

Osservazioni sui principi variazionali per la stabilità in Elastostatica e loro applicazioni (*).

SUMMARY. — Denote by $\mathfrak{S}(\rho)$ the sum of the elastic energy and of the loads. Consider its variation $\Delta\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(P_0 + P) - \mathfrak{S}(P_0)$ from one equilibrium configuration P_0 to a nearby one $P_0 + P$, and its part linear in P , $\Delta_1\mathfrak{S}$. Since $\Delta_1\mathfrak{S} = 0$, P_0 being an equilibrium configuration, the stability or instability depends upon the sign of $\Delta_2\mathfrak{S}$, the part of $\Delta\mathfrak{S}$ quadratic in P .

Expressions are given of non-linear Trefftz elasticity for \mathfrak{S} (generalized for the case with hydrostatic loads) and for the classical linear one by adding suitable correction terms. It is shown, however, that by writing the Eulerians of $\Delta_1\mathfrak{S} = 0$ and by integrating them in power series of a parameter λ , multiplier of the loads, the *breaking points*, eigen values in the linear case, permit a study of stability independently of $\Delta_2\mathfrak{S}$. The lowest $\lambda = \lambda_1 = \lambda_{cr}$ is of interest and in particular bounds of it from below.

To this purpose Southwell and Dunkerley criteria are generalized to the case of non-linear elasticity. Several examples are given for linear elasticity, together with numerical tables which are of a particular interest in practice.

Finally, non-conservative systems are taken into consideration. The study of the stability is related to the Lagrange criteria of the arithmetical properties of the characteristic exponents.

To make the study easier some complements are given to the well known Hurwitz criteria, adding to them a few recent theorems of this branch of algebra.

I. PREMESSE. — Merita rilevare qui qualche formulazione non proprio in forma consueta del principio energetico variazionale per l'equilibrio, e per la sua stabilità, in Elastostatica lineare e non lineare. A parte le applicazioni, quanto segue sarà utile per schiarire, o quanto meno indicare, là dove sono, alcune oscurità che per lo più, quando sono inevitabili, portano a seguire altre vie per giungere comunque al risultato, senza dir di esse, quasi non esistessero.

Vedremo come una buona espressione del criterio stesso non solo indica la via per generalizzarlo, nell'ambito non lineare in particolare, ma offre altresì lo spunto per applicazioni dirette non prive di interesse ed in certo senso non abituali.

Sia dunque C_0 una configurazione d'equilibrio che penseremo rappresentata in una varietà conveniente da un punto P_0 sostanzialmente corrispondente ad una terna $u_\mu^{(0)}$ ($\mu = 1, 2, 3$) di spostamenti in un dominio S

(*) Da «Memorie, Classe fis. mat. e nat. dell'Accad. Naz. dei Lincei», vol. VIII, sez. I^a (1967).

occupato da un corpo elastico di cui Ω è il contorno. Per trovare la configurazione di equilibrio C_0 e verificarne la qualità si comunichino ai punti di S , compatibilmente con i vincoli, spostamenti δu_μ contati da $u_\mu^{(0)}$ che, brevemente, indicheremo con $\delta u_\mu = u_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$). Se P è rappresentativo della terna u_μ , alla configurazione variata di C_0 corrisponderà il punto $P_0 + P$ o la equivalente terna di spostamenti $u_\mu^{(0)} + u_\mu$.

Indichiamo con \mathcal{E} l'energia potenziale totale

$$(1) \quad \mathcal{E} = \tilde{W} - \mathcal{L}$$

somma dell'energia elastica \tilde{W} alla posizionale $\mathcal{S} = -\mathcal{L}$, \mathcal{L} essendo il lavoro fatto dai carichi per lo spostamento P .

Si calcoli \mathcal{E} in P_0 ed in $P_0 + P$ e si valuti la differenza

$$(2) \quad \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(P_0 + P) - \mathcal{E}(P_0).$$

Si estragga da questa (2) la parte $\Delta_1 \mathcal{E}$ lineare nelle u_μ o derivate, e $\Delta_2 \mathcal{E}$, quadratica nelle stesse u_μ (e derivate, e ciò sia detto anche per quanto segue). Da

$$(3) \quad \Delta_1 \mathcal{E} = 0$$

se \mathcal{E} è accuratamente calcolata, considerando lineari i termini in $u_\mu^{(0)} \cdot u_\nu$ (o derivate) si traggono le effettive equazioni negli incogniti spostamenti $u_\mu^{(0)}$ dell'equilibrio C . Tali equazioni non sono generalmente quelle che classicamente si ottengono ponendo (cominciamo dalla teoria lineare) nella (1) per W , l'integrale esteso ad S di una \hat{w} quadratica nelle componenti del 1° ordine $e_{\mu\nu}^{(1)}$ della deformazione (dilatazioni $e_{\mu\mu}$ e scorrimenti $e_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$)) e per \mathcal{L} il lavoro \mathcal{L}_1 , del 1° ordine, fatto dalle forze X_μ nel campo S , $X_{\mu n}$ sul suo contorno Ω ; precisamente

$$(4) \quad \mathcal{L}_1 = \int_S \sum_{\mu} X_{\mu} u_{\mu} dS + \int_{\Omega} \sum_{\mu} X_{\mu n} u_{\mu} d\Omega.$$

Per \mathcal{L} oltre ad \mathcal{L}_1 si possono avere ulteriori termini $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$; di 2°, 3° ordine ed oltre.

Ad esempio, se il carico è dato da una pressione idrostatica p su Ω per una variazione u_μ contata da $u_\mu = 0$, si ha

$$(5) \quad \mathcal{L}_1 = - \int_{\Omega} p d_1 V \quad , \quad \mathcal{L}_2 = - \int_{\Omega} p d_2 V \quad , \quad \mathcal{L}_3 = - \int_{\Omega} p d_3 V$$

$d_1 V, d_2 V, d_3 V$ essendo esprimibili in termini lineari, quadratici e del 3° ordine, negli spostamenti u_μ dati ai punti di Ω , secondo le formole del Ferrarese (1). Queste, oltre a consentire di evitare la tanto elegante e nota, quanto difficilmente applicabile formola dello Steiner, assicurano che, anche per u_μ

(1) G. FERRARESE, *Sull'incremento di volume di un corpo per deformazioni finite*, « Rend. dell'Accad. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXVIII, fasc. 1, gennaio 1965.

finite, non si hanno termini di ordine superiore al 3°! (ciò che non risulta affatto dalla formola dello Steiner, salvo nel caso che sia $u_1 = u_2 = 0, u_3$, secondo la normale interna, $\neq 0$).

Dall'esistenza di $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ segue, ove si considerino spostamenti $u_\mu^{(0)}$ grandi così che sia $u_\mu^{(0)} \cdot u_\nu$ del 1° ordine, che ad $\mathcal{L}_1(P)$ si aggiunge un termine $\mathcal{L}_2^{(1)}$, bilineare in $u_\mu^{(0)} u_\nu, u_\mu u_\nu^{(0)}$ (o derivate) che si potrà scrivere $\mathcal{L}_2^{(1)} = \mathcal{L}_2^{(1)}(P_0, P) + \mathcal{L}_2^{(1)}(P, P_0)$ trattabile come lineare nelle u_μ . Se le forze $X_\mu, X_{\mu\sigma}$ sono funzioni degli spostamenti dati ad Ω si hanno anche, naturalmente, termini di ordine superiore al 1°; $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$. Ma non ci occuperemo di questo caso singolarissimo. Rileviamo piuttosto che l' \mathcal{L}_3 potrebbe dare un contributo $\mathcal{L}_3^{(2)}$, del 2° ordine nelle u_μ , se si trattasse $u_\mu^{(0)} \cdot u_\nu \cdot u_\sigma$ come del 2° ordine (doverosamente se $u_\mu^{(0)} u_\nu$ è del 1° ordine); questo termine può essere interessante in qualche caso (2).

Osserviamo ancora che si possono avere, e si tratta di casi che sistematicamente intervengono nelle applicazioni (criterio di Bryan-Timoskenko), termini \mathcal{L}_2, \dots quando si varino una o due delle 3 componenti u_μ lasciando liberamente espandersi, se i vincoli lo consentono, una o due componenti non variate.

Si consideri, per fissare le idee, il tipico esempio dell'asta con cerniera fissa ad un estremo A e cerniera-carrello (quindi scorrevole) all'altro estremo B. Sia $\overline{AB} = l$ e l'asse x contato da A verso B. A spostamenti u_μ (che scriveremo u, v, w con u secondo x e v, w nel piano normale ad x) corrisponde uno scorrimento $u(B)$ in B dato da

$$u(B) = - \int_0^l (\sqrt{1+v'^2+w'^2} - 1) dx = - \int_0^l \frac{v'^2 + w'^2}{2} dx + \int_0^l \frac{(v'^2 + w'^2)^2}{8} dx + \dots$$

i... indicando termini d'ordine superiore al 4° e ()' le $\frac{\partial}{\partial x}$.

Se lo sforzo assiale è $N = N(x)$, il lavoro \mathcal{L}_2 risulta, ($N > 0$ è, per convenzione ormai generale, sforzo assiale di compressione)

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \int_0^l N(x) \cdot (v'^2 + w'^2) dx.$$

Ciò è senz'altro evidente per $N(x) = N_0 = \text{cost.}$ ma è facile dimostrare che vale anche per N variabile con x .

Evidentemente, il particolare vincolo in B (carrello), ha consentito il formarsi, conseguente a v, w di uno spostamento lungo x del 2° ordine,

$$u = u(x) = - \int_0^x \frac{v'^2 + w'^2}{2} dx + \dots,$$

ed il conseguente lavoro \mathcal{L}_2 .

(2) In quest'ordine di valutazioni seguirebbe anche un $\mathcal{L}_3^{(1)}$ se termini in $u_\mu^{(0)} \cdot u_\nu^{(0)} \cdot u_\sigma$ (o derivate) si trattassero come del 1° ordine.

Si rilevi che, per tale definizione di u , l'estensione e_{xx} risulta, indicando con $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$; le componenti del 1° e 2° ordine della deformazione e (cfr. n. 3)

$$e_{xx} = \sqrt{1 + \gamma_{xx}} - 1 = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 = e_{xx}^{(1)} + e_{xx}^{(2)} + \dots,$$

con $e_{xx}^{(1)} = 0, e_{xx}^{(2)} = 0$. Sicché non si dà luogo, in questo caso, ad alcun lavoro delle forze interne (che indicheremo con ϱ_2^* , (in merito cfr. n. 3)).

2. ESPRESSIONE ESPlicita DELL'ENERGIA \mathfrak{E} . CONDIZIONI D'EQUILIBRIO E CRITERIO DI STABILITÀ. — In quest'ambito di considerazioni non lineari, salvo le precisazioni che seguono, pensiamo ora di aver trovato un potenziale elastico *adeguato* che può senz'altro non esser il \hat{w} dell'Elasticità lineare e scriviamo, nell'ambito non lineare, con riguardo ad un \tilde{w} ancora da precisare,

$$(1 a)^* \quad \mathfrak{E} = \tilde{W} - \varrho_1(P) - \varrho_2(P) - \varrho_3^{(2)}(P), \quad \left(\tilde{W} = \int_S \tilde{w} dS \right).$$

Dalla (2), con siffatta precisazione (1 a)* di \mathfrak{E} , si estrarrà il termine $\Delta_1 \mathfrak{E}$ lineare nelle u_μ e quello $\Delta_2 \mathfrak{E}$ quadratico nelle stesse u_μ (o derivate). Dalla condizione d'estremo (3), per \mathfrak{E} data da (1 a)*, risultano, con l'algoritmo usuale, le euleriane, che per una \tilde{W} corrispondente ad una \tilde{w} di Elasticità di 2° grado et ultra, non saranno lineari e non coincideranno (per la presenza dei termini $\varrho_2, \varrho_3^{(2)}, \dots$) neanche con le equazioni dell'equilibrio corrispondenti all'Elasticità *non lineare*, spettante a \tilde{w} (cfr. n. 3), in quanto (cfr. (3)), non considerandosi carichi idrostatici, si prescinde dall' ϱ_2 e di conseguenza dall' $\varrho_3^{(2)}$ in ogni caso, almeno per quanto ci è noto.

