

Valori minoranti per i moltiplicatori critici $\lambda_q^{(*)}$.

Merita rilevare come attraverso la traduzione dei problemi di stabilità in equazioni integrali si riesce a dare valori minoranti del moltiplicatore (autovalore) critico (l'autovalore minimo) e, naturalmente, ove interessi, ma più difficilmente, degli autovalori successivi.

All'uopo conviene dare alle equazioni integrali la forma a nucleo *polar simmetrico definito positivo* già considerata a pag. 117-120,

$$(1) \quad \omega(x) = \lambda \int_0^l N(\xi) \Omega(x\xi) \omega\xi d\xi,$$

dove $N = N(x)$ è, al solito, lo sforzo assiale, sempre, per ipotesi, ≥ 0 , e quindi, secondo la convenzione usuale, di compressione; $\Omega(x, \xi)$ si ricava dalla funzione di influenza $c(x, \xi)$, per doppia derivazione; si ha

$$(2) \quad \Omega(x, \xi) = \frac{\partial^2 c(x, \xi)}{\partial x \partial \xi}$$

e rappresenta quindi la rotazione in x provocata da un momento $M = 1$ in ξ , o viceversa, poiché è $\Omega(x, \xi) = \Omega(\xi, x)$, ad esempio perché $c(x, \xi) = c(\xi, x)$ dà lo spostamento in x provocato dalla forza $P = 1$ in ξ , o viceversa.

Poiché anche intuitivamente si riconosce che

$$(3) \quad \int_0^l \int_0^l \Omega(x, \xi) m(x) m(\xi) dx d\xi > 0$$

per una $m = m(x)$ del tutto arbitraria, salvo ad avere quadrato integrabile, vale la teoria di Hilbert per le equazioni integrali a nucleo polare (per $N(x) > 0$) simmetrico positivo definito.

Secondo questa si ha, per i valori λ_q ($q = 1, 2, \dots$) di λ ai quali corrispondono soluzioni non nulle $\omega_q(x)$ della (1),

$$(4) \quad \Sigma_q \frac{1}{\lambda_q} = \int_0^l N(x) \Omega(x, x) dx.$$

(*) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, cap. IV dove appaiono analoghe questioni per la frequenza di un sistema vibrante e *Manuale dell'Ingegnere*, voce *Stabilità*, n. 6.

Poiché tutti i λ_0 sono positivi e ordinabili in serie crescente, si ha la relazione notevole

$$(5) \quad \lambda_1 = \lambda_{cr} = \frac{1}{\int_0^l N(x) \Omega(x, x) dx - \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_q}} > \frac{1}{\int_0^l N(x) \Omega(x, x) dx}.$$

Il termine a destra della disuguaglianza porge quindi una valutazione del moltiplicatore λ_{cr} per difetto. Ciò ha interesse notevole in quanto ogni altro procedimento porta in generale a valori maggioranti (meno interessanti dal punto di vista della *sicurezza*, quando non sia noto l'errore).

Siano $N^*(x) \leq N(x)$ e $\Omega^*(x, x') \leq \Omega(x, x')$ funzioni minoranti dello sforzo assiale e della funzione di influenza che si considera, tali da consentire facilmente il calcolo del 1° moltiplicatore λ_1^* . Si ha allora la limitazione inferiore, più stretta della (5),

$$(5a) \quad \lambda_1 = \lambda_{cr} \geq \frac{1}{\int_0^l N(x) \Omega(x, x) dx - \left(\int_0^l N^*(x) \Omega^*(x, x) dx - \frac{1}{\lambda_1^*} \right)}.$$

Vale inoltre un metodo di approssimazioni successive sullo schema

$$\omega^m(x) = \int_0^l N(x') \Omega(x, x') \omega^{(m-1)}(x) dx'$$

(m è il grado di approssimazione, $\omega^{(0)}(x)$ una funzione arbitraria di partenza, soddisfacente le condizioni ai limiti), e si ha in generale

$$(6) \quad \lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_0^l N \cdot \omega^{(m)} \omega^{(m-1)} dx}{\int_0^l N \cdot \omega^{(m)} \omega^{(m)} dx}.$$

Per qualunque m finito si ottiene un *valore maggiorante di λ_{cr}* ; le (5) e (6) servono quindi a limitare l'autovalore λ , superiormente ed inferiormente e consentono quindi la valutazione dell'errore.

