Sul problema centrale della dinamica dei ponti (*)

NOTA I.

Il problema meccanicamente elementare e pur centrale della dinamica dei ponti riguarda il moto di un'asta elastica vincolata agli estremi percorsa con velocità uniforme v da un carico puntuale pesante ed inerte.

Questo problema risale all'altro secolo, si inoltrò nel nostro ed ancor oggi non è che in parte risolto.

Inaugurato da Stokes (1) con una ricerca notissima in meccanica tecnica delle vibrazioni fu sistematicamente proseguito e, in un aspetto particolare, esaurito da Zimmermann in una ponderosa Memoria (2).

Ripreso da Timoshenko (3) con i metodi del Rayleigh, venne proseguito dal Bleich (4) nel suo magistrale trattato sui ponti in ferro. Chi scrive considerò successivamente (5) il problema sotto l'aspetto più generale come si dirà in appresso e, dalle deduzioni teoriche raggiunte, con l'aiuto determinante dell'Istituto Nazionale del Calcolo furono tratti, attraverso i metodi di integrazione numerica, non pochi risultati per i vari casi che intervengono nelle pratiche applicazioni. Trovansi questi in una serie di ricerche apparse su questi « Rendiconti » (5), in una memoria Pontificia e sistematicamente raccolti in un capitolo di un libro su la Meccanica tecnica delle vibrazioni (6).

La Memoria di Stokes (1) e quella successiva di Zimmermann (2) riduce il problema considerando la sola massa del carico mobile solitario e non quella del ponte; quella del Timoshenko (3) trascura la massa del carico e considera quella diffusa del ponte. Nel trattato del Bleich (4) si considera in 2ª approssimazione la massa del carico ed anche il suo molleggio partendo dalla soluzione del Timoshenko. Infine in (5) e (6) si affronta il problema per quel

(*) Dai « Rend. Acc. Lincei », Serie VIII, vol. XIX, fasc. 6, Dicembre 1955 – vol. XXXVIII, fasc. 6, Giugno 1965 – vol. XXXIX, fasc. 1–2, Ferie Luglio–Agosto 1965.

(1) G. G. STOKES, « Mat. Phys. Pap. », vol. II, 178 (1883).

(2) H. ZIMMERMANN, *Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last*. Berlin 1896.

(3) S. TIMOSHENKO, *Schwingungsprobleme der Technik*, pp. 267, 277, Springer, Berlin 1932.

(4) F. BLEICH, *Theorie u. Berechnung der Eisernen Brücken*, 5, n. 16, Springer, Berlin 1924.

(5) G. KRALL, *Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati*, questi « Rendiconti », fasc. 2 e 10, 1936 e *Problemi della Dinamica dei Ponti* in « Acta Pont. Ac. Sc. », vol. III, n. 3 (1939).

(6) G. KRALL, *Mecc. Tecn. delle vibrazioni*, vol. II, cap. XIV, §§ 3, 4, Zanichelli, Bologna, 1939.

che è, considerando in pari tempo la massa del carico, sempre solitario, distinta in direttamente applicata e molleggiata, e quella diffusa del ponte. Grazie ai mezzi avuti a disposizione i sistemi di equazioni differenziali, od integrodifferenziali nel caso del molleggio, allora istituiti non rappresentarono una vana esercitazione di meccanica, e ciò sia detto almeno con riguardo al calcolo numerico del contributo della vibrazione fondamentale che, per le velocità ordinarie et ultra appare importante.

Al problema dell'asta appoggiata agli estremi seguì quello dell'asta indefinita solidale con un suolo elastico (schematizzazione della rotaia ferroviaria corrente sul Ballast), percorsa con velocità uniforme v da un carico P.

Trascurando la massa del carico, S. Timoshenko trovò (7) con intuizione acutissima la nozione di quella velocità v_{cr}, cosidetta critica, per cui in condizioni *stazionarie* il binario risulta instabile. Chi scrive trovò (8) le soluzioni generali per un treno qualunque di carichi in moto uniforme. Cercando tra le soluzioni generali quelle stazionarie del tipo

$$w(x, t) = w(x - vt)$$

rappresentanti una perturbazione dell'asse del binario ($w = 0$) che si propaga con la velocità uniforme v di una distribuzione rigida di carichi $p(x, t) = p(x - vt)$ ritrovò naturalmente la v_{cr} di Timoshenko. Successivamente (9) provò a considerare un effetto della massa dei carichi su la velocità critica v_{cr} del binario. Altri seguirono indipendentemente lo stesso intento in varie ricerche.

Riprendendo questi antichi studi non più con riguardo ad un carico mobile puntuale inerte ma ad una distribuzione di carichi diffusi su un intervallo, mi è avvenuto di dover dare la loro reazione d'inerzia in forma più esplicita che non occorresse per il carico solitario, tenendo ben in rilievo il teorema di Coriolis. Così sono pervenuto ad equazioni generali, al limite in pieno accordo con quelle di Stokes e Zimmermann e con quelle studiate in (5) e (6) che comprendono ,come vedremo, la soluzione di Zimmermann quando la massa del ponte svanisce.

Ma queste nuove deduzioni pienamente conformi con (1),(2),(3) e (5),(6),(7),(8) contraddicono, come vedremo sino a negarne l'esistenza, le deduzioni fatte per l'effetto della inerzia del carico su la velocità critica in un caso stazionario considerato in (9).

Non si arriva tuttavia a negare in ogni caso stazionario l'effetto dell'inerzia del carico sulla velocità critica, ma occorre, perché questo si manifesti, contemplare treni mobili diffusi indefiniti come potrebbero ad esempio essere realizzati da un treno lunghissimo in raffronto alla luce del

(7) S. TIMOSHENKO, *Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail.* « Proc. of the 2nd int. Congress for appl. Mechanics », Zürich, 1926 (Orell Füssli, Zürich 1927).

(8) G. KRALL, *Problemi della dinamica del binario*, questi « Rendiconti », fasc. 5–6, 1930.

(9) G. KRALL, *Velocità critiche di masse pesanti su un binario.* Questi « Rendiconti », fasc. 10, 1930.

ponte o dall'acqua corrente in un tubo indefinito poggiato su un suolo elastico, corrente si intende con velocità ben superiori a quelle considerate nelle costruzioni idrauliche, almeno per i tipi di tubi che in esse intervengono.

Tutto ciò premesso, con l'intento di dare una impostazione generale del problema dinamico di cui si tratta, anche con riguardo a strutture più complesse della travata semplicemente appoggiata quali sono le travate sostenute da una catena, cioè i sempre attuali, anche dal punto di vista aerodinamico, ponti sospesi con travata irrigidente, passo senz'altro in questa e due Note successive, a scrivere le equazioni generali del moto e a trattarne l'integrazione cercando soluzioni particolari, potendosi continuare – in mancanza di meglio – con i metodi ampiamente riferiti in [5] e [6].

Si consideri un'asta elastica appoggiata agli estremi. Sia l la lunghezza, x una coordinata contata lungo l'asse a partire dall'estremo di sinistra, $B = EJ$ la flessorigidezza costante, μ la massa per unità di lunghezza, t il tempo.

