsilon_2)}, \quad \text{con } \varepsilon_2 = \left(\frac{h}{d_2}\right)^3 \frac{A d_2}{A_h}.$$

Con riguardo alla fig. 9 tali relazioni valgono per il reticolo a ; per b si porrà $\varepsilon_{1,2} = 0$ (a parità di $\bar{\delta}'_{1,2}$ si ha per b un lieve aumento di $\mu_{1,2}$ rispetto ad a).

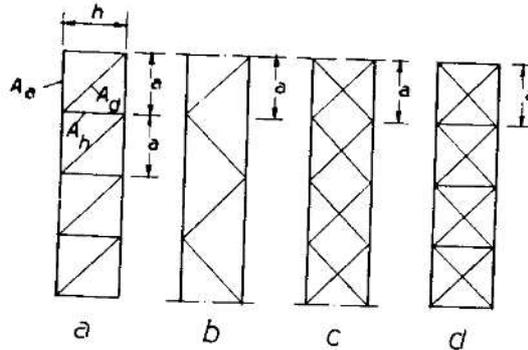


Fig. 9.

per c e d si porrà ancora $\varepsilon_{1,2} = 0$ (per d i montanti non lavorano) ma $2 A_{d_{1,2}}$ in luogo di $A_{d_{1,2}}$.

Per Θ delle (12), in mancanza di meglio, si propone la relazione ⁽¹²⁾ che tien conto della torsiorigidezza pura e di quella che deriva dalla flessione,

(12) La dimostrazione di tale espressione per Θ si può dare nei seguenti termini: Una distribuzione armonica di momenti torcenti,

$$m(x) = m_0 \sin \frac{\pi}{l} x$$

agente su un'asta di torsiorigidezza $C = G\Theta$, fissa agli estremi $x=0, l$, provoca la rotazione φ in x ,

$$(*) \quad \varphi = \frac{m_0 l^2}{\pi^2 G\Theta} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Su un'asta tubolare a sezione rettangola $h \times b$, formata da travi pareti reticolari il momento m è affrontato con carichi p_V e p_H (cfr. fig. 8) tali che

$$(**) \quad p_V b + p_H h = m.$$

Se la torsione avviene così che, per virtù di progetto, le sezioni rettangole rimangono praticamente indeformate, le frecce elastiche δ_V e δ_H sono

$$(***) \quad \delta_V = \varphi \frac{b}{2}, \quad \delta_H = \varphi \frac{h}{2}.$$

sintetizzata dalla cosiddetta, attuale, *warping rigidity* C_T (cfr. op. cit. in ⁽²⁾ Cap. 5.3).

$$(12 c) \quad G\Theta = EA_{d_1} b^2 \frac{1 + \alpha}{\frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{A_1^*}{A_2^*} \alpha\right) \left(\frac{l}{h}\right)^2 \frac{A_{d_1}}{A_1^*} + \frac{2d_1^{*3}}{h^2 a}}$$



Fig. 10.

Poiché le briglie lungo gli spigoli sono comuni a due travi-pareti, una verticale ed una orizzontale, gli sforzi in esse, come insegnavano i classici (Schwedler, Ritter), sono proporzionali a

$$p_V - p_H \frac{h}{b} \quad , \quad p_H - p_V \frac{b}{h} .$$

Nel calcolo degli spostamenti δ_V , δ_H tali valori figurano però soltanto per il contributo della flessione, per il contributo del taglio (allungamento delle aste di parete) intervengono i valori integrali p_V e p_H . Si ha pertanto (si cfr. il Vol. II delle celebri *Anwendungen* di Ritter)

$$(****) \quad \left\{ \begin{aligned} E\delta_V &= \frac{2 \left(p_V - p_H \frac{h}{b} \right) l^4}{\pi^4 A_2^* h^2} + \frac{p_V l^2}{\pi^2} \frac{d_2^{*3}}{A_{d_2} a h^2} \\ E\delta_H &= \frac{2 \left(p_H - p_V \frac{b}{h} \right) l^4}{\pi^4 A_1^* b^2} + \frac{p_H l^2}{\pi^2} \frac{d_1^{*3}}{A_{d_1} a b^2} ; \end{aligned} \right.$$

con le definizioni date per $A_{1,2}^*$, $d_{1,2}^*$ e precisazioni fatte intorno ai reticoli a , b , c , d della fig. 9. Ciò premesso, eguagliando φ della (*) con il φ di una delle (***), con ovvia eliminazione di p_V , p_H , m , tramite le (**) e (****) si ha la (12 c) o (12 c)'.

o l'equivalente

$$(12c)' \quad G\Theta = EA_{d_2} h^2 \frac{1 + \frac{1}{\alpha}}{\frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{A_2^*}{A_1^*} \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{l}{b}\right)^2 \frac{A_{d_2}}{A_2^*} + \frac{2d_2^{*3}}{b^2 a}}$$

con

$$\alpha = \frac{A_{d_2}}{A_{d_1}} \left(\frac{d_1^*}{d_2^*}\right)^3 \frac{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{A_{d_1}}{A_1^*} \frac{al^2}{d_1^{*3}}}{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{A_{d_2}}{A_2^*} \frac{al^2}{d_2^{*3}}}$$

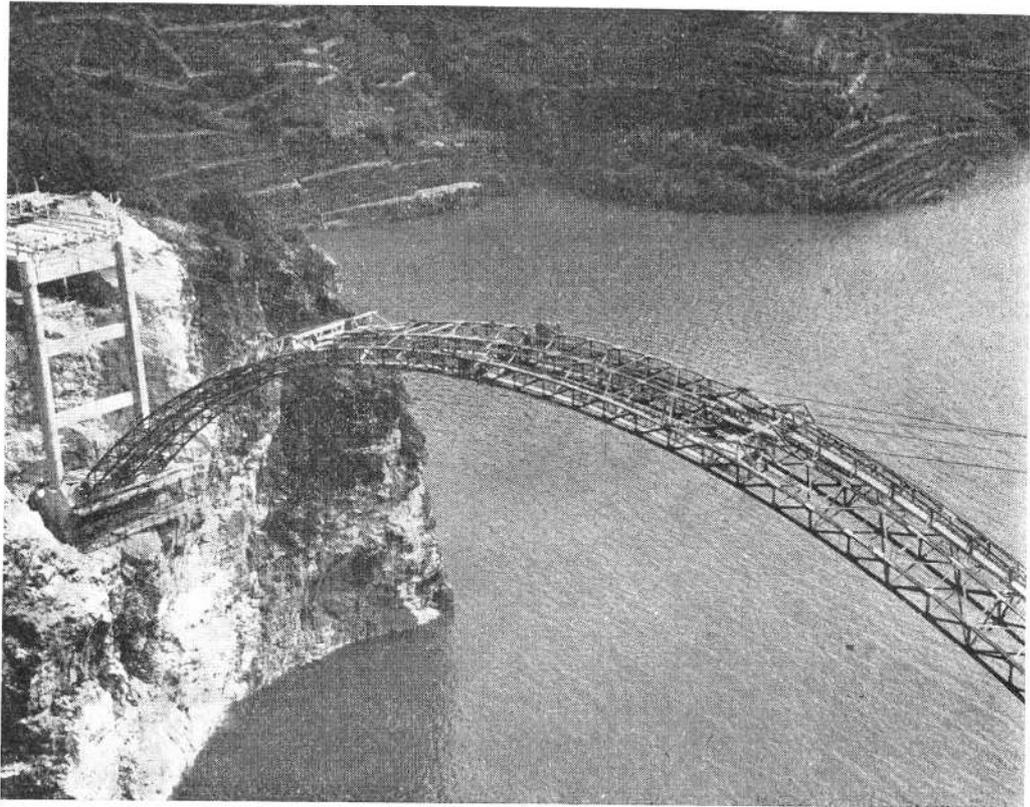


Fig. 11.

essendo

$$(12c)'' \quad A_1^* = A + \frac{4\beta_1'}{b^2} \quad , \quad A_2^* = A + \frac{4\beta_2'}{h^2} \quad , \quad d_{1,2}^* = d_{1,2} \sqrt[3]{1 + \epsilon_{1,2}}$$

con $\epsilon_{1,2}$ dianzi definito. Per h, b notevoli di fronte alle dimensioni del profilo, siccome avviene generalmente, si porrà $A_1^* \cong A_2^* \cong A$.

Con riguardo alla fig. 9 tali relazioni valgono per il reticolo a , per b, c, d si porrà $\epsilon_{1,2} = 0$ e quindi $d_{1,2}^* = d_{1,2}$, inoltre, per c e d si sostituirà $2A_{d_1}$ ad A_{d_1} , $2A_{d_2}$ ad A_{d_2} .

Se in luogo di una distribuzione armonica di momenti torcenti si considerasse una distribuzione uniforme m_0 , tali espressioni praticamente non mutano (salvo a sostituire $5/12$ a $4/\pi^2$). Se $l \rightarrow \infty$, ciò che praticamente

equivale a $l \gg h, b$, rimane residua la torsiorigidità pura, indipendente dalla flessione delle travi-parete e si ha

$$(12 c)''' \quad \lim_{l \rightarrow \infty} G\Theta = E \cdot A_{d_1} A_{d_2} a b^2 h^2 \cdot \frac{A_1^* + A_2^*}{A_{d_2} A_1^* d_1^{*3} + A_{d_1} A_2^* d_2^{*3}}.$$

Per connessioni di vario tipo cfr. anche fig. 30 e le (12 c)* del n. 17.

Per la tensorigidità D si ha infine

$$(13) \quad D = EA$$

prodotto dell'area A della sezione resistente per il modulo d'elasticità E .

Noti B_1, B_2, C, D si può scrivere agevolmente l'espressione per l'energia elastica di deformazione W di una costola ad arco isolata. Si ha

$$(14) \quad W = W_f + W_e$$

con W_f energia elastica di deformazione conseguente alla flessione e torsione $\kappa_w, \kappa_u, \kappa_\psi$; W_e energia elastica corrispondente alla estensione e_ψ , date notoriamente dalle relazioni

$$(14 a) \quad W_f = \frac{1}{2} \int (B_1 \kappa_u^2 + B_2 \kappa_w^2 + C \kappa_\psi^2) ds,$$

$$(14 b) \quad W_e = \frac{1}{2} \int D e_\psi^2 ds.$$

Si riconosce facilmente che W_e prevale fortemente su W_f ; infatti, per spostamenti ad esempio del tipo $\sin \pi s/s_0$ con s_0 lunghezza totale dell'arco, $\kappa^2 : e_\psi^2$ è dell'ordine di $1/s_0^2$ e poiché $B : D$ è dell'ordine di h^2 , h essendo ad esempio lo spessore delle costole, $W_f : W_e$ è dell'ordine di h^2/s_0^2 . Poiché h può esser 1/100 di s_0 , $W_f : W_e$ risulta dell'ordine di 10^{-4} . Ma non per questo W_f si trascura, anzi, W_f ha un ruolo fondamentale in quanto dovendosi cercare dei minimi di un funzionale in cui interviene W_f e W_e , le funzioni concorrenti al minimo u, w, v si scelgono senz'altro così che W_e possibilmente si annulli addirittura, per il che occorre imporre la condizione alle concorrenti v, w che sia, ove riesca,

$$e_\psi = \frac{\dot{v} - w}{R} = 0,$$

sanando in pari tempo ogni dubbio sulla definizione di κ , variazione di curvatura.

9. - Calcolo di W per N archi in parallelo tra loro trasversalmente collegati e solidali attraverso le stilate con l'impalcato.

Notevoli esempi di queste strutture appaiono nelle fig. 12, 12 a relative ad un ponte sul Biedano ($L = 92,0$ m) nel Viterbese (cfr. 3ª cit. in nota (7)) rispettivamente 17, 18 (cfr. cit. in appresso).

