

# Note e complementi della Memoria «Ponti in cemento armato»<sup>(\*)</sup>.

## I. - VISCOSITÀ.

a) *Premesse e generalità. Espressione di Witney.*

Nella ordinaria statica dei corpi elastici si può ben dire che, per definizione, la variabile tempo non interviene. Tra carichi e deformazioni sussiste una dipendenza biunivoca nella quale è inclusa la condizione — che sola allude tacitamente al tempo — riguardante la *lenta applicazione* di detti carichi così da non destare fenomeni dinamici e, anch'essi sensibili, quelli di isteresi.

Naturalmente si tratta di una schematizzazione che, valida nella stragrande maggioranza dei casi, può non completamente rispondere in taluni altri. Ciò è noto agli sperimentatori sin dalle prime sistematiche indagini sui materiali da costruzione. *I fenomeni di isteresi* cui si è alluso sono un esempio ben noto in cui, anche evitando ogni fenomeno dinamico, la statica classica non è più sufficiente e occorre considerare la variabile tempo. Il materiale *ricorda* i carichi o le deformazioni passate, quindi la deformazione attuale dipende dai valori presenti e passati del cemento.

Analiticamente si esprime la memoria con una sola funzione

$$\Phi = \Phi(t, \tau)$$

dell'istante  $t$  in cui si misura un certo *effetto*; (*deformazione, spostamento*) e dell'istante  $\tau$  in cui l'azione è avvenuta.

Questa funzione, chiamata dal Volterra *nucleo ereditario*, determina il ricordo al tempo  $t$  della azione  $F = 1$  durata un tempo 1 nell'intorno dell'istante  $\tau$ .

Se l'azione fosse stata  $F$  e durata un tempuscolo  $d\tau$ , intorno di  $\tau$ , il ricordo, che potrebbe manifestarsi ad esempio come spostamento, sarebbe

$$F(\tau) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot d\tau.$$

Quindi, se  $F(\tau)$  agisce nel tempo  $-\infty \leq \tau \leq t$  secondo una legge ben determinata  $F = F(\tau)$ , all'istante  $t$  lascerà un ricordo, nel caso specifico uno spostamento  $w(t)$ , dato da

$$\int_{-\infty}^t F(\tau) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot d\tau$$

(\*) Da «Tecnica Italiana», Parte II, N. 1, gennaio-febbraio 1960.

e lo spostamento effettivo nell'istante  $t$  sarà somma di detto ricordo al valore attuale  $k F(t)$ ,  $k$  essendo una costante,

$$w(t) = kF(t) + k \int_{-\infty}^t F(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau.$$

Notevoli sono i *nuclei* funzioni della sola differenza  $(t - \tau)$ , chiamati dal Volterra [1] del *ciclo chiuso* per alcune salienti proprietà che giustificano la locuzione. Una proprietà particolare fondamentale; ad *azioni periodiche corrispondono effetti periodici*, ciò che *a priori* non si può certo affermare. A questo punto giova fare un'osservazione. La memoria, cioè il nucleo ereditario che sia del ciclo chiuso non dipende dal tempo ma solo da  $(t - \tau)$ . Perciò un materiale che abbia un nucleo ereditario siffatto ha *memoria invariante*, che rimane cioè la stessa sia che il materiale abbia 5 o 10 anni ad esempio.

Ma alcuni materiali da costruzione, i calcestruzzi giovani, ad esempio ed in particolare, non hanno affatto memoria invariante. Un caso particolare e notevole, leggermente triviale, è rappresentato da un nucleo del tipo, valido per azioni lentissimamente variabili,

$$(1) \quad \Phi = a e^{-\beta\tau}$$

con  $\tau$  contato a partire dall'istante  $\tau = 0$  in cui il materiale è ritenuto idoneo ad essere materiale da costruzione (potrebbe essere, ad esempio, 28 giorni dopo *l'impasto* per un calcestruzzo). Tale istante  $\tau = 0$  chiameremo per brevità, della raggiunta *maturità* del materiale. Il ricordo non dipende dunque né dall'istante  $t$  in cui si fa la misura né dalla differenza  $(t - \tau)$ , l'effetto dell'azione ricevuta al tempo  $\tau$  rimane indelebile nel tempo, è il caso dei *corpi plastici* (che, per dirla alla buona, hanno una memoria d'acciaio) a plasticità decrescente con il tempo perché evidentemente, secondo la (1), l'impronta (poiché induriscono quasi come lo stucco, ma senza variare però il modulo d'elasticità) della stessa azione riesce minore al tempo  $\tau_2$  che non al tempo  $\tau_1$  se  $\tau_2 > \tau_1$ .

Orbene, questo particolarissimo nucleo ha una cospicua importanza per i calcestruzzi giovani, da 0 a 2-3 anni di età. Ciò si osserva studiando le sistematiche esperienze di Witney sul comportamento di questo materiale sotto l'azione di sollecitazioni costanti nel tempo applicate a varie età.

Queste hanno portato a riconoscere [2] che, se un calcestruzzo giunto a maturità all'istante  $\tau = 0$ , contato poniamo dal 28.mo giorno dall'impasto, è sollecitato dal tempo  $\tau = 0$  al tempo  $\tau = t$  con *azioni costanti*, le deformazioni in detto istante  $t$  non sono quelle che competono al modulo di elasticità effettivo  $E_0$  in quell'istante, ma ad un modulo virtuale  $E_v$  dato da

$$(2) \quad E_v = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - e^{-\beta t})}.$$

Se i carichi, anziché applicati all'istante  $\tau = 0$  vengono applicati all'istante  $\tau = t_i < t$ , le deformazioni devono essere calcolate, sempre secondo

le citate esperienze, in base ad un modulo virtuale  $E_v$  dato da

$$(2 a) \quad E_v = \frac{E_0}{1 + \alpha (e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t})}$$

La costante  $\alpha$  ha un significato evidente:  $(\alpha + 1)$  determina il rapporto tra deformazione effettiva prodotta da un carico costante da  $\tau = 0$  a  $\tau = \rightarrow \infty$  (praticamente 2 o 3 anni) e deformazione elastica. La costante dimensionale  $\beta$  e l'adimensionale  $\alpha$  valgono pressapoco

$$\beta = (1 \text{ anno})^{-1}, \quad \alpha = 3,$$

sicché si può scrivere, *misurando il tempo in anni*,

$$e^{-\beta \tau} = e^{-\tau}.$$

Lo spostamento effettivo è quindi, in luogo di quello normale  $w_0$ ,

$$(3) \quad w = w_0 \{1 + \alpha (e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t})\}.$$

b) *Nucleo ereditario conforme alle esperienze di Witney. Equazioni per la statica [3].*

Quando  $F$  sia funzione di  $\tau$  si ha, sommando il ricordo all'effetto istantaneo,

$$(4) \quad w(t) = kF(t) + k\alpha\beta \int_0^t e^{-\beta \tau} F(\tau) d\tau.$$

Con ciò resta dimostrata, ove si ponga  $\alpha\beta = a$ , la legittimità di applicare la definizione (1) al nucleo ereditario per il giovane calcestruzzo.

Le conseguenze che si traggono dalla (4) sono innumerevoli ed importantissime. Principale, zer quanto precede intorno al non molto ortodosso impiego delle Centine incorporate nel calcestruzzo secondo la ns. maniera.

c) *Nozione di rapporto virtuale  $n^*$  dei moduli di elasticità  $E_f$  del ferro,  $E_b$  del calcestruzzo di una struttura in cemento armato in base alla storia dei carichi [4].*

Si consideri, tanto per fissare le idee, una colonna soggetta a sforzo assiale  $F$  e sia  $A_b$  l'area della sezione resistente del beton,  $A_f$  quella del ferro,  $n = E_f : E_b$  l'ordinario rapporto dei moduli ( $n \cong 10$ ).