Se in luogo di \tilde{W} si pone $W = \int_S \hat{w} dS$, naturalmente non risultano neppure, e ciò è molto importante, le equazioni ordinarie dell'equilibrio dell'Elasticità *lineare* appena si introducano anche i soli termini di 2° ordine ϱ_2 di ϱ , ed eventuali termini ϱ_2^* di cui diremo, riguardanti il non sempre trascurabile, lavoro di 2° ordine delle forze interne (cfr. esempi ai nn. 5 e 6). Quanto alla variazione seconda $\Delta_2 \mathfrak{E}$ che, con il segno \cong consente notoriamente di decidere la stabilità, labilità o instabilità della C_0 , possiamo, come è lecito per ogni forma quadratica, indipendentemente dal suo carattere, scriverla *sempre* come differenza di due forme quadratiche W_1, W_2 tutte e due *definite e positive*, tanto per W quanto per \tilde{W} in \mathfrak{E} ,

$$(6) \quad \underline{\Delta_2 \mathfrak{E}} = W_1 - W_2, \quad (W_1 > 0, W_2 > 0).$$

(3) E. TREFFTZ, *Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen*. Verhandlungen des 3. int. Congr. für techn. Mechanik, Stockholm 1931. « Z. f. A. M. », Bd. 13, 1933; R. KAPPUS, *Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen*, « Z. f. A. M. », Bd. 19, N. 5/6, 1939.

Secondo una tale scomposizione, W_1 risulta generalmente $W_1 = \tilde{W}(P, P)$ nell'ambito non lineare e $W_1 = W(P, P)$ in quello lineare. In quest'ultimo l'espressione di W_2 come vedremo si può scrivere direttamente perché la (2) potrebbe fallire in più circostanze.

Da $\Delta_2 \mathcal{E} = 0$ si trae allora, considerando il rapporto

$$(7) \quad \lambda = \frac{W_1}{W_2},$$

che il pericolo massimo, cioè la prossimità più grande all'instabilità, si ha per

$$(8) \quad \lambda = \lambda_{\min} = \lambda_{cr} = \min. \frac{W_1}{W_2}, \quad (\lambda_{cr} > 1),$$

quindi, per

$$(8 a) \quad \delta\lambda = \delta W_1 - \lambda \delta W_2 = 0.$$

Alla condizione di solo estremo (8 a), che è tipica di un problema isoperimetrico: minimo di W_1 compatibilmente con $W_2 = 1$, corrisponde certamente un minimo per il carattere positivo definito di W_1 e W_2 .

Risultano dalla (8) o (8 a) in ogni caso, quindi tanto per W dell'Elasticità lineare quanto per \tilde{W} dell'Elasticità non lineare, con l'algoritmo variazionale ordinario, equazioni euleriane *lineari omogenee* autoaggiunte nelle u_μ con parametro λ . Il primo termine della successione λ_q di autovalori, reali e positivi, per i quali si hanno soluzioni $u_\mu^{(0)}$ non nulle, in ordine crescente, è il λ_{cr} cercato. A questo punto si osservi che, ove si moltiplichino i carichi X_μ , $X_{\mu\mu}$ per un fattore λ e si integrino le equazioni dell'equilibrio, non lineari per una Elasticità non lineare, cioè le euleriane di $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$, considerando le $u_\mu^{(0)}$, sviluppate in serie di potenze di λ , si può superare la (8), (8 a), ponendo

$$(9) \quad u_\mu^{(0)} = \sum_i u_\mu^{(i)} \lambda^i, \quad (\mu = 1, 2, 3).$$

Agli eventuali punti, cosiddetti di *diramazione*, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; della (9) corrispondono equilibri instabili e quindi una *correlazione (su cui non è facile però togliere l'oscurità) con gli autovalori delle euleriane lineari di (8 a)*. Naturalmente tale oscurità vien subito meno se le euleriane di $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$ sono lineari siccome avviene per l'Elasticità lineare, (cfr. esempi al n. 10).

Nell'ambito lineare, e non lineare quando si proceda secondo la (9), il λ_{cr} dà la *sicurezza*, cioè quel moltiplicatore numerico dei carichi per cui si ha instabilità. Secondo la (8) invece è tale solo nell'ambito lineare, in quello non *lineare* è presente come *indice di stabilità* tanto più rassicurante quanto > 1 ma da non intendersi nel senso ordinario di *sicurezza* (legato del resto alla linearità) intesa secondo i tecnici.

3. DEFINIZIONE DI \tilde{W} . COMPROMESSI CORRENTI. — Quanto alla scelta di \tilde{w} , E. Trefftz ⁽³⁾ ha proposto di sostituire alla \hat{w} classica, quadratica nelle $e_{\mu\nu}^{(x)}$, la forma analoga, pur essa invariante, che si ottiene praticamente sostit-

tuendo alle $e_{\mu\nu}^{(x)}$ le *caratteristiche* $\gamma_{\mu\nu}$ della deformazione, date in termini del 1° e 2° ordine (e non oltre) nelle derivate delle u_μ , cfr. nota in calce (4)

(4) Ricordiamo che per le caratteristiche $\gamma_{\mu\nu}$ di una deformazione del corpo elastico, tale che i punti di coordinate x_μ assumano le coordinate $\xi_\mu = x_\mu + u_\mu$, si hanno le relazioni, valide per spostamenti finiti,

$$(1) \quad \gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_{\rho=1}^3 \frac{\partial u_\rho}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_\rho}{\partial x_\nu}$$

e per le deformazioni: dilatazioni $e_{\mu\mu}$ e scorrimenti $e_{\mu\nu}$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{11} = \sqrt{I + \gamma_{11}} - 1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \dots, \\ e_{22} = \sqrt{I + \gamma_{22}} - 1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \dots, \\ \dots \dots \dots; \\ e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dots, \\ e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Per la parte lineare $e_{\mu\nu}^{(1)}$ delle $e_{\mu\nu}$ coincidente a meno del fattore 1/2 con la parte lineare $\gamma_{\mu\nu}^{(1)}$ delle $\gamma_{\mu\nu}$, si hanno gli *invarianti* ben noti, (ripetiamo, nelle $e_{\mu\nu}^{(1)}$),

$$(3) \quad (e_{11} + e_{22} + e_{33})^{(1)} = J_1, \quad \left[e_{11} e_{22} + e_{22} e_{33} + e_{33} e_{11} - \frac{1}{4} (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \right]^{(1)} = J_2.$$

Per le $\gamma_{\mu\nu}$, *complete con i termini di 2° ordine*, sussistono del tutto analoghi, gli invarianti

$$(3)^* \quad \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \tilde{J}_1 \quad \gamma_{11} \gamma_{22} + \gamma_{22} \gamma_{33} + \gamma_{11} \gamma_{22} - (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) = \tilde{J}_2.$$

Ora, con J_1 ed J_2 si forma il potenziale classico, abituale \hat{w} , quadratico nelle $e_{\mu\nu}^{(1)}$ (m, G essendo costanti di ben noto significato),

$$(4) \quad \hat{w} = G \frac{m-1}{m-2} J_1^2 - 2G J_2.$$

Come potenziale di una teoria elastica *non lineare* Trefftz propone l'espressione quadratica nelle $\gamma_{\mu\nu}$, *invariante* anch'essa,

$$(4)^* \quad \tilde{w} = \frac{G}{4} \frac{m-1}{m-2} \tilde{J}_1^2 - \frac{G}{2} \tilde{J}_2$$

con \tilde{J}_1, \tilde{J}_2 dati dalle (3)*, quindi per l'energia complessiva \tilde{W} ,

$$(5) \quad \tilde{W} = \int_S \tilde{w} dS.$$

Che la (4)* sia plausibile risulta dal fatto che, effettivamente, ove si ponga

$$\delta \tilde{w} = \frac{1}{2} (\tilde{X}_{11} \delta \gamma_{11} + \tilde{X}_{22} \delta \gamma_{22} + \tilde{X}_{33} \delta \gamma_{33}) + \tilde{X}_{12} \delta \gamma_{12} + \tilde{X}_{23} \delta \gamma_{23} + \tilde{X}_{31} \delta \gamma_{31}$$

si ha per il tensore degli sforzi $\tilde{X}_{\mu\nu}$,

$$(6) \quad \tilde{X}_{\mu\mu} = 2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma_{\mu\mu}} \quad \tilde{X}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}$$

e quindi per e tali da ammettere la legge di Hooke

$$(7) \quad \tilde{X}_{\mu\mu} = G \left(\gamma_{\text{tot}} + \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}}{m-2} \right), \quad \tilde{X}_{\mu\nu} = G \gamma_{\mu\nu}$$

Senza riguardo ai casi in cui ϱ_2, ϱ_3 non sono nulli, si ha con la W più adatta, poniamo quella di Trefftz,

$$(1' a) \quad \mathfrak{E} = \tilde{W} - \varrho$$

ed in conformità $\Delta \mathfrak{E} = \tilde{W}(P_o + P) - \tilde{W}(P_o) - \Delta \varrho(P)$. Da qui, si estrae il $\Delta_1 \mathfrak{E}$ e $\Delta_2 \mathfrak{E}$. Naturalmente per non arrivare ad assurdità, con P_o calcolato secondo

cioè relazioni del tutto analoghe alle classiche, notissime

$$(7)' \quad X_{\mu\mu} = 2G \left(e_{\mu\mu} + \frac{e_{11} + e_{22} + e_{33}}{m-2} \right) \quad , \quad X_{\mu\nu} = Ge_{\mu\nu} .$$

Solamente che nelle (7)' le $e_{\mu\mu}, e_{\mu\nu}$ sono le $e_{\mu\mu}^{(1)}, e_{\mu\nu}^{(1)}$ lineari nelle derivate delle u, v, w , date cioè dai soli termini lineari delle (2), le $\gamma_{\mu\nu}$ invece sono espresse dalle (1) complete.

Ormai l'energia potenziale totale $\tilde{\mathfrak{E}}$ si scrive, come al solito,

$$(8) \quad \tilde{\mathfrak{E}} = \tilde{W} - \int_S (Xu + Yv + Zw)_\mu dS - \int_\Omega (X_n u + Y_n v + Z_n w) d\Omega$$

$X, Y, Z; X_n, Y_n, Z_n$ essendo le forze di massa, rispettivamente superficiali, agenti in S rispettivamente su la frontiera Ω di S .

A questo punto, per trovare, con riguardo alla configurazione naturale $(u, v, w) = 0$ quelle di equilibrio (u_o, v_o, w_o) per una assegnata condizione di carico, si calcola da (u_o, v_o, w_o) la variazione prima $\delta_1 \mathfrak{E}$ di \mathfrak{E} , cioè lineare nelle $\delta u, \delta v, \delta w$. Posto $\delta_1 \mathfrak{E} = 0$, alla maniera solita si ricavano le equazioni indefinite dell'equilibrio e le condizioni al contorno, le prime e seconde *non lineari* però, attesa l'espressione (5) di \tilde{W} in termini delle $\gamma_{\mu\nu}$ sostituita alla classica W data in termini delle $e_{\mu\nu}^{(1)}$ cioè dalle componenti del 1° ordine della deformazione e . Torna utile rilevare che l'ammettere la legge di Hooke e quindi le deformazioni e piccole di fronte all'unità, non dà le incongruenze che sono state affacciate nella corrispondente geometria della deformazione. In particolare i coseni direttori del generico triedo $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ dopo la deformazione riferiti al corrispondente triedo i, j, k prima della deformazione essendo notoriamente espressi, per spostamenti finiti u_μ dalla matrice

cos	\tilde{i}	\tilde{j}	\tilde{k}
i	$\frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1 + e_{11}}$	$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + e_{22}}$	$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{1 + e_{33}}$
j	$\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + e_{11}}$	$\frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + e_{22}}$	$\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}}{1 + e_{33}}$
k	$\frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1 + e_{11}}$	$\frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + e_{22}}$	$\frac{1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{1 + e_{33}}$

risultano, per e trascurabile di fronte all'unità, con riguardo alle definizioni (2) per la stessa e , passando *adeguatamente* al limite, contrariamente a quanto si legge anche in qualche trattato,

cos	\tilde{i}	\tilde{j}	\tilde{k}
i	1	$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$
j	$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$	1	$\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$
k	$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$	1

il sistema non lineare euleriano di $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$ se si adotta la \tilde{w} di Trefftz o quella \tilde{w} che potrebbe ritenersi più idonea in una Elasticità non lineare. Posto allora

$$\Delta_2 \mathcal{E} = W_1 - W_2$$

si trae il criterio di stabilità conforme alla (8). Ma si potrebbe anche soffermarsi sulle equazioni dell'equilibrio conseguenti a $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$ e cercare i punti di diramazione di serie del tipo (9). Naturalmente le equazioni nelle $u_\mu^{(0)}$ dell'equilibrio non lineari o lineari (se si assume W) sono necessarie in ogni caso per calcolare le $u_\mu^{(0)}$.