Per le oscillazioni trasversali se $w = w(x, t)$ è l'elongazione in x al tempo t, se $p = p(x, t)$ è il carico dinamico, vale l'equazione notissima,

$$\mathrm{B}w'''' + \mu\ddot{w} = p(x, t) \tag{1}$$

essendo

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial t} . \tag{2}$$

Ove si tratti di una distribuzione rigida di carichi che si muove dall'estremo A verso l'estremo B con velocità uniforme v, è

$$p(x, t) = p(x - vt).$$

Se p è localizzata nell'intorno Δ di $x = x' = vt$ ed assume valori tali che per $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_{vt - \Delta/2}^{vt + \Delta/2} p(x - vt)\, dx = \mathrm{P} \tag{3}$$

si ha un carico puntuale (concentrato) mobile con velocità v e $w(x, t)$ è soluzione dell'equazione omogenea,

$$\mathrm{B}w'''' + \mu\ddot{w} = 0 , \tag{1 a}$$

soddisfa alle condizioni agli estremi ed ha una discontinuità nella derivata 3^a (anzi nel taglio) che risulta subito con una quadratura sulla (1) tenendo presente la (3); precisamente

$$\mathrm{B}w''' \Big|_{vt-}^{vt+} = \mathrm{P} . \tag{4}$$

Se $\mu = 0$, cioè se è trascurabile la massa del ponte, la (1 *a*) si riduce a

$$\text{(1 } b\text{)} \qquad Bw'''' = 0.$$

In tal caso, per quali si vogliono condizioni agli estremi e con la condizione (4) la (1 *b*) si integra per via elementare. Basta considerare le due soluzioni di (1 *b*)

$$\text{(5)} \qquad w = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \quad w = a_1(l-x)^3 + b_1(l-x)^2 + c_1(l-x) + d_1$$

a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1 essendo costanti arbitrarie; imporre alla 1ª soluzione *le condizioni in* $x = 0$, *alla* 2ª *in* $x = l$ e *raccordarle in* $x = x'$, *dove è applicato* il carico P, con continuità sino alla derivata 2ª con riguardo alla (4). Se gli estremi sono appoggi semplici deve essere in $x = 0, l$; $w = 0$ e $w'' = 0$ e le (5) si riducono a

$$\text{(5 } a\text{)} \qquad w = ax^3 + cx \quad , \quad w = a_1(l-x)^3 + c_1(l-x).$$

La condizione (4) ed il raccordo sino alla derivata 2ª porge 4 equazioni nelle restanti 4 incognite a, c; a_1, c_1. Per il caso di cui si tratta, posto $P = 1$, $x' = vt$, si ha, per $x \leq x'$,

$$\text{(6)} \qquad w(x, x') = \frac{1}{6lB}(l - x')\,[x\,x'(2l - x') - x^3],$$

per $x \geq x'$ basta scambiare x' con x.

La funzione $w(x, x')$ così definita si indica con $c(x, x')$ e dicesi *funzione di influenza* o di Green e si ha, nell'ambito lineare, per un carico P in $x = x'$,

$$\text{(7)} \qquad w(x, x') = w(x, t) = Pc(x, x') = Pc(x, vt).$$

È questa la soluzione offerta dalla Statica quando si trascura la massa del carico e quella del ponte. Per varie condizioni di vincolo tale funzione trovasi esplicitata e tabellata in [6] Cap. VI.

Ciò posto, si consideri la massa $M = P : g$ di P e si trascuri però la massa del ponte. Al posto di P si sostituisce allora nella (4) la *forza perduta* e si ha in luogo della (4),

$$\text{(4 } a\text{)} \qquad Bw'''\Big|_{vt-}^{vt+} = P - M\,\frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}.$$

In conformità con la (7) risulta

$$\text{(7 } a\text{)} \qquad w(x, t) = c(x, vt)\,P\left(1 - \frac{1}{g}\,\frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}\right).$$

Considerando anche μ, quindi le reazioni di inerzia diffuse $-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\mu\ddot{w}$, vale la (1 *a*) in luogo della (1 *b*) e in conformità con la (7 *a*) si ha, designando quì x' la variabile d'integrazione,

$$\text{(7 } b\text{)} \qquad w(x, t) = -\int_0^l c(x, x')\,\mu\ddot{w}(x', t)\,dx' + c(x, vt)\,P\left(1 - \frac{1}{g}\,\frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}\right).$$

Ma riprendiamo la (7 *a*). La linea elastica $w(x, t)$ è, istante per istante, la linea elastica dell'asta sotto ad un carico X in $x' = vt$, desumibile con la *spontanea* proporzione,

$$X : w(x', t) = 1 : c(x', x').$$

Essa è data quindi dall'espressione

$$w(x, t) = \frac{w(x', t)}{c(x', x')} \cdot c(x, x'), \qquad (x' = vt). \tag{7 c}$$

Pertanto, posto compendiosamente

$$w(x', t) = w(vt, t) = W(x')$$

la (7 *a*) si riduce all'equazione differenziale, *scrivendo per brevità* x per x',

$$W(x) = c(x, x) \cdot P\left(1 - \frac{v^2}{g} W''(x)\right). \tag{7 d}$$

È questa la celebre equazione di Stokes (per la traiettoria del carico) integrata in termini finiti da Zimmermann per la $c(x, x')$ dell'asta semplicemente appoggiata agli estremi dianzi definita. È ancora probabilmente aperta la trattazione per le $c(x, x')$ corrispondenti alle varie condizioni di vincolo agli estremi che si considerano in pratica, ad esempio quelle accennate in [6].

Sotto questo aspetto, questa equazione pienamente corretta, come anche meglio si vedrà in appresso, è stata anche in qualche noto trattato non giustamente interpretata nel senso che, scritto il termine della reazione d'inerzia nella forma

$$\frac{Pv^2}{g} W'' \simeq \frac{Mv^2}{\rho},$$

il raggio di curvatura ρ anziché alla *traiettoria del carico* si attribuì alla linea elastica $w(x, t)$. Se si vuol esprimere la reazione di inerzia in termini di $w(x, t)$ occorre far ricorso al teorema di Coriolis. A questo si perviene subito esplicitando $\ddot{W} = d^2 W/dt^2$. Si ha

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} = [v^2 w'' + 2 v \dot{w}' + \ddot{w}]_{x=vt}.$$

Il significato di questa relazione è evidente: *nell'ambito lineare*; $w'' = 1/\rho$ è la curvatura della linea elastica $w(x, t)$ all'istante t; v^2/ρ è *l'accelerazione centrifuga*; $\dot{w}'$ è la velocità angolare ω della tangente in $x = vt$ alla linea elastica $w(x, t)$ e quindi $2 v \omega$ è l'accelerazione *complementare*; infine $\ddot{w}$ è l'*accelerazione relativa*. Si ha dunque, a meno di termini d'ordine superiore in w, l'espressione del teorema di Coriolis quando si esplicita $d^2 w(vt, t)/dt^2 = d^2 W/dt^2$.

Partendo *a priori* da questo teorema si può impostare il problema di Stokes–Zimmermann del moto di P e calcolare le linee elastiche cercando indipendentemente dalla ipotesi, sia pure ovvia, espressa da (7 *c*), le soluzioni della (1 *b*) che soddisfacendo alle condizioni alle estremi hanno la discontinuità (4 *a*) in $x' = vt$, che scriviamo nella forma

$$(4\,b) \qquad \mathrm{B}w''' \Big|_{vt-}^{vt+} = \mathrm{P}\left|1 - \frac{1}{g}\,(v^2 w'' + 2\,v\dot{w}' + \ddot{w})\right|_{x=x'=vt}.$$

Occorre riconsiderare le posizioni (5 *a*), con le costanti a, c; a_1, c_1 funzioni di x' e quindi di t e scrivere le tre condizioni di raccordo già enunciate e quella della discontinuità in $x' = vt$, precisamente, secondo la (4 *b*),

$$-\,\mathrm{B}.6\,a = \mathrm{B}.6\,a_1 + \mathrm{P}\left|1 - \frac{1}{g}\,(v^2 w'' + 2\,v\dot{w}' + \ddot{w})\right|_{x=x'=vt}.$$

Si deve ritrovare così l'equazione (7 *d*) di Stokes e quindi la conferma della (7*c*).

Per quanto concerne l'integrazione della equazione completa (1 *a*) nell'intervallo $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq l/v$; con le condizioni dell'appoggio libero $w(0, t) = w(l, t) = 0$ e $w'' = 0$ per $x = 0, l$ e quelle iniziali $w(x, 0) = 0$, $\dot{w}(x, 0) = 0$, è essa considerata in (5) per la (4 *a*) sino a risultati numerici concreti. Il metodo allora seguìto, che riprenderemo, è quello dello sviluppo di w in serie di *autofunzioni* con i coefficienti considerati come parametri lagrangiani. Ma la soluzione dovrebbe arridere per via diretta sostituendo, equivalenti alle (5 *a*), le soluzioni della (1 *a*).

Si consideri ora in luogo del carico inerte puntuale una distribuzione $p = p(x - vt)$ di massa non trascurabile in raffronto a quella del ponte.