Se  $X$  è la parte di  $F$  che vien presa dal beton dovrà essere, se si pone

$$\omega_b = E_b A_b, \quad \omega_f = E_f A_f,$$

$$(5) \quad \frac{X}{\omega_b} = \frac{F - X}{\omega_f}$$

e quindi,

$$(5 a) \quad X = F \cdot \frac{\omega_b}{\omega_b + \omega_f}$$

come è ben noto. Ma il calcestruzzo giovane è viscoso, tende a fluire sotto al carico, onde è fuor di dubbio che  $X$  risulterà ridotto. In sostanza, le cose vanno come se  $n$  fosse mutato in un valore  $n^*$ , evidentemente funzione dell'istante  $t_1$  in cui il carico è stato applicato e di quello  $t_2$  in cui si fa la misura della ripartizione. Non occorre dire che  $t$  si penserà contato dal momento in cui il calcestruzzo è considerato idoneo ad essere impiegato come materiale resistente.

Trascurando la viscosità del ferro in raffronto a quella del calcestruzzo si ha subito dalla (4) l'equivalente in campo viscoso della (5). Precisamente, per un carico costante  $F_0$  applicato al tempo  $t = 0$  (calcestruzzo a 28 giorni), assialmente su una colonna in cemento armato, si avrà in luogo della (5),

$$(6) \quad \frac{X}{\omega_b} + \frac{\alpha\beta}{\omega_b} \int_0^t X(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = \frac{1}{\omega_f} (F_0 - X)$$

s'intende ammettendo nulla la viscosità del ferro. Da qui, derivando, poichè  $F_0 = \text{cost.}$ , segue

$$(6a) \quad \left( \frac{1}{\omega_b} + \frac{1}{\omega_f} \right) \frac{dX}{dt} + \frac{\alpha\beta}{\omega_b} e^{-\beta t} X = 0$$

ovvero

$$(6b) \quad \frac{dX}{X} = - \frac{\alpha e^{-\beta t}}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} \cdot dt.$$

Integrando, indicata con  $C$  una costante arbitraria, si ha

$$X(t) = C \exp. \left( - \frac{\alpha e^{-\beta t}}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} \right).$$

Quanto a  $C$ , deve esser scelto così che  $X$  sia dato per  $t = 0$  dalla (5 a); segue

$$X(t) = \frac{F_0}{1 + \frac{\omega_f}{\omega_b}} \exp. \left( - \frac{\alpha}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} (e^{-\beta t} - 1) \right).$$

Una tale relazione si può porre nella forma

$$(6c) \quad X(t) = \frac{F_0}{1 + n^*(t) \frac{A_f}{A_b}}$$

con  $n^*(t)$  rapporto virtuale dei moduli al tempo  $t$  dato da

$$(7) \quad n^*(t) = n \left\{ \exp. \left( - \frac{\alpha}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} (1 - e^{-\beta t}) \right) + \frac{\omega_b}{\omega_f} \left[ \exp. \left( - \frac{\alpha}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} (1 - e^{-\beta t}) \right) - 1 \right] \right\}.$$

Per  $t \rightarrow \infty$ , praticamente 2-3 anni,

$$(7 a) \quad n^*(\infty) = n \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_f} \right) \exp. \left( - \frac{\alpha}{1 + \frac{\omega_b}{\omega_f}} \right) - \frac{\omega_b}{\omega_f} \right\}$$

In conformità, posto  $n = 15$ ,  $\alpha = 2$  rispettivamente  $\alpha = 3$ , si ha per il rapporto virtuale  $n^*(\infty)$  dei moduli di elasticità, relativo a carichi applicati al tempo  $t = 0$  (calcestruzzo a 28 giorni) ed indefinitamente agenti, la seguente tabella per il rapporto virtuale  $n^*$  dei moduli:

$A_f : A_b$	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\alpha=2$ $\backslash$ $n^*$	47,190	49,277	53,123	56,577	59,680	62,475
$\alpha=3$ $\backslash$ $n^*$	65,056	70,074	79,891	89,295	98,209	106,604

Evidentemente, per i carichi applicati sui calcestruzzi giovani, il rapporto  $n$  è regolamentare ammissibile se questi hanno carattere accidentale (transitorio); ma per i carichi costanti e con riferimento, ripetiamo, ai giovani calcestruzzi,  $n$  non ha significato se non per introdurlo nella (7) che consente di trovare un valore corrispondente, virtuale, per ogni istante contato dal giorno della maturità del calcestruzzo e per una assegnata distribuzione di carico nell'intervallo.

Così, se il disarmo si fa a 28 giorni ( $t = 0$ ) si potrà anche ammettere  $n = 10$  o  $15$  e per quel giorno tale valore resterà immutato; lentamente però la parte del peso sopportato dal calcestruzzo migrerà verso le armature metalliche per tendere al valore asintotico stabilito dalle (6 c), (7 a) praticamente raggiunto in uno o due anni.

A solo titolo di illustrazione del criterio che informa la statica dei corpi elastoviscosi consideriamo ancora qualche esempio.

d) *Smorzamento di uno sforzo impresso.*

Come altro esempio si consideri una precompressione data ad un'asta con un tirante assiale di lunghezza eguale. Se, sotto il carico, l'asta fluisce, cioè si raccorcia, il tirante perde il tiro sicché si disperde, almeno in parte, l'azione della precompressione. Se questa dal valore  $F_0$  per  $t = 0$  scende ad un valore  $X(\tau)$  per  $\tau > 0$ , sarà all'istante  $t > \tau$ ,

$$(8) \quad \frac{1}{\omega_f} (F_0 - X(\tau)) = \frac{\alpha\beta}{\omega_b} \int_0^t X(\tau) e^{-\beta t} d\tau.$$

Da qui si ha, derivando,

$$\frac{dX}{X} = -\frac{\omega_f}{\omega_b} \alpha \beta e^{-\beta t} dt$$

e quindi, poiché  $X(0) = F_0$ ,

$$(9) \quad X(t) = F_0 \exp. \left( \frac{\omega_f}{\omega_b} \alpha (e^{-\beta t} - 1) \right).$$

Per  $t \rightarrow \infty$ ,

$$(9a) \quad X(\infty) = F_0 \exp. \left( -\frac{\omega_f}{\omega_b} \alpha \right).$$

Posto  $\alpha = 3$ ,  $\omega_f : \omega_b = 10$ ;  $X(\infty) = F_0 e = 0,741 F_0$ .

Come si vede, la dispersione è sensibile. Ma si riduce per  $\omega_f$  piccolo in raffronto ad  $\omega_b$ , circostanza questa che consiglia l'impiego degli acciai ad elevata resistenza che attraverso le sovratensioni consentono drastiche riduzioni delle aree  $A_f$  in raffronto a  $A_b$ .

e) *Lo smorzamento della coazione elastica conseguente ad una distorsione.*

Se, invece, l'autotensione si dà al tempo  $t = 0$  con una distorsione, poniamo comprimendo l'asta di lunghezza  $l$  per forzamento in una sede di lunghezza inferiore  $l - \Delta$ , allora, lo sforzo iniziale è  $\Delta \frac{\omega_b}{l} = F_0$ ; per fluage, scende ad un valore  $X$  in  $t$  così che sarà, in quell'istante,

$$(10) \quad \frac{l}{\omega_b} X(t) + \frac{\alpha \beta}{\omega_b} l \int_0^t X(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau = \Delta;$$

da qui,

$$(11) \quad X(t) = F_0 \exp. (\alpha (e^{-\beta t} - 1))$$

e per  $t \rightarrow \infty$ ,

$$X(\infty) = F_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Per  $\alpha = 3$  si ha quindi  $X(\infty) = e^{-3,0} \cdot F_0 = 0,0498 F_0$ , cioè la pratica dispersione della coazione.