Ovviamente con la (1 a)* per \tilde{W} corrispondente alla \tilde{w} indicata dalla (4)* si generalizza, con l'apporto dell'eventuale \mathcal{Q}_2 , la teoria di Trefftz ma, attesi certi dubbi, quanto meno pratici, che per forza di cose sussistono sull'applicabilità anche in casi elementari della suddetta \tilde{w} , ed anche per non allontanarsi troppo dal campo in cui torna per uso stare, poniamo per suggerimento, in certo senso indiretto, del Principio dei lavori virtuali (senza cercare altre dimostrazioni, come si fa nel *Drang und Zwang* di Föppl, dove si ammette una \tilde{W} , non invariante, desunta da una \hat{w} quadratica non, come classicamente lo è, nelle $e_{\mu\nu}^{(1)}$ ma nelle $e_{\mu\nu}$, limitate alla somma dei termini del 1° e 2° ordine, quindi nelle $(e_{\mu\nu}^{(1)} + e_{\mu\nu}^{(2)})$,

$$(10) \quad \tilde{W}(P_0 + P, P_0 + P) - \tilde{W}(P_0, P_0) \cong W(P, P) + \mathcal{Q}_2^*(P, P)$$

con

$$(10 a) \quad \mathcal{Q}_2^* = \int_S \Sigma_{\mu\nu} X_{\mu\nu}^{(0)} e_{\mu\nu}^{(2)}(P, P) dS$$

$X_{\mu\nu}^{(0)}$ essendo le $X_{\mu\nu}$ in C_0 . Ammetteremo quindi la (10) dando ad \mathcal{Q}_2^* carattere di lavoro virtuale delle forze interne.

Allora risulta, con un moltiplicatore λ per i termini di 2° ordine, in luogo delle (1 a), (1 a)*,

$$(1 b)^* \quad \mathcal{E} = W + \lambda (\mathcal{Q}_2^* - \mathcal{Q}_2) - \mathcal{Q}_1$$

W essendo il potenziale elastico consueto ottenuto con una quadratura estesa ad S su \hat{w} ed $\mathcal{Q}_3^{(2)}$ abbandonato (5).

Dalla (1 b)* si trae un $\Delta_1 \mathcal{E}$, da porre eguale a zero, che assume la forma

$$(11) \quad \Delta_1 \mathcal{E} = \Delta W(P_0, P) + \lambda [(\mathcal{Q}_2^*(P_0, P) + \mathcal{Q}_3^*(P, P_0)) - \\ - ((\mathcal{Q}_2(P_0, P) + \mathcal{Q}_2(P, P_0))] - \mathcal{Q}_1(P) = 0.$$

(5) È giustificato l'abbandono dell' $\mathcal{Q}_3^{(2)}$. Diversamente andrebbe completata, in modo più o meno dubbio, l'espressione (10 a) dell' $\mathcal{Q}_2^*(P, P)$ aggiungendo a $e_{\mu\nu}^{(2)}(P, P)$ i termini trattabili come del 2° ordine, derivanti da $e_{\mu\nu}^{(3)}$: $e_{\mu\nu}^{(3)}(P, P, P_0)$, $e_{\mu\nu}^{(3)}(P, P_0, P)$, $e_{\mu\nu}^{(3)}(P_0, P, P)$ e non si finirebbe più.

Da questa (11) si hanno le corrispondenti euleriane e quindi le equazioni dell'equilibrio nelle $u_{\mu}^{(0)}$ coordinate di P_0 . Ma queste equazioni, pur essendo lineari, non sono, *naturalmente*, quelle classiche che risulterebbero dalla ordinaria $\mathfrak{E} = W - \mathfrak{L}_1$! E ciò, che è evidente, vedremo tra un momento anche su qualche esempio al n. 10.

In tali equazioni appare, linearmente, un parametro λ e poiché, atteso il riferimento a \hat{w} , sono *lineari*, non omogenee (per $\mathfrak{L}_1 \neq 0$) esistono soluzioni solo e soltanto (a meno di note eccezioni) se λ non è *autovalore* delle corrispondenti equazioni omogenee. Da

$$(12) \quad \Delta_2 \mathfrak{E} = W(P, P) + \lambda (\mathfrak{L}_2^*(P, P) - \mathfrak{L}_2(P, P))$$

quadratica nelle u_{μ} (6), ponendo secondo (6):

$$\Delta_2 \mathfrak{E} = W_1 - W_2$$

$$(12 a)' \quad W_1 = W(P, P) \quad , \quad W_2 = -\mathfrak{L}_2^*(P, P) + \mathfrak{L}_2(P, P),$$

pur che sia $W_2 > 0$, (W_1 lo è per sua natura), si trae

$$\lambda_{cr} = \min \frac{W_1}{W_2}.$$

Dalla condizione di estremo conforme alla (8 a) segue,

$$(12 a) \quad \delta\lambda = \delta W(P, P) + \lambda \delta (\mathfrak{L}_2^*(P, P) - \mathfrak{L}_2(P, P)).$$

Da qui si ottengono equazioni lineari omogenee per le u_{μ} coordinate di P che, legittimamente, *si identificano*, si noti, con la *parte omogenea* delle equazioni

(6) Le espressioni di $\Delta_1 \mathfrak{E}$, $\Delta_2 \mathfrak{E}$ desunte da

$$\Delta \mathfrak{E} = \mathfrak{E}(P_0 + P) - \mathfrak{E}(P_0)$$

risultano subito, osservando che

$$W(P_0 + P, P_0 + P) = W(P_0, P_0) + 2W(P_0, P) + W(P, P),$$

$$\mathfrak{L}_2^*(P_0 + P, P_0 + P) = \mathfrak{L}_2^*(P_0, P_0) + (\mathfrak{L}_2^*(P_0, P) + \mathfrak{L}_2^*(P, P_0)) + \mathfrak{L}_2^*(P, P),$$

$$\mathfrak{L}_2(P_0 + P, P_0 + P) = \mathfrak{L}_2(P_0, P_0) + (\mathfrak{L}_2(P_0, P) + \mathfrak{L}_2(P, P_0)) + \mathfrak{L}_2(P, P).$$

Si rilevi che in coordinate cartesiane si ha

$$\mathfrak{L}_2^*(P_0, P) = \mathfrak{L}_2^*(P, P_0),$$

quindi

$$\mathfrak{L}_2^*(P_0 + P, P_0 + P) = \mathfrak{L}_2^*(P_0, P_0) + 2\mathfrak{L}_2^*(P_0, P) + \mathfrak{L}_2^*(P, P).$$

Non occorrono, per definizione, verifiche circa il $W_2 > 0$ nel caso di Trefftz o di un più adeguato, ma ancora inarrivabile, potenziale \tilde{W} . La verifica della condizione $W_2 > 0$, secondo la (12 a)' va invece fatta.

Ad esempio per una lastra soggetta a sforzi n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} nel suo piano, basta che sia $n_{xx} \cdot n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$, $n_{xx} < 0$, in tutto il piano. In merito cfr. nota citata in appresso.

dell'equilibrio nelle $u_{\mu}^{(0)}$ dedotte da $\Delta_1 \mathfrak{E} = 0$ secondo la (11). Queste equazioni ammettono soluzioni solo per λ autovalore così come la *parte omogenea*, delle euleriane di (11) con le quali si identificano. Sicché il $\Delta_1 \mathfrak{E}$ della (11) da solo, con la \mathfrak{E} data dalla (1b)* è sufficiente per decidere quale sia la C_0 effettiva di equilibrio ed anche la sua *qualità*, senza neanche ricorrere al $\Delta_2 \mathfrak{E}$.

Quanto al λ_{\min} , atteso il carattere definito positivo della W_1 e tale della W_2 , si può dire che il suo minimo $\lambda_{\min} = \lambda_{cr}$ esiste e può esser ricavato con un processo iterativo sulle euleriane di (8 a). Si ha, se $u_{\mu}^{(m+1)}$, $u_{\mu}^{(m)}$ indicano approssimazioni (iterate) successive, ricavate dalle euleriane stesse, posto

$$(13) \quad \lambda_m = \frac{W_1(u^{(m)}, u^{(m-1)})}{W_2(u^{(m)}, u^{(m)})},$$

$$\lambda_{m-1} > \lambda_m > \lambda_{m+1},$$

e monotoni i limiti

$$(14) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda_1,$$

e

$$(15) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_{\mu}^{(m)} = u_{\mu}^{(1)} \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

$u_{\mu}^{(1)}$ essendo l'*autoterma* (corrispondente a λ_1) funzione meromorfa di λ , di cui $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; sono *poli semplici*; circostanza questa che consente, una volta calcolato $\lambda_1, u_{\mu}^{(1)}$, di calcolare $\lambda_2, u_{\mu}^{(2)}$, etc.

Per la disuguaglianza $\lambda_{m-1} > \lambda_m$ si può affermare ovviamente che la (13) dà, per ogni m , limitazioni *superiori* e che le (13), (14), (15) sono *valide anche per le* W_1 e W_2 per una \tilde{W} di una teoria non lineare (cioè quando a $W + \lambda_2^*$ della (12 a) si sostituisce \tilde{W} della (8 a)).

Senza entrare nel merito delle approssimazioni successive (per le quali, stando nell'ambito lineare o quasi, la più completa esposizione, alla maniera di Schwarz e Picard, si trova in una nostra antica ricerca: *Sulle configurazioni d'equilibrio instabile di una piastra elastica sottile*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, Tomo IV, pp. 259-277 (1927)). Qui secondo l'uso in teoria matematica dell'Elasticità, $n_{xx} > 0$, $n_{yy} > 0$ indicano sforzi di trazione. In molti i trattati di Stabilità dell'equilibrio, sforzi di compressione. Il lettore vedrà perciò ovvi cambiamenti di segno. Ciò posto, va rivolto l'interesse alle meno note, e per la sicurezza più interessanti, limitazioni *inferiori* dei λ_{cr} .

4. LIMITAZIONI INFERIORI DI λ_1 NECESSARIE PER VALUTARE L'ERRORE DI UNA ITERAZIONE m^{ima} SECONDO LA (13). — All'uopo considereremo qui due estensioni, per l'Elasticità non lineare, dei cosiddetti criteri di Dunkerley rispettivamente di Southwell, valide nell'ambito usuale quando si sia verificato che sia $W_2 > 0$ nella (12 a)'.

Con riguardo ad una scomposizione del sistema in N sottosistemi equivalenti nell'insieme (cfr. esempi seguenti), per le W_1, W_2 , delle impostazione qui considerate, purchè positive e definitive, ammettiamo che sia

$$(16) \quad W_2 \leq \sum_i^N W_2^{(i)}$$

e che sieno *per ipotesi* facilmente calcolabili i $\lambda_1^{(i)}$ corrispondenti,

$$(17) \quad \lambda_1^{(i)} = \min \frac{W_1}{W_2^{(i)}}$$

e quindi i massimi

$$(17 a) \quad \frac{1}{\lambda_1^{(i)}} = \max \frac{W_2^{(i)}}{W_1}$$

Sarà, per la stessa definizione di massimo

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{cr}} \leq \sum_i^N \frac{1}{\lambda_1^{(i)}}$$

Segue da qui la limitazione inferiore notevole, che chiameremo alla Southwell,

$$(18) \quad \lambda_{cr} \geq \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_i^N \frac{1}{\lambda_1^{(i)}}}, \quad (\lambda_1^{(i)} \text{ secondo la (17)}).$$

Se in luogo degli N sottosistemi con W_1 invariato e W_2 parzializzato secondo la (16) si considerano sistemi con W_2 invariato e, invece, W_1 parzializzato, così che sia

$$(19) \quad W_1 \geq \sum_i^N W_1^{(i)},$$

ammettiamo che siano più facilmente calcolabili i $\lambda_1^{(i)}$ corrispondenti

$$(20) \quad \lambda_1^{(i)} = \min \frac{W_1^{(i)}}{W_2}$$

Sarà ovviamente

$$\lambda_{cr} = \min \frac{W_1}{W_2} \geq \sum_i^N \min \frac{W_1^{(i)}}{W_2}$$

da cui segue la limitazione inferiore, che diremo alla Dunkerley,

$$(21) \quad \lambda_1 \geq \sum_i^N \lambda_1^{(i)}, \quad (\lambda_1^{(i)} \text{ secondo la (20)}).$$

Le (18) e (21) valgono dunque per quanto precede per la più generale teoria elastica. Ma si rilevi che non si possono considerare *simultaneamente*

i casi (16) e (19), proprio così come avviene per i teoremi del Rayleigh relativi alle frequenze dei sistemi vibranti. Si sa bene che le frequenze aumentano quando aumenta la *capacità* (rigidezza), diminuiscono quando aumenta l'*inerzia* del sistema, ma nulla si può dire invece – salvo a scendere nel particolare – quando aumenta o diminuisce tanto la capacità quanto l'inerzia.