La fig. 12 *b* rappresenta di queste una schematizzazione anche più generale ($N=4$) riferita a due nuovi grandi viadotti ($L=2 \times 90,0$ m. rispettivamente, $L=130,0$ m.) sulla Bologna-Firenze dell'Autostrada del Sole.

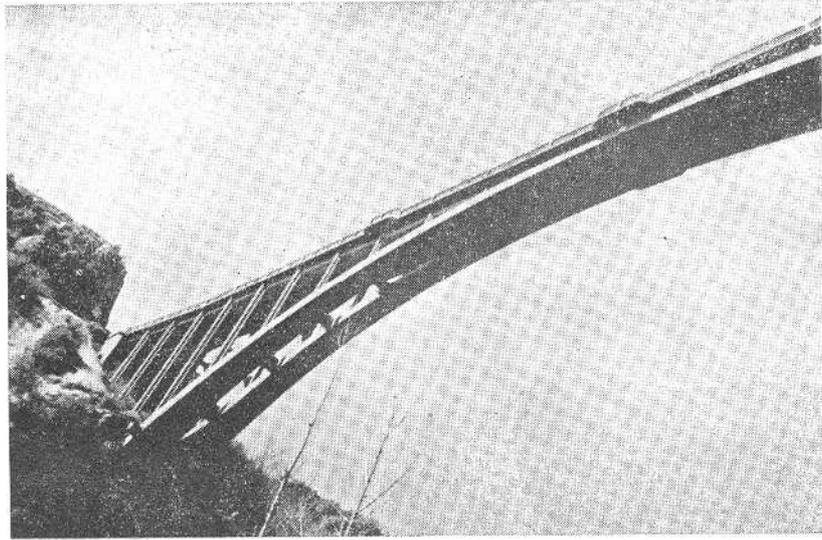


Fig. 12.

Con riguardo a queste illustrazioni W risulta, evidentemente, dalla somma di più termini. Si ha precisamente:

$$(15) \quad W = W_f^{(a)} + W_e^{(a)} + W_w^{(s)} + W_u^{(s)} + W_u^{(l)} + W_{u_1}^{(im)} + W_{u_2}^{(fil)} + W_{w_1}^{(im)} + W_u^{(f)}$$

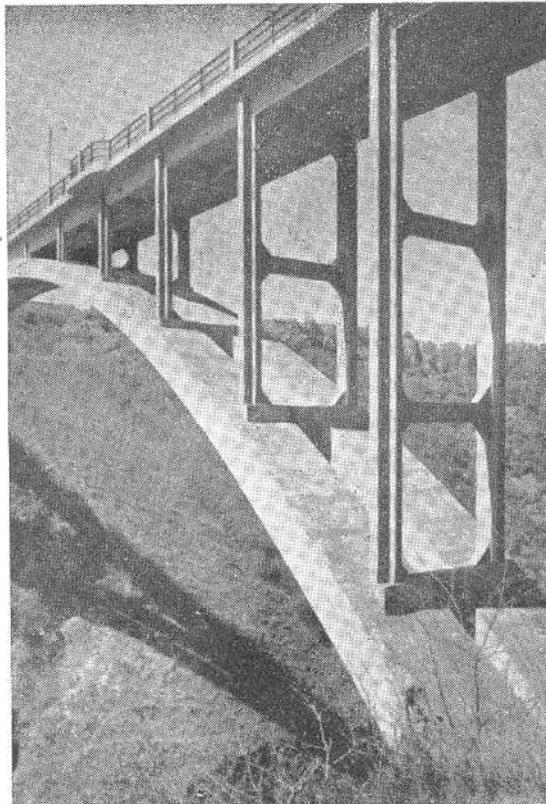


Fig. 12 *a*.

ed i vari addendi rappresentano le energie elastiche:

- 1) $W_f^{(a)}$, *flessionale degli archi*, collegati con traverse, negli effetti praticamente rigide, con riguardo alla flessione nel loro piano II (piano di w, v).

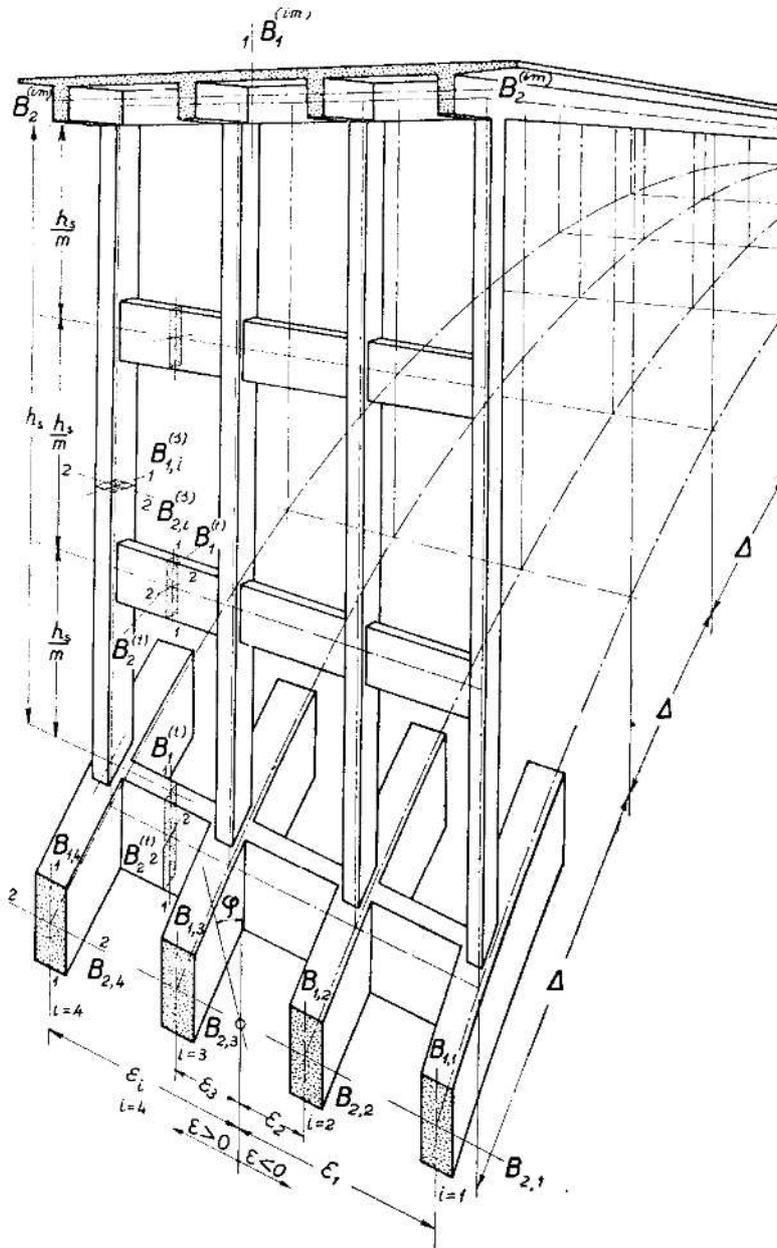


Fig. 12 b.

- 2) $W_e^{(a)}$, *estensionale degli archi* per l'estensione e_ψ .
- 3) $W_w^{(s)}$, *flessionale dei montanti delle stilate* per la rotazione dw/ds all'attacco con l'arco.
- 4) $W_u^{(s)}$, *flessionale delle stilate* per flessione nel loro piano, normale a II conseguente allo spostamento u all'attacco con l'arco, u_i all'attacco con l'impalcato, conseguente quindi allo spostamento relativo $u - u_i$ degli estremi inferiore e superiore della stilata.

- 5) $W_u^{(f)}$, flessionale delle traverse per flessione, conseguente ad u nel solo piano tangente alla volta, quindi relativa all'orditura archi-traverse.
- 6) $W_{u_1}^{(im)}$, flessionale dell'impalcato per spostamenti orizzontali u_1 nulli agli estremi.
- 7) $W_{u_2}^{(pil)}$, flessionale dei piloni agli estremi, su cui si ferma l'impalcato, corrispondentemente a spostamenti u_2 .
- 8) $W_{w_1}^{(im)}$, flessionale dell'impalcato per flessione nel piano II (spostamenti $w_1 \simeq w$ attesa la rigidità estensionale dei montanti).
- 9) $W_u^{(f)}$, estensionale delle funi-ancoraggi che eventualmenete possono considerarsi in qualche fase di costruzione (montaggi per costole isolate).

Resta ora a rendere esplicite queste energie parziali.

1) *Calcolo di $W_j^{(a)}$.*

Con riguardo alla fig. 12 b siano $i = 1, 2, \dots, N$ (in figura è $N = 4$) gli archi costole in parallelo; $B_{1,i}, B_{2,i}, C_i, D_i$ le flessio-, torsio-, tenso-rigidezze del generico arco-costola i^{imo} .

Siano $j = 1, 2, \dots$; le stilate e con riguardo alla generica j^{ima} di anomalia $\psi = \psi_j$, siano $B_{2,j}^{(s)}, B_{1,j}^{(s)}$ le rigidità dei montanti alla flessione nel piano II e normale a II. Le traverse degli archi abbiano rigidità $B_{2,j}^{(t)}, B_{1,j}^{(t)}$ alla flessione nel piano della stilata e tangente alla volta in $\psi = \psi_j$; $B_{2,j}^{(t)}$ si può considerare praticamente infinito perché si ammette che la volta, cioè l'orditura volte-traverse, si deformi secondo una rigata così che le traverse rimangono praticamente rettilinee. L'ipotesi è abituale in statica quando si studia la ripartizione trasversale dei carichi. Si può verificare facilmente la legittimità di tale ipotesi, basta che il parametro

$$\mu_j = \left(\frac{B_2^{(t)} \delta}{d^3} \right)_j$$

risulti $> \sim 2,0$ ⁽¹³⁾. $B_{2,j}^{(t)}$ essendo la rigidità della traversa per flessione nel piano della stilata, d_j la distanza tra due archi e δ_j lo spostamento che la forza 1 in j , secondo w , provoca sull'arco-costola, isolato, nel suo senso di azione.

Per δ_j si potrà porre con riguardo a j corrispondente al vertice (chiave) dell'arco, $\delta = \alpha \cdot \frac{L^3}{48 B_2}$ con $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$ per j corrispondente alla sezione alle reni (ai quarti).

Le rigidità $B_{2,j}^{(t,s)}$ delle traverse delle stilate si considerano usualmente praticamente infinite; le $B_{1,j}^{(t,s)}$ interessano soltanto la torsione dei montanti qui non considerata, pertanto, le $B_{1,2}^{(t,s)}$ non interverranno più oltre.

(13) Cfr. G. KRALL, *Répartition des charges dans les structures assemblées*. Premier Congrès international du béton armé. Vol. I, pp. 302-307. Liège, 1930.