## 2. - CARICHI CRITICI. FORMOLE DI TIMOSHENKO [5] PER GLI ARCHI SOLITARI E LORO GENERALIZZATE [7] PER GLI ARCHI IN PARALLELO.

Per un arco solitario di apertura  $2\psi_0$ , flessorigidezze  $B_2, B_1$ , sollecitato da pressione esterna  $q_0$  agente in senso radiale, sono note le espressioni per il valore critico  $N_{cr} = \lambda_{cr} R q_0$  per cui si ha deviazione nel suo piano  $\Sigma$ , corrispondente al caso di Eulero, rispettivamente deviazione trasversale a  $\Sigma$ ,

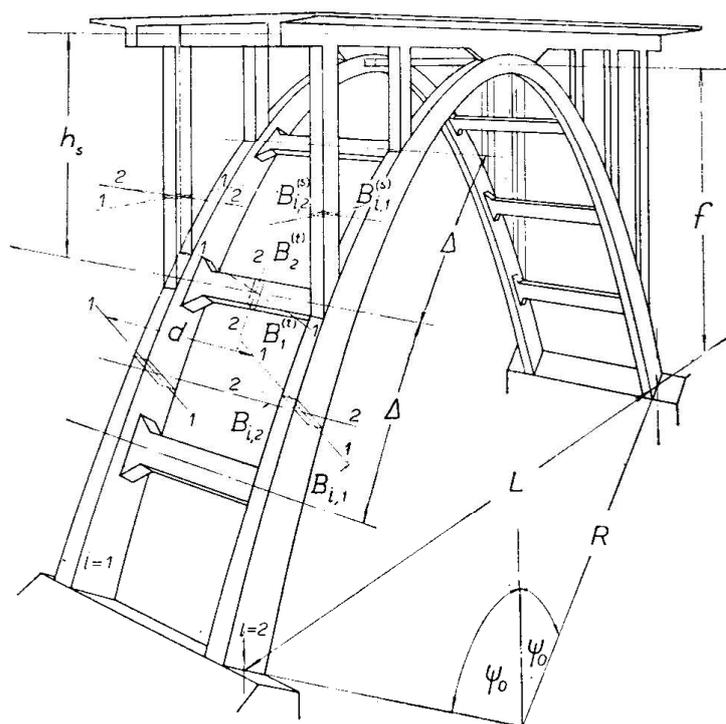


Fig. 1.

corrispondente al caso di Prandtl-Michell. Secondo Timoshenko [5] si ha precisamente (cfr. fig. 1 di cui un tipico esempio nel campo dei fatti si ha in fig. 2),

per la deviazione in  $\Sigma$ :

$$(1) \quad N_{cr} = Rq_{cr} = \lambda_{cr} Rq_0 = \frac{B^2}{R^2} [4 \kappa^2 - 1]$$

essendo, per le cerniere alle imposte,

$$(1 a) \quad \kappa = \frac{\pi}{2\psi_0};$$

per la deviazione trasversale ad  $\Sigma$ :

$$(2) \quad N_{cr} = Rq_{cr} = \lambda_{cr} Rq_0 = \frac{C}{R^2} \cdot \frac{(1 - \kappa^2)^2}{1 + \frac{C\kappa^2}{B_1}}$$

Per l'incastro, (e per  $2\psi_0 < \pi/2$ ) sostituire  $\kappa$  con  $2\kappa$ . Evidentemente è  $2\psi_0$  l'apertura dell'arco,  $R$  il raggio,  $B_2, B_1, C$  le flessi e torsiorigidezze,

$$(3) \quad B_2 = EJ_2 \quad , \quad B_1 = EJ_1 \quad , \quad C = G\Theta$$

con  $J_2, J_1$ , momenti d'inerzia che intervengono per la flessione in  $\Sigma$  e trasversale a  $\Sigma$ ;  $\Theta$  resistenza torsionale della sezione.

Per sezioni omogenee rettangolari  $h \times b$  si ha

$$(4) \quad J_2 = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad J_1 = \frac{hb^3}{12}$$

e, per  $b < h$ ,

$$(4 a) \quad \Theta = \frac{hb^3}{3} \cdot \left( 1 - 0,630 \frac{b}{h} + 0,052 \frac{b^5}{h^5} + \dots \right)$$

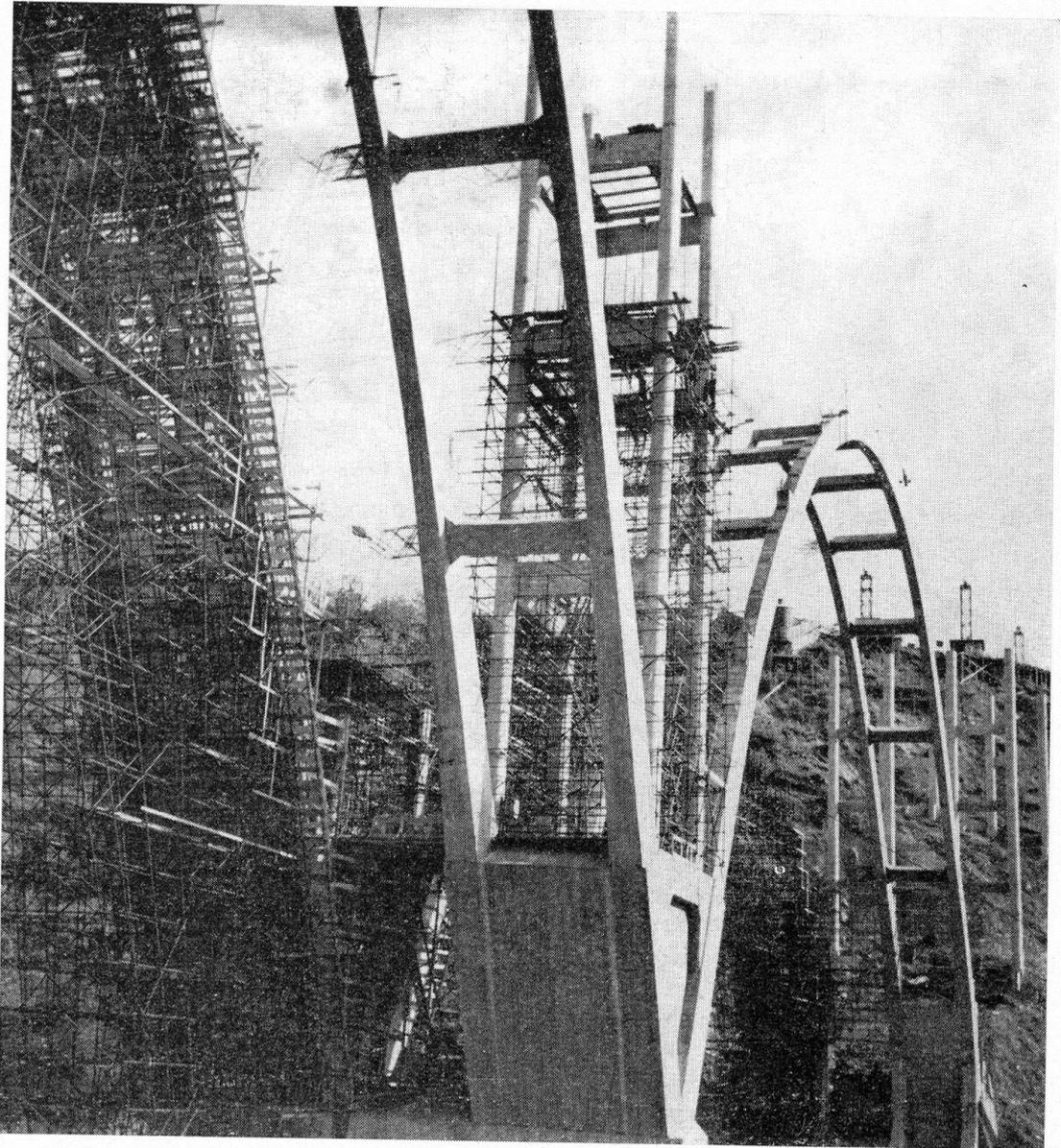


Fig. 2. - Costole ad arco,  $L = 87,50$  m,  $f = 40,92$  m per il *Viadotto del Merizzano* sul tratto Bologna-Firenze dell'Autostrada del Sole.