Per l'applicazione numerica conviene disporre di espressioni numeriche Ω e ridurre l'equazione ad un sistema di equazioni algebriche per le quali valgono espressioni analoghe alle (5) e (6). Fissati intervalli $\Delta_j = \Delta x'_j$ (è $\sum \Delta x'_j = l$) intorno dei punti $x = x'_j$, si ponga

$$\omega(x'_j) = \omega_j, \quad \omega(x_i) = \omega_i, \quad \Omega(x_i, x'_j) = \Omega_{ij},$$

essendo Ω_{ij} la rotazione in i provocata da un momento $M = 1$ in j , calcolabili direttamente. Si ha allora, in luogo della (1),

$$(7) \quad \omega_i = \lambda \sum N_j \Omega_{ij} \omega_j \Delta_j,$$

dunque, un sistema di equazioni lineari omogenee. Questo ammette, oltre alla soluzione $\omega_i = 0$, soluzioni non nulle se ne è nullo il discriminante, cioè, posto

$$N_j \Delta_j = n_i.$$

se

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda n_1 \Omega_{11} & -\lambda n_2 \Omega_{12} & \cdots & -\lambda n_N \Omega_{1N} \\ -\lambda n_1 \Omega_{21} & 1 - \lambda n_2 \Omega_{22} & \cdots & -\lambda n_N \Omega_{2N} \\ -\lambda n_1 \Omega_{31} & -\lambda n_2 \Omega_{32} & \cdots & -\lambda n_N \Omega_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda n_1 \Omega_{N1} & -\lambda n_2 \Omega_{N2} & \cdots & 1 - \lambda n_N \Omega_{NN} \end{vmatrix} = 0.$$

La più piccola radice di questa equazione algebrica approssima λ_1 monotona per N crescente. Si ha, in conformità con la (21),

$$(7b) \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sum_j n_j \Omega_{jj} - \sum_2^N \frac{1}{\lambda_0}} \geq \frac{1}{\sum_j n_j \Omega_{jj}}$$

e più precisamente, se per dei coefficienti N_j^* e Ω_{jj}^* minoranti di N_j e Ω_{jj} è noto λ_1^* .

$$(7c) \quad \lambda_1 \geq \frac{1}{\sum_j n_j \Omega_{jj} - \left(\sum_j n_j^* \Omega_{jj}^* - \frac{1}{\lambda_1^*} \right)}.$$

ESEMPLI. — 1) Per l'asta omogenea appoggiata agli estremi si ha per la rotazione il x provocata da un momento $M = 1$ in x .

$$\Omega(x, x) = \frac{1}{EJ_0} \left[\int_0^x \left(\frac{x'}{l} \right)^2 dx' + \int_x^l \left(\frac{l-x'}{l} \right)^2 dx' \right] = \frac{1}{3 EJ_0} \frac{x^3 + (l-x)^3}{l^2}$$

e quindi

$$\int_0^l \Omega(x, x) dx = \frac{l^2}{6 EJ_0},$$

e da qui per la (5), se $N(x) = \text{cost.} = N_0$,

$$\lambda_1 > \frac{6 EJ_0}{l^2} : N_0.$$

Con riguardo alla (4), si trova in conformità, essendo $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$$\frac{1}{\lambda_{cr}} > \int_0^l \Omega(x, x) dx = \frac{l^2}{\pi^2 EJ_0} \sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{l^2}{6 EJ_0} > \frac{l^2}{\pi^2 EJ_0}.$$

2) Sia $J(x) = J_0 [1 + j(x)]$, $N = N_0 [1 + \mu(x)]$ con $j(x) > 0$, $\mu(x) > 0$.