5. ASTA INCASTRATA AL PIEDE, LIBERA IN TESTA CON RIGIDEZZA E SFORZO ASSIALE VARIABILI. – Un esempio espressivo ed utile si ha considerando un'asta incastrata ad un estremo, libera all'altro, soggetta a sforzo variabile secondo le relazioni

$$(16a) \quad N(x) = \sum_{\circ}^N n_q \left(\frac{x}{l}\right)^q$$

con flessorigidezza variabile

$$(19a) \quad B(x) = \sum_{\circ}^N B_m \left(\frac{x}{l}\right)^m$$

x essendo contata dalla testa ($x = 0$) verso il piede ($x = l$).

Il λ_1 risulta per $N > 0$, come minimo della espressione

$$\lambda_1 = \lambda_{cr} = \min_{\circ}^l \frac{\int_{\circ}^l B(x) u'^2 dx}{\int_{\circ}^l N(x) u^2 dx}$$

Per questo si sanno calcolare limitazioni superiori in vari modi: per approssimazioni successive, oppure, con i metodi diretti del calcolo delle variazioni; delle poligonali di Eulero, delle serie minimizzanti, etc..

Le limitazioni inferiori riescono invece nel modo più facile con le (18) o (21) ma, purtroppo, limitando o la $N(x)$ o la $B(x)$ ad un termine solo delle serie (16 a) rispettivamente (19 a).

Si ha ad esempio, secondo la (16 a), per un solo valore $m = \bar{m}$,

$$(22) \quad \lambda_{cr}^{(q, \bar{m})} \geq \frac{B_{\bar{m}}}{l^2} \frac{1}{\sum_{\circ}^N \frac{n_q l}{q+1} v_{mq}^{\bar{m}}}$$

e secondo la (19 a), per un solo valore $q = \bar{q}$,

$$(23) \quad \lambda_1^{(m, \bar{q})} \geq \frac{\bar{q} + 1}{n_q l} \frac{1}{l^2} \sum_{\circ}^N v_{m\bar{q}} B_m.$$

Ora si dà la circostanza fortunata che i coefficienti v_{mq} sono già calcolati da Dinnik, sono anzi riportati nel famoso trattato del Timoshenko e per comodità anche in appresso.

Coefficienti $\nu_{m,q}$ secondo Dinnik ⁽⁷⁾.

$m \backslash q$	0	1	2	3	4	5
0	7,84	16,1	27,3	41,3	—	—
1	5,78	13,0	23,1	36,1	52,1	—
2	3,67	9,87	18,9	30,9	45,8	63,6
3	—	6,59	14,7	25,7	39,5	—

Rileviamo che per un'asta semplicemente appoggiata agli estremi di lunghezza $2l$, per $N(x)$ e $B(x)$ variabili, simmetrici rispetto al mezzo trave, secondo le (16 a), (19 a) valgono immutate le (22), (23) e, naturalmente, i coefficienti ν_{mq} di Dinnik.

Pertanto si avrà:

se B varia con la legge

$$(19 b) \quad B(x) = B_{\bar{m}} \left(\frac{x}{l} \right)^{\bar{m}}$$

\bar{m} essendo un intero fisso e x contato, dagli estremi della trave, > 0 tanto a destra quanto a sinistra,

$$(16 a) \quad N(x) = \sum_q n_q \left(\frac{x}{l} \right)^q$$

$$(22 a) \quad \lambda_1 = \lambda_{cr} > \frac{1}{\sum_q \frac{1}{\lambda_1^{(q, \bar{m})}}}, \quad (\text{con } \lambda_1^{(q, \bar{m})} \text{ secondo la (22)});$$

se N varia con la legge

$$(16 b) \quad N(x) = n_{\bar{q}} \left(\frac{x}{l} \right)^{\bar{q}}$$

\bar{q} essendo un intero fisso e x contato come prima,

$$(19 a) \quad B(x) = \sum_m B_m \left(\frac{x}{l} \right)^m$$

$$(23 a) \quad \lambda_{cr} > \sum_m \lambda_1^{(\bar{q}, m)}, \quad (\text{con } \lambda_1^{(q, m)} \text{ secondo la (23)}).$$

6. PIASTRA PIANA RETTANGOLARE SOGGETTA SIMULTANEAMENTE A SFORZI PIANI n_{xx} , n_{xy} , n_{yy} DI COMPRESSIONE E TAGLIO. — Esempi più notevoli, anche dal punto di vista analitico, si hanno in due dimensioni, ad esempio per la

(7) Cfr. S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, Second Ed. pp. 125-128. McGraw-Hill Book Company, London-New York 1961.

piastra soggetta ad una distribuzione di sforzi n_{xx} , n_{xy} , n_{yy} derivabili da una funzione di Airy. Allora è (cfr. la ns. Nota citata)

$$(24) \quad W_1 = W \cong \frac{1}{2} B \int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy$$

$$(25) \quad W_2 = \Omega_2^* = - \frac{1}{2} \int_S \left(n_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + n_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

Se è in ogni punto

$$(26) \quad n_{xx} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0, \quad (n_{xx} < 0),$$

indifferente essendo il segno $+ 0 -$ di n_{xy} , la *conica degli sforzi* è chiusa e si dimostra che tutti gli autovalori del principio variazionale (12) sono reali e positivi.

Orbene, senza entrare nella sistematica del problema, ormai ben nota, osserviamo che, per una piastra rettangolare in varie condizioni di vincolo si sanno facilmente calcolare i λ_1 per una sola delle componenti n_{xx} , n_{xy} , n_{yy} distinta da zero.

Posto, con riguardo alla (25),

$$(25 a) \quad \Omega_2^* = \Omega_x^* + \Omega_y^* + \Omega_{xy}^*,$$

siano $n_{xx} < 0$, $n_{yy} < 0$, sforzi di compressione, $n_{xy} = \pm |n_{xy}|$, con riguardo alla (26) e

$$(25 b) \quad \Omega_x^* = - \int_S n_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy, \quad \Omega_y^* = - \int_S n_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy,$$

$$\Omega_{xy}^* = 2 \int_S |n_{xy}| \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Siano dunque noti i minimi, separati,

$$\lambda_x = \min \frac{W}{\Omega_x^*}, \quad \lambda_y = \min \frac{W}{\Omega_y^*}, \quad |\lambda_{xy}| = \min \frac{W}{|\Omega_{xy}^*|}.$$

Risulta allora, per il λ_{cr} effettivo, corrispondente a n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} concomitanti, in conformità con la (18),

$$\frac{1}{\lambda_{cr}} \leq \frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{|\lambda_{xy}|}$$

e quindi la limitazione inferiore notevole, quando sia accertato che è $n_{xx} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$, $n_{xx} < 0$ e quindi $\lambda_{cr} > 0$, secondo la (18 a)

$$\lambda_{cr} \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{|\lambda_{xy}|}}.$$

Si rilevi che, per la piastra rettangolare, i valori di $\lambda_x, \lambda_y, |\lambda_{xy}|$ si sanno effettivamente calcolare agevolmente, anzi i λ_x, λ_y con riguardo a varie condizioni di vincolo ai bordi. Dal grafico (fig. 1) tratto da vari Autori (in par-

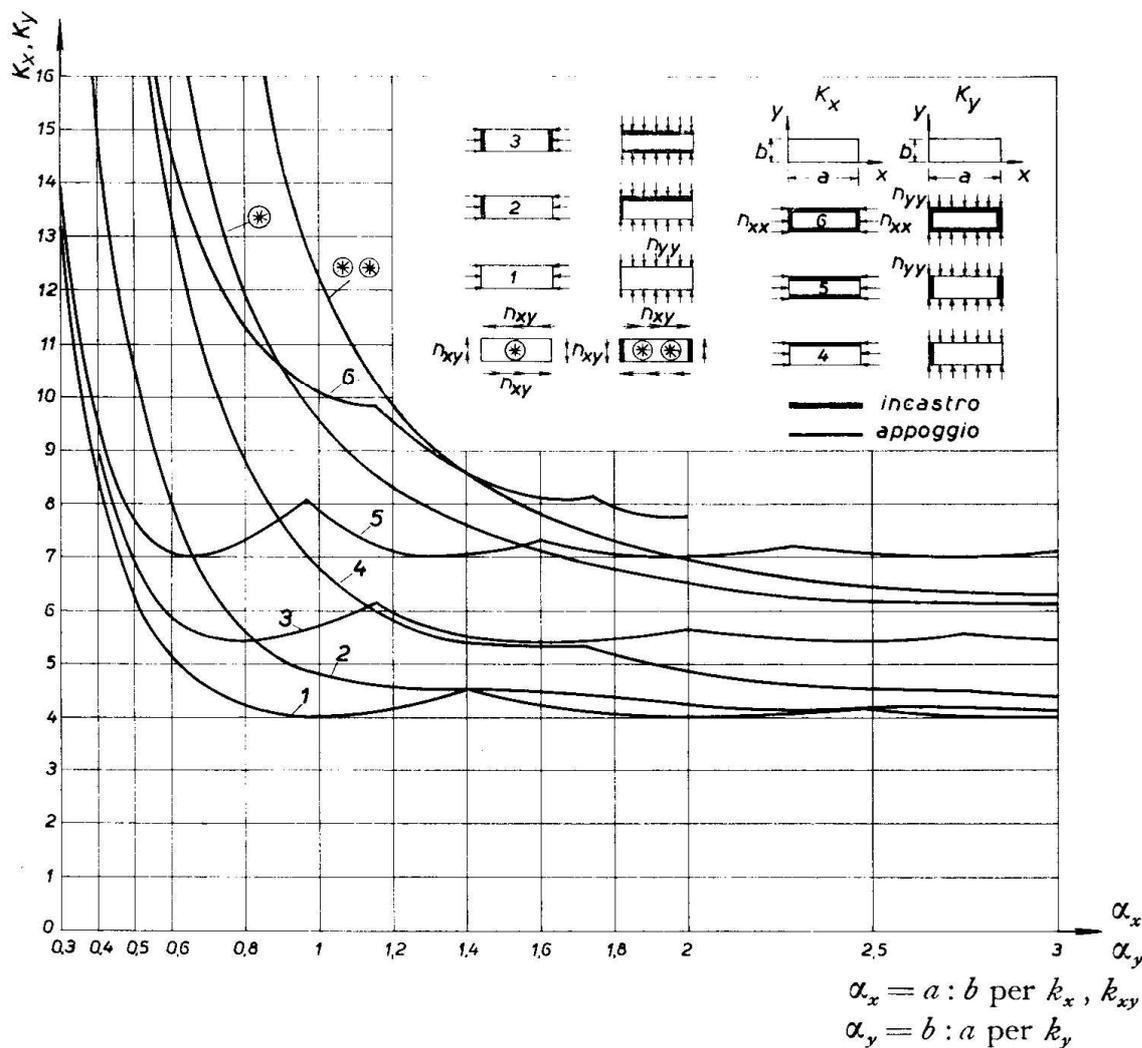


Fig. 1.

ticolare dalla straordinaria, utilissima raccolta in Appendice dell'Opera di Pflüger: *Stabilitäts-probleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Göttingen 1950); si ha, posto per la flessoridezza della lastra di spessore h ,

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (\nu \simeq 0,3)$$

e per $n_{xx}, n_{yy} > 0$, intesi qui, come in tecnica, come sforzi di compressione

$$n_{xy} = 0, \quad n_{xx} > 0, \quad n_{yy} = 0 \quad ; \quad \lambda_x = \frac{B}{b^2 n_{xx}} \cdot k_x$$

$$n_{xy} = 0, \quad n_{xx} = 0, \quad n_{yy} > 0 \quad ; \quad \lambda_y = \frac{B}{a^2 n_{yy}} \cdot k_y$$

$$n_{xy} \neq 0, \quad n_{xx} = 0, \quad n_{yy} = 0 \quad ; \quad \lambda_{xy} = \frac{B}{b^2 |n_{xy}|} \cdot k_{xy}$$

e con l'intesa, in riguardo al segno di n_{xx} , n_{xy} , per

$$n_{xx} \cdot n_{yy} - n_{xy}^2 > 0 \quad ; \quad n_{xy} \neq 0, \quad n_{xx} > 0,$$

$$\lambda_{cr} = \lambda_1 \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{|\lambda_{xy}|}}$$

ovvero

$$\lambda_{cr} = \lambda_1 \geq \frac{B}{b^2 n_{xx}} \frac{1}{\frac{1}{k_x} + \frac{n_{yy}}{n_{xx}} \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{k_y} + \frac{|n_{xy}|}{n_{xx}} \frac{1}{k_{xy}}}$$

i coefficienti k_x , k_y , k_{xy} essendo riportati nel grafico della fig. 1.