Per virtù della forma esplicita data secondo il teorema di Coriolis alla reazione di inerzia, si ha in luogo della (1), l'equazione

$$(1\,c) \qquad \mathrm{B}w'''' + \mu\ddot{w} = p(x - vt)\left[1 - \frac{1}{g}\,(v^2 w'' + 2\,v\dot{w}' + \ddot{w})\right].$$

A questa equazione si può dare un aspetto integrodifferenziale analogo alla (7 *b*), utile per l'integrazione. Si ha precisamente, indicando x' la variabile di integrazione, equivalente alla (1 *c*), l'equazione integrodifferenziale

$$(7\,e) \qquad w(x, t) = -\int_0^l \mu c(x, x')\,\ddot{w}(x', t)\,dx' +$$

$$+\int_0^l c(x, x')\,p(x' - vt)\left|1 - \frac{1}{g}\,(v^2 w'' + 2\,v\dot{w}' + \ddot{w})\right|_{x=x'} dx'.$$

Prima di affrontare l'equazione (1 *c*) a cui siamo pervenuti ripetendo dapprima la via già fatta in (5) per il carico puntuale, merita soffermarsi su alcune sue soluzioni particolari molto espressive.

I. – Sia $p(x - vt) = p_0 = \text{cost.}$ Dunque, il treno è illimitato e costituisce un flusso uniforme di masse di portata $p_0 v : g$. Cercando soluzioni della (1 *c*) indipendenti da t questa si riduce alla forma.

$$(1\,d) \qquad \mathrm{B}\,w'''' + \frac{p_0 v^2}{g}\,w'' = p_0.$$

Cercando soluzioni soddisfacenti alle condizioni agli estremi del semplice appoggio, del tipo

$$w = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

si ha

$$A_n = p_0 \frac{\frac{4}{n\pi}}{B\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \frac{p_0 v^2}{g}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}, \qquad (n = 1, 2, 5, \cdots;).$$

Da qui si riconosce che le velocità che annullano il denominatore di uno degli A_n sono critiche per l'equilibrio. Naturalmente la più piccola v_1 da sola è determinante per l'instabilità, essa è data da

$$v_1^2 = v_{cr}^2 = \frac{Bg}{p_0}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2. \tag{8}$$

II. – Si consideri un carico P di massa trascurabile, mobile con velocità v su un binario di lunghezza infinita corrente su un suolo (Ballast) elastico. L'elasticità sia definita cosí che allo spostamento $w\ (x)$ dell'area d'appoggio corrispondente a $\Delta x = 1$ si oppone una reazione elastica $-\beta w$ (*), *indipendentemente da ogni spostamento nell'intorno di* x (ipotesi di Zimmermann che presiede tutta la statica del binario e delle fondazioni in generale). Allora, a sinistra delle (1, *a*, *b*, *c*, *d*) considerate, va aggiunto il termine $+\beta w$. In particolare la (1 *a*) diviene, con $\mu = q : g$, massa per unità di lunghezza del binario

$$Bw'''' + \mu\ddot{w} + \beta w = 0 \tag{1 e}$$

e si devono raccordare due soluzioni, nulle all'infinito, nel punto $x' = v$, con riguardo alla continuità sino alla derivata 2ª ed alla discontinuità (4).

Ponendo $z = (x - vt)$ si ha da (1 *e*),

$$B\frac{d^4 w}{dx^4} + \mu v^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \beta w = 0. \tag{1 f}$$

e da qui, con

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}} \qquad k = \frac{v^2}{c^2} \qquad c = \sqrt[4]{\frac{4B\beta}{\mu^2}} \qquad \alpha = \sqrt{1-k}\,\lambda \quad , \quad \gamma = \sqrt{1+k}\,\lambda$$

si trova (cfr. (9))

$$w\,(x - vt) = \frac{P}{4B(\alpha^2+\gamma^2)} \cdot \Phi\,(x - vt)$$

con

$$\Phi\,(x - vt) = e^{-\alpha(x-vt)} \left\{ \frac{1}{\alpha}\cos\gamma\,(x-vt) + \frac{1}{\gamma}\sin\gamma\,(x-vt) \right\}.$$

Da qui si vede che per

$$v^2 = v_{cr}^2 = c^2 = \frac{2}{\mu}\sqrt{B\beta} \tag{9}$$

si ha instabilità. È questa la formula per la velocità critica trovata da Timoshenko.

(*) $\beta = Cb$ con C costante del *Ballast*, b larghezza dell'appoggio. β si suppone costante come μ e B.

Per un treno rigido di carichi mobili con velocità v se P_0 è il carico in testa, Δ_i la distanza, invariabile, del carico generico P_i da P_0 sarà

$$w(x - vt) = \frac{1}{4\,B(\alpha^2 + \gamma^2)} \sum_0^N{}_i\, P_i \cdot \Phi\,[x - (vt - \Delta_i)]$$

e la velocità critica è sempre v_{cr}.

III. – Come in II, ma si consideri anche la massa di P. Vale ancora la (1 *e*) con la discontinuità in $x' = vt$ data dalla (4 *a*).

Per una soluzione stazionaria del tipo $w = w(x - vt)$ è però, posto $z = x - vt$,

$$v^2 w'' + 2\,v\dot{w}' + \ddot{w} = \frac{d^2 w}{dz^2}(v^2 - 2\,v^2 + v^2) = 0$$

e quindi l'*effetto della massa del carico solitario su la velocità critica risulta nullo*. Ora, in [9] si considerò il solo termine $Mv^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = M\ddot{w}$, che dà la forza centrifuga calcolata su la linea elastica anziché, siccome occorre, quella calcolata su la traiettoria.

Se in altri casi, considerati ad esempio in [4], uno scambio siffatto non infirma molto i risultati, là ne porta ad uno che sembra notevolissimo ed è invece inesistente.

A conferma di questa deduzione, contraria a risultati analoghi anche di altri, si considera, per il caso in parola, anziché l'equazione differenziale (1 *c*) un'equazione analoga a quella di Zimmermann.

Poiché, attesa l'uniformità del binario indefinito è $c(x, x) = \text{cost.} = c_0$ si ha, per lo spostamento W sotto al carico in conformità con la (7 *d*),

$$W(x) = c_0\, P\left(1 - \frac{v^2}{g}\, W''(x)\right)$$

e da qui la soluzione statica $W_0 = c_0\, P$. La traiettoria è una retta, parallela all'asse del binario e non si producono quindi reazioni di inerzia.

In questo caso III non appare neanche la velocità critica di Timoshenko giacché si è supposto $\mu = 0$.

Non è detto però che la massa dei carichi mobili non abbia *mai* influenza su la velocità critica. Passiamo infatti ad un esempio espressivo proprio nell'ambito stazionario.

IV. – Un treno continuo indefinito $p_0 = \text{cost.}$ corre con velocità v su un binario indefinito. Tentando una soluzione indipendente da t si ha, analoga alla (1 *f*), *ma con riferimento ad x anziché a z*, l'equazione

$$B\,w'''' + \frac{p_0 v^2}{g}\, w'' + \beta w = p_0 . \tag{1 g}$$

Da qui si ha la soluzione statica $w_0 = p_0 : \beta$ e si riconosce che, solo per $v < v_{cr}$, con

$$v_{cr}^2 = \frac{2g}{p_0}\sqrt{B\beta} \tag{10}$$

si ha stabilità, sicché v_{cr} è la velocità critica del treno indefinito (*).

La (10) è formalmente simile alla (9) di Timoshenko, ma è essenzialmente diversa, com'è naturale del resto. Nella (9) interviene la massa per unità di lunghezza del binario, nella (10) quella del carico corrente sul binario. Per treni di carichi inerti finiti, fuori dall'ambito delle soluzioni stazionarie, il problema della integrazione della (1 *c*) eventualmente completata con il termine βw a sinistra, è aperto. La (10) segnala che l'inerzia del carico mobile può aver effetti sensibili giacché, per esser $p_0 \gg \mu g$, essa dà valori assai inferiori di v_{cr} da quelli calcolati secondo la (9).