Per sezioni cave, chiuse, nessun dubbio sul calcolo di  $J_2$ ,  $J_1$ ; per  $\Theta$  si ricordi la formula di Bredt,

$$(4\ b) \quad \Theta = \frac{4 A^2}{\int \frac{ds}{h}}$$

Per travi reticolari tubolari come in fig. 3 per  $J_2$ ,  $J_1$ , ci si varrà, in corrispondenza alle note, possibili ed usuali disposizioni delle diagonali, delle formule del Timoshenko [6], per l' $J$  virtuale da considerare nel carico di punta di aste tubolari con orditura reticolare. Per il calcolo di  $\Theta$  in generale, cfr. [7], in particolare si ha, per il caso in cui sia pressapoco (cfr. fig. 3).

$$\frac{A_{d_1}}{A_{d_2}} \cong \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3, \quad \Theta \cong \frac{E}{G} \cdot \frac{A_{d_2} h^2 b^2 a}{d_2^3}$$

Ma un arco solitario nelle costruzioni ordinarie non è la norma; gli archi sono generalmente in numero di due o più e sono collegati tra loro dalle traverse che elevano fortemente il carico  $q_{cr}$  e quindi la spinta critica per la stabilità trasversale; sono poi solidali con il piano stradale per virtù delle stilate.

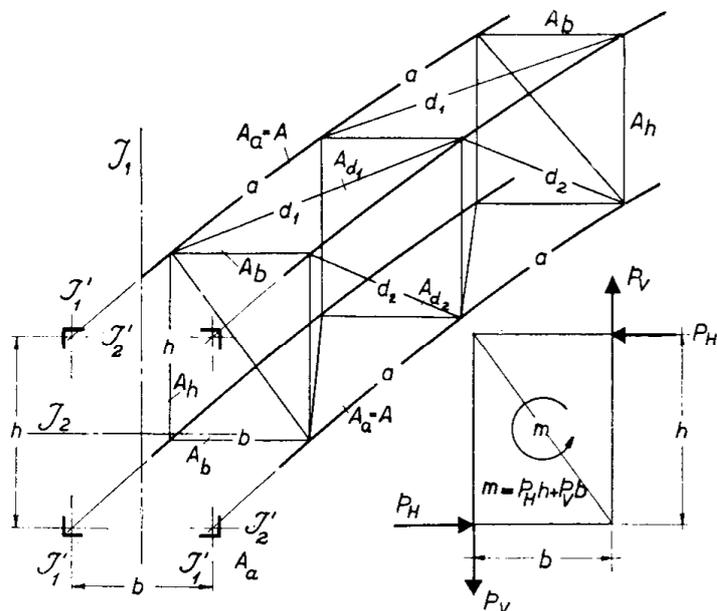


Fig. 3.

Se queste non sono snodate al piede ed in testa, non solo aggiungono come fanno in ogni caso – alla rigidezza  $B_2$  dell'arco quella del piano stradale, ma costituiscono una reattività alla rotazione in  $\Sigma$  analoga a quella trasversalmente a  $\Sigma$  che viene dalle traverse (in genere più efficienti perché mediamente più corte). Infine, per la rigidezza trasversale dell'impalcato ove questo sia fisso agli estremi le stilate realizzano un appoggio elastico che si oppone alla deviazione laterale.

Per una struttura di tipo generale le espressioni di  $q_{cr}$  trovansi nella Mem. cit.; per la struttura di due soli archi gemelli come in figura, alla quale sostanzialmente si fa generalmente riferimento con riguardo alle fasi costruttive, le espressioni si completano secondo le relazioni e osservazioni seguenti:

per la deviazione in  $\Sigma$ :

$$(I)^* \quad N_{cr} = \lambda_{cr} Rq_0 = \frac{B_2}{R^2} [4\kappa^2 - 1] + k_w^{(s)} \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 - 1}$$

con

$$k_w^{(s)} = \frac{12 B_2^{(s)}}{h_s \Delta} \cdot \frac{1}{1 + \rho_w}, \quad \rho_w = \frac{B_2^{(s)} \Delta}{B_2 h_s}, \quad \kappa = \frac{\pi}{2 \psi_0},$$

essendo  $B_2^{(s)}$ ,  $h_s$ ,  $\Delta$  flessorigidità, altezza e intervallo tra le stilate; si pensa però che sia, il che si ottiene facilmente in sede di progetto,

$$k_w^{(s)} = \frac{12 B_2^{(s)}}{h_s \Delta} \cdot \frac{1}{1 + \rho_w}$$

quasi costante per tutte le stilate;

per la deviazione trasversale a  $\Sigma$  si ha:

$$(2)^* \quad N_{cr} = Rq_{cr} = \lambda_{cr} Rq_0 = \frac{C}{R^2} \frac{(1-x^2)^2}{1 + \frac{C}{B_1} x^2} + k_u^{(t)}$$

con

$$(2a)^* \quad k_u^{(t)} = \frac{12 B_1^{(t)}}{d \cdot \Delta} \frac{1}{1 + \rho_u^{(t)}}, \quad \rho_u^{(t)} = \frac{B_1^{(t)} \Delta}{B_1 d}$$

e per  $k_u^{(t)}$  praticamente costante;

$B_1 = B_{1,1} + B_{2,1}$  somma delle flessorigidezze;  $C = C_1 + C_2$  somma delle torsorigidezze (le une e le altre per ipotesi eguali) delle due costole.

Per  $R \rightarrow \infty$ ,  $2\psi_0 \rightarrow 0$ , l'arco con traverse tende ad una trave Vierendeel, di lunghezza

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot 2\psi_0 = L.$$

Passando al limite la (2)\*, poiché  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{x} = \frac{L}{\pi}$  si ricava lo sforzo assiale critico  $N_{cr}$  di una trave Vierendeel,

$$(2)** \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 B_1}{L^2} + k_u^{(t)}.$$

È questa (2)\*\*, in certo senso, sorprendente tanto quanto la (1)\* e (2)\* giacché in tutte e due interviene il termine costante  $k_w^{(s)}$  o  $k_u^{(t)}$ , (che ha naturalmente le dimensioni di una forza), per cui, per  $L$  crescente, l' $N_{cr}$  tende asintoticamente al valore costante

$$(2)*** \quad N_{cr} = k_u^{(t)}.$$

L'espressione (2)\*\* di  $N_{cr}$  per una Vierendeel si ritrova già in una importante relazione sui carichi critici del v. Mises: *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, « Z.f.A.M. », 1923 pp. 406-422.

Là si accenna, senza insistere, alla necessità di dare un limite di validità alla (2)\*\*.

Orbene, uno studio approfondito dimostra che la (2)\*, (e quindi la (2)\*\*), per  $2\psi_0 \leq \pi/2$  dà un valore, pressapoco

$$\sim \frac{1 + \frac{\bar{N}}{k_u^{(t)}}}{\frac{\bar{N}}{k_u^{(t)}}}$$

volte superiore all'effettivo. Per  $\bar{N}$  si pone

$$(3) \quad \bar{N} = \frac{\pi^2}{L^2} \bar{B}_1$$

con  $\bar{B}_1$  flessorigidezza complessiva della sezione resistente della volta o della Vierendeel senza detrazioni per effetto del taglio.