7. NON TRASCURABILITÀ DELL' ϱ_2 , LAVORO DI 2° ORDINE DELLE FORZE ESTERNE. — Questo si deve considerare sempre seguendo la seconda delle (5), in particolare in presenza di pressioni idrostatiche. Solo così si trovano, attraverso il criterio energetico, valori di λ_{cr} conformi a quelli dedotti scrivendo direttamente, quando si abbia però la necessaria singolarissima intuizione, le equazioni alle variazioni che sono nient'altro che le euleriane del principio energetico corretto contenente tanto l' ϱ_2^* quanto l' ϱ_2 , quando questo si deve considerare. Una circostanza in cui ciò avviene si ha per un cilindro circolare di raggio R , spessore h , indefinito, soggetto a sola pressione p_0 agente sul manto esterno.

La più opportuna terna di spostamento considerabile come serie minimizzante di un solo termine è

$$u = 0 \quad , \quad v = \frac{1}{2} A \sin 2\psi \quad , \quad w = A \cos 2\psi .$$

Essa risulta *non estensionale*, quindi tale da annullare l'energia elastica di deformazione estensionale, sicché l'energia elastica viene espressa dal solo contributo flessionale, come si sa, dell'ordine $\left(\frac{h}{R}\right)^2 \times$ inferiore a quella estensionale. Per questa si trova, indicando con B la flessoridezza di una fetta d'involucro, larga l'unità,

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ,$$

e κ_ψ variazione di curvatura nel senso di Love,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} B \kappa_\psi^2 R d\psi ,$$

con

$$\kappa_\psi = \left(\frac{\dot{w}}{R} + \frac{v}{R} \right) \cdot \quad , \quad () \cdot = \frac{d}{d\psi} .$$

Si ha così

$$W = \frac{36\pi}{8} \frac{BA^2}{R^3} .$$

Poiché gli sforzi interni si riducono allo sforzo assiale $T_2 = -p_0 R$ secondo le direttrici si ha, $e_\psi^{(2)}$ essendo la componente di 2° ordine di e_ψ , deformazione secondo ψ ,

$$\Omega_2^* = \int_0^{2\pi} T_2 e_\psi^{(2)} R d\psi,$$

con

$$e_\psi^{(2)} = \frac{1}{2R^2} (\dot{w} + v)^2.$$

Da qui, per $T_2 = -p_0 R$,

$$\Omega_2^* = -\frac{9\pi}{8} A^2 p_0.$$

Infine, poiché, per $u = 0$, è, per w diretto secondo la normale interna,

$$d_2 V = \frac{1}{2} (v\dot{w} + w^2 + v^2 - \dot{v}w) d\psi,$$

si ha

$$\Omega_2 = \frac{3\pi}{8} A^2 p_0.$$

Segue dalla (12) con $W_1 = W$, $W_2 = \Omega_2 - \Omega_2^*$,

$$\lambda_{cr} = \frac{W}{\Omega_2 - \Omega_2^*} = \frac{3B}{p_0 R^3},$$

ovvero

$$(27) \quad p_{cr} = p_0 \lambda_{cr} = \frac{3B}{R^3}.$$

Trascurando l' Ω_2 risulta invece

$$(27 a) \quad p_{cr} = p_0 \lambda_{cr} = \frac{4B}{R^3};$$

la (27) è conforme alle deduzioni dirette, attuali, che evitano il metodo energetico, la (27 a), a quelle, pure dirette ma più lontane nel tempo, di R. Lorentz. Come si vede, la differenza tra i due λ_{cr} risulta sensibile, del 30-35 %.

Per il cilindro circolare soggetto a pressione idrostatica p_0 , di lunghezza finita L , timpanato ai bordi, si trova invece, sempre scrivendo con grandi accorgimenti, direttamente le equazioni alle variazioni in u, v, w , la formula di V. Mises

$$(28) \quad \lambda_{cr} p_0 = p_{cr} = \frac{Eh}{R(n^2-1)N^2} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \nu}{N} \right)$$

con

$$N = 1 + \left(\frac{nL}{R\pi} \right)^2$$

ed n intero ricavabile, in funzione di R/L e $50 h/R$, dalla seguente tabella (*), (ved. v. Mises, « Z.d.V.d.I. », 1914, p. 750)

$R/L \backslash 50 h/R$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0	2	2	2	2	2	2	2	2
0,1	4	3	3	3	2	2	2	2
0,2	5	4	4	4	3	3	3	3
0,3	6	5	5	4	4	4	4	4
0,4	7	6	5	5	5	4	4	4
0,5	8	6	6	5	5	5	5	4

Per $L \rightarrow \infty$ la (28) ricade nella (27).

Secondo Lorentz si trovano valori diversi quasi corrispondenti a quelli del metodo energetico con l' ϱ_2 trascurato. In merito si cfr. ad esempio la nostra Memoria: *Pressioni critiche in un involucro cilindrico*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna 1945.

Ma la (28) può dedursi anche per via energetica considerando l'energia elastica $W_1 = W = W_f + W_e$ somma di quella flessionale W_f ed estensionale W_e di un involucro elastico cilindrico e computando, oltre a ϱ_2^* , il lavoro ϱ_2 della pressione idrostatica. In merito si cfr. un lavoro di D. Caligo, nei « Rend. fisici » novembre e dicembre 1967 di questa Accademia.

8. STABILITÀ E PRECOMPRESSIONE. NOTE E COMPLEMENTI. – L'espressione (8) od (8 a) consente, attraverso la (6), per \mathfrak{E} dato dalla (1 a)* nell'ambito non lineare, dalla (1 b)* in quello lineare, di risolvere tutti i problemi di stabilità dell'equilibrio elastico che appaiono nella pratica. Se manca il termine ϱ_2^* si ha il vantaggio d'esser fuori dai dubbi che all' ϱ_2^* non si possono togliere; rimane un ϱ_2 che non sempre si sa calcolare in modo indiscutibile. Allora si abbandona il metodo energetico per seguire la via della scrittura diretta delle equazioni alle variazioni rispetto alla u_0, v_0, w_0 , via maestra si intende, ma non da tutti perseguibile: casi tipici; gli involucri cilindrici soggetti a pressione idrostatica. Comunque, secondo il metodo energetico, diciamo generale, si arriva *sempre* a buon fine. Citiamo qualche esempio particolarmente espressivo e, a prima vista, in certo senso, quanto meno sorprendente.

Si consideri un'asta con foro assiale, sottile sottile, ed in esso infilato un cavo di acciaio ad alta resistenza.

Puntando su gli estremi dell'asta, dai quali esce il cavo, si pensi, con apparecchiatura *ad hoc*, teso sino ad uno sforzo S . A tesatura completata, si blocchi il cavo agli estremi. L'asta risulterà compressa con uno sforzo $N = -S$. È il caso elementare della *precompressione* che, dai lontani inizi con la cerchiatura a caldo della ruota di legno, la ritubatura dell'anima di un cannone, ha

(*) Che riportiamo anche perché, nella Voce *Stabilità*, del *Manuale dell'Ingegnere*, Cremonese, Roma 1960, abbiamo erroneamente trascritto la riga di entrata.

assunto nella tecnica delle costruzioni, civili particolarmente, con l'introduzione degli acciai ad altissima resistenza (armonici - corde di pianoforte - o quasi) una universalità applicativa addirittura grandiosa.

Orbene, rispetto ad N , l'asta non sarà mai instabile, sarà cioè sicuramente *stabilmente-stabile*, non esistendo un tiro critico S_{cr} per cui si abbia instabilità di Eulero! L'asta o il cavo, naturalmente, potranno arrivare sì

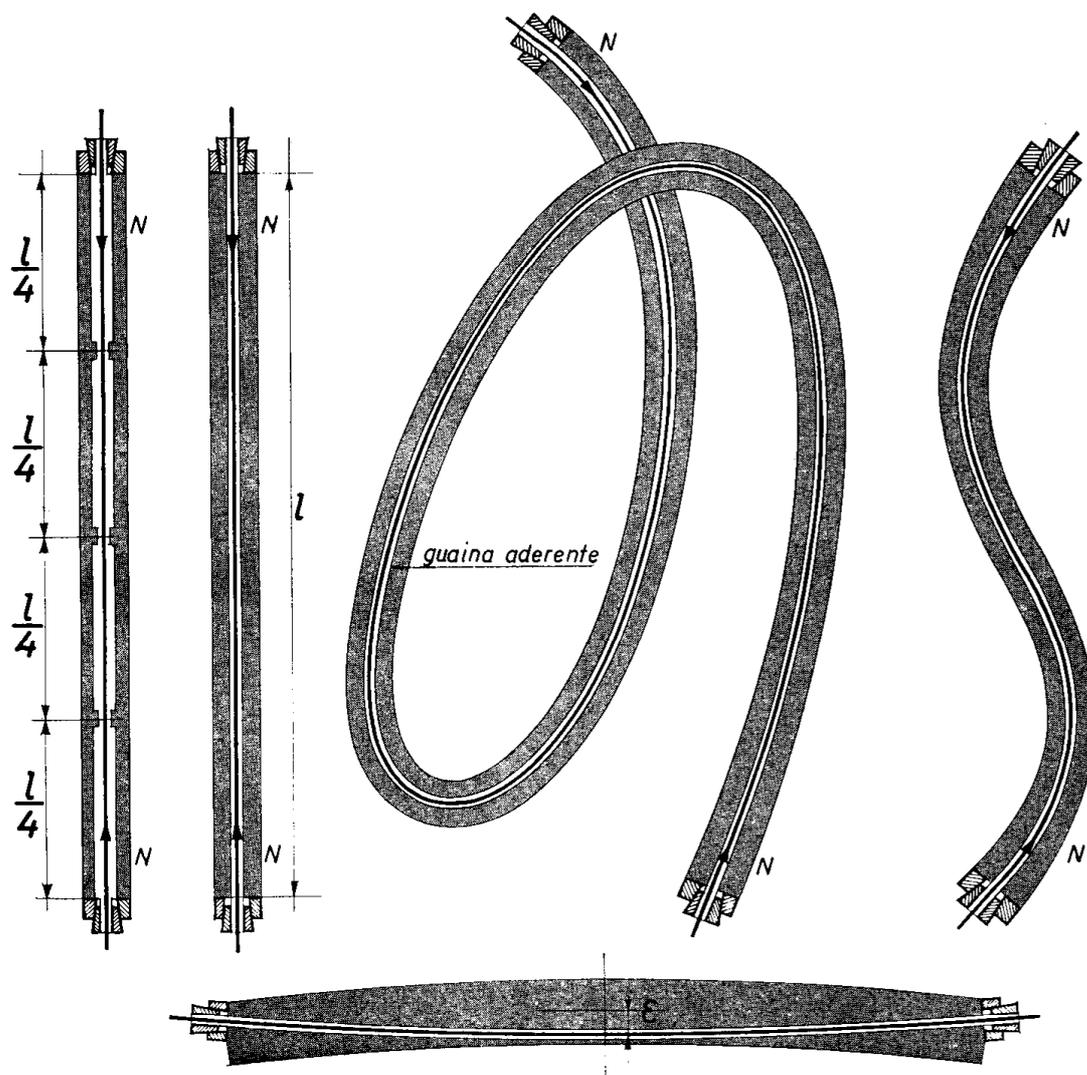


Fig. 2.

alla rottura, ma il collasso e la rottura sono circostanze del tutto diverse dall'instabilità (qualitativa). Questa stabilità-stabile dell'asta precompressa è già stata provata sperimentalmente da Magnel⁽⁸⁾ che ha dato anche una dimostrazione intuitiva pensando il foro, anziché sottile, e tanto che il cavo vi passi ovunque aderentemente, sia sempre largo ma con n restringimenti discreti, equidistanti, nei quali può *appena scorrere* (cfr. fig. 2). Allora l' N_{cr}

(8) G. MAGNEL, *Theorie und Praxis des Spannbetons*. Cap. VII, pp. 297-307. Bauverlag G.M.B.H. Wiesbaden-Berlin 1956; F. LEONHARDT, *Spannbeton*. Cap. 15, pp. 519-522, W. Ernst Sohn, Berlin 1962.

di Eulero risulta, se B è la flessoridezza costante, l la lunghezza dell'asta

$$(29) \quad N_{cr} = |S_{cr}| = (n\pi)^2 \frac{B}{l^2}.$$

Ovviamente, l'aderenza uniforme corrisponde ad $n \rightarrow \infty$, quindi ad $S_{cr} \rightarrow \infty$, cioè alla stabilità-stabile c.d.d.