(*) *Osservazione*. – La deduzione della (10) dalla (1 *g*) riesce facilmente cercando soluzioni della parte omogenea del tipo

$$w = w\, e^{zx}$$

con z esponente caratteristico, incognito. Risulta l'equazione caratteristica

$$Bz^4 + \frac{\mu_0 v^2}{g} z^2 + \beta = 0 \qquad (\beta = Cd).$$

Da qui

$$z_{1,2}^2 = -\frac{\mu_0 v^2}{2\,Bg} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_0 v^2}{2\,Bg}\right)^2 - \frac{\beta}{B}}\,.$$

Si vede che, se il radicando si annulla si ha per un valore v_{cr}^2 di v^2 una radice doppia $z^2 = \bar{z}^2$ e quindi instabilità per $|z^2| \geq |\bar{z}^2|$. A $\bar{z}^2$ corrisponde la velocità critica data da (10) come subito si constata.

Per altre velocità critiche, anche inferiori alla (10) (di serpeggiamento, battimenti, etc.), si cfr. la ns. Memoria lincea (1968): « *Gli 80 anni felici della formola per la traversina ferroviaria e della sua inseparabile costante* C ». Tale memoria si ritroverà con qualche variante nella Parte II di questa « Selecta ».

Nota II.

Il teorema del Coriolis e le velocità critiche di veicoli terra aria.

Qui si riprende il problema, considerato nella Nota I [1] dei carichi pesanti ed inerti mobili sopra un ponte, su di un binario. Là è stata data qualche formola concisa per le *velocità critiche* in regimi stazionari, di flussi indefiniti di materia: fluidi liquidi o gas, sopra un ponte, un binario, entro ad un tubo indefinito corrente su un letto o in un mezzo elastico. Ora, accanto a varie precisazioni analitiche e meccaniche utili per lo studio non solo delle soluzioni strettamente stazionarie ma anche di quelle vibratorie del problema, si vuole far vedere che l'equazione del moto elastico trasversale $w = w(x, t)$ di un involucro cilindrico C (di asse x) in cui si ha un flusso μV di materia, di gas ad esempio (con che, se ρ è la densità, A l'area della sezione, è $\mu = \rho A$), è quella [2] del moto elastico trasversale dello stesso involucro C lambito però solo esternamente da una corrente di densità ρ, velocità supersonica V.

Il che significa che le reazioni di inerzia calcolate per $w(x, t)$ di C con il teorema del Coriolis per un flusso ρAV, interno, sono le reazioni gasdinamiche per $w(x, t)$ di una corrente supersonica *esterna* ρV.

Si ha, s'intende, da considerare lo sforzo assiale N per un involucro di lunghezza finita L, conseguente alla resistenza di ogiva, in regime di moto uniforme *costante* sino al reattore; in regime di accelerazione o decelerazione assiale, eguale alla spinta del reattore meno le reazioni di inerzia, brevemente, eguale alla *spinta perduta*.

L'equazione in parola ha anche un qualche interesse analitico; qui ci limiteremo però solo alla ricerca di soluzioni particolari statiche o vibratorie armoniche applicando per queste i metodi diretti del calcolo delle variazioni (*serie minimizzanti*) al corrispondente principio dell'Hamilton senza eliminare prima, come usualmente in meccanica delle vibrazioni, la variabile tempo. Questa vien qui trattata alla stregua di una coordinata spaziale fissandone l'intervallo di variabilità in base al periodo di vibrazione a priori incognito, ma di cui la realtà vien accertata attraverso il riconoscimento in generale che gli esponenti caratteristici sono tutti immaginari puri, salvo al più uno, egual zero, cui corrisponde la velocità critica statica del veicolo. Riconoscimento che, naturalmente, riesce nel senso accennato solo e soltanto quando agli estremi siano soddisfatte le *condizioni naturali* che scaturiscono dal principio variazionale hamiltoniano classico, cioè limitato a soli aspetti *conservativi* del problema.

Gli esponenti caratteristici non sono più immaginari puri, ma complessi con tutti i pericoli che comporta una parte reale positiva per valori di V anche inferiori alla V_{cr} statica, quando agli estremi le *condizioni naturali* siano modificate artatamente. Ciò avviene ad esempio attraverso servointerventi (necessari ad esempio per la stabilità globale) o quando, con o senza modifiche delle condizioni agli estremi, agiscano lungo l'involucro ulteriori forze aerodinamiche non conservative, quali ad esempio sono quelle conseguenti a piani di coda, alettoni, a variazioni (con x) del raggio R dell'involucro cilindrico che si considera per le quali si provocano in fase vibratoria reazioni aerodinamiche.

Estendendo successivamente questo studio all'ambito di correnti bidimensionali di carichi inerti sopra lastre elastiche, si arriva a reazioni per effetto Coriolis equivalenti, in regimi stazionari, a stati di sforzi piani nelle lastre stesse. Allora si entra in questioni di stabilità legata agli autovalori corrispondenti ai moltiplicatori critici degli sforzi stessi che, per quanto note, presentano ancora aspetti riposti e non pochi recessi d'ombra. Se le correnti sono fluide appaiono difficoltà che sarà utile considerare in una Nota a se.

2. PRINCIPIO DELL'HAMILTON PER IL PROBLEMA DI CUI SI TRATTA. – Si consideri dunque un tubo circolare cilindrico assimilabile ad un'asta elastica di flessorigidezza costante B, di momento di inerzia delle masse diffuse sulla sezione trasversale generica (interessante il tratto $\Delta x = 1$) $\mu_0 j^2$, μ_0 essendo quindi la massa del tubo per unità di lunghezza, j^2 il quadrato del raggio giratore di inerzia della sezione rispetto al suo asse neutro che, brevemente, indipendentemente da sforzi assiali, si identificherà con il suo asse centrale di inerzia, trasversale ad x, coordinata assiale. Nel tubo fluisce, con velocità costante V, una massa μ per unità di lunghezza, si ha cioè un flusso μV. Per le vibrazioni trasversali $w = w(x, t)$ dell'asta si vuol scrivere un principio hamiltoniano. Posto

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\ )' \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = (\dot{\ })$$

si ha per l'energia elastica P, se L è la lunghezza del tubo,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{B}w''^2\, dx .$$

Se il tubo è solidale con un mezzo elastico che reagisce bilateralmente con forza $-kw$, per unità di lunghezza, allo spostamento w dell'asse tubo, a P va aggiunto un termine

$$\text{(1 a)} \qquad \mathrm{P}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} kw^2\, dx .$$

Per l'energia cinetica T_1 del tubo, T_2 del fluido che si suppone partecipi rigidamente al moto oscillatorio, si ha

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} (\mu_0\, \dot{w}^2 + \mu_0 j^2\, \dot{w}'^2)\, dx \quad , \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} \mu\, (\mathrm{V}w' + \dot{w})^2\, dx .$$

Se agisce uno sforzo assiale N, di natura qualunque, a P va aggiunto infine un termine $\mathfrak{L}_2^*$, lavoro di 2° ordine delle forze interne,

$$(3) \qquad \mathfrak{L}_2^* = -\frac{1}{2}\int_0^L N w'^2 \, dx \, ,$$

N potendo essere funzione di x.

Il principio dell'Hamilton si scrive in definitiva

$$(4) \qquad \delta \int_0^t (T_1 + T_2 - P - P_1 - \mathfrak{L}_2^*)\, dt = 0 \, ,$$

ovvero, esplicitamente,

$$(4\,a) \qquad \delta \int_0^t dt \int_0^L \{ \mu_0 \dot{w}^2 + \mu_0 j^2 \dot{w}'^2 + \mu (V w' + \dot{w})^2 - B w''^2 - k w^2 + N w'^2 \} \, dx = 0,$$

la variazione intendendosi presa, con le solite specificazioni, con riguardo a w funzione di x e t.