Per  $\bar{B}_1$  si ha quindi semplicemente

$$(4) \quad \bar{B}_1 = B_1 + \varepsilon^2 D$$

con  $B_1 = B_{1,1} + B_{2,1}$  somma delle flessorigidità delle due costole,  $D = EA$  tensorigidità complessiva,  $A = A_1 + A_2$  somma delle aree delle due sezioni resistenti ed infine, per  $A_1 = A_2$ , come si ammette,  $\varepsilon = d/2$  con  $d$  distanza tra le due costole.

Una formola generale dedotta tenendo conto della deformazione assiale delle costole, non considerata nella deduzione delle (2)\* e (2)\*\* , è data in appresso. Per esprimerla sinteticamente si introducano gli enti seguenti:

a) *Rigidità relativa  $\mu^{*2}$  del collegamento nel piano normale al piano  $\Sigma$  dell'arco.*

Con riguardo alla fortissima resistenza estensionale  $\frac{EA_1 \cdot w}{R^2} \cdot \Delta$  che una costola oppone allo spostamento  $w$  secondo la normale, del tratto  $\Delta$ , dominio interessato da una trasversa, si ponga

$$(5) \quad \mu^{*2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad , \quad (5 a) \quad \alpha = 24 \frac{J_2^{(t)}}{A_1 d^2} \cdot \frac{R^2}{\Delta d}$$

essendo  $A_1 = A_2$  l'area della sezione di una costola,  $J_2^{(t)}$  il momento d'inerzia della trasversa per flessione nel piano normale alla volta, sicché

$$B_2 = EJ_2^{(t)}$$

b) *Flessorigidità complessiva effettiva con riguardo al taglio ( $Q = Nu'$ ) del complesso delle due costole.*

È data, con riguardo alla (4), da

$$(4)^* \quad B_1^* = \bar{B}_1 \cdot \left( 1 - \frac{N}{k_u^{(t)}} \right)$$

$\bar{B}_1$  essendo la flessorigidità complessiva virtuale (cfr. la (4)  $k_u^{(t)}$  la solita misura del collegamento che si considera, data dalla (2 a)\*.

c) *Torsiorigidità complessiva C.*

È la somma  $C = C_1 + C_2$  delle torsiorigidità delle due costole.

Ciò posto si può scrivere la

*Equazione di compatibilità per il calcolo dell' $N_{cr}$ .*

Con i dati precedenti si calcola l' $N_{cr}$  per  $q_0$  radiale, come radice della equazione quadratica in  $N$  (si tenga presente l'espressione, lineare in  $N$ , (4)\* di  $B_1^*$ )

$$(6) \quad \left| \begin{array}{cc} (B_1^* + \mu^{*2} \cdot D\varepsilon^2 + Cx^2) & , & (B_1^* + C)x^2 \\ \frac{B_1^* + C}{R^2} & , & \frac{B_1^* x^2 + C}{R^2} - N \end{array} \right| = 0$$

Da questa equazione quadratica, generale, in  $N$ , di cui la radice inferiore dà  $l'N_{cr}$ , si hanno alcuni casi particolari notevoli:

Se i traversi non hanno un  $J_2^{(t)}$  considerevole, si può porre  $\mu^* \cong 0$ . In tal caso la (6) si riduce all'equazione, sempre quadratica in  $N$ ,

$$(6a) \quad N = \frac{C}{R^2} \frac{(1-x^2)^2}{1 + \frac{Cx^2}{\bar{B}_1 \left(1 - \frac{N}{k_u^{(t)}}\right)}}.$$

Se l'arco è molto teso ed è quindi  $x \gg 1$ ,  $R : x \cong L : \pi$  con  $L$  corda massima (luce), si trova, passando al limite,

$$(6b) \quad N_{cr} \cong \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\bar{B}_1}{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{B}{k_u^{(t)}}}.$$

Se  $\bar{B}_1 > Cx^2$ , il che avviene facilmente, si hanno le due radici, di cui va scelta l'*inferiore*, che generalmente è quella in cui interviene  $C$ ,

$$(6c) \quad N_{cr} \cong \left\langle \begin{array}{l} k_u^{(t)} \\ C(1-x^2)^2 \\ R^2 \end{array} \right.$$

Si constata che, pur avendosi un sensibile aumento sull' $N_{cr}$  dato dalla (2) non appare l'efficacia del controventamento. Ma appena  $\mu^{*2} \neq 0$  (è sempre  $\mu^{*2} \leq 1$ ) la stabilità migliora grandemente. — Vale naturalmente la (6) che non conviene sviluppare prima di aver introdotto i valori numerici per gli enti che in essa intervengono. Però, ove sia, come è sempre,  $\bar{B}_1 \gg B_1$ ; con che  $D\varepsilon^2 \cong \bar{B}_1$ , le due radici risultano dall'incontro, sempre reale nel piano  $(y, N)$ , della retta,

$$y_1 = \left(1 - \frac{N}{k_u^{(t)}}\right) \cdot \frac{1}{R^2} [C(x^2 - 1)^2 + \mu^{*2} D\varepsilon^2 x^2] + \mu^{*2} \cdot \frac{C}{R^2}$$

con la parabola

$$y_2 = N \left[ \left(1 + \mu^{*2} + \frac{Cx^2}{\bar{B}_1}\right) - \frac{N}{k_u^{(t)}} \right].$$

Quando  $Cx^2$  è trascurabile, il che è frequente, in raffronto a  $\bar{B}_1 \cong D\varepsilon^2$ , posto

$$v_1 = \frac{1}{k_u^{(t)}} \frac{\bar{B}_1 x^2}{R^2}, \quad v_2 = \frac{1}{2} [1 + \mu^{*2} (1 + v_1)]$$

si ha per la radice inferiore, che dà l' $N$  critico,

$$(7) \quad N_{cr} = k_u^{(t)} \cdot v_2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \mu^{*2} \cdot \frac{v_1}{v_2^2}} \right].$$

Per definizione di  $v_2$  è sempre  $\mu^{*2} \cdot v_1 < v_2^2$  e la radice è quindi reale.

La (6) premette una deformata laterale  $u$  e torsionale  $\varphi$  priva di *nodi*, quindi dotata di estensione (deformazione assiale). L'azione esaltante della estensione sull' $N_{cr}$  appare evidente da quanto precede. Occorre perciò verificare se una deformata  $u, \varphi$  *priva di estensione*, quindi con almeno un *nodo*, non porti per caso ad un  $N_{cr}$  inferiore. Se la flessorigidezza  $B_r^{(t)}$ , delle traverse per flessione nel corrispondente piano tangente alla volta è dell'ordine di  $B_2^{(t)}$ , ciò non avviene generalmente giacché, innanzitutto, per la presenza del nodo, in ognuna delle formole (6) e derivate (6 a, b, c) va sostituito  $\kappa^2$  con  $(2\kappa)^2$ . Il termine  $\mu^{**2} D\varepsilon^2$  si annulla ma al suo posto ne subentra uno, che può essere sensibile. Corrisponde questo alla flessione delle traverse (nel piano tangente), conseguente agli opposti spostamenti tangenziali  $v$  delle due costole, necessari per annullare la deformazione  $\pm \varepsilon \varphi/R$ . Il termine da sostituire a  $\mu^{**2} D\varepsilon^2$  è

$$\mu^{**2} D\varepsilon^2 \quad , \quad (D = EA)$$

con

$$\mu^{**2} = \frac{9}{\kappa^2} \cdot \frac{R^2}{d \cdot \Delta} \cdot \frac{B_r^{(t)}}{B_r} \cdot \left( \frac{i_1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{B_r^{(t)}}{B_r} \cdot \frac{\Delta}{d}}$$

$B_r = 2 B_{r,r} = EJ_r$ ,  $J_r = Az_r^2$ ,  $A = 2 A_r$  ed infine  $B_r^{(t)} = EJ_r^{(t)}$  flessorigidezza della costola nel piano tangente.