La dimostrazione riesce forse assai più immediata pensando che, se A è l'area della sezione resistente dell'asta, risulta per il sistema composto asta + cavo, $\mathcal{L}_2^* = 0$, $\mathcal{L}_2 = 0$. Infatti si ha

$$(30) \quad \mathcal{L}_2^* = \int_0^l dx \int_A \frac{-S}{A} e_{xx}^{(2)} dA + \int_0^l S e_{xx}^{(2)} dx = 0$$

$e_{xx}^{(2)}$ essendo riferito all'asse x dell'asta.

Quanto all' \mathcal{L}_2 si potrà dire che, se nella deformazione, $w = w(x)$ per spostamenti trasversali dell'asse il cavo esercita sull'asta una pressione $p = S : \rho$, con ρ raggio di curvatura ($\rho \cong w''$) l'asta a sua volta esercita una pressione opposta sul cavo e si ha quindi, per il sistema composto, compensazione del lavoro \mathcal{L}_2 di 2° ordine.

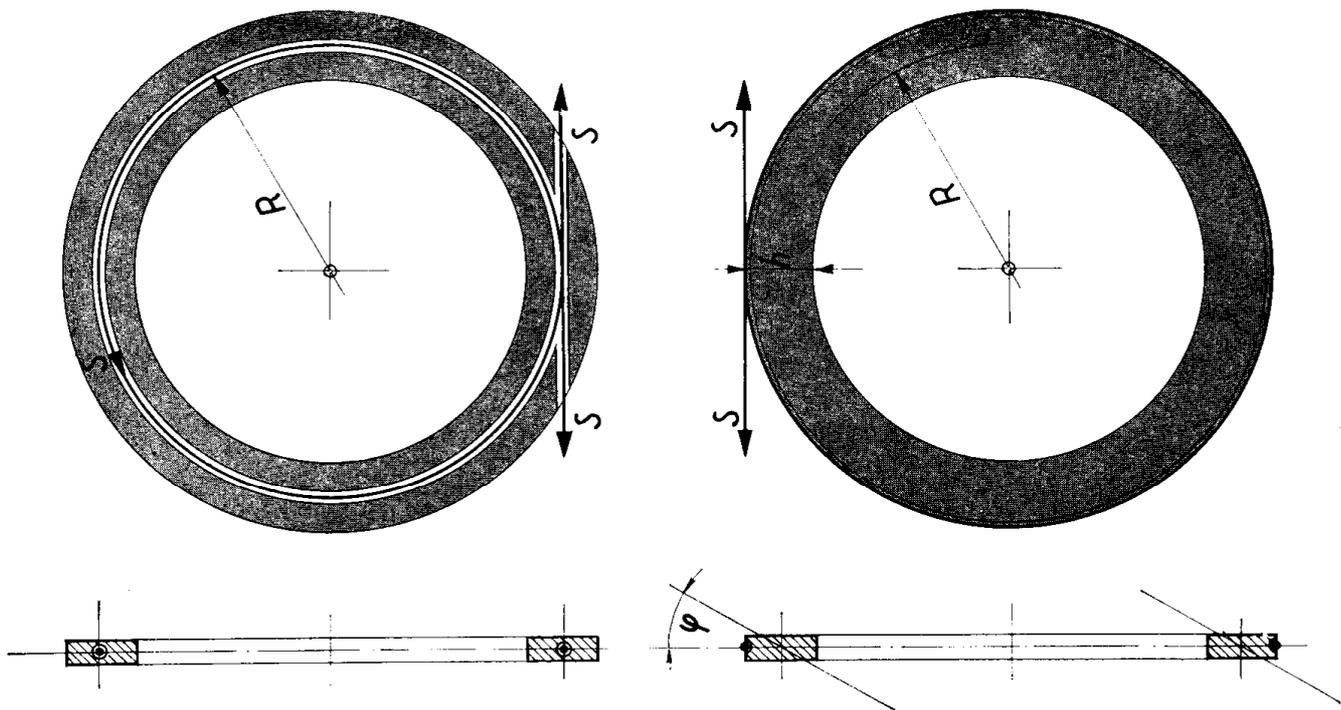


Fig. 3.

Fig. 3a.

Per un anello precompresso (cfr. fig. 3) valgono ragionamenti, e conseguenze sperimentalmente provate da Magnel, quasi analoghi. Sicché verrebbe fatto di estendere ad un solido tubolare qualunque, precompresso, con cavo assiale (cfr. la fig. 2) l'inesistenza di un S_{cr} critico: le sollecitazioni σ sono date, per la sezione generica di area A , in ogni caso da compressione

soltanto, sicché il solido tubolare mantiene praticamente la sua forma, qualunque essa sia, il che, a prima vista, può anche sorprendere,

$$\sigma = - \frac{S}{A}$$

Quanto qui si è detto per la trave, l'arco, l'anello, il solido tubolare con cavo assiale vale, per la *trave almeno* come osserva M. Como ⁽⁹⁾, a meno della instabilità cosiddetta torsionale, tipica nei profili sottili, che si forma pensando ad una rotazione della sezione resistente generica attorno al *suo baricentro* o piuttosto attorno al suo *centro del taglio*. Ma l' $S_{cr,t}$ torsionale ha carattere essenzialmente diverso da quello euleriano, è molto elevato per le torsiorigidità ordinarie; non dipende dalla luce l (a meno di introdurre la, in ogni caso ancor più stabilizzante, *warping-rigidity*). Tanto per dire a che si allude, si rilevi che, in prima e sufficiente approssimazione, ove sia ρ il raggio giratore polare di inerzia, della sezione rettangolare di una asta rettilinea,

$$(31) \quad \rho^2 = \frac{J_x + J_z}{A},$$

J_x, J_z essendo i momenti principali di inerzia della sezione resistente e la rotazione avvenga attorno al baricentro, coincidente con il centro del taglio, il tiro critico risulta

$$(31) \quad N_{cr} = - S_{cr,t} = \frac{C}{\rho^2},$$

con C *torsiorigidità* della sezione. Come si vede, in luogo dell' l^2 che interviene a denominatore nella formola di Eulero, si ha un *piccolissimo* (di fronte ad l^2) ρ^2 , e tanto, che, prima che l'instabilità di questo genere avvenga, eccezion fatta per profili sottili stampati in lamiere sottili, il sistema parte senz'altro per rottura.

Se il cavo ha eccentricità ε e la trave è rettilinea, si ha la formola per l' $S_{cr,t}$ data da M. Como, per la flessione deviata,

$$(32) \quad N_{cr} = - S_{cr,t} = \frac{C}{\rho^2 - \varepsilon^2}.$$

Da questa, per $\varepsilon = 0$ (cavo nel baricentro) si ha la (31). Ma può aversi per $\varepsilon = \rho$, $S_{cr} = \infty$, per $\varepsilon > \rho$, S_{cr} cambia addirittura segno, sicché il cavo deve venir compresso e l'asta tesa per avere instabilità torsionale. Ciò equivale a dire che, anziché infilare il cavo nella guaina si deve iniettare in essa un liquido: acqua, olio, mercurio, e dare la pressione con pompa-martinetto saldata sulla testa dell'asta. In ogni caso per $\varepsilon \neq 0$ si avrà un S_{cr} ben lontano per grandezza dall' S_{cr} che si sarebbe tentati di scrivere adottando la formola di Prandtl-Michell:

$$(33) \quad S_{cr} = \frac{\pi}{l\varepsilon} \sqrt{CB}$$

(9) Cfr. M. COMO, *Stabilità dell'equilibrio elastico della trave sottile precompressa*, « La Ricerca Scientifica » (C.N.R.) Rend. A. vol. 7, n. 3 - 1964, ser. 2 e fasc. 6°, 1965. Rend. fisici di questa Accademia. Nei fasc. 6, 7 del 1962 trovansi le premesse per lo studio dell'effetto della curvatura e dell'eccentricità (Fig. 3 a ad es.) in due Note di G. Ferrarese in Rend. fisici di questa Accademia fasc. 6°-7°, 1962.

B essendo la flessorrigidezza trasversale della trave, o varianti di questa desu-
mibili dal carattere in ogni caso stabilizzante della fune. Sicché anche il cavo
eccentrico, secondo le deduzioni in op. cit. ⁽⁹⁾, non darebbe instabilità per devia-
zione laterale. Non si vuol dire con ciò che le travi si possono liberamente
tendere con cavi eccentrici o no (dal piano di flessione) massimamente se
queste sono particolarmente lunghe in raffronto allo spessore. Giacché bastano
eccentricità piccole dal piano mediano per dar luogo a momenti flettenti che,
se non portano all'instabilità, portano comunque a deviazioni sensibili e solle-
citazioni equivalenti. Del resto ciò avviene anche per l'eccentricità nel piano
mediano di flessione, che portano con incauta pretensione a inflettere la
trave verso l'alto, là dove è più forte l'eccentricità, ed alla rottura sua completa,
ma, ripetiamo, non per una *questione di instabilità* qualitativa (tipo Eulero,
Prandtl-Michell, ecc.), bensì per una *questione di resistenza*. Nel caso di assi
curvilinei la (32) andrebbe generalizzata avvalendosi delle Note di G. Ferrar-
ese op. cit. in ⁽⁹⁾. Però occorrono, per $\varepsilon \neq 0$, non poche cautele.

9. CENNO AI SISTEMI NON CONSERVATIVI. — Tornando al caso dello
sforzo assiale ($\varepsilon = 0$) giova riassumere (cfr. fig. 4) i tre casi tipici di solleci-
tazione assiale con S costante, σ (cfr. fig. 5) variabile con x .

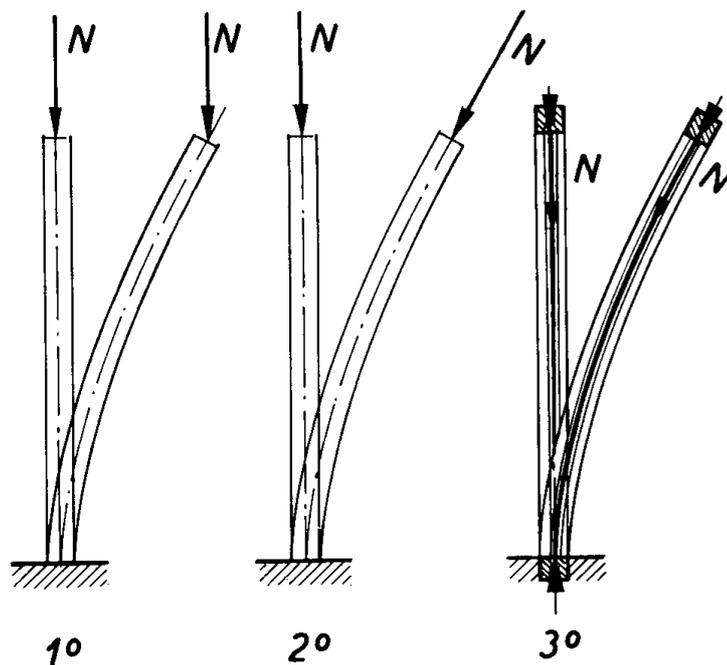


Fig. 4.

Il 1° con S sempre diretto verticalmente, il 2° con S in testa sempre tan-
gente all'asse della deformata, il 3°, da non confondere con il 2°, con S di-
ciamo scorrente aderentemente lungo l'asse, quindi in testa tangente alla
deformata, entro ad una guaina per virtù di un cavo ammarrato agli estremi
sicché per 3° si ha una vera e propria coazione elastica.

S potrebbe anche esser variabile con x come in fig. 5 in tutti e tre i casi della fig. 4. Diversi sono i soli vincoli.

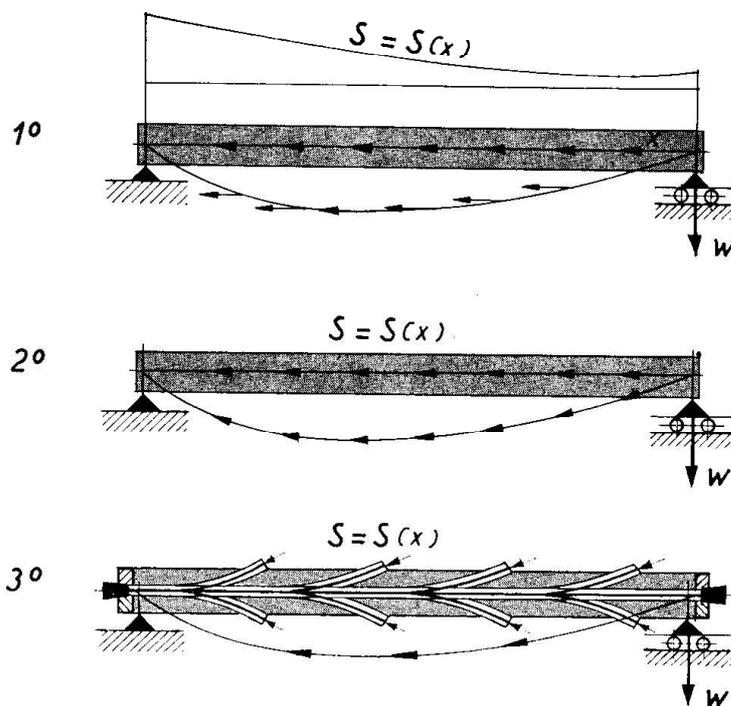


Fig. 5.