Con ovvie integrazioni p.p. si ha l'equazione, che si conferma con scrittura diretta,

$$(5) \qquad (Bw'')'' + (Nw')' + kw - \mu_0 j^2 \ddot{w}'' + \mu (V^2 w'' + 2V\dot{w}' + \ddot{w}) + \mu_0 \ddot{w} = 0 \, ,$$

con le condizioni agli estremi, anch'esse direttamente confermabili,

$$(6) \qquad [(Bw'')' + (N + \mu V^2) w' - \mu_0 j^2 \ddot{w}' + \mu V \dot{w}] \, \delta w - (Bw'') \, \delta w' = 0 \qquad \text{in} \quad x = 0, L .$$

Se l'asta–tubo è fissa agli estremi, a snodo o ad incastro, le (6) sono senz'altro soddisfatte in quanto si ha,

(6 *a*) per lo *snodo*: $w(0) = w(L) = 0 \quad ; \quad w''(0) = w''(L) = 0 \, ;$

(6 *b*) per l'*incastro*: $w(0) = w(L) = 0 \quad ; \quad w'(0) = w'(L) = 0 \, .$

Invece, per l'incastro in $x = 0$ (ad esempio) e l'*estremo libero* in $x = L$ si ha, considerando le parentesi [ ] a fattori di δw e ( ) a fattore di $\delta w'$ della (6),

$$(6\,c) \qquad w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad [\;]_{x=L} = 0 \quad , \quad (\;)_{x=L} = 0 \, ,$$

Per tutti e due gli estremi liberi *dovrebbero* annullarsi le [ ] e ( ) della (6) in $x = 0, L$. Ma va allora osservato che, *per* $k = 0$ (assenza di reattività del suolo), come vedremo nel caso importante della asta–tubo–missile volante ad esempio, si ha *instabilità globale rigida* per $N \neq 0$, $V \neq 0$ a meno di non introdurre termini correttivi agli estremi stessi, conseguenti ad esempio a servointerventi, tali da assicurare entro limiti adeguati la stabilità. Ma questi interventi modificano profondamente la problematica di cui ci si occupa.

Si rilevi ancora che è dubbio se nella [ ] della (6 c) a fattore di δw possa praticamente conservarsi il termine $\mu V^2 w'$ e $\mu V \dot{w}$ (in merito cfr. *Osservazione 2ª*).

Riandando alla (5), che è sostanzialmente la (1 c) della Nota I, osserviamo che questa si ritrova tale e quale quando si scrive l'equazione del moto elastico trasversale di un tubo–missile soggetto all'azione aerodinamica supersonica della corrente esterna calcolata con la teoria di Miles da Kaprzynski e Kaliski [2]. Basta porre nelle (5), $\mu = \rho A$, essendo ρ la densità dell'aria, A l'area $A = R^2 \pi$ della sezione retta del tubo (di raggio R). La teoria del Miles non dà però le condizioni agli estremi, onde in [2] per $N = 0$, si assumono le condizioni tipiche dell'asta libera agli estremi, nel caso specifico le condizioni, *non naturali*, per $V \neq 0$,

$$(7) \qquad (Bw'')'\Big|_{x=0,L} = 0 \quad , \quad Bw''\Big|_{x=0,L} = 0 .$$

Non si hanno quindi esponenti caratteristici tutti immaginari puri e le velocità critiche sono legate al segno (> 0) della parte reale degli stessi. Tali velocità, anzi la velocità V_{cr} (giacché interessa l'inferiore tra tutte) possono risultare inferiori a quella V_{cr} statica, corrispondente all'esponente nullo del caso conservativo secondo le (5) e (6).

Riandando al nostro problema, per le condizioni (6 a) che possono anche tradurre il caso degli estremi liberi se, in regime stazionario, ($\partial w/\partial t = 0$) lo sforzo assiale $N + \mu V^2$ si pensa orientato sulla congiungente gli estremi, si ha la velocità critica da

$$(8) \qquad (N + \mu V^2) = \pi^2 \frac{B}{L^2} .$$

Infatti, ponendo nella (5) w indipendente da t, questa si riduce, per $k = 0$, a

$$(Bw'')'' + (Nw')' + \mu V^2 w'' = 0$$

e da qui, per $B = \text{cost.}$, $N = \text{cost.}$, con

$$w = \sin \frac{\pi}{L} x$$

si ha la condizione critica in regime stazionario data dalla (8). Se N deriva dalla resistenza di ogiva, se A è l'area della sezione retta, C_r comprensivo del coefficiente di forma, si ha, per ρ densità del gas, $\mu = \rho A$,

$$N = \frac{1}{2} C_r \rho V^2 A = \frac{1}{2} C_r \mu V^2 .$$

Segue da (8)

$$(9) \qquad V_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{\mu \left(1 + \dfrac{C_r}{2}\right)} \frac{B}{L^2} .$$

Poiché C_r è piccolo di fronte all'unità, l'influenza della resistenza non è rilevante. In fase di accelerazione però, lo sforzo assiale può esser notevole conseguentemente alla reazione di inerzia, ma allora ben poco si sa dell'azione gasdinamica.

A titolo di esempio, si consideri un involucro per cui $R = 0{,}375$ m, $A = R^2\pi = 0{,}4418$ m^2.

Posto

$$\rho_0 = 0{,}125 \text{ Kg m}^{-3}/g \quad , \quad \mu = \rho_0 A = 0{,}0552 \text{ Kg m}^{-1}/g \, ,$$
$$B = EJ = 3{,}0 \cdot 10^6 \text{ Kg m}^2 \quad , \quad L = 12{,}00 \text{ m} \quad , \quad N_0 = 0$$

si ha dalla (9), per $C_r = 0$,

$$V_{cr}^2 = \pi^2 \frac{B}{\mu L^2} = \pi^2 \frac{3{,}0 \cdot 10^6}{0{,}0552 \cdot 12{,}00^2} = 3{,}725 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \sec^{-2}$$

e quindi

$$V_{cr} \cong 1930 \text{ m} \sec^{-1}.$$

Esponenti caratteristici. – Si tratta di far vedere che la velocità critica in regime stazionario ($\partial w/\partial t = 0$) esaurisce la ricerca della stabilità in quanto in regime dinamico non si hanno velocità critiche ($<$ della statica, o merostatica, come la si vuol chiamare) poiché i moti vibratori per $V < V_{cr}$ sono sempre stabili nel senso che, posta la soluzione nella forma

$$w(x, t) = u(x) \cdot e^{zt} \tag{10}$$

gli esponenti caratteristici sono, per $V < V_{cr}$, immaginari puri (ed uno è nullo per $V = V_{cr}$ secondo la (8)), si intende in quanto valgono le $(6\,a, b, c)$ (*).

Per dimostrare ciò, indipendentemente dalla più speditiva *Osservazione* che segue, basta ammettere per z la forma complessa e corrispondente coniugata $\bar{z}$,

$$z = z_1 + iz_2 \quad , \quad \bar{z} = z_1 - iz_2 . \tag{11}$$

Dovendosi avere allora le soluzioni

$$u = u_1 + iu_2 \quad , \quad \bar{u} = u_1 - iu_2 , \tag{11 a}$$

tutto si riduce a provare che deve essere $z_1 = 0$.

Posta nella (5) la (10), con riguardo alle (11), (11 *a*), separando la parte reale da quella immaginaria, risultano due equazioni associate in u_1, u_2 contenenti z_1 e z_2 con le quali si dimostra, come di consueto in quest'ordine di questioni, che deve essere $z_1 = 0$,

Precisamente, fatte le posizioni

$$N_0 + \mu V^2 = \tilde{N} \quad , \quad \mu_0 j^2 = \tilde{\gamma} \quad , \quad 2\mu V = 2\tilde{q} \qquad \mu_0 + \mu = \mu^* \tag{12}$$

si ha dalla (5), attese le (11), (11 *a*),

$$\begin{aligned} B u_1^{(IV)} + k u_1 + \tilde{N} u_1'' - \tilde{\gamma} u_1'' z_1^2 + \mu^* u_1 z_1^2 + 2\tilde{\gamma} u_2'' z_1 z_2 - 2\mu^* u_2 z_1 z_2 + \\ + \tilde{\gamma} u_1'' z_2^2 - \mu^* u_1 z_2^2 + 2\tilde{q}(z_1 u_1' - z_2 u_2') = 0 . \end{aligned} \tag{5'}$$

$$\begin{aligned} B u_2^{(IV)} + k u_2 + \tilde{N} u_2'' - \gamma u_2'' z_1^2 + \mu^* u_2 z_1^2 - 2\tilde{\gamma} u_1'' z_1 z_2 + 2\mu^* u_1 z_1 z_2 + \\ + \tilde{\gamma} u_2'' z_2^2 - \mu^* u_2 z_2^2 + 2\tilde{q}(z_1 u_2' + z_2 u_1') = 0 . \end{aligned} \tag{5''}$$

(*) Per $w = 0$, $w' = 0$ in $x = 0$, L queste valgono in ogni caso.