Evidentemente, per costole alte ma sottili  $J_r^{(t)} \cong 0$  e quindi  $\mu^{**} \cong 0$ ; l' $N_{cr}$  risulta in ogni caso elevato per la sostituzione di  $\kappa$  con  $2\kappa$  che va sempre fatta, ma può non esserlo quanto l' $N_{cr}$  dato dalla (6). Però, se  $J_r^{(t)}$  è dell'ordine di  $J_2^{(t)}$  si può tenersi alla sola (6) e derivate che dà certamente un valore inferiore, quello che interessa, di  $N_{cr}$ .

### 3. - STABILITÀ OLTRE IL CAMPO LINEARE.

Se per una struttura leggera, in ferro o lega leggera, quindi generalmente snella, queste formole danno risultati praticamente buoni, per una struttura in c.a. possono dare invece, per mancanza di *snellezza*, come fa la formula di Eulero, quando ad esempio è  $l/i < 100$  per l'acciaio, valori molto elevati, da non prendere in considerazione, perché del tutto illusori. Occorre allora cercare un criterio generale che, particolarizzato per il caso delle aste soggette a carico di punta oltre il  $\sigma_p$  limite di proporzionalità, porti alla sostituzione pura e semplice delle *iperboli di Eulero* con le *rette di Tetmayer*. Che per  $\sigma_{cr} > \sigma_p$  il valore di  $\sigma_{cr}$  o dello sforzo da cui deriva sia illusorio non vi è dubbio, in quanto per  $\sigma > \sigma_p$ ,  $E$  decresce con  $\sigma$  e, con  $E$ , decresce il carico critico. Che espressioni si debbono adottare per  $E(\sigma)$ ? Quando sono noti dati sperimentali in un diagramma sforzi deformazioni.

$$(I) \quad E = E(\sigma)$$

è il modulo di elasticità cosiddetto *modulo tangente*.

Si ammette per semplicità che sia anche

$$(2) \quad G(\sigma) = \frac{E(\sigma)}{2(1+\nu)}$$

con  $\nu$  costante, tanto,  $\nu$  si considera generalmente meno di quanto occorra e meriti e si trascura perché poco rilevante nelle costruzioni in cemento armato. Se per i materiali metallici è  $\nu \cong 0,3$ , per quelli porosi, quali i calcestruzzi, è  $\nu \cong 0,10$  ed anche meno.

Per  $E(\sigma)$  si può porre, in mancanza di dati sperimentali,

$$(1a) \quad E(\sigma) = E_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_r}\right)^\gamma$$

con  $\gamma \cong 2$  e  $\sigma_r$ ,  $\sigma$  di rottura.

Da questo  $E(\sigma)$  si può calcolare il modulo  $E_K(\sigma)$  di v. Kàrmàn secondo formule abbastanza note. Ad esempio per una sezione rettangolare, indicando con  $E = E_0$  il valore costante di  $E$  per  $\sigma < \sigma_r$  si ha

$$(1b) \quad E_K(\sigma) = \frac{4 E_0 E(\sigma)}{(\sqrt{E_0} + \sqrt{E(\sigma)})^2}$$

Per una sezione a doppio T, per ali d'area  $F_i$ ,  $F_e$ , si ha per  $F_i < F_e$ ,

$$(1c) \quad E_K(\sigma) \cong 2 F_i \cdot \frac{E(\sigma) \cdot E_0}{E(\sigma) F_i + E_0 F_e}$$

A questi moduli conviene forse sostituire uno, che indicherò con  $E_T(\sigma)$ , che sembra molto appropriato particolarmente se la struttura è costituita da elementi lineari (aste) per i quali siano note le espressioni di  $\sigma_{cr}$  secondo le rette di Tetmayer

$$(3) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \beta \frac{l}{i}$$

In queste  $\alpha$ ,  $\beta$ , sono costanti, rilevabili da ogni manuale d'ingegneria;  $l/i$  il rapporto luce libera raggio d'inerzia che dà la snellezza. Si pone (cfr. Mem. cit. in [7] semplicemente

$$(1d) \quad E(\sigma) = E_T(\sigma) = \begin{cases} E_0 & \text{per } \sigma \leq \sigma_p, \\ \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{\pi^2 \beta^2} & \end{cases}$$

la determinazione inferiore valendo per  $\sigma \geq \sigma_p$ , senza ulteriore riguardo all' $E_K(\sigma)$  di Kàrmàn.

Una volta decisi sul modulo tangente da assumere, basta rilevare che, per la ipotesi fatta su  $G$ , il  $\sigma_{cr}$  effettivo, quando quello calcolato per  $E = E_0 = \text{cost.}$ , che si indicherà con  $\sigma_{cr}^{(0)}$ , supera  $\sigma_p$ , soddisfa l'equazione

$$(4) \quad \sigma = \frac{E(\sigma)}{E_0} \cdot \sigma_{cr}^{(0)}$$

La soluzione di questa – che per tutte le possibili espressioni di  $E(\sigma)$  ha una sola radice reale – è immediata. Basta trovare l'incontro nel piano  $(\sigma, y)$  della retta

$$y = \frac{E_0}{\sigma_{cr}^{(o)}} \sigma$$

con la linea

$$y = E(\sigma).$$

Talvolta la soluzione riesce anche più immediata e particolarmente espressiva se per  $E(\sigma)$  si adopera l' $E_T(\sigma)$  proposto. Espressiva in quanto, nel caso particolare, dimostra, soddisfacendo almeno una condizione necessaria, la aderenza di queste considerazioni con nozioni correnti (le formule di Tetmajer) ormai fuori di discussione.

Consideriamo infatti un'asta soggetta a sforzo assiale. Si ha, per lo snodo agli estremi.

$$\sigma_{cr}^{(o)} = \frac{N_{cr}^{(o)}}{A} = \pi^2 \left(\frac{i}{l}\right)^2 E_0, \quad \left(i^2 = \frac{J}{A}\right).$$

La (4) diviene allora

$$(4 a) \quad \sigma = \pi^2 \left(\frac{i}{l}\right)^2 E(\sigma)$$

e identificando  $E(\sigma)$  con  $E_T(\sigma)$ ,

$$(4 b) \quad \sigma = \pi^2 \left(\frac{i}{l}\right)^2 \begin{cases} E_0 \dots \dots & \text{per } \sigma \leq \sigma_p \\ \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{\pi^2 \beta^2} & \text{per } \sigma \geq \sigma_p. \end{cases}$$

Risulti per  $E = E_0$ ,  $\sigma_{cr} > \sigma_p$ . Si ha subito, risolvendo direttamente la (4 b) per  $\sigma > \sigma_p$ ,

$$\sigma = \sigma_{cr} = \alpha - \beta \frac{l}{i}$$

cioè proprio la  $\sigma_{cr}$  di Tetmayer, il che, naturalmente, si doveva trovare.