Ciò posto, prendiamo riferimento ad un punto \mathcal{S} che conviene scegliere come baricentro di masse proporzionali a $B_{2,i}$, tale che, con ovvio significato di ε_i , eccentricità del centro della sezione resistente di rigidezza $B_{2,i}$ rispetto a \mathcal{S} , sia

$$\Sigma B_{2,i} \varepsilon_i = 0.$$

Sarà allora, se φ è la rotazione con centro in \mathcal{S} ,

$$w_i = w + \varepsilon_i \varphi$$

lo spostamento della costola generica di eccentricità ε_i rispetto a \mathcal{S} . Infine, per esser $D_i^{(t)}$ (tenso-rigidezza della traversa) agli effetti praticamente infinito

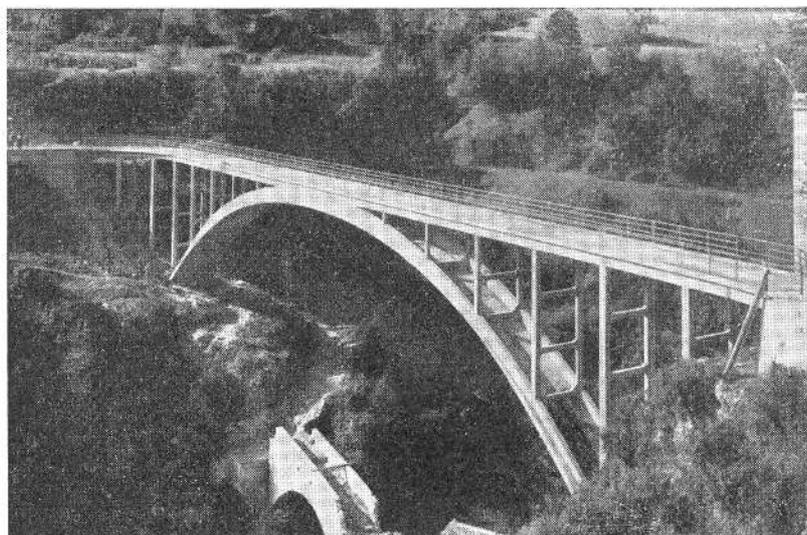


Fig. 13.

sarà $u_i = u$ per ogni valore di i . Con queste intese le variazioni angolari $\kappa_{\psi i}$, $\kappa_{u i}$, $\kappa_{\varphi i}$ del generico arco i^{imo} restano espresse dalle relazioni

$$(16) \quad \kappa_{\psi i} = \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{w} + \varepsilon_i \dot{\varphi}}{R} \right)^* + \frac{w + \varepsilon_i \varphi}{R^2} + \frac{v_i}{R} \left(\frac{1}{R} \right)^* \quad , \quad \kappa_{u i} = \kappa_u \quad , \quad \kappa_{\varphi i} = \kappa_{\varphi} .$$

Per l'estensione $e_{\psi i}^{(r)}$ del generico arco i^{imo} si avrà, introducendo il corrispondente spostamento tangenziale v_i ,

$$(17) \quad e_{\psi i}^{(r)} = \frac{\dot{v}_i - (w + \varepsilon_i \varphi)}{R} ;$$

da qui seguono le N condizioni di non estensione

$$(18) \quad e_{\psi i}^{(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Per elevare il minimo $\lambda_1 = \lambda_{cr}$ conviene che le (18) non possano esser soddisfatte e che sieno impediti gli scorrimenti relativi. Ciò avviene se le traverse degli archi hanno una forte flesso-rigidezza $B_i^{(t)}$ o meglio ancora se gli archi sono collegati da una controsoletta o da una soletta intermedia (come in fig. 13 che illustra il ponte di Chievolis, ora sul lago artificiale omonimo,

cfr. 3^a cit. in nota ⁽²⁾). Allora si può limitare la condizione di non estensione alla solita

$$(18 a) \quad e_{\psi}^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} = 0$$

e rimane una estensione $(\varepsilon_i \varphi)/R$ di cui il contributo alla stabilità può sussistere nella condizione sopradetta ed esser notevole. Ove in casi diversi ci siano dubbi sulla legittimità di considerare operante una tale estensione non resterà che ometterne il contributo o riportarsi alle ulteriori precisazioni dei nn. 16, 17, 18, ed in particolar modo del n. 19.

Ciò posto ammettiamo, ciò che si verifica praticamente e si verifica in rigore per ogni struttura simmetrica, che sia

$$(19) \quad \sum_i B_{2i} \varepsilon_i = 0 \quad , \quad \sum_i B_{1i} \varepsilon_i = 0 \quad , \quad \sum_i D_i \varepsilon_i = 0.$$

Allora, con le posizioni

$$\sum_i B_{1,i} = B_1 \quad , \quad \sum_i B_{2,i} = B_2 \quad , \quad \sum_i C_i = C \quad ; \quad \frac{\sum_i B_{2i} \varepsilon_i^2}{\sum_i B_{2i}} = \varepsilon_b^2 \cong \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{N}$$

introdotta una $\varkappa_{\psi\varphi}$ definita per il tramite della sola φ , ma riferita alla flessione nel piano di w ,

$$(16 a) \quad \varkappa_{\psi\varphi} = \frac{\varphi}{R^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\dot{\varphi}}{R} \right)'$$

si ha, come facilmente si riconosce, in virtù delle (19),

$$(15_1) \quad W_f^{(a)} = \frac{1}{2} \int (B_2 \varkappa_{\psi}^2 + B_1 \varkappa_u^2 + C \varkappa_{\varphi}^2) ds + \frac{1}{2} \int B_2 \varepsilon_b^2 \varkappa_{\psi\varphi}^2 ds.$$

Tenendo conto della collaborazione dell'impalcato, a B_2 si sostituirà una $B_2^* \sim B_2 + k_w^{(im)}$ con $k_w^{(im)}$ precisato in 8).

2) Calcolo di $W_e^{(a)}$

Attesa l'espressione (17) di $e_{\psi i}$ si ha, quando sia

$$\sum_i D_i \varepsilon_i = 0$$

e si ponga

$$(19 a) \quad \sum_i D_i = D \quad , \quad \frac{\sum_i D_i \varepsilon_i^2}{\sum_i D_i} = \varepsilon_d^2 \cong \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{N}$$

$$(15_2) \quad W_e^{(a)} = \frac{1}{2} \int D \left[e_{\psi}^{(1)2} + \left(\frac{\varepsilon_d}{R} \right)^2 \varphi^2 \right] ds$$

con

$$e_{\psi}^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R}$$

Per $e_{\psi}^{(1)} = 0$, $W_e^{(a)}$ si riduce a

$$(15_2)' \quad W_e^{(a)} = \frac{1}{2} \int D \left(\frac{\varepsilon_d}{R} \right)^2 \varphi^2 ds.$$

È un contributo notevole da considerare come si è detto solo nel caso in cui $v_i = v$ per ogni i è legittimo, come si è detto, per l'esistenza di un forte colle-

gamento tangenziale. In ogni caso $W_e^{(a)}$ delle (15₂)' non sta a $W_f^{(a)}$ nel rapporto $(s_0/h)^2$ ma $(\varepsilon_d/h)^2$ che è assai minore, intorno a 10. Infatti, poiché φ è dell'ordine di u/R , R dell'ordine di s_0 , è $D(\varepsilon_d/R)^2 \varphi^2$ dell'ordine di $(h/R)^2 \cdot (\varepsilon_d/R)^2$, onde essendo $W_f^{(a)}$ dell'ordine di $(h/s_0)^4 \simeq (h/R)^4$ si conferma l'asserto.

3) Calcolo di $W_w^{(s)}$.

Premettiamo una osservazione elementare che segue immediata dalla fig. 14. Un'asta di flessione-rigidezza B , lunga h , è vincolata a snodo agli estremi. Se un estremo vien fatto rotare di ω , l'energia W è

a)
$$W = \frac{1}{2} \frac{3 B \omega^2}{h} .$$

Se un estremo vien fatto rotare di ω , fisso restando l'altro estremo (incastro) è

b)
$$W = \frac{1}{2} \frac{4 B \omega^2}{h} .$$

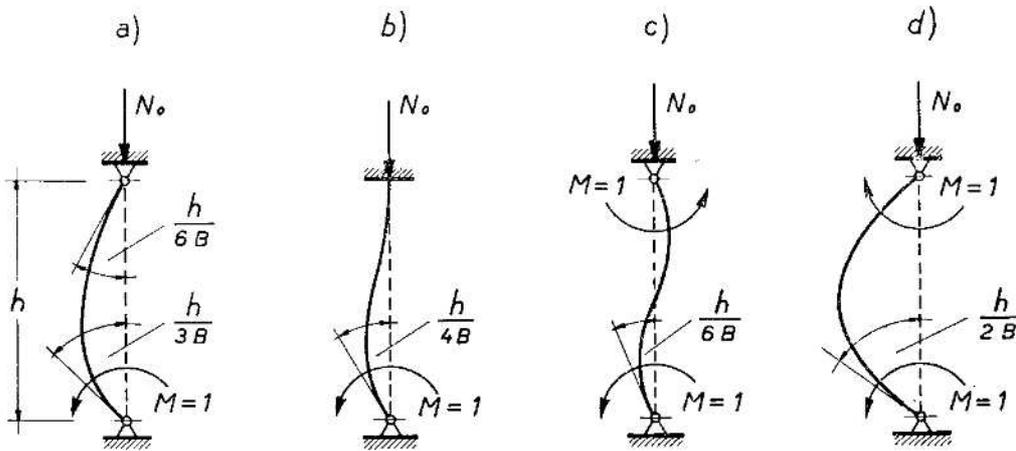


Fig. 14.

Se i due estremi vengono fatti rotare di ω e $-\omega$, è

c)
$$W = \frac{1}{2} \frac{12 B \omega^2}{h} .$$

Se i due estremi vengono fatti rotare di ω ,

d)
$$W = \frac{2 B \omega^2}{h} .$$

Per la flessione dei montanti delle stilate nel piano II, conseguente alla rotazione $\omega = dw/ds$ al piede, ammetteremo - a favore della stabilità - la condizione b).

Ciò posto sia $B_{2ij}^{(s)}$ la rigidezza nel piano II del montante i mo della stilata j ma, $h_j^{(s)}$ o, con notazioni più conveniente, h_{sj} l'altezza (indipendente da i), ε_i l'eccentricità (indipendente da j).

Posto che sia, com'è in particolare rispetto ad un piano di simmetria,

(19 b)
$$\sum_i B_{2ij}^{(s)} \varepsilon_i = 0,$$

fatte le posizioni

$$\sum_i B_{2ij}^{(s)} = B_{2j}^{(s)} \quad , \quad \frac{\sum_i B_{2ij}^{(s)} \varepsilon_i^2}{\sum_i B_{2ij}^{(s)}} = \varepsilon_{sj}^3,$$

si introducano le funzioni ragionevoli di ψ ,

$$k_w^{(s)} = k_w^{(s)}(\psi) \quad , \quad \varepsilon_s = \varepsilon_s(\psi)$$

tali che, se Δ_j è l'intervallo d'arco interessato dalla stilata j^{ima} , sia

$$(20) \quad k_w^{(s)}(\psi_j) = \frac{4 B_{2j}^{(s)}}{\Delta_j \cdot h_{sj}} = \left(\frac{4 B_{2j}^{(s)}}{\Delta \cdot h_s} \right)_j \quad , \quad \varepsilon_s(\psi_j) \varepsilon_{sj}.$$

Allora si può scrivere, come subito si constata, poiché lo spostamento w_i e la rotazione w'_i è

$$w_i = w + \varepsilon_i \varphi \quad , \quad w'_i = \frac{1}{R} \frac{dw_i}{d\psi} = \frac{\dot{w}}{R} + \varepsilon_i \frac{\dot{\varphi}}{R},$$

$$(15_3) \quad W_w^{(s)} = \frac{1}{2} \int k_w^{(s)} \left(\frac{\dot{w}^2}{R^2} + \frac{\varepsilon_s^2}{R^2} \dot{\varphi}^2 \right) ds.$$

Se i montanti sono snodati al piede, non ha luogo la loro flessione e $W_w^{(s)}$ si annulla.

4) Calcolo di $W_u^{(s)}$.

Anche per il calcolo di $W_u^{(s)}$ occorre una premessa di carattere elementare. Una stilata formata da N montanti $i = 1, 2, \dots, N$ collegati a distanze eguali da traverse praticamente rigide viene sottoposta ad uno scorrimento relativo $u = 1$ delle traverse alle estremità. Si richiede la forza necessaria per provocare tale scorrimento trascurando la rotazione rigida della stilata per la cedibilità elastica degli archi.