Da qui, moltiplicando la prima equazione per u_2 la seconda per u_1, integrando, una o due volte p.p. i termini con u'' rispettivamente $u^{(\text{IV})}$, tenendo presenti le condizioni (6) agli estremi, $u = 0$, $u'' = 0$ o $u = 0$, $u' = 0$,

$$(5)''' \qquad -\int_0^L 2\,\tilde{\gamma}\, z_1 z_2 (u_1'^2 + u_2'^2)\, dx - 2\cdot\int_0^L \tilde{q}\, z_2 (u_1' u_1 + u_2' u_2)\, dx +$$

$$-2\int_0^L \mu^*\cdot z_1 z_2 (u_1^2 + u_2^2)\, dx + 2\int_0^L \tilde{q} z_1 (u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx = 0\,.$$

Da qui, poiché si annulla il 2° termine della (5)''' si ha $z_1 = 0$ oppure

$$(13) \qquad z_2 = \frac{\displaystyle\int_0^L \tilde{q}\,(u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \tilde{\gamma}\,(u_1'^2 + u_2'^2)\, dx + \int_0^L \mu^* (u_1^2 + u_2^2)\, dx}$$

Questa determinazione di z_2 è però impossibile. Infatti, moltiplicando la (5)' per $u_1\, dx$, la (5)'' per $u_2\, dx$, sommando ed integrando p.p. quanto occorre, si trae, posto $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$, $|u'|^2 = u_1'^2 + u_2'^2$, $|u''|^2 = u_1''^2 + u_2''^2$;

$$(13\,a) \qquad \int_0^L B\,|u''|^2 dx + \int_0^L k\,|u|^2 dx - \int_0^L \tilde{N}\,|u'|^2 dx + \int_0^L \tilde{\gamma}\, z_1^2\,|u'|^2 dx +$$

$$+\int_0^L \mu^* z_1^2\,|u|^2 dx - \int_0^L \tilde{\gamma} z_2^2\,|u'|^2 dx - \int_0^L \mu^* z_2^2\,|u|^2 dx +$$

$$+\,2\int_0^L \tilde{q} z_2 (u_2' u_1 - u_2' u_1)\, dx = 0\,.$$

I tre ultimi termini di questa eguaglianza, per la determinazione (13) di z_2, si riducono al termine positivo

$$\frac{\left[\displaystyle\int_0^L \tilde{q}\,(u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx\right]^2}{\displaystyle\int_0^L \tilde{\gamma}\,|u'|^2 dx + \int_0^L \mu^*\,|u|^2 dx}$$

I primi tre termini della (13 a), per

$$(8)^* \qquad \tilde{N} < \tilde{N}_{cr} = \min.\ \frac{\displaystyle\int_0^L B\,|u''|^2 dx + \int_0^L k\,|u|^2 dx}{\displaystyle\int_0^L |u'|^2 dx}$$

poiché N_{cr} ha un valore positivo non nullo sono anche una quantità positiva. Pertanto la (13 *a*) dimostra impossibile la determinazione (13) di z_2. Deve essere quindi $z_1 = 0$ e z_2 risulta non nulla.

Infatti posto nelle (5)', (5)'' $z_1 = 0$, moltiplicando la 1ª per $u_1\,dx$, la 2ª per $u_2\,dx$, sommando ed integrando p.p., si trae

$$(13\,b)\quad \int_0^L B\,|\,u''\,|^2 ds + \int_0^L k\,|\,u\,|^2 dx - \tilde{\mathrm{N}} \int_0^L |\,u'\,|^2 dx - z_2^2 \left\{ \int_0^L \tilde{\gamma}\,|\,u'\,|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^L \mu^*\,|\,u\,|^2 dx \right\} + 2\,q z_2 \cdot \int_0^L (u_2\,u_1' - u_1\,u_2')\,dx = 0.$$

Da qui si vede che z_2 è reale, e diverso da zero, per $\tilde{\mathrm{N}} < \mathrm{N}_{cr}$. Per $\tilde{\mathrm{N}} = \mathrm{N}_{cr}$ si ha la radice $z_2 = 0$ cui corrisponde la già considerata instabilità statica.

Per le altre condizioni limiti comprese nella (6) si confronti l'*osservazione 2ª*.

Osservazione 1ª. – Ciò risulta anche dall'esistenza di un integrale primo dell'energia conseguente alla circostanza che la *complementare* non da contributo al lavoro perché risulta senz'altro *wattlos* nell'intervallo $0 \leq x \leq \mathrm{L}$ per $w(0) = w(\mathrm{L}) = 0$ o perché il lavoro si compensa in caso diverso.

Infatti moltiplicando la (5) per $\dot{w}\,dx$ ed integrando con adeguate integrazioni p. p. fra 0 ed L, risulta, ove si ponga

$$2\,\mathcal{S} = \int_0^L \{ \mathrm{B} w''^2 + k w^2 - (\mathrm{N} + \mu \mathrm{V}^2)\, w'^2 \}\, dx\,,$$

$$2\,\mathcal{T} = \int_0^L \{ (\mu + \mu_0)\, \dot{w}^2 + \mu_0\, j^2\, \dot{w}'^2 \}\, dx\,,$$

poiché per la (6 *a*) o (6 *b*),

$$2 \int_0^L \mu \mathrm{V}\, \dot{w}'\, \dot{w}\, dx = \mu \mathrm{V}\, \dot{w}^2 \Big|_0^L$$

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 0$$

con le (6) in cui δw è sostituito con $\dot{w}$, rispettivamente $\delta w'$ con $\dot{w}'$.

Dalla (*) segue l'integrale annunciato

$$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \text{cost.}$$

Se $\mathcal{S} > 0$, ed ha un minimo in $w = 0$, il che avviene certamente se $\tilde{\mathrm{N}} < \tilde{\mathrm{N}}_{cr}$ dato dalla (8)*, essendo $\mathcal{T} > 0$ in ogni caso, segue ragionando alla Dirichlet, che il moto è stabile e quindi secondo i teoremi di Liapunof e Levi-Civita, che gli esponenti caratteristici sono immaginari puri. La circostanza in cui sia $\mathcal{S}=0$ per $\tilde{N} = \tilde{N}_{cr}$ porta all'esponente nullo e quindi all'instabilità.

Osservazione 2ª. – Naturalmente si trovano per le due vie considerate gli stessi risultati per le altre possibili condizioni limiti comprese nella (6), le (6 *c*) ad esempio. Ma va ripetuta l'osservazione già fatta circa la possibilità di mantenere nella [ ] a fattore di δw, per questioni direzionali del flusso μV, il termine $\mu V^2 w'$ e $\mu V \dot{w}$. Abbandonandole, le condizioni limiti non sono più naturali, cioè quelle che derivano dal principio variazionale, con tutte le ovvie conseguenze sul carattere aritmetico degli esponenti caratteristici.

Calcolo delle frequenze. – Atteso il carattere armonico delle soluzioni, il principio dell'Hamilton si presta per l'applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni secondo Ritz, considerando il dominio di integrazione $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$, $2T$ essendo l'apriori incognito periodo fondamentale.

Per una scrittura concisa degli sviluppi algoritmici conviene ridurre il principio e quindi l'euleriana corrispondente a forma adimensionale.