Le equazioni in $w = w(x)$ per 1°, 2°, 3° pensando addirittura — $S = N$ variabile con x , ed agente trasversale un carico $p = p(x)$, sono,

$$(34) \quad \left. \begin{array}{l} 1^\circ \quad (Bw'')'' + \lambda (Nw)' = \begin{cases} 0 \\ p(x) \end{cases}, \\ 2^\circ \quad (Bw'')'' + \lambda Nw'' = \begin{cases} 0 \\ p(x) \end{cases}, \\ 3^\circ \quad Bw^{IV} = \begin{cases} 0 \\ p(x) \end{cases}. \end{array} \right\}$$

La 1°, omogenea, ammette per le *condizioni ai limiti naturali*, cioè per quelle che seguono dal principio variazionale,

$$(35) \quad 1^\circ) \quad [(Bw'')' + \lambda Nw'] \cdot w \Big|_{x=0,l} = 0, \quad w'' \cdot w' \Big|_{x=0,l} = 0;$$

essendo $B > 0$ (per sua natura), $N(x) > 0$ per ipotesi (perché ovunque di compressione) esistono una infinità numerabile di autovalori λ_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, n \dots$) ordinabili in serie crescente ($\lambda_r = \lambda_{cr}$). Essi danno i moltiplicatori critici della distribuzione $N = N(x)$. Ciò segue dall'esser la 1° delle (34) tipicamente autoaggiunta (deriva precisamente assieme con le (35) da un principio variazionale su una forma quadratica).

La 2°) non è autoaggiunta ma almeno il $\lambda_1 = \lambda_{cr}$ risulta praticamente quello della 1°) se si soddisfano le condizioni naturali agli estremi; si può dire quindi che, in tale circostanza, per una vasta classe di $N = N(x)$ essa è, in certo senso, *debolmente* non autoaggiunta, ciò che non si può dire invece assolutamente se agli estremi non sono soddisfatte le condizioni naturali (35).

La 3°) infine è autoaggiunta ma in essa non figura il termine con parametro λ anche se c'è lo sforzo N , dovuto alla coazione, sicché si ha stabilità-stabile per ogni $\lambda \cdot N(x)$, come del resto già si è detto.

Ritornando alle (34), va ora rilevato su qualche esempio come ciò che muta sostanzialmente il comportamento rispetto all'autoaggiunta è, soprattutto, il non soddisfacimento delle condizioni naturali agli estremi. Poniamo per brevità $N = \text{cost.}$ Le (35) divengono allora

$$(35 a) \quad w(0) = w'(0) = w''(l) = 0, \quad (Bw''' + \lambda Nw') \Big|_{x=l} = 0,$$

tipiche dell'asta con incastro al piede e libera in testa, dove è applicato N . Si ha per il 1°) caso, secondo Eulero

$$(36) \quad \lambda_{cr} N_0 = N_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{B}{l^2}.$$

Per 2°), per $N = \text{cost.}$ l'equazione è identica alla 1°) ma le condizioni agli estremi sono

$$(37) \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad w'''(l) = 0.$$

Esse corrispondono al caso in cui λN rimane, in $x = l$, sempre tangente alla linea elastica e non si ha quindi lo sforzo di taglio $\lambda N \cdot w'$ che λN dà se agisce secondo la verticale. In questo caso l'unica soluzione (statica) è $w = 0$.

Scrivendo infatti l'integrale generale della 1°) identica alla 2°) delle (34), nella forma, ovvia per $B = B_0$, $N = N_0$ costanti,

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \kappa x + C_4 \cos \kappa x$$

con

$$(38) \quad \kappa = \sqrt{\frac{\lambda N_0}{B_0}}$$

si ha per le (35 a) la condizione di compatibilità (possibile),

$$(34 a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \kappa l & -\cos \kappa l \\ 0 & \kappa^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\kappa^3 \cos \kappa l = 0$$

e da qui

$$\kappa = \kappa_\rho = \frac{2\rho + 1}{2l} \pi \quad (\rho = 0, 1, 2, \dots)$$

e quindi, per la (38), la (36).

Per le (37) si ha invece la condizione di compatibilità, (impossibile),

$$(37 a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \kappa l & -\cos \kappa l \\ 0 & 0 & -\cos \kappa l & +\sin \kappa l \end{vmatrix} = -(\sin^2 \kappa l + \cos^2 \kappa l) \neq 0.$$

Il determinante è in ogni caso $\neq 0$, non esistono quindi soluzioni dell'equazione omogenea salvo la $w = 0$. Tuttavia si può avere una N_{cr} critica studiando dinamicamente il problema. Questa osservazione dovuta a Beck (e successivamente trattata sistematicamente da Ziegler)⁽¹⁰⁾ ha sollevato molto scalpore.

In verità però il problema rientra in quello ormai classico dei *vincoli servo-assistiti*, in quanto occorre un servo-meccanismo esterno per dare ad N l'inclinazione $w'(l)$, cioè sommare (vettorialmente) alla statica N , sempre verticale, una forza orizzontale $-Nw'(l)$. A parte ciò, torna non ortodosso, in Meccanica pura, parlare, come si usa, di stabilità statica per la 1° con le condizioni (35 a) e stabilità dinamica per la 2°, con le condizioni (37).

L'*instabilità* risulta sempre, in ogni caso, per via dinamica, sin da Lagrange, in particolare per tutte le condizioni di cui si tratta.

Infatti, introducendo le reazioni di inerzia $-\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\mu \ddot{w}$ (μ è la massa per unità di lunghezza) si ha, tanto per 1° quanto per 2°), cfr. fig. 4,

$$(39) \quad Bw^{IV} + \lambda N w'' + \mu \ddot{w} = 0$$

con le condizioni agli estremi (35 a) per 1°, (37) per 2°).

Posto

$$w(x, t) = u(x) \cdot e^{zt},$$

segue

$$(39 a) \quad Bu^{IV} + \lambda Nu'' + \mu z^2 u = 0.$$

Da questa si vede che se si pone $z = 0$, risulta

$$(39 b) \quad Bu^{IV} + \lambda Nu'' = 0.$$

Ove questa ammetta soluzioni (statiche) può esser quindi $z = 0$, frequenza nulla, periodo infinito, ciò che vuol dire, andata senza ritorno, quindi instabilità. Se invece la (39 b) non ammette soluzioni come prima si è visto, non resta che metter in evidenza per la (39 a), il carattere aritmetico degli esponenti z . Con questo intento si può porre per $u = u(x)$ una combinazione lineare di N termini

$$u(x) = \sum_1^N A_e \varphi_e(x)$$

(10) H. ZIEGLER, *On the concept of Elastic Stability*, pp. 352-390, vol. IV di *Advances in Applied Mechanics*, Acad. Press. New-York 1956.

con φ_q funzioni note soddisfacenti a priori alle condizioni naturali o non naturali cui deve sottostare la 2°), le A_q essendo coefficienti a priori incogniti. Per questi si scrive, secondo i metodi diretti di integrazione delle equazioni differenziali, un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee date dai metodi diretti del calcolo delle variazioni (minimi quadrati, dei lavori virtuali o di Galerkin, delle poligonali, ecc.). Da questo sistema risulta poi immediata una condizione di compatibilità che contiene i parametri λ e z e si tratta di vedere per quali valori di λ , l'esponente z , a priori complesso, ha parte reale negativa (stabilità) o positiva (instabilità).

Secondo i *minimi quadrati* si è indotti a porre, $\mathcal{L}(\)$ essendo l'operatore corrispondente alla (39 a), per $u \neq 0$,

$$(40) \quad \delta \int_0^l [\mathcal{L}(u)]^2 \cdot dx = 0$$

e da qui si ha, introducendo una combinazione lineare di N funzioni $\varphi_q = \varphi_q(x)$ soddisfacenti alle condizioni agli estremi,

$$(40 a) \quad \sum_{\tau} \varepsilon_{q\tau} A_q = 0 \quad \text{con} \quad \varepsilon_{q\tau} = \int_0^l \mathcal{L}(\varphi_q) \mathcal{L}(\varphi_{\tau}) dx.$$

Secondo il *principio dei lavori virtuali*, scritto nella forma

$$(41) \quad \delta \int_0^l \mathcal{L}(u) \delta\psi dx = 0$$

con $\delta\psi$ variazione arbitraria di u , limitando l'arbitrarietà di $\delta\psi$ inserendola nella classe delle combinazioni lineari delle φ_q ,

$$\delta\psi = \sum_{\tau}^N \varphi_{\tau} \cdot \delta A_{\tau}$$

con δA_{τ} arbitrari, ponendo ordinatamente una $\delta A_{\tau} = 1$ ($\tau = 1, 2, \dots, N$) nulle essendo le altre, si ricade nel metodo cosiddetto del Galerkin, e si ha, ben poco potendosi dire sulla legittimità del procedimento nel caso non auto-aggiunto,

$$(41 a) \quad \sum_{\tau} \varepsilon_{q\tau} A_{\tau} = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, N),$$

con

$$(41 a)' \quad \varepsilon_{q\tau} = \int_0^l \mathcal{L}(\varphi_q) \cdot \varphi_{\tau} dx.$$

Per le condizioni non naturali (37), posto $\xi = x : l$ conviene assumere il sistema, con $\xi^0 \equiv 1 - \xi$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \frac{4}{3} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^4, & \varphi_2 &= \xi^2 - 4 \xi^4 + 3 \xi^5 \\ \varphi_3 &= \xi^4 (1 - \xi)^2 \dots \varphi_n &= \xi^{n+2} (1 - \xi)^2, \end{aligned}$$

O, meglio ancora, le autofunzioni u_q dell'asta omogenea incastrata al piede e libera in testa. Esse soddisfano l'equazione

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} - \delta^4 u = 0$$

con le condizioni $u(0) = u'(0) = 0$ e $u''(1) = u'''(1) = 0$. Pertanto gli autovalori δ_q risultano come radici della equazione trascendente delle frequenze, nel caso specifico particolarmente semplice,

$$\text{Ch } \delta \cdot \cos \delta + 1 = 0.$$

In ordine crescente, tali radici sono date da

$$\delta_1 = 1,87510 \quad , \quad \delta_2 = 4,69409 \quad , \quad \delta_3 = 7,85475, \text{ ecc.}$$

ed i periodi di vibrazione dell'asta, se l è la lunghezza, B_0 la flessorigidezza, μ_0 la massa per unità di lunghezza, sono espressi in termini dei δ_q^2 , da

$$\tau_q = \frac{2\pi}{\delta_q^2} \cdot l^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{B_0}}.$$

Le u_q, u'_q, u''_q , normalizzate le prime, sono ben note, particolarmente tabellate nei sistematici lavori di D. Caligo su questo argomento, sicché gli integrali

$$\mu_{q\tau} = \int_0^1 u_q u_\tau d\xi = \delta_q^\tau \quad , \quad \varepsilon_{q\tau} = \int_0^1 u_q^{(IV)} u_\tau d\xi = \delta_q^4 \delta_\tau^\tau$$

e gli integrali

$$\gamma_{q\tau} = \int_0^1 u''_q u_\tau d\xi$$

si lasciano calcolare anche numericamente per controllo.

Si ha per $\gamma_{q\tau}$ con riferimento alle prime u_1, u_2, u_3

$\tau \backslash p$	1	2	3
1	0,8583	— 11,7436	27,4516
2	1,8740	— 13,2916	9,0481
3	1,5650	3,2304	— 45,8693

Adottando le φ_q ora definite o le u_q dianzi considerate si perviene attraverso la (41 a) a polinomi $P(\lambda, z)$ contenenti il parametro λ , di grado n in z , n essendo il numero di funzioni concorrenti u_q . L'equazione delle frequenze

è quindi

$$(42) \quad P(\lambda, z) = 0.$$

Però, poiché nella (42), z appare solamente con potenze pari di z , $P(\lambda, z)$ non è del tipo di Hurwitz; i determinanti corrispondenti, quando si hanno solo potenze pari, si annullano tutti.