Attesa la rigidezza *relativa* delle traverse ogni tratto di montante si inflette con un flesso equidistante dagli estremi che mantengono inalterata la tangente. Se la flesso-rigidità del montante i^{imo} della stilata j^{ima} , normale a Π , si indica con $B_{1ij}^{(s)}$, e si pone (cfr. fig. 15)

$$(19c) \quad \sum_i B_{1ij}^{(s)} = B_{1j}^{(s)},$$

ove siano m i tratti in cui è divisa l'altezza h_{sj} , lo spostamento $\delta_j^{(s)}$ provocato da una forza $H = 1$ in testa nel senso della traversa è

$$\delta_j^{(s)} = m \frac{\left(\frac{h_{sj}}{m}\right)^3}{12 \sum_i B_{1ij}^{(s)}} = \frac{1}{m^2} \frac{h_{sj}^3}{12 B_{1j}^{(s)}}.$$

Da qui per la forza H_j che si oppone allo spostamento relativo $u = 1$,

$$H_j = \frac{1}{\delta_j^{(s)}} = m^2 \frac{12 B_{1j}^{(s)}}{h_{sj}^3}.$$

Se lo spostamento relativo delle estremità è $(u - u_1 - u_2)_j$ sarà

$$H_j = \left(\frac{u - u_1 - u_2}{\delta^{(s)}} \right)_j$$

ed il lavoro di deformazione risulta

$$\frac{1}{2} H_j (u - u_1 - u_2)_j = \frac{1}{2} \left| \frac{(u - u_1 - u_2)^2}{\delta^{(s)}} \right|_j$$

Sostituendo alle stilate discrete $j = 1, 2, \dots$; un velo continuo di stilate di rigidezza variabile espressa da una funzione $k_u^{(s)} = k_u^{(s)}(\psi)$ tale che

$$(21) \quad k_u^{(s)}(\psi_j) = \left(\frac{m^2 12 B_{1,i}^{(s)}}{h_s^3 \Delta} \right)_j$$

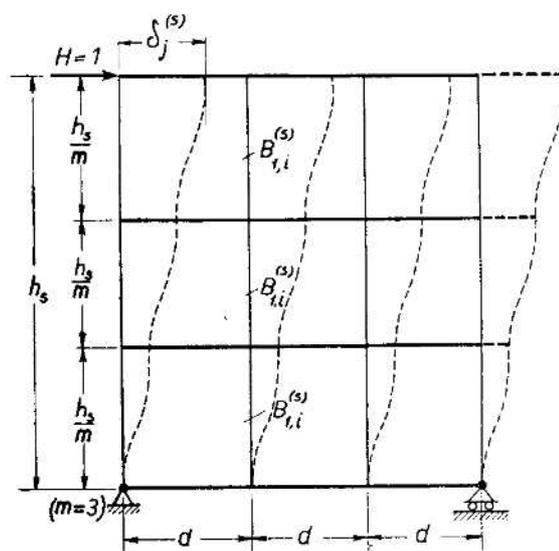


Fig. 15.

si potrà scrivere l'espressione compendiosa per $W_u^{(s)}$,

$$(154) \quad W_u^{(s)} = \frac{1}{2} \int k_u^{(s)} (u - u_1 - u_2)^2 ds$$

Anche per $k_u^{(s)}$ vale il rilievo che torna facile ed utile scegliere i dati di costruzione così che risulti praticamente costante. Non occorre dire che u ed u_1 sono funzioni di ψ o di s mentre u_2 è un parametro che dà lo spostamento in testa delle stilate di estremità ed esprime, in evidenti condizioni di simmetria, lo spostamento rigido di sola traslazione dell'impalcato.

5) *Calcolo di $W_u^{(s)}$.*

Le traverse tra gli archi abbiano, con riguardo agli stessi, una flessorrigidezza finita $B_{1,i}^{(s)}$ nel piano tangente alla volta in $\psi = \psi_j$. La volta orditura è (cfr. fig. 16) considerabile come una travata Vierendeel applicata su un cilindro.

Poiché la flessione avviene così che negli estremi di ogni traversa si hanno rotazioni praticamente eguali ed opposte, l'energia elastica di deformazione di ogni traversa sarà, con riguardo al caso *c*) della fig. 14,

$$\frac{1}{2} \frac{12 B_{1,j}^{(t)}}{d_j} \left(\frac{du}{ds} \right)_j^2.$$

Sostituendo alle traverse discrete un velo di traverse continue di rigidezza variabile $k_u^{(t)} = k_u^{(t)}(\psi)$ tale che sia, poiché per N costole, $(N - 1)$ sono le traverse,

$$(22) \quad k_u^{(t)}(\psi_j) = (N - 1) \frac{12 B_{1,j}^{(t)}}{\Delta_j d_j},$$

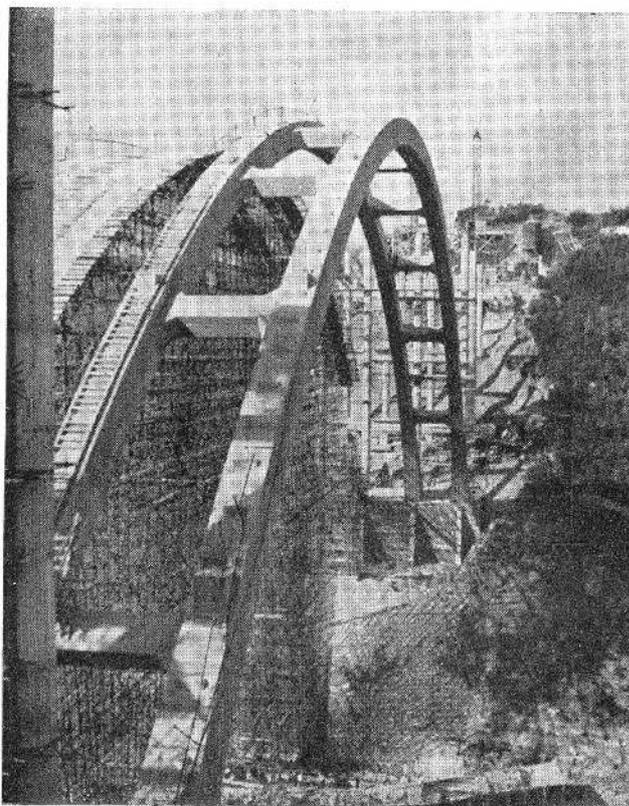


Fig. 16.

Δ_j essendo al solito l'intervallo di s spettante alla traversa j^{ima} , $d_j = d$ l'intervallo costante tra costola e costola, sarà

$$(15_s) \quad W_u^{(t)} = \frac{1}{2} \int k_u^{(t)} \left(\frac{u}{R} \right)^2 ds.$$

Osservazione notevole sul calcolo dei coefficienti $k_w^{(s)}$ e $k_u^{(t)}$ che intervengono nelle espressioni di $W_w^{(s)}$, $W_u^{(t)}$.

Le espressioni (20) per $k_w^{(s)}$ e (22) per $k_u^{(t)}$ sono valide se le rigidezze relative degli archi-costole o, per $R \rightarrow \infty$, delle travi maestre, sono grandi rispetto

a quelle dei collegamenti costituiti dalle stilate e dalle traverse. Precisamente quando sono $\ll 1$ i parametri, relativi alla stilata o traversa j^{ima} ,

$$\rho_{w,j} = \left(\frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h_s} \right)_j, \quad \rho_{u,j} = \left(\frac{(N-1) B_1^{(t)} \Delta}{B_1 d} \right)_j.$$

Ove tali parametri, che scriveremo brevemente con ρ_w, ρ_u pensandoli praticamente costanti o dipendenti da ψ o s , così da dare per $\psi = \psi_j$ o $s = s_j$ i valori discreti sopra accennati, non siano piccoli di fronte all'unità, alle $k_w^{(s)}, k_u^{(t)}$ si sostituiranno delle k^* date da

$$(20)^* \quad k_w^{*(s)} = \frac{k_w^{(s)}}{1 + \rho_w}, \quad (22)^* \quad k_u^{*(t)} = \frac{k_u^{(t)}}{1 + \rho_u}$$

con

$$(20 a)^* \quad \rho_w = \frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h_s}, \quad (22 a)^* \quad \rho_u = \frac{(N-1) \cdot B_1^{(t)} \Delta}{B_1 d}$$

essendo al solito

$$B_2 = \sum_i^N B_{2,i}, \quad B_1 = \sum_i^N B_{1,i}, \quad B_2^{(s)} = \sum_i^N B_{2,i}^{(s)}.$$

Le (20)* e (22)* di cui si dà la dimostrazione in Appendice risolvono la difficoltà, comune a varie ricerche, in cui ricorrono coefficienti secondo le (20) o (22) che non si annullano siccome avviene e deve avvenire per i k^* quando $B_2 \rightarrow 0$ o $B_1 \rightarrow 0$.

6) Calcolo di $W_{u_1}^{(im)}$.

Sia $B_1^{(im)}$ la rigidezza dell'impalcato per flessione nel suo piano. Sarà allora, poiché la u_2 cui corrisponde una traslazione non dà contributo, x essendo una coordinata contata lungo l'asse dell'impalcato

$$(15b) \quad W_{u_1}^{(im)} = \frac{1}{2} \int B_1^{(im)} \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} \right)^2 dx.$$

In termini di s , avendosi per dato di progetto le $x = x(s)$ o $s = s(x)$, introducendo una $k_{u_1}^{(im)}$ mediante, che per archi tesi si identifica con $B_1^{(im)}$, si scriverà anche

$$(15b)' \quad W_{u_1}^{(im)} \sim \frac{1}{2} \int k_{u_1}^{(im)} \left(\frac{d^2 u_1}{ds^2} \right)^2 ds.$$

Va rilevato che $B_1^{(im)}$ è per ponti in cemento armato assai rilevante, tanto che si può porre $u_1 = 0$ e quindi $W_{u_1}^{(im)}$ fuori concorso.

7) Calcolo di $W_{u_2}^{(pil)}$.

Sia $B_{1,i}^{(pil)}$ la flesso-rigidezza del generico pilone-montante delle stilate di estremità, generalmente più robuste di quelle sopra gli archi. Tali stilate siano divise da traverse, praticamente rigide, in m pannelli, come appare,

per $m = 3$, nella fig. 17 che illustra un ponte, a $N = 3$ costole, sul Nilo Azzurro a Safartak (cfr. 1^a e 2^a cit. in nota (**)) pag. 5). Posto allora

$$\sum_i B_{1,i}^{(pil)} = B_1^{(pil)}$$

si ha, per quanto precede, h_{pil} , essendo l'altezza del pilone,

$$(157) \quad W_{u_2}^{(pil)} = \frac{1}{2} \frac{m^2 12 B_1^{(pil)}}{h_{pil}^3} \cdot u_2^2.$$

Stilate-piloni controventate con diagonali si potranno considerare praticamente rigide e porre $u_2 = 0$ e quindi $W_{u_2}^{(pil)} = 0$. In fig. 18 appare uno di questi tipi di stilate per il ponte-canale antisismico sul Tagliamento a Tamariona di cui si accenna nella nota sopracitata.