Poniamo con questo intento

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = x : L \quad , \quad \tau = t : T \quad , \quad v = wL \, , \\ \tilde{\nu} = \dfrac{NL^2}{B} \quad , \quad \lambda = \dfrac{L}{VT} \quad , \quad \tilde{\mu} = \dfrac{\mu V^2 L^2}{B} \quad , \quad \beta = \dfrac{\mu_0}{\mu} \quad , \quad \tilde{k} = k\dfrac{L^4}{B} \, , \\ \tilde{\mu}_0 = \beta\tilde{\mu} \quad , \quad \tilde{j} = \tilde{\mu}_0 \left(\dfrac{j}{L}\right)^2 = \mu_0 j^2 \dfrac{V^2}{B} \quad , \quad \dfrac{d}{d\xi} = (\ )' \quad , \quad \dfrac{d}{d\tau} = \dot{(\ )} \, . \end{array}\right.$$

Il principio (4 *a*) diviene, limitando l'integrazione rispetto a t, all'intervallo $0 - T$,

$$(4\,a)' \qquad \delta \int_0^1 d\xi \int_0^1 \{ v''^2 - \tilde{\nu} v'^2 - \beta\tilde{\mu}\lambda^2 \dot{v}^2 - \tilde{\mu}(v' + \lambda\dot{v})^2 - \tilde{j}\lambda^2 \dot{v}'^2 + \tilde{k} v^2 \} \, d\tau = 0$$

e da qui si ha

$$(5) \qquad v^{(IV)} + \tilde{\nu} v'' + \beta\tilde{\mu}\lambda^2 \ddot{v} - \tilde{j}\lambda^2 \ddot{v}'' + \tilde{\mu}(v'' + 2\lambda\dot{v}' + \lambda^2 \ddot{v}) + \tilde{k} v = 0$$

con le condizioni agli estremi

$$(6) \qquad [v''' + (\tilde{\nu} + \tilde{\mu}) v' - \tilde{j}\lambda^2 \ddot{v}' + \tilde{\mu}\lambda \dot{v}] \, \delta v \Big|_0^1 + v'' \, \delta v' \Big|_0^1 = 0 \, .$$

Ciò posto, con riguardo alle condizioni $w = 0$, $w'' = 0$ in $x = 0, L$, cioè $v = 0$, $v'' = 0$ in $\xi = 0, 1$, accertata ormai l'esistenza di soluzioni armoniche libere, in (4 *a*)', scritta concisamente

$$(4\,a)'' \qquad \delta\Phi = 0 \, ,$$

poniamo

$$(15) \qquad v(\xi, \tau) = \sum_1^{\infty}{}_{mn} \, a_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\tau \, .$$

Ricordando che

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi \cos p\pi\xi \, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } m \pm p \text{ pari}, \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{m}{m^2 - p^2} & \text{per } m \pm p \text{ dispari}, \end{cases}$$

si ha la forma quadratica nei coefficienti a_{mn},

(16) $$\Phi(a_{mn}, a_{pq}) = \frac{\pi^2}{4} \sum_{mn} [\ ]_{mn} a_{mn}^2 + 8\,\tilde{\mu}\lambda \sum_{mn\,pq}{}' \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} a_{mn} a_{pq}$$

l'' significando l'esclusione dei termini per cui $m \pm p$ o $n \pm q$ è pari ed essendosi concisamente posto

(17) $$[\ ]_{mn} = m^4\pi^2 - m^2(\tilde{\nu} + \tilde{\mu}) + \tilde{k}/\pi^2 - \tilde{\mu}\, n^2 \left[1 + \beta\left(1 + m^2\pi^2 \cdot \frac{j^2}{L^2}\right)\right]\lambda^2.$$

Si ha così da $(4\,a)''$ il sistema di equazioni

(18) $$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{mn}} = 0$$

ovvero, esplicitando,

(18)' $$[\ ]_{mn}\, a_{mn} + \frac{32}{\pi^2}\,\tilde{\mu}\lambda\, \Sigma'_{pq} \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} a_{pq} = 0.$$

Fatta la posizione

(19) $$\varkappa = \frac{\pi^2}{32\,\tilde{\mu}\lambda},$$

questo sistema porge con riguardo ai primi 12 coefficienti a_{mn} due sistemi indipendenti di equazioni, il primo per $m + n$ dispari, il secondo per $m + n$ pari. Precisamente:

$(m + n)$ dispari,

(18 *a*)

$mn \backslash pq$	a_{12}	a_{21}	a_{23}	a_{32}	a_{14}	a_{41}
a_{12}	$\varkappa[\ ]_{12}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{12}{15}$	0	0	$-\frac{8}{45}$
a_{21}	$-\frac{4}{9}$	$\varkappa[\ ]_{21}$	0	$\frac{12}{15}$	$-\frac{8}{45}$	0
a_{23}	$\frac{12}{15}$	0	$\varkappa[\ ]_{23}$	$-\frac{36}{25}$	$-\frac{24}{21}$	0
a_{32}	0	$\frac{12}{15}$	$-\frac{36}{25}$	$\varkappa[\ ]_{32}$	0	$-\frac{24}{21}$
a_{14}	0	$-\frac{8}{45}$	$-\frac{24}{21}$	0	$\varkappa[\ ]_{14}$	$-\frac{16}{225}$
a_{41}	$-\frac{8}{45}$	0	0	$-\frac{24}{21}$	$-\frac{16}{225}$	$\varkappa[\ ]_{41}$

$(m + n)$ *pari*,

(18 *b*)

$mn \backslash pq$	a_{11}	a_{22}	a_{13}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	a_{24}
a_{11}	$\varkappa\,[\;]_{11}$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$
a_{22}	$\frac{4}{9}$	$\varkappa\,[\;]_{22}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0	0
a_{13}	0	$-\frac{4}{5}$	$\varkappa\,[\;]_{13}$	0	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$
a_{31}	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\varkappa\,[\;]_{31}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{24}{75}$
a_{33}	0	$\frac{36}{25}$	0	0	$\varkappa\,[\;]_{33}$	$-\frac{72}{35}$	$-\frac{72}{35}$
a_{42}	$\frac{8}{45}$	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$	$-\frac{72}{35}$	$\varkappa\,[\;]_{42}$	0
a_{24}	$\frac{8}{45}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{24}{75}$	$-\frac{72}{35}$	0	$\varkappa\,[\;]_{24}$

Dalle (18, *a*, *b*), tenendo presenti le (17) e (19), si hanno i λ_ϱ come radici della equazione (in $\varkappa$) che si ottiene eguagliandone a zero il discriminante sopra scritto per ognuna. Dai λ_ϱ si calcolano i periodi T_ϱ^* e le frequenze σ_ϱ con le relazioni

(20) $$T_\varrho^* = 2\,T_\varrho = \frac{2\,L}{V\cdot\lambda_\varrho} \quad , \quad \sigma_\varrho = \frac{2\,\pi}{T_\varrho^*} = \frac{V\lambda_\varrho}{L}\pi\,.$$

Merita rilevare che, limitandosi ai termini sulla diagonale della matrice (18 *a*) o (18 *b*) si hanno i $\bar{\lambda}_\varrho$ a meno dell'accelerazione complementare

(21) $$\lambda_\varrho^2 = \lambda_{mn}^2 = \frac{\pi^2 m^4 - m^2(\bar{\nu} + \bar{\mu}) + \bar{k}/\pi^2}{\bar{\mu} n^2 \left[1 + \beta\left(1 + m^2\pi^2 \dfrac{j^2}{L^2}\right)\right]}\,.$$

Limitandosi ai due primi termini si rileva un abbassamento di $\bar{\lambda}_{11}^2$ ed un innalzamento di λ_{22}^2.

Posto $\sigma_{mn} = 2\,\pi/T_{mn}$ per la frequenza $(mn)^{\text{ima}}$ (*complementare* a parte) si ha, esplicitando i termini $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, β, $\bar{k}$

(22) $$\sigma_{mn} = \frac{2\,\pi}{T_{mn}} = \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu}}\cdot\sqrt{\frac{1 - \dfrac{N}{N_{cr}^{(m)*}}}{1 + \dfrac{\mu_0}{\mu}\left[1 + m^2\pi^2\left(\dfrac{j}{L}\right)^2\right] n^2}}$$

con

$$N = N_0 + \mu V^2 \quad , \quad N_{cr}^{(m)*} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 B\left(1 + \frac{\bar{k}}{(m\pi)^4}\right).$$

Per j trascurabile ed $n = 1$ si ha infine

$$\sigma_m = \frac{2\pi}{T_m^*} = \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu_0 + \mu}}\sqrt{1 - \frac{N_0 + \mu V^2}{N_{cr}^{(m)*}}} \tag{23}$$

in conformità con la nota espressione per la frequenza di un'asta semplicemente appoggiata agli estremi con sforzo assiale $N_0 + \mu V^2$ di massa $\mu_0 + \mu$ per unità di lunghezza e corrente su suolo elastico. Per $N_0 = 0$, $V = 0$ le condizioni (7) degli *estremi liberi* sono conservative. Si trova allora per le frequenze σ_n, in luogo della (23),

$$\sigma_n \simeq \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu_0 + \mu}} . \tag{24}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. KRALL, *Sul problema centrale della dinamica dei ponti*, Nota I, questi « Rendiconti », vol. XIX, fasc. 6, dicembre 1955.