Ma passiamo ad un secondo esempio, specifico per la nostra trattazione. Si consideri lo sforzo assiale critico  $N_{cr} = q_{cr} \cdot R$  di un arco. Si ha, avvalendosi delle (1)\* o (2)\*, a seconda della stabilità che si vuole studiare, calcolata per  $E = E_0$ ,

$$\sigma_{cr}^{(o)} = \frac{N_{cr}^{(o)}}{A} = \frac{q_{cr}^{(o)} R}{A}.$$

Risulti  $\sigma_{cr}^{(o)} > \sigma_p$ . Allora  $\sigma_{cr}$  sarà radice dell'equazione (4) in  $\sigma$  per  $E(\sigma) = E_T(\sigma)$ ,

$$(4 c) \quad \sigma = \frac{\sigma_{cr}^{(o)}}{E_0} \cdot \frac{\sigma(\alpha - \sigma)^2}{\pi^2 \beta^2}.$$

Da qui si ha la soluzione  $\sigma = \sigma_{cr}$ , con

$$(4d) \quad \sigma_{cr} = \alpha - \pi\beta \sqrt{\frac{E_0}{\sigma_{cr}^{(0)}}}.$$

Il carico critico  $q_{cr}$  effettivo,  $< q_{cr}^{(0)}$  senza dubbio, è dato da

$$q_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}} \cdot q_{cr}^{(0)} = \frac{A\sigma_{cr}}{R}.$$

La rapidità e generalità del procedimento indicato è evidente e certo vale la pena considerarlo *sempre* per evitare quei gravi inganni che, pur dopo tanti richiami, ancor oggi si ripetono.

#### 4. - ESEMPIO ILLUSTRATIVO PER I N. 2 E 3.

Con riferimento ad un caso specifico sia:

$$\begin{aligned} R &= 50,0 \quad , \quad \Delta = 10,0 \quad , \quad d = 5,0 \text{ m}, \\ J_2^t &= A_t i_{2,t}^2 = 0,25 \times 0,20 = 0,05 \quad , \quad J_1^t = 0,075 \text{ m}^4, \\ A_t &= 0,25, \quad A_1 = A_2 = 0,50 \text{ m}^2 \quad , \quad J_1 = 2 J_{1,1} = 0,10 \text{ m}^4, \\ \alpha &= 2 \psi_0 = \pi/2 \quad , \quad \kappa = \pi : 2 \psi_0 = 2. \end{aligned}$$

Secondo la (2 a)\* si ha:

$$\begin{aligned} \frac{k_u^{(t)}}{E} &= \frac{12 \cdot 0,075}{5,0 \cdot 10,0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,075}{0,10} \cdot \frac{10,0}{5,0}} \cong 0,0072 \text{ m}^2, \\ \alpha &= 24 \frac{0,05}{0,50 \cdot 5,00^2} \cdot \frac{50,0^2}{10,0 \cdot 5,0} = 4,800 \quad , \quad \mu^{*2} = \frac{4,80}{1 + 4,80} = 0,8276. \end{aligned}$$

Per  $\bar{B}_1$ , trascurando  $B_1$ , si ha

$$\bar{B}_1 \cong D\varepsilon^2 = E (0,50 + 0,50) \cdot \frac{5,00^2}{4} = E \cdot 6,25 \text{ m}^4;$$

Infine,

$$v_1 = \frac{1}{0,0072} \frac{6,25 \cdot 2,0^2}{50,0^2} = 1,388 \quad , \quad v_2 = \frac{1}{2} [1 + 0,8276 (1 + 1,388)] = 1,4923$$

e da qui, per la (7),

$$N_{cr} = E \cdot 0,0072 \cdot 1,4923 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - 0,8276 \cdot \frac{1,3889}{1,4923^2}} \right) = E \cdot 0,00327.$$

Per  $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ to m}^{-2}$ ,  $N_{cr} \cong 6540 \text{ to}$  è

$$\sigma_{cr} = N_{cr} : (0,50 + 0,50) = 6540 \text{ to m}^{-2} = 654 \text{ kg cm}^{-2} > \sigma_p$$

limite di proporzionalità del miglior calcestruzzo.

Prendendo per  $E$ , oltre il limite di proporzionalità  $\sigma_p$ , la relazione secondo la (1 d) riferita ad un  $\sigma_{cr}$  espresso nella forma

$$\sigma_{cr} = \alpha - \beta \frac{l}{i},$$

si ha per il  $\sigma_{cr}$  effettivo della (4 d)

$$\sigma_{cr} = \alpha - \pi\beta \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}^{(0)}}}.$$

con  $E$  modulo costante per  $\sigma < \sigma_p$ . Nel caso specifico, ponendo, con riguardo al cemento armato secondo deduzioni medie, per una  $\sigma_p \cong 400 \text{ kg cm}^{-2}$ , e per

$$40 \leq \frac{l}{i} \leq 115;$$

$\alpha = 565$ ,  $\beta = 3,60$ ,  $E = 2,0 \cdot 10^5$ ,  $\sigma_p \cong 150$  tutto in  $\text{kg cm}^{-2}$ , risulta

$$\sigma_{cr} = 565 - \pi \cdot 3,60 \sqrt{\frac{2,0 \cdot 10^5}{654}} = 367 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Da qui,  $N_{cr} = 2 \cdot 0,50 \cdot 3670 = 3670 \text{ to}$  con  $\sigma_{cr} = 367 \text{ kg cm}^{-2}$ .

Con una sicurezza  $s = 3$  sono quindi ammesse  $N_{amm} \cong 1220 \text{ to}$  per un  $\sigma_b \cong 122,0 \text{ kg cm}^{-2}$ .

Si noti che l' $N_{cr}$  va riferito, in generale, esclusivamente al peso permanente giacché, quando è disarmata la sovrastruttura dell'impalcato, entrano in gioco ulteriori resistenze di grande efficacia quali quella delle stilate, tanto nel piano  $\Sigma$  dell'arco, quanto in quello ad esso normale. In merito cfr. Mem. cit. in [7]. Pertanto, salvo per costruzioni di grandissimo impegno, si possono omettere ulteriori verifiche per il carico accidentale.

Ancora si rilevi che, trattandosi nella realtà di carichi verticali e non radiali, ma pur sempre di sforzi  $N$  praticamente assiali (per archi disegnati secondo la linea delle pressioni dei carichi) l' $N_{cr}$  va confrontato con l' $N_k$  alle imposte dove  $N$  è massimo. Tale raffronto è sicuramente a favore della stabilità per un noto teorema di Calcolo, del resto molto intuitivo.

#### 5. - SFORZI DOVUTI A DEFORMAZIONE DELLA LINEA D'ASSE PER DIFETTO DI COSTRUZIONE. AZIONE DANNOSA DELLA VISCOSITÀ.

Su di un'asta, rettilinea nell'intento, ma deformata per difetto di costruzione secondo una linea in serie di Fourier

$$w_0(x) = w_1^{(0)} \sin \frac{\pi}{l} x,$$

agisca uno sforzo assiale  $N_0$ . Si provocano allora momenti flettenti, e quindi una amplificazione di  $w_0$  secondo la relazione nota

$$(1) \quad w(x) = \frac{w_1^{(0)}}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

$N_{cr}$  essendo il carico di Eulero, precisamente,

$$(2) \quad N_{cr} = \pi^2 \frac{B}{l^2}.$$

Ciò risulta facilmente osservando che l'equazione ordinaria per l'asta pressoinflessa,

$$(3) \quad Bw^{(IV)} + Nw'' = 0,$$

nel caso specifico, poiché la deformazione elastica non è  $w(x)$  valore assoluto dello spostamento, ma  $w(x) - w_0(x)$ , si scrive:

$$(3a) \quad B(w^{(IV)} - w_0^{(IV)}) + N_0 w'' = 0.$$

Da qui, per  $w(x)$  conforme alla  $w_0(x)$ , ammettendo lo snodo agli estremi, posto

$$(4) \quad w(x) = w_1 \sin \frac{\pi}{l} x$$

si ricava subito il coefficiente incognito  $w_1$ ,

$$(4a) \quad w_1 = \frac{w_1^{(0)}}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}}$$

e quindi la (1).