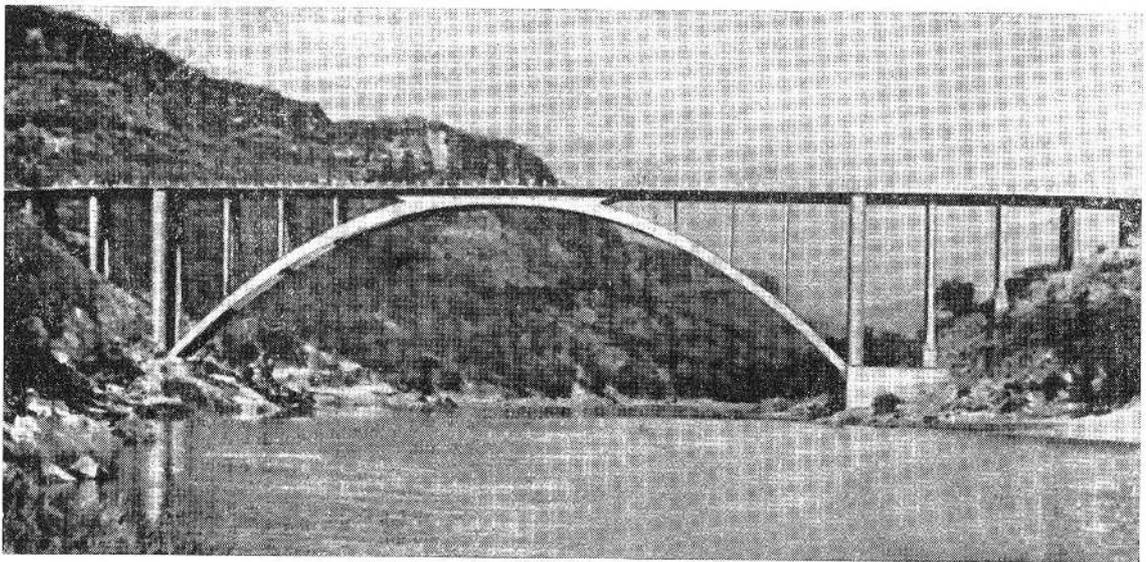


Fig. 17.

8) Calcolo di $W_{w_1}^{(im)}$.

Se $B_2^{(im)}$ è la flessò-rigidezza dell'impalcato nel piano normale a Π e w_1 è lo spostamento normale ad x ,

$$(158) \quad W_{w_1}^{(im)} = \frac{1}{2} \int B_2^{(im)} \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 dx,$$

$$W_{w_1}^{(im)} \sim \frac{1}{2} \int k_{w_1}^{(im)} \left(\frac{d^2 w_1}{ds^2} \right)^2 ds$$

con $k_{w_1}^{(im)}$ mediante che, per archi tesi si identifica con $B_2^{(im)}$.

9) Calcolo di $W_u^{(f)}$.

Quando si considerino funi di ancoraggio, usate soventemente in sede di montaggio di elementi, cioè di archi-costole isolati, si dà luogo ad una serie di appoggi orizzontali elastici discreti. Per la reazione $k_u^{(f)}$ allo spo-

stamento orizzontale $u = 1$ del generico appoggio, cioè di un estremo di una generica fune, si può proporre la relazione ⁽¹⁴⁾, valida per piccole variazioni ΔH (è $\Delta H = k_u^{(f)} \cdot u$) della spinta H_0 nella fune ($\Delta H/H_0 \leq 1/5$),

$$(23) \quad \frac{1}{\delta_u^{(f)}} \sim \frac{\cos^3 \alpha_0}{1 + \frac{16}{3} \frac{E_f F_f}{H_0} \left(\frac{f}{l}\right)^2 \cos^7 \alpha_0} \cdot \frac{E_f F_f}{l}$$

con α_0 inclinazione sull'orizzontale della *corda*, lunga $l \sec \alpha_0$, di proiezione l ; E_f, F_f modulo d'elasticità ed area della sezione resistente della fune, H_0 spinta orizzontale

$$(24) \quad H_0 = \frac{gl^2}{8f}$$

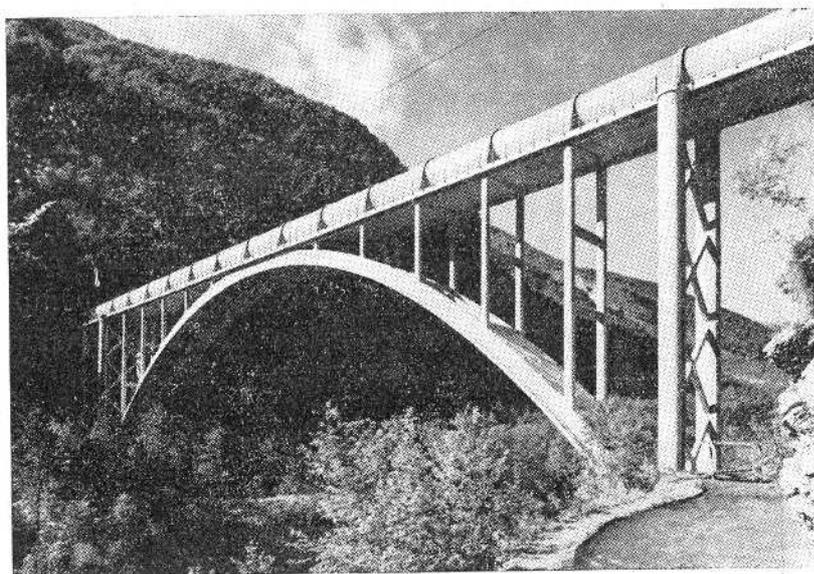


Fig. 18.

con $g \sim g_0 \sec \alpha_0$ per g_0 peso per unità di lunghezza della fune, f *freccia* (come sempre misurata al mezzo, a partire dalla *corda*).

Alle funi discrete si sostituirà un velo continuo di funi di cui il coefficiente di rigidezza per unità di lunghezza $k_u^{(f)}$ sarà una funzione di ψ o di s scelta così che sia, se Δ_j è l'intervallo di s interessato della fune j^{ima} ,

$$(25) \quad k_u^{(f)}(\psi_j) = \left(\frac{k_u^{(f)}}{\Delta} \right)_j = \left(\frac{1}{\Delta \cdot \delta_u^{(f)}} \right)_j,$$

l'indice j stando ad indicare il numero d'ordine dell'attacco della fune nel punto P di anomalia ψ_j o coordinata s_j .

Il potenziale $W_u^{(f)}$ corrispondente alla deformazione u del mezzo elastico diviene

$$(15_9) \quad W_u^{(f)} = \frac{1}{2} \int k_u^{(f)} u^2 ds.$$

(14) Si deduce questa linearizzando il *problema del 3° ordine della fune elastica* trattato da F. STÜSSI nella sua *Baustatik* (Vol. I, Cap. X; Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1953).

10) *Criterio di stabilità dell'equilibrio elastico desunto dal teorema del Dirichlet.*

Sulla struttura agisca una distribuzione di carico qualunque. Si richiede il grado di sicurezza λ rispetto all'instabilità, cioè quel minimo numero λ che moltiplicato per i carichi, porta ad avere accanto alla soluzione \mathcal{E}_0 d'equilibrio $u = v = w = 0, \varphi = 0$ ad essi corrispondente, una o più altre *soluzioni prossime* \mathcal{E} . Detto moltiplicatore λ viene definito come estremo, anzi minimo, di un funzionale di u, v, w, φ ; precisamente

$$(26) \quad \lambda = \min \frac{W}{\Omega_2 - \Omega_2^*}$$

con W già specificato;

Ω_2 , termine di 2° ordine negli spostamenti (e loro derivate) del lavoro fatto dai carichi esterni nel passaggio dalla configurazione d'equilibrio \mathcal{E}_0 alla sua *prossima* \mathcal{E} ;

Ω_2^* , lavoro fatto dagli sforzi interni, compendati nel tensore degli sforzi (lo *stress* degli inglesi, il *Drang* dei tedeschi), che corrispondono alla configurazione di equilibrio \mathcal{E}_0 nel passaggio da questa alla sua *prossima* \mathcal{E} . Se con notazione corrente si indicano con X_x, X_y, \dots, Z_x le componenti dello stress, con $e_{xx}^{(2)}, e_{xy}^{(2)}, \dots, e_{zz}^{(2)}$ le parti di 2° ordine della deformazione (lo *strain*, *Zwang*) calcolate con u, v, w, φ , si ha

$$(27) \quad \Omega_2^* = \int (X_x e_{xx}^{(2)} + X_y e_{xy}^{(2)} + \dots + Z_x e_{zx}^{(2)}) dS.$$

La (26) segue dalle considerazioni seguenti.

Per ricercare se esistono soluzioni u, v, w, φ distinte da zero, occorre rifarsi al criterio di *stabilità del Dirichlet* esaminando la variazione ΔE dell'energia totale

$$(28) \quad E = W^* + P$$

somma di quella elastica W^* conseguente agli spostamenti u, v, w, φ a partire da \mathcal{E}_0 e di quella posizionale P dei carichi. Sarà

$$(28 a) \quad \Delta E = \delta_1 E + \delta_2 E + \dots$$

con $\delta_1 E = 0$ per definizione di \mathcal{E}_0 come configurazione d'equilibrio, e

$$(28 b) \quad \delta_2 E = \delta_2 W^* + \delta_2 P.$$

Per $\delta_2 W^*$ si ha ⁽¹⁵⁾, con riguardo alla (15) e (27),

$$(28 c) \quad \delta_2 W^* = W + \lambda \Omega_2^*$$

e per $\delta_2 P$,

$$(28 d) \quad \delta_2 P = -\lambda \Omega_2.$$

(15) Cfr. A. FÖPPL, *Drang und Zwang*, Bd. II, § 108. R. Oldenburg, Berlin 1924.

Dalla condizione di labilità $\delta_2 E = 0$ segue

$$W + \lambda \varrho_2^* - \lambda \varrho_2 = 0$$

e cercando il minimo di λ , si è portati a scrivere la (26) c. d. d.

La (26) comporta la condizione di stazionarietà $\delta\lambda = 0$ che è premessa per il minimo,

$$(26 a) \quad \delta\lambda = \delta W + \lambda \delta (\varrho_2^* - \varrho_2) = 0.$$

Tale condizione di estremo risulta anche indipendentemente da ogni specificazione su λ , esprimendo che \mathcal{C} è configurazione d'equilibrio e si ha quindi $\delta_1 (\delta_2 E) = 0$, cioè per le (28 a, b, c, d) la (26 a) c. d. d.

Dalla (26 a), con le regole del calcolo, seguono 4 equazioni differenziali omogenee in u, v, w, φ , le cosiddette *euleriane* o *lagrangiane* del problema. Esse ammettono soluzioni non nulle per una serie discreta di valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; per la natura di W reali e positivi, formanti uno spettro discreto (di autovalori) di cui interessa, come si è detto, il più piccolo $\lambda = \lambda_1$, che dà il cercato *grado di sicurezza* dell'equilibrio ed al quale λ_1 si può dare l'appropriato nome di *moltiplicatore critico* λ_{cr} della distribuzione di carico perché moltiplicando i carichi per λ_{cr} si ha instabilità.

Posto

$$(28 e) \quad \Phi = W + \lambda (\varrho_2^* - \varrho_2)$$

la (26 a) diviene

$$(26 b) \quad \delta\Phi = 0;$$

le equazioni accennate si scrivono, u', v', w', φ' indicando le derivate rapporto ad s di u, v, w, φ ; nella classica forma lagrangiana

$$(26 c) \quad \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v'} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0,$$

.....

È questo l'accennato sistema di equazioni differenziali, lineari, omogenee in u, v, w, φ .