In tal caso non resta, sulle prime, che evitare i criteri di stabilità dell'Hurwitz e mettersi alla ricerca, sul discriminante della (42), di *radici doppie immaginarie pure*, in dipendenza di λ ; queste, salvo verifiche, delimitano i campi di stabilità da quelli di instabilità. Naturalmente, occorre sapere, poiché λ cresce a partire da zero, che per un $\lambda < \lambda_{cr}$ (a λ_{cr} corrisponde una radice doppia) le radici sono immaginarie pure. Ma si può anche restare nell'ambito usuale hurwitziano adoperando un teorema, curiosamente ignorato in tutti i trattati di algebra e di meccanica, che ho ritrovato nel mare magnum delle *Lezioni di Analisi Matematica* di Mauro Picone.

Secondo questo teorema le radici di un'equazione a *coefficienti reali*, di egual segno, del tipo, (omettiamo la scrittura del parametro λ),

$$P(z) = a_{2n} z^{2n} + a_{2n-2} \cdot z^{2n-2} + a_{2n-4} z^{2n-4} + \dots + a_0 = 0$$

sono tutte immaginarie pure se

$$(42 a) \quad P(z) + \frac{dP(z)}{dz} = 0$$

è un polinomio di Hurwitz cioè tale per cui i termini reali, delle radici complesse, non sono positivi. La verifica di stabilità si fa allora su $P(\lambda, z) = 0$ attraverso la (42 a) con i soliti determinanti dell'Hurwitz o con i metodi più rapidi e speditivi successivamente istituiti. Merita nell'incontro accennare a quello, che per sveltezza sorpassa tutti, quello stesso (sia pure più brillante) di Nyquist. Risale tale metodo al teorema fondamentale di Schur⁽¹¹⁾, secondo cui un polinomio $P_n(z)$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

è di Hurwitz se tale è il polinomio di grado $(n - 1)$,

$$(43) \quad P_{n-1}(z) = P_n(z) - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot z \cdot g_n(z)$$

con

$$(43 a) \quad g_n(z) = a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-3} z^{n-3} + a_{n-5} z^{n-5} + \dots$$

È chiaro che da qui segue un metodo ricorrente che porta ad abbassare il grado di $P(z)$ sino ad $n = 2$.

(11) J. SCHUR, «Z. f. a. Math. Mech.», 1, 307-311 (1921).

Nel procedimento ricorrente appaiono rapporti $q_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$ al 1° passo, $q_2 = -\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}$ con $b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3} \cdot q_1$ al 2° passo, e così via secondo la seguente tabella

$$q_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$q_2 = -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + q_1 a_{n-3}}$$

$$q_3 = -\frac{a_{n-2} + q_1 a_{n-3}}{a_{n-3} + q_2 (a_{n-4} + q_1 a_{n-5})}$$

$$q_4 = -\frac{a_{n-3} + q_2 (a_{n-4} + q_1 a_{n-5})}{a_{n-4} + q_1 a_{n-5} + q_3 [(a_{n-5} + q_2 (a_{n-6} + q_1 a_{n-7}))]}$$

$$q_5 = -\frac{a_{n-4} + q_1 a_{n-5} + q_3 [a_{n-5} + q_2 (a_{n-6} + q_1 a_{n-7})]}{a_{n-5} + q_2 (a_{n-6} + q_1 a_{n-7}) + q_4 \{a_{n-6} + q_1 a_{n-7} + q_3 [a_{n-7} + q_2 (a_{n-8} + q_1 a_{n-9})]\}}$$

Limitiamo la scrittura ai soli q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 ; in quanto trattandosi di un procedimento a carattere *iterativo* risulta molto adatto per la programmazione dei calcolatori elettronici, quando siano disponibili. Inoltre è ben raro il caso che n sia > 5 .

Orbene, un teorema di Collatz ⁽¹²⁾ che, secondo un'acuta osservazione della dott. J. Verna dell'INAC, si identifica – e ciò è un'autentica sorpresa – con un ormai antico teorema del Routh (cfr. uno dei prossimi fasc. dei Rend. fis. dei Lincei), consente di affermare che per la stabilità, tutti i q_j debbono essere < 0 . Come si vede tutto si riduce al solo calcolo dei q_j ; ed anzi si ha di più, il numero dei $q_j > 0$, dà il numero delle radici instabili, quindi, a parte reale > 0 . E ciò è importante perché non sempre qualche radice instabile è la fine del mondo secondo le acute osservazioni sulla *stabilità ridotta* o alla Routh dovute a T. Levi-Civita.

Ritornando al nostro caso diremo che, cercando le radici multiple con sole due autofunzioni, z è radice doppia e si ha instabilità per

$$\lambda = \lambda_{cr} \sim 20,106 = 2,06 \pi^2.$$

Secondo il metodo di Hurwitz adattato con la (42 a), per

$$\lambda \sim \lambda_{cr} = 2,193 \pi^2.$$

Naturalmente, cercando le radici doppie dell'equazione delle frequenze che risulta dalla (39 a) per le assegnate condizioni (37) ⁽¹³⁾ agli estremi si trova per via grafica un λ_{cr} più preciso: $\lambda_{cr} = 2,01 \pi^2$. Ma ciò è facilitato dalla conoscenza che si ha in partenza che, per $\lambda < \lambda_{cr}$, le radici z sono immaginarie pure. Altrimenti l'equazione delle frequenze è praticamente assai difficilmente trattabile. Sono tutte queste questioni particolarmente interessanti, di cui le origini

(12) L. COLLATZ, *Vortrag auf der Math., Tagung*, Karlsruhe 1947.

(13) S. THIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, n. 2.21, pp. 152–156. MacGraw-Hill Book Company. London–New York 1961.

sono lontane (sono apparse nei cosiddetti *artificial systems* non conservativi di Lord Kelvin e Tait) richiamate recentemente da Ziegler, Beck ed altri forse un po' come del tutto attuali anche se, come si è visto, rientrano ampiamente, e lo abbiamo fatto vedere sino ai numeri avvalendoci della collaborazione delle dott.sse M. S. Roma e F. Aurigemma dell'INAC del C.N.R., nei criteri classici di stabilità più frequenti di meccanica pura (criteri dell'Hurwitz, od equivalenti di Routh). Concludendo queste considerazioni rileviamo che per il caso 3° delle figg. 4, 5 lo sforzo assiale N non interviene (cfr. 3ª equazione (34)) nell'equazione statica o dinamica e si ha quindi stabilità stabile. Ma a queste anticipazioni converrà dare al più presto un assetto sistematico.

10. ESEMPLIFICAZIONE SULLE EFFETTIVE CONFIGURAZIONI C_0 PER SPOSTAMENTI FINITI E DELLE CONDIZIONI DI STABILITÀ DEDUCIBILI SENZA O CON LA CONSIDERAZIONE DEL $\Delta_2 \mathcal{E}$. — Si consideri un'asta elastica rettilinea di flessorigidità $B = B(x)$ con cerniera all'estremo $x = 0$, cerniera-carrello all'estremo $x = l$. Sia $p = p(x)$ il carico trasversale nel piano dei soli spostamenti trasversali $w = w(x)$ che si considerano ed $N = N(x)$ lo sforzo assiale > 0 (quindi per convenzioni usuali, sforzo di compressione) in $0 \leq x \leq l$.

L'energia elastica flessionale, alla quale ci si riduce, è

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l B(x) w''^2 dx, \quad ((\))' = \frac{d}{dx},$$

il lavoro \mathcal{Q}_1 fatto dai carichi,

$$\mathcal{Q}_1 = \int_0^l p(x) \cdot w(x) dx$$

e quindi, in linea ordinaria,

$$\mathcal{E} = W - \mathcal{Q}_1.$$

Da $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$ si ha l'equazione per l'asta inflessa

$$(Bw'')' = p(x)$$

con le condizioni agli estremi, nel caso nostro, $w(0) = w(l) = 0$, $w''(0) = w''(l) = 0$.

Ma, se si considera l' \mathcal{Q}_2 , lavoro del 2° ordine in w o derivate fatto dagli sforzi $N = N(x)$ in conseguenza della deformazione $w = w(x)$, data alla configurazione d'equilibrio, si ha trattando come del 1° ordine termini in $w_0 w$, $w'_0 w'$, ecc.

$$\Delta \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2(w_0 + w) - \mathcal{Q}_2(w_0) \quad \text{con} \quad \mathcal{Q}_2(w_0, w) = - \int_0^l N w'_0 w' dx, \quad \mathcal{Q}_2(w, w) = \frac{1}{2} \int_0^l N w'^2 dx.$$

L' Ω_2^* si annulla in quanto il carrello in $x = l$ consente lo spostamento del 2° ordine lungo l'asse conseguente a $w = w(x)$. Segue da

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= W - \Omega_1 - \lambda \Omega_2 \\ \mathcal{E}(w_0 + w) - \mathcal{E}(w_0) &= 2W(w_0, w) + W(w, w) - \\ &- \int_0^l p w \, dx - \lambda \int_0^l N w_0' w' \, dx - \frac{\lambda}{2} \int_0^l N w'^2 \, dx \end{aligned}$$

e quindi, da $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$, lineare in w , l'equazione in w_0 , da cui si trova la configurazione d'equilibrio w_0 ,

$$(43) \quad (Bw_0'')' + \lambda (Nw_0')' = p(x).$$

Da $\Delta_2 \mathcal{E} = 0$, parte di 2° ordine in w , si ha

$$\Delta_2 \mathcal{E} = \int_0^l Bw''^2 \, dx - \lambda \int_0^l Nw'^2 \, dx = 0$$

e da $\delta\lambda = 0$ l'equazione in w ,

$$(44) \quad (Bw'')'' + \lambda (Nw')' = 0.$$

Se si pone $w \neq 0$, $u = 0$, $v = 0$, senza concedere quindi spostamenti all'estremo, allora

$$\Omega_2^* = - \int_0^l N(x) e_{xx}^{(2)} \, dx$$

mentre si annulla $\Omega_2^{(1)}$, $\Omega_2^{(2)}$ e si ha

$$\mathcal{E} = W - \frac{\lambda}{2} \int_0^l N(x) w'^2 \, dx$$

e da $\mathcal{E}(w_0 + w) - \mathcal{E}(w_0)$, annullando il $\Delta_1 \mathcal{E}$ si ottiene la (43); annullando il $\Delta_2 \mathcal{E}$ e ponendo $\delta\lambda = 0$, ancora la (44).

Si vede chiaramente che gli autovalori di (44) sono autovalori della parte omogenea di (43) come si è affermato e che, pertanto, soffermandosi sulla (43), che deriva da $\Delta_1 \mathcal{E} = 0$, si può inferire per la stabilità o meno senza passare al $\Delta_2 \mathcal{E}$. Nel calcolo di Ω_2^* si deve in generale tener conto del lavoro di 2° ordine fatto dalle forze interne conseguenti anche al regime flessionale, in questo caso indotto da $p(x)$; precisamente, indicando con $M(x)$ i momenti flettenti, con $\kappa^{(2)}$ parte del 2° ordine delle caratteristiche di deformazione flessionale,

$$\Omega_2^* = \int_0^l M(x) \kappa^{(2)} \, dx.$$

Se per κ si pone $\kappa = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}$, R_0 ed R essendo i raggi di curvatura prima e dopo la deformazione, w sovrapposta alla w_0 , si vede che per l'asta rettilinea tanto $\Omega_2^*(w_0, w)$ quanto $\Omega_2^*(w, w)$ conseguenti a $p(x)$ ovvero ad $M(x)$ sono di ordine superiore al 1° rispettivamente al 2°.

Infine, ponendo per $B = B_0 = \text{cost.}$ $N = \lambda N_0 = \text{cost.}$,

$$(45) \quad p(x) = \sum_n \pi_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

si ha dalle (43) la soluzione

$$(46) \quad w_0(x) = \frac{l^4}{\pi^4 B_0} \sum_n \frac{1}{n^4} \frac{\pi_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

partendo dalla $\Delta_1 \mathfrak{E} = 0$ con $\mathfrak{E} = W - \Omega_1$ risulta invece

$$(43 a) \quad (Bw'')'' = p(x)$$

e quindi per $B = B_0 = \text{cost.}$

$$(46 a) \quad w_0(x) = \frac{l^4}{\pi^4 B_0} \sum_n \frac{1}{n^4} \pi_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

con

$$\pi_n = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

e

$$\lambda_n = \frac{1}{N_0} \frac{B_0}{l^2} (n\pi)^2.$$

Se $\lambda = \lambda_m$, a meno che sia $\pi_m = 0$ (è il caso noto di ortogonalità della perturbazione) w_0 diventa ∞ e si ha evidentemente instabilità.

Se si considera la parte omogenea della (43) per $B = B_0$, $N = \lambda N_0$ con le stesse condizioni agli estremi si trovano proprio gli autovalori λ_n della (44).