Il momento flettente è

$$(5) \quad M = -B(w'' - w_0'')$$

e le sollecitazioni conseguenti alla flessione, con ovvio significato di  $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$ ,

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot \begin{cases} y_{\max} \\ y_{\min} \end{cases} = -E(w'' - w_0'') \cdot \begin{cases} y_{\max} \\ y_{\min} \end{cases}$$

si esprimono in conformità, poiché  $B = EJ$ ,

$$(6) \quad \sigma = E\pi^2 \cdot \frac{\frac{N_0}{N_{cr}}}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} \cdot \frac{w_1^{(0)}}{l} \cdot \begin{cases} \frac{y_{\max}}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x, \\ \frac{y_{\min}}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x. \end{cases}$$

Queste vanno sommate alla sollecitazione per sforzo assiale  $\sigma_0 = N_0/A$  e deve esser, per la stabilità in senso ordinario,

$$\sigma_0 + \sigma < \sigma_p$$

con  $\sigma_p$  limite di plasticità.

Tali relazioni, cfr. Mem. cit. in [7], si estendono ad un arco.

Si abbiano precisamente per un arco deviato per difetto di costruzione, le equazioni

$$u_0(s) = u_1^{(0)} \sin \frac{\pi}{s_0} s \quad ; \quad \varphi_0(s) = \varphi_1^{(0)} \sin \frac{\pi}{s_0} s \quad , \quad w_0(x) = w_1^{(0)} \sin \frac{\pi}{s_0} s.$$

della deformata della linea d'asse con evidente significato di  $s$ ,  $s_0$ .

Orbene, si trova che  $\varphi_0$  non influisce su  $\varphi$  e non su  $u, w$ ; invece  $u_0$  influisce su  $\varphi_0$  ma non molto sensibilmente. Naturalmente  $u_0$  influisce su  $u$  (e non su  $w$ ) e  $w_0$  influisce su  $w$  (e non su  $u$ ). Così almeno nella impostazione lineare del problema. Rimandando alla trattazione generale della Mem. cit., per i dettagli, si rilevano qui alcuni risultati sufficienti per la pratica.

Si ha, conseguentemente ad  $u_1^{(0)}$ ,

$$(7) \quad \sigma = E \frac{u_1^{(0)} \cdot x_{\max}}{R^2} \cdot \frac{x^2}{\lambda_{cr} - 1} \cdot \sin \frac{\pi}{s_0} s;$$

conseguentemente a  $w_1^{(0)}$ ,

$$(8) \quad \sigma = E \frac{w_1^{(0)} \cdot y_{\max}}{R^2} \cdot \frac{x^2}{\lambda_{cr} - 1} \cdot \sin \frac{\pi}{s_0} s$$

essendo per  $u$ ,

$$(9) \quad \lambda_{cr} q_0 = q_{cr} \quad \text{con } q_{cr} \text{ dato dalla (2)* e per } w,$$

$$(10) \quad \lambda_{cr} q_0 = q_{cr} \quad \text{con } q_{cr} \text{ dato dalla (1)*.}$$

Se c'è sforzo assiale  $N_0$  la viscosità del calcestruzzo esalta  $u_0, w_0$  e quindi  $u$  e  $w$ . Si trova che, se questa ha luogo,  $u_1^{(0)}$  e  $w_1^{(0)}$  nelle (7), (8) si debbono sostituire con

$$u_1^{*(0)} = u_1^{(0)} \Gamma_1(t),$$

rispettivamente con

$$w_1^{*(0)} = w_1^{(0)} \Gamma_1(t).$$

Qui è  $\Gamma = \Gamma(t)$  una funzione del tempo  $t$ , delle costanti  $\alpha, \beta$  di Witney; precisamente è

$$\Gamma_1(t) = 1 + \lambda_{cr} \left[ \exp. \left( \frac{\alpha}{\lambda_{cr} - 1} (1 - e^{-\beta t}) \right) - 1 \right]$$

e  $\lambda_{cr}$  è dato dalle (9) per  $u$  e dalle (10) per  $w$ .

Da qui si vede come è essenziale avere dei  $\lambda_{cr}$  elevati per ridurre l'effetto della viscosità e come questa possa render anche fatali i divari della linea d'asse che di per se non sono pericolosi.

Prima ancora sia passato un tempo sufficiente perché sia  $e^{-\beta t} \sim 0$ , può raggiungere valori elevati e dar luogo a gravi amplificazioni degli errori iniziali  $u_0, v_0, \varphi_0$ , ad esempio, un  $\lambda_{cr} = 4$  (sicurezza 4) alla instabilità trasversale, dopo 6 mesi, per  $\alpha = 3, \beta = 1$ , per  $t$  espresso in anni dà luogo ad un  $\Gamma_1$  notevole, precisamente

$$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 \left[ \exp. \left( \frac{3}{4-1} (1 - e^{-1/2}) \right) - 1 \right] = 2,929.$$

Pertanto, i provvedimenti atti ad aumentare il  $\lambda_{cr}$ , quali i controventamenti trasversali ed il collegamento con l'impalcato stradale sono giustificati

a doppio titolo: per la stabilità dell'equilibrio e per evitare l'amplificazione di sempre possibili errori di costruzione della linea d'asse.

Intorno ai risultati qui conseguiti nel campo dei fatti si cfr. le belle Riviste cit. in [9].

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] V. VOLTERRA, *Leçons sur les Fonctions des lignes*, Gauthier Villars, Paris 1913; *Saggi scientifici*, p. 189, Zanichelli, Bologna 1920; *Opere*, a cura dell'Acc. dei Lincei, Vol. III, Zanichelli, Bologna 1958.
- [2] C. WITNEY, *Concrete Institute*, Marzo 1932; FR. DISCHINGER, *Elastische und Plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken*, «Der Bauingenieur», pp. 53, 286, 426, 503, 1939. Springer, Berlin 1939.
- [3] G. KRALL, *Statica dei mezzi elastici cosiddetti viscosi*. Nota I, II, in «Rend. Acc. Lincei», fasc. 3-4 1947; *Armature metalliche centine per ponti in cemento armato e nuovi metodi di impiego*, «Ingegneria Ferroviaria», N. 5, Roma 1950.
- [4] G. KRALL, *Ueber neuere Konstruktionsmethoden im Brückenbau*, «Schweizer Archiv», September 1951.
- [5] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, N. 54 e 43. Mc. Grawhill, New York and London 1936.
- [6] S. TIMOSHENKO, Op. cit. in (6), N. 27; F. CRUCIANI, *Basi teorico-sperimentali delle centine Cruciani*, «Il Cemento, Rivista di costruzioni», N. 4, e 5, Milano 1955; V. FRANCIOSI, *Ponti ad arco con impalcato sospeso*, Cap. VIII, Hoepli, Milano 1958.
- [7] G. KRALL, *Stabilità trasversale degli archi e delle strutture da ponte*, in «Memorie Acc. dei Lincei» (apparirà nel Vol. XX delle Memorie).
- [8] F. STÜSSI, *Baustatik I*, 2, ed., Cap. IX, Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1953.
- [9] G. KRALL, *Le grandi opere d'arte sul Lotto XIII per il tratto Firenze-Bologna*, «Autostrade», N. 4, Aprile, Roma 1961; *Ponti d'Italia*, «Luci e Immagini», Vol. XXI, N. 5, Settembr.-Ottobre, Firenze 1967; *Centine metalliche incorporate nel calcestruzzo, L'idea primiera di Melan e le successive varianti da allora ad oggi*, «L'Industria delle Costruzioni», (Rivista tecnica dell'ANCE), N. 2, Roma 1967.