Come si vedrà in appresso la loro risoluzione riesce per R finito solo per $R = \text{cost.}$ e per la costanza di tutte le caratteristiche elastiche, geometriche e di carico del sistema. Se tali condizioni non sussistono non resta che affrontare il problema con i metodi chiamati *diretti* del calcolo delle variazioni, il più adatto fra tutti, in quest'ordine di quistioni, quello cosiddetto delle *serie minimizzanti* o *del Ritz*. Se gli estremi dell'arco sono in $s = 0, s = s_0$ ed agli estremi gli spostamenti u, v, w, φ si annullano - salvo v con le derivate seconde (*imposta* fissa ma snodata) - con riguardo a terne u, v, w *non estensionali* ($\dot{v} = w$) si porrà

$$(29) \quad \begin{aligned} u &= \sum A_m \sin \frac{m\pi}{s_0} s & \varphi &= \sum C_m \sin \frac{m\pi}{s_0} s; \quad (m=1, 2, \dots) \\ v &= \sum \frac{s_0}{m\pi} B_m \left(1 - \cos \frac{m\pi}{s_0} s \right) & w &= \sum B_m \sin \frac{m\pi}{s_0} s, \quad (m=2, 4, \dots) \end{aligned}$$

Con tali posizioni Φ diviene una forma quadratica negli incogniti coefficienti A_m, B_m, C_m e la condizione di stazionarietà (26 a) si esprime

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_m} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Sono queste equazioni algebriche, lineari ed omogenee negli incogniti coefficienti A_m, B_m, C_m . Soluzioni non nulle si ottengono corrispondentemente ad una serie discreta di valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, che per ∞ termini converge effettivamente, nelle condizioni del nostro problema, allo spettro di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; del sistema (26 c). Naturalmente la realtà applicativa ha generalmente fini assai più modesti. Come si vedrà, sarà già un lavoro non lieve anche a limitarsi ad un solo termine delle serie. Naturalmente, per coefficienti costanti, il generico m^{imo} termine delle serie dà la soluzione in rigore e solo questa circostanza può confortare ad accettarlo *unico* in condizioni di moderata variabilità dei coefficienti suddetti.

11) *Raffronto con il criterio di stabilità di Bryan-Timoshenko.*

All'espressione (26 a) si sostituisce usualmente una di aspetto in certo senso più semplice perché in essa non si fa intervenire (legittimamente però purché sia nullo) il lavoro \mathcal{Q}_2^* delle forze interne. Rappresenta questa espressione il noto criterio energetico di Bryan-Timoshenko.

Secondo questo si afferma che la labilità e quindi l'instabilità ha luogo quando spostando di u, v, w una configurazione di equilibrio \mathcal{E}_0 , il lavoro \mathcal{Q}_2 fatto dai carichi esterni eguaglia o supera l'energia elastica W corrispondente a quegli spostamenti.

Così, dalla condizione (di labilità) che ne viene,

$$\lambda \mathcal{Q}_2 = W$$

si pone, in luogo della (26),

$$(30) \quad \lambda = \min \frac{W}{\mathcal{Q}_2}$$

e quindi

$$(30 a) \quad \delta W - \lambda \delta \mathcal{Q}_2 = 0.$$

Ma l'energia elastica per u, v, w, φ contati a partire da una configurazione naturale è W ; a partire dalla \mathcal{E}_0 , per l'esistenza dello *stress* corrispondente ai carichi è invece $W + \lambda \mathcal{Q}_2^*$. Da qui segue che per la validità della (30) o (30 a) occorre assicurare l'annullarsi di \mathcal{Q}_2^* . Altrimenti il criterio di Bryan-Timoshenko non riporta alla (26 a) del criterio di Dirichlet. Nelle sistematiche applicazioni della (30) o (30 a) che ricorrono nella letteratura tecnica tale annullarsi avviene sempre tacitamente per virtù di una indiretta correzione della terna u, v, w , correzione che meriterà mettere in evidenza particolarmente con riguardo al ns. problema.

Là dove il principio (30 a) non riesce o porta a complicazioni gli si sostituisce *sens'altro* il sistema (26 c) ma non derivato come lagrangiano di un

principio variazionale generale, il principio (26 b) ad esempio, ma scritto *direttamente*, esprimendo le condizioni locali (differenziali) di equilibrio per una configurazione variata della \mathcal{C}_0 .

Nessun dubbio che per un impiego sistematico meglio è rifarsi al principio (26 b) si intende quando non sia possibile ricalcare con varianti concettualmente inessenziali uno dei tanti e tanti problemi già trattati. In quanto segue ci varremo dunque, necessariamente, del principio generale, del quale daremo così, in pari tempo, una ampissima illustrazione.

Le generalità non sono però ancor finite perché occorre render esplicite con i dati del problema le espressioni non note di \mathcal{Q}_2^* ed \mathcal{Q}_2 con riferimento al nostro problema.

10. — *Calcolo di \mathcal{Q}_2^* , \mathcal{Q}_2 per un arco isolato soggetto a sforzo assiale, flessione e torsione.*

Su l'arco agisca nel piano Π una distribuzione di carichi $q_0 = q_0(\psi)$ e di momenti $M_0 = M_0(\psi)$. Sieno M_t i momenti torcenti con asse in \vec{t} e sia infine $N_0 = N_0(\psi)$ lo sforzo assiale, di compressione, di verso opposto a \vec{t} .

Considerati spostamenti u, v, w, φ compatibili con i vincoli agli estremi dell'arco si tratta di calcolare \mathcal{Q}_2^* ed \mathcal{Q}_2 .

Cominciando da \mathcal{Q}_2^* poniamo, con riguardo ai contributi di N_0, M_0, M_t ,

$$(31) \quad \mathcal{Q}_2^* = \mathcal{Q}_2^* N_0 + \mathcal{Q}_2^* M_0 + \mathcal{Q}_2^* M_t.$$

Si ha in conformità con la (27) poiché N_0 è, per premessa, sforzo di compressione, l'integrazione essendo estesa tra s_0 e 0,

$$(31 a) \quad \mathcal{Q}_2^* N_0 = - \int N_0(\psi) e_{\psi}^{(2)} ds,$$

$e_{\psi}^{(2)}$ essendo la componente di 2° ordine della deformazione e_{ψ} , da scrivere secondo la (9 b), che ripetiamo,

$$e_{\psi}^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + v^2).$$

Ove a φ corrisponda la rotazione rigida φ nel piano normale a Π della sezione completa della struttura si considererà, per la costola i^{ima} , lo spostamento

$$w_i = w + \varepsilon_i \varphi,$$

separando lo sforzo assiale complessivo N_0 nelle componenti $N_{0,i}$ per ogni costola.

Posto per semplicità $v_i = v, u_i = u$ per ogni i , si ha

$$e_{\psi,i}^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + 2\dot{u}_i\dot{v} + v^2)$$

e, in luogo della (31 a),

$$(31 a)' \quad \mathcal{Q}_2^* N_0 = - \sum_i \int N_{0,i} e_{\psi,i}^{(2)} ds.$$

Ove sia, com'è senz'altro in condizioni di simmetria,

$$\sum_i N_{o,i} \epsilon_i = 0,$$

posto

$$\frac{\sum_i N_{o,i} \epsilon_i^2}{N_o} = \epsilon_N^2,$$

la (31 a)' assume la forma compendiosa

$$(31 a)'' \quad \Omega_{2N_o}^* = - \int N_o e_{\psi}^{(2)} ds - \frac{1}{2} \int N_o \frac{\epsilon_N^2}{R^2} \dot{\varphi}^2 ds.$$

Consideriamo ora il contributo di M_o costante applicato agli estremi. Conseguentemente agli spostamenti u, v, w, φ si provocano variazioni angolari specifiche $\kappa_u, \kappa_{\psi} = \kappa_w, \kappa_{\varphi}$ e quindi, considerato un elemento d'arco ds , corrispondenti variazioni angolari $\kappa_u ds, \kappa_{\psi} ds, \kappa_{\varphi} ds$ di \vec{b} ed \vec{n} .

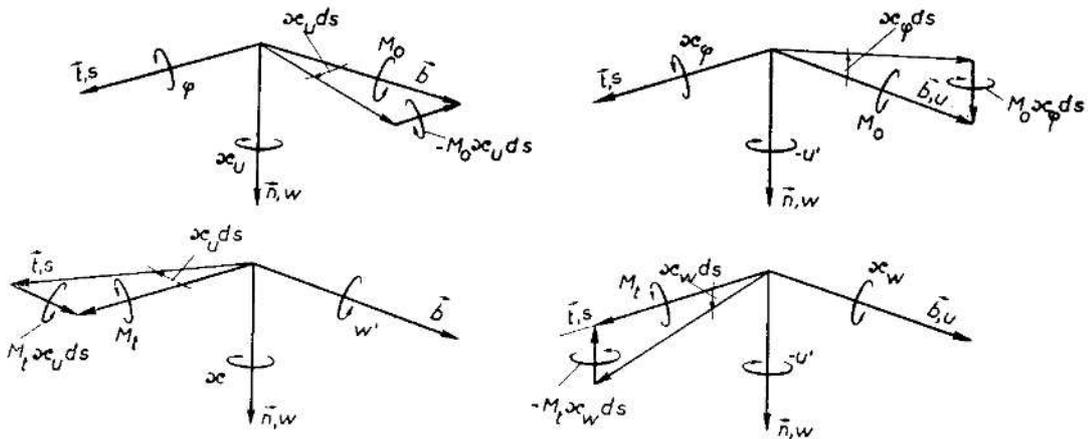


Fig. 19.

Per l'esistenza di M_o la deformata u, v, w, φ provoca (cfr. fig. 19), azioni interne, relative al ds , di momenti $-M_o \kappa_u ds, M_o \kappa_{\varphi} ds$, torcenti sull'asse di \vec{t} rispettivamente flettenti nel piano (\vec{t}, \vec{b}) .

Questi momenti crescono gradualmente con gli spostamenti a partire dal valore nullo e fanno per la torsione φ rispettivamente per la rotazione u' ($u' > 0$ è antioraria rispetto ad \vec{n} e va presa con segno negativo) il lavoro Ω_2^*

$$(31 b) \quad \Omega_{2M_o}^* = - \int \frac{1}{2} (M_o \kappa_u^{(1)} \varphi + M_o \kappa_{\varphi}^{(1)} u') ds - \frac{1}{2} \int \frac{dM_o}{ds} u' \varphi ds$$

o direttamente, ed in generale,

$$(31 b)' \quad \Omega_{2M_o}^* = \int M_o \kappa_w^{(2)} ds$$

con le $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}$ del n. 5. La (31 b)' si identifica con la intuitiva (31 b) per $e_{uw}^{(1)} = 0$ come tacitamente si ammette per annullare W_e .

Così analogamente, con riguardo ad un momento torcente M_t applicato agli estremi di un'asta rettilinea (caso limite dell'arco per $R \rightarrow \infty$, $2\psi_0 \rightarrow 0$), si trovano, conseguenti agli spostamenti u, v, w, φ , i momenti $M_t \kappa_u ds$ e $-M_t \kappa_w ds$ agenti sul ds flettenti nel piano II e nel piano normale (\vec{t}, \vec{b}) . Conseguentemente alle rotazioni w' ed u' si ha il lavoro

$$(31 c) \quad \Omega_{2, M_t}^* = \frac{1}{2} \int (M_t \kappa_u^{(1)} w' + M_t \kappa_w^{(1)} u') ds$$

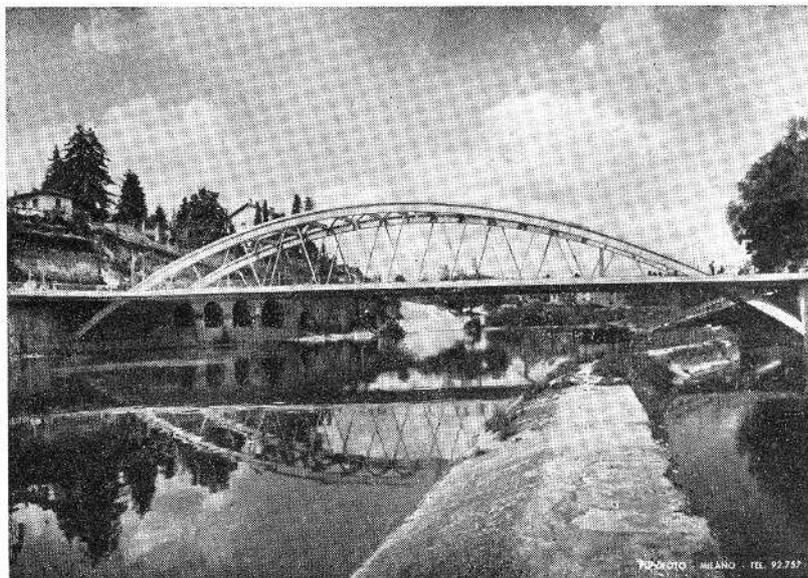


Fig. 20.