Allora è $N^* = N_0$, $\Omega^* = \Omega$ se Ω è corrispondente all'asta omogenea di momento d'inerzia $J_0 < J(x)$. Avendosi per la formula di EULERO, $\lambda_1^* N^* = \frac{\pi^2 E J_0}{l^2}$, segue dalla (25 a)

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \int N(x) \Omega(x, x) dx - \frac{l^2}{E J_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) N_0.$$

Per riprova, sia $j(x) = 0$, $\mu(x) = 0$; allora, come deve essere,

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{l^2}{\pi^2 E J_0} N_0.$$

Infine, con riguardo alla (7), ove si assuma un solo intervallo $\Delta_j = \Delta$, intorno di $x = l/2$ poiché $\Delta_1 \cong l$, $\Omega_{11} = \Omega\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ la (7 a) si riduce a

$$1 - \lambda N_0 \frac{l^2}{12 E J_0} = 0$$

e quindi per $\lambda_1 N_0$ un fattore 12 in luogo di π^2 .

Se si approssima la radice del sistema con la (7b) per 4 intervalli, avendosi

$$\Omega\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{4}\right) = \frac{7}{48} \frac{l}{E J_0} \quad ; \quad \Omega\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{12 E J_0}$$

segue:

$$N_{cr} = \lambda_1 N_0 = \frac{96}{9} \frac{E J_0}{l^2} = 10,6 \frac{E J_0}{l^2}.$$

Osservazioni: Tali teoremi, atteso il carattere positivo definito del nucleo $\Omega(x, x')$ si enunciano nella falsariga dei classici teoremi di Load Rayleigh per i quadrati delle frequenze σ_0^2 di un sistema elastico vibrante. Sia precisamente lo sforzo assiale $N = N(x)$ contenuto nei limiti (naturalmente > 0)

$$(8) \quad N^*(x) \leq N(x) \leq N^{**}(x).$$

Se λ_0^* , λ_0^{**} sono moltiplicatori corrispondenti ad N^* , N^{**} si ha

$$(8)' \quad \lambda_0^* \geq \lambda_0 \geq \lambda_0^{**}$$

per qualunque valore di ρ . Tale disuguaglianza può tornare utile se i λ_0^* , λ_0^{**} si calcolano facilmente siccome avviene se ad esempio N^* e N^{**} sono i limiti inferiori e superiori costanti $N_{\min}$ ed $N_{\max}$ ad esempio.

Sieno ora $\Omega_{(x,x)}^*$ e $\Omega_{(x,x)}^{**}$ minoranti e maggioranti della Ω effettiva e si abbia quindi

$$(9) \quad \Omega^{**} \leq \Omega \leq \Omega^{**}.$$

Se λ_0^* , λ_0^{**} sono i moltiplicatori corrispondenti si ha, anche intuitivamente, almeno per il primo,

$$(9)' \quad \lambda_0^* \geq \lambda_0 \geq \lambda_0^{**}.$$

Questa relazione torna anch'essa utile se Ω^* e Ω^{**} sono facilmente calcolabili (ad esempio se corrispondono alla Ω per i limiti superiori ed inferiori

della *flessso rigidità effettiva* $B = B(x)$, e sono quindi costanti se si fanno coincidere con $B_{\max}$ e $B_{\min}$. Le condizioni (8) e (9) possono sussistere contemporaneamente e sono anzi sinergiche tra loro; lo stesso dicasi se nelle (8), (9) e quindi (8)', (9)' si cambiano i segni $\leq$ con $\geq$. Ma, se tale cambiamento si fa in una sola di esse, non si sa dire più niente e le (8)' e (9)' associate non hanno significato alcuno.



I sostegni di questo altissimo serbatoio da 3000 m^3 — senza traverse — sono stati calcolati con questi criteri.