Per R finito e, accanto ad M_t , M_u flettente secondo u , si ha direttamente, ed in generale,

$$(31 c') \quad \Omega_{2, M_t, M_u}^* = \int (M_t \kappa_\varphi^{(2)} + M_u \kappa_u^{(2)}) ds$$

con le $\kappa^{(2)}$ del n. 5. Per $R \rightarrow \infty$, $M_u = 0$, $e_w^{(1)} = 0$, la (31 c') si identifica con la intuitiva (31 c).

Calcolo di Ω_2 .

Poiché gli spostamenti u, v, w, φ sono compatibili con i vincoli, le reazioni non fanno lavoro e solo lavoro di 2° ordine fanno i carichi conseguentemente alla rotazione φ delle costole ad arco. Se q_0 è riferito alla variabile s , ove si indichi con h l'altezza della costola, sarà

$$(32) \quad \Omega_{2, q_0} = \pm \int q_0 \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi) ds \cong \pm \frac{1}{2} \int q_0 \frac{h}{2} \varphi^2 ds,$$

il segno + valendo per carichi sovrastanti la costola (ponti a via superiore) il segno - per carichi sottostanti alla costola come nei ponti a via inferiore, ad esempio del tipo indicato nella fig. 20 relativa al recente Ponte

di Vaprio d'Adda ($L = 90,0$ m; cfr. 3^a cit. in nota 7) o nella fig. 21 relativa al Ponte sull'Adige ad Albaredo.

Infine si considererà il termine, specifico per carichi idrostatici ma valido pressoché in generale,

$$(33) \quad \mathcal{L}_{2, q_0} = - \int q_0 d_2 A,$$

con $d_2 A$ dato dalla (10 b) che ripetiamo

$$d_2 A = \frac{1}{2} (v^2 + w^2 + ivv - iwv) d\psi.$$

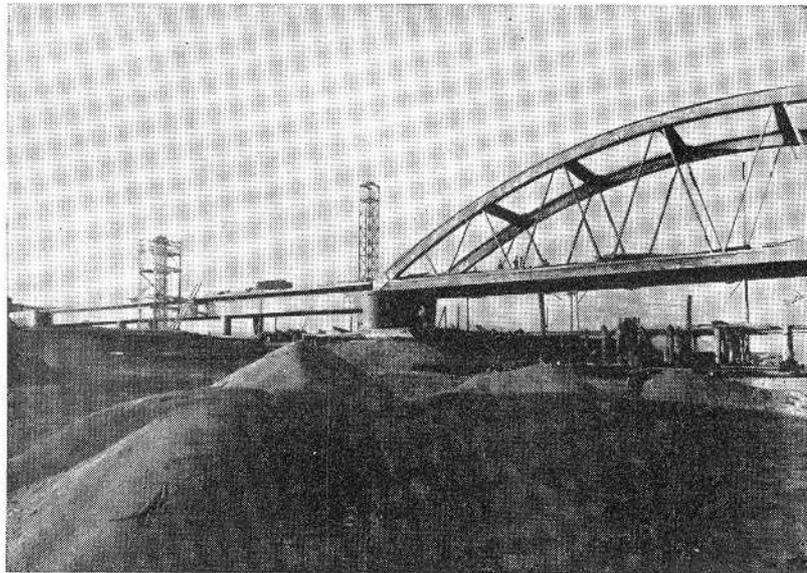


Fig. 21.

Questo termine (33) è tanto importante quanto dimenticato; forse perchè le pressioni critiche di anelli e tubi si calcolano generalmente dalle equazioni alle variazioni, direttamente scritte, e non con il criterio energetico (cfr. cit. 2^a in nota (3)).

11. - *Osservazione sull'applicazione al problema di cui si tratta dei due criteri energetici (26) e (30) del Dirichlet rispettivamente di Bryan-Timoshenko.*

Su di un arco solitario, di lunghezza s_0 , cernierato, con l'asse delle cerniere normale a Π , agli estremi $s = 0$, $s = s_0$, una distribuzione di carico $q_0 = q_0(s)$ generi uno sforzo assiale $N_0 = N_0(s)$. Sieno, per l'aderenza della linea delle pressioni all'asse dell'arco, trascurabili i momenti M_0 .

Considerata una quaterna di spostamenti u, v, w, φ , nulli agli estremi, per determinare λ con la (26) occorre calcolare $W, \mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_2$. Per W vale la (14a), per \mathcal{L}_2^* si ha immediatamente secondo la (31 a), poiché si escludono momenti flettenti,

$$\mathcal{L}_2^* = - \int N_0 e_{\psi}^{(2)} ds,$$

ed \mathcal{L}_2 è dato dalle (32) e (33) scritte dianzi.

Con ciò è noto Φ secondo la (28 e) e l'algoritmo lagrangiano secondo le (26 c) dà le equazioni alle variazioni in u, w, v, φ e da queste i moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; $\lambda_1 = \lambda_{cr}$ in particolare. Per i dettagli e per i casi più complessi cfr. in appresso.

Seguendo invece la (30) del criterio energetico usuale occorre calcolare W ed Ω_2 soltanto (ma in condizioni diverse) poiché Ω_2^* neanche si considera. All'uopo si immagina, tacitamente come per la trave rettilinea sotto carico assiale (carico di Eulero), che l'arco sia svincolato ad un estremo nel senso assiale e che sia, naturalmente, applicata su questo la reazione N_o . Allora, se in luogo della componente v degli spostamenti u, v, w, φ si considera una v^* diversa da v per soli termini del 2° ordine, precisamente

$$v^* = v - \int_0^s e_{\psi}^{(2)} ds,$$

si annulla la $e_{\psi}^{(2)*}$ formata con u, v^*, w .

Infatti, poiché $e_{\psi}^{(2)}$ è formata con u, v, w si ha, indicando al solito... termini d'ordine superiore al 2°,

$$e_{\psi}^* = e_{\psi}^{(1)*} + e_{\psi}^{(2)*} + \dots = \left(v^* - \frac{w}{R}\right) + e_{\psi}^{(2)} + \dots = \left(e_{\psi}^{(1)} - e_{\psi}^{(2)}\right) + e_{\psi}^{(2)} + \dots$$

e quindi $e_{\psi}^{(2)*} = 0$ c.d.d. All'annullarsi di $e_{\psi}^{(2)*}$ corrisponde l'annullarsi di Ω_2^* . In pari tempo si provoca, poiché v^* non si annulla in $s = 0$ come si annullava invece v , uno scorrimento dell'estremo $s = 0$ nel vincolo, che è stato parzialmente sbloccato, scorrimento dato da

$$- \int_0^{s_0} e_{\psi}^{(2)} ds,$$

e poiché questo, atteso il segno, ha luogo nel senso di N_o, N_o fa un lavoro positivo

$$(34) \quad \Omega_2 = N_o \int e_{\psi}^{(2)} ds.$$

A questa espressione di Ω_2 che per $N_o = \text{cost.}$ si identifica, salvo il segno, con la (31 a) per Ω_2^* , nella letteratura in merito ne fa riscontro una approssimata, che si deriva da quella esatta solo per l'asta rettilinea; si pone precisamente

$$(34 a) \quad \Omega_2 \cong N_o \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds.$$

Così si fa ad esempio nella fondamentale Nota citata in ⁽¹⁾, ma, per arrivare al moltiplicatore λ_{cr} desunto per altra via, precisamente dalle equazioni alle variazioni negli spostamenti scritte direttamente, si può scegliere arbitrariamente la φ ma occorre imporre alla u di soddisfare alle equazioni suindicate che devono derivare invece direttamente dal principio stesso.

Sommando ad Ω_2 secondo la (34) il lavoro di 2° ordine della pressione q_o dato dalla (33), con la (30) o con la (26) si perviene dunque per $N_o = \text{cost.}$ alla stessa equazione variazionale per il calcolo di λ_{cr} .

Se N_o è variabile, per applicare la (30) si penserà, in analogia con il problema dell'asta, a forze assiali applicate lungo l'asse, cioè ad una distribuzione assiale dN_o/ds tale che sia

$$N(s) = N_o(0) + \int_0^s \frac{dN_o}{ds'} ds'$$

con s' variabile d'integrazione nell'intervallo $0 - s$. In tali condizioni il lavoro ϱ_2 risulta

$$\varrho_2 = N_o(0) \cdot \int_0^{s_0} e_{\psi}^{(2)} ds + \int_0^{s_0} \frac{dN_o}{ds} \int_s^{s_0} e_{\psi}^{(2)} ds' ds.$$

Da qui, con una integrazione *p. p.* si ha, rispetto ad s

$$(34 b) \quad \varrho_2 = \int_0^{s_0} N_o(s) e_{\psi}^{(2)} ds = -\varrho_2^*$$

e quindi anche per N_o variabile i due criteri energetici (30) e (26) conducono allo stesso risultato, salvo i maggiori accorgimenti che richiede il metodo secondo (30) nella sua espressione pur tanto più semplice.

Con questi schiarimenti ed osservazioni a titolo di commento, un po' dilungate forse, ma genericamente non inutili, siamo ormai in possesso di un metodo sistematico per il calcolo del moltiplicatore λ_{cr} . Ciò vedremo subito fornendo non solo illustrazioni efficaci ma tutta una serie di formole definitive pronte per i numeri, valide per il λ_{cr} di alcuni notevoli sistemi che, più o meno prossimi, in più o meno prossime condizioni di carico, ricorrono frequenti nella pratica.

12. - *Equazioni alle variazioni in u, v, w, φ per una struttura da ponte ad arco di tipo generale secondo la fig. 22.*

Consideriamo una struttura da ponte costituita da N archi tra loro collegati e solidali con l'impalcato avente un piano di completa simmetria longitudinale rispetto al quale si contano le ϵ_i .

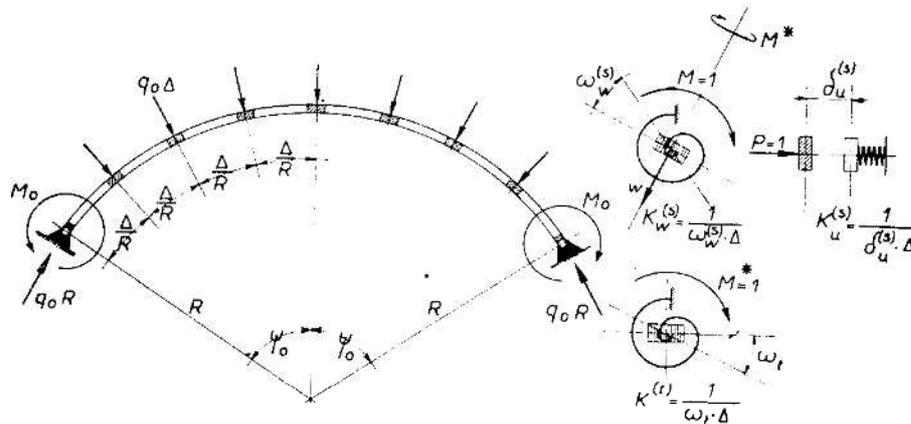


Fig. 22.

Poniamo, con riguardo alla fig. 12 *b* senza ripetere il significato dei simboli ampiamente indicato, ma ripetendo per completezza alcune posizioni già specificate in forma più sintetica e conveniente quando i valori corrispondenti risultano costanti (indipendenti da ψ o da j nel caso discreto):

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma B_{2,i} = B_2 \quad , \quad \Sigma B_{2,i} \epsilon_i = 0 \quad , \quad \Sigma \epsilon_i = 0, \\ \Sigma B_{1,i} = B_1 \quad , \quad \Sigma B_{2,i}^{(s)} \epsilon_i = 0 \quad , \quad \epsilon^2 = \frac{\Sigma \epsilon_i^2}{N}, \\ \Sigma C_i = C \quad , \quad \Sigma B_{2,i}^{(s)} = B_2^{(s)} \quad , \quad \epsilon_b^2 = \frac{\Sigma B_{2,i} \epsilon_i^2}{B_2}, \\ \Sigma D_i = D, \epsilon_d^2 = \frac{\Sigma_i D_i \epsilon_i^2}{D}, \quad \Sigma B_{1,i}^{(s)} = B_1^{(s)} \quad , \quad \epsilon_s^2 = \frac{\Sigma B_{2,i}^{(s)} \epsilon_i^2}{B_2^{(s)}}, \\ k_u^{(t)} = (N-1) \frac{12 B_1^{(t)}}{d_1 \Delta} \quad , \quad k_u^{(s)} = \frac{m^2 24 B_1^{(s)}}{h^3 \Delta} \quad , \quad k_w^{(s)} = \frac{4 B_2^{(s)}}{h \Delta}; \end{array} \right.$$

i coefficienti $k_u^{(t)}$, $k_u^{(s)}$, $k_w^{(s)}$ potendo esser espressi più in generale secondo la evidente fig. 22.

Tutti gli elementi qui elencati, sono generalmente funzioni di un indice j che dà il numero d'ordine della stilata. Considerata allora la serie di valori di indice j si costruiranno ove si voglia, effettivamente o solo concettualmente per semplicità di scrittura, le funzioni:

$$B_2 = B_2(s) \quad , \quad B_1 = B_1(s) \quad , \quad \dots \quad k_w^{(s)} = k_w^{(s)}(s)$$

nel modo indicato o che risulterà più conveniente.

Richiamiamo le espressioni per le κ , per le e e per $d_2 A$;

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_\psi^{(1)} = v' - \frac{w}{R} \\ e_\psi^{(2)} = \frac{1}{2 R^2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2 \dot{v} w + v^2) = \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2 + 2 w' \frac{v}{R} + \frac{v^2}{R^2}) \\ d_2 A = \frac{1}{2} \left(v w' + \frac{v^2}{R} + \frac{w^2}{R} - v' w \right) ds \\ \kappa_\psi = \frac{w}{R^2} + w'' + v \left(\frac{1}{R} \right)' \quad , \quad \kappa_u = \frac{\varphi}{R} - u'' \quad , \quad \kappa_\varphi = \varphi' + \frac{u'}{R} \quad , \quad \kappa_{\psi\varphi} = \frac{\varphi}{R^2} + \varphi'' \end{array} \right.$$

Va ben rilevato che, se

$$R = R(\psi)$$

è l'equazione dell'asse, si ha

$$R d\psi = ds \quad , \quad \frac{d}{ds} = (\quad)' = \frac{1}{R} (\quad)'$$

con

$$(\quad) \cdot = \frac{d}{d\psi}$$

ed infine che

$$\frac{d^2}{ds^2} = (\quad)'' = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} (\quad)' \right)'$$

Con queste precisazioni, l'energia elastica, con riguardo agli sviluppi precedenti, trascurando quanto si è detto di poter trascurare, è

$$(37) \quad \left. \begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \int (B_2 \kappa_\psi^2 + B_1 \kappa_u^2 + C \kappa_\varphi^2 + B_2 \epsilon_b^2 \kappa_{\psi\varphi}^2) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int D \left(e_\psi^{(1)2} + \frac{\epsilon_d^2}{R^2} \varphi^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int k_w^{(s)} (w'^2 + \epsilon_r^2 \varphi'^2) ds + \frac{1}{2} \int k_u^{(f)} u^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \int k_u^{(s)} (u - u_1)^2 ds + \frac{1}{2} \int k_u^{(t)} u'^2 ds + \frac{1}{2} \int k_{u_1}^{(im)} u_1''^2 ds. \end{aligned} \right\}$$

Per Ω_2^* , Ω_2 si ha, se $M_o = \text{cost.}$, ciò che si può ammettere quando si miri ad un limite inferiore di λ_{cr} , indipendentemente dallo smorzamento per trasmissione conseguente a $k_w^{(s)} = 0$,

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_2^* &= - \int N_o \left(e_\psi^{(2)} + \frac{\epsilon_d^2}{2R^2} \dot{\varphi}^2 \right) ds - \frac{1}{2} \int M_o (\kappa_u \varphi + \kappa_\varphi u') ds \\ \Omega_2 &= \pm \frac{1}{2} \int q_o \frac{h}{2} \varphi^2 ds - \int q_o d_2 A. \end{aligned} \right.$$

Ciò posto, considerato il funzionale Φ che interviene nella (26 b) di 10) del n. 9,

$$(39) \quad \Phi = W + \lambda (\Omega_2^* - \Omega_2),$$

da $\delta\Phi = 0$ per variazioni arbitrarie di u, v, w, φ, u_1 si hanno dalle lagrangiane (26 c) le equazioni in u, v, w, φ, u_1 ; equazioni lineari omogenee con un parametro λ che rispecchiano le equazioni per l'equilibrio prossimo alla configurazione assegnata di cui si esamina la stabilità. Soluzioni non nulle si hanno soltanto per una serie discreta di valori di λ , autovalori, da ricavare con riguardo alle condizioni agli estremi come si vedrà in appresso. Per calcoli immediati, avvalendosi di formole pronte per i numeri, giova considerare la circostanza in cui tutti gli elementi sono costanti. Poiché evidentemente l'altezza $h_j^{(s)}$ delle stilate non si può rendere costante, occorre che sia $B_1^{(s)}$ e $B_2^{(s)}$ previsto opportunamente; a ciò si perviene quasi automaticamente giacché la maggior altezza $h_j^{(s)}$ richiede una maggior flessorigidità $B_{1,2}^{(s)}$ per tenersi su una snellezza costante come è buona norma. In tali calcoli porremo anche $R = \text{cost.}$, supporremo cioè l'arco circolare ed indicheremo con $2\psi_o$ l'apertura.

Per elementi variabili non resta che affrontare il problema variazionale avvalendosi dei metodi diretti: per archi parabolici, cicloidici, catenarie per carichi verticali distribuiti così che le dette linee d'asse costituiscano la linea delle pressioni è sperabile si possa riferire più o meno prossimamente.

Qui ci limitiamo a esemplificazioni varie che già possono costituire un certo fondamento di analisi della stabilità in molti casi praticamente importanti.

Esempio.

Per un ponte ad asse circolare di raggio R , apertura $2\psi_o$ sieno tutte le caratteristiche costanti e sia $\epsilon_b^2 \simeq \epsilon_r^2 \simeq \epsilon_d^2 \simeq \epsilon^2$. Agisca un carico radiale $q_o = \text{cost.}$ ed un momento $M_o = \text{cost.}$ Con l'ipotesi $v_i = v$ per ogni valore

di i , e $v' - w/R = 0$ si vari φ, u, u_1 , di $\delta\varphi, \delta u, \delta u_1$. Si ottengono tre equazioni lineari in u_1, φ, u , indipendenti da v e w , precisamente, mettendo in evidenza le variazioni $\delta\varphi, \delta u, \delta u_1$, da cui derivano le singole equazioni,

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\varphi \mid, \quad \left(-\lambda \frac{M_0}{R} + \frac{B_1}{R^2} + \frac{B_2 \varepsilon^2}{R^4} + \left[\frac{D\varepsilon^2}{R^2} \right] - \lambda q_0 \frac{h}{2} \right) \varphi + B_2 \varepsilon^2 \varphi^{(iv)} - \\ \quad - \left(C - \left(\frac{2B_2}{R^2} + \lambda N_0 \right) \varepsilon^2 + k_w^{(s)} \varepsilon^2 \right) \varphi'' - \left(\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M_0 \right) u'' = 0 \\ \delta u \mid, \quad \left(\lambda M_0 - \frac{B_1 + C}{R} \right) \varphi'' + B_1 u^{(iv)} - \\ \quad - \left(-\lambda \frac{M_0}{R} + \frac{C}{R^2} + k_u^{(t)} - \lambda N_0 \right) u'' + (k_u^{(s)} + k_u^{(f)}) u - k_u^{(s)} u_1 = 0 \\ \delta u_1 \mid, \quad k_{u_1}^{(im)} u_1^{(iv)} + k_u^{(s)} (u_1 - u) = 0. \end{array} \right.$$

Il termine [] nella 1^a delle (40) prevale sensibilmente su B_1/R^2 che a sua volta prevale su $B_2 \varepsilon^2/R^4$. Ove la condizione v_i indipendente da i non sia praticamente soddisfatta cioè non sia impedito lo scorrimento relativo delle costole nel piano Π , occorrerà rifarsi alle ulteriori precisazioni dei nn. 16, 17, 18.

Variando w, v di $\delta w, \delta v$, considerando il carico costituito da una pressione per cui intervenga anche il lavoro dovuto a $d_2 A$; considerando la condizione di non estensionalità, con la κ_w di Love, si ottengono due equazioni in w, v

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta w \mid, \quad B_2 w^{(iv)} + \frac{B_2}{R^2} \cdot \left(2 w'' + \frac{w}{R^2} \right) + (\lambda N_0 - k_w^{(s)}) w'' + \\ \quad + \lambda \left(\frac{N_0}{R} - q_0 \right) v' + \lambda q_0 \frac{w'}{R} - \frac{D}{R} \left(v' - \frac{w}{R} \right) = 0 \\ \delta v \mid, \quad -\lambda (N_0 - q_0 R) \frac{w'}{R} - \lambda (N_0 - q_0 R) \frac{v}{R^2} - D \left(v' - \frac{w}{R} \right)' = 0. \end{array} \right.$$

nulle essendo le () nella 2^a e 3^a riga.

Per $R \rightarrow \infty$, N_0, M_0 costanti, considerando anche un momento torcente costante M_t , variando in Φ , formato con le (31 c) (37) e (38), w, φ ed u di $\delta w, \delta\varphi, \delta u$ si hanno le tre equazioni in w, φ, u

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta w \mid, \quad B_2 w^{(iv)} + \lambda M_t u''' + (\lambda N_0 - k_w^{(s)}) w'' = 0 \\ \delta\varphi \mid, \quad B_2 \varepsilon^2 \varphi^{(iv)} - \left(C - \lambda N_0 \varepsilon^2 + k_w^{(s)} \varepsilon^2 \right) \varphi'' + \lambda M_0 u'' = 0 \\ \delta u \mid, \quad B_1 u^{(iv)} - \lambda M_t w''' + \lambda M_0 \varphi'' + (\lambda N_0 - k_u^{(t)}) u'' + (k_u^{(s)} + k_u^{(f)}) u = 0. \end{array} \right.$$

Per N_0, M_0 variabili sostituire $N_0 w''$ con $(N_0 w')'$, $M_0 \varphi''$ con $(M_0 \varphi)''$. Questi tre gruppi di equazioni (40), (41), (42) differenziali lineari a coefficienti costanti si lasciano facilmente trattare e consentono di calcolare il grado di sicurezza λ per una quantità di problemi di importanza pratica notevolissima.

Cominceremo ordinatamente dal sistema (40).