[2] J. KACPRZYNSKI and S. KALISKI, *Flutter of a deformable rocket in supersonic flow*, « Advances in Aeronautical Sciences », vol. 4, pp. 911–925. Pergamon Press, London–New York 1962.

Nota III.

Moto di una distribuzione di carichi inerti e pesanti su di una piastra elastica.

Sia $p = p(xy, t)$ un flusso di carico, con velocità di componenti U , V riferite ad assi x , y nel piano mediano Π di un piastra elastica. Praticamente una tale condizione di carico può esser del tipo

$$p(xy, t) = p(x - \mathrm{U}t, y - \mathrm{V}t), \tag{1}$$

oppure, con riguardo ad un flusso stazionario, $p = p(xy)$ o più semplicemente $p =$ cost. su tutto o parte del campo. È facile dare l'equazione del moto trasversale della piastra, moto che si penserà caratterizzato, al solito, dalle elongazioni $w = w(xy, t)$ misurate da Π.

Poiché serve, per quanto segue, mettersi in condizioni generali quanto possibile ammettiamo [1] che in Π agisca una distribuzione piana di sforzi n_{xx} , n_{xy} , n_{yy}, corrispondenti ad una configurazione di equilibrio piano, quindi derivabili da una funzione di Airy, biarmonica nel campo S che si considera, secondo le relazioni note

$$n_{xx} = \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2} \quad , \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x \, \partial y} \quad , \quad n_{yy} = \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} \tag{2}$$

conseguenti alle relazioni, non meno note, $n_{xy} = n_{yx}$ e

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 n_{xx}}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 n_{yy}}{\partial y^2} = 0. \tag{2 a}$$

Allora, considerato l'operatore lineare

$$\Omega(\ ) = n_{xx}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\,n_{xy}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + n_{yy}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{3}$$

ed il laplaciano doppio

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

l'equazione in w si scrive, in condizioni statiche,

$$\mathrm{B}\Delta\Delta w = q(xy) - \lambda\Omega(w), \tag{4}$$

con n_{xx} , $n_{yy} > 0$ sforzi di compressione come, all'uso tecnico, in op. cit. in [3]; non in [1], [2] dove $n > 0$, all'uso classico, indica trazione ed è cambiato quindi il segno al termine $\lambda\Omega(w)$. Quanto agli altri simboli, $q = q(xy)$ è la distribuzione statica di carico, B la constante flessorigidezza, λ un moltiplicatore della distribuzione (2). Le condizioni al contorno dello *snodo* o dell'*incastro* non involgono gli sforzi n_{xx}, n_{xy}, n_{yy}, siccome avviene invece se il bordo è libero. Tutte le condizioni possibili risultano da un principio variazionale di cui diremo.

Rileviamo però, sin da ora, che, se è,

$$n_{xx}\, n_{yy} - n_{xy}^2 > 0 \tag{5}$$

in tutto S, cioè se la *conica degli sforzi* relativa ad ogni punto P di S è una ellisse, esiste una infinità di valori, *autovalori*, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$; reali e positivi per $n_{xx} > 0$, con che anche $n_{yy} > 0$ per la (5) è sforzo di compressione, ordinabili in serie crescente, per cui si hanno soluzioni non nulle per $q = 0$. Tali autovalori diconsi *moltiplicatori critici* della distribuzione piana di sforzi. Essi hanno importanza notevolissima; il primo λ_1 in particolare, è il cosiddetto moltiplicatore critico λ_{cr}.

Passando al caso dinamico, sostituendo a q statico una $p\,(xy, t)$ funzione anche del tempo t, detta μ_0 la distribuzione delle masse fisse, cioè solidali con la piastra, la (4) diviene, sostituendo alle forze le *forze perdute*,

$$B\Delta\Delta\, w + \lambda\mathfrak{L}(w) = p\,(xy\,,\,t) - \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4 a}$$

Se p è del tipo precisato e deriva, come avviene in generale, da masse pesanti (mobili), allora occorre considerarne la distribuzione di masse $\mu = p : g$, mobili con velocità, ammettiamo, di componenti *costanti* U, V. In tal guisa a p va sostituita la distribuzione di *forze perdute*, d/dt designando [2] derivata totale e non parziale $\partial/\partial t$ rispetto a t,

$$p - \mu \frac{d^2 w}{dt^2}.$$

L'equazione in w si scrive allora, se $q = q\,(xy)$ indica una distribuzione di carico normale a Π in S, e B è la flessorigidezza, λ un moltiplicatore della distribuzione (2), $\mu_0 = q : g$, per w contato dalla configurazione corrispondente a $q = q\,(xy)$,

$$B\Delta\Delta w + \lambda\mathfrak{L}(w) + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p\,(xy) \cdot \tag{4 b}$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{g} \left[U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2UV \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial t} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\}.$$

Questa equazione si semplifica sensibilmente se p è costante in tutto S pur mantenendo la mobilità uniforme (caso di flusso indefinito di masse, $\mu =$ cost. per unità di superficie, con velocità di componenti costanti U, V). Infatti, se si introduce la distribuzione piana di sforzi *costanti*

$$\tilde{n}_{xx} = \mu U^2 \quad , \quad \tilde{n}_{xy} = \mu U \cdot V \quad , \quad \tilde{n}_{yy} = \mu V^2$$

per la quale sussistono ovviamente le (2), (2 *a*), essendo però

$$\tilde{n}_{xx}\,\tilde{n}_{yy} - \tilde{n}_{xy}^2 = 0, \tag{5 a}$$

la sovrapposizione con le n_{xx}, n_{xy}, n_{yy} preesistenti dà luogo ad una n^*

$$n_{xx}^* = n_{xx} + \tilde{n}_{xx} \quad , \quad n_{xy}^* = n_{xy} + \tilde{n}_{xy} \quad , \quad n_{yy}^* = n_{yy} + \tilde{n}_{yy} \tag{6}$$

per cui, se è $n_{xx}\,n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$, e $n_{xx} > 0$, è *anche*

$$n_{xx}^*\,n_{yy}^* - n_{xy}^{*2} > 0. \tag{5 b}$$

Introducendo allora l'operatore

$$\mathfrak{L}^*(\;) = n_{xx}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\,n_{xy}^* \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + n_{yy}^* \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3 a}$$

la (4 *b*) diviene, ove il moltiplicatore λ si applichi ad U^2, UV, V^2,

$$B\Delta\Delta w + \lambda\mathfrak{L}^*(w) + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{g}\left(2\,\tilde{U}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + 2\,\tilde{V}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right\} \tag{4 b}$$

con

$$\tilde{U} = \sqrt{\lambda}\,U \quad , \quad \tilde{V} = \sqrt{\lambda}\,V.$$

Deduzione della (4 *b*) da un principio dell'Hamilton.

Merita rilevare, anche in riguardo alla sua integrazione, che la (4 *b*) si deduce da un principio variazionale secondo Hamilton.

Precisamente, per semplice generalizzazione di quanto detto nella Nota II,

l'*energia elastica* P è data, secondo una celebre formula di Kirchhoff, da

$$P = \frac{1}{2}\iint_S B\left[\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1\,\rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2\right] dx\,dy \tag{7}$$

essendo $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ le *curvature principali*, B la flessorigidezza, ν il coefficiente di contrazione di Poisson, in ogni caso < 1. La forma quadratica in $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ tra [ ] è quindi in ogni caso *definita positiva*.

L'*energia cinetica* T, somma della T_1 della piastra, T_2 delle masse mobili che partecipano al moto oscillatorio, è

$$T = T_1 + T_2 \tag{8}$$

con

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \mu_0 \dot{w}^2 d\mathrm{S} \quad , \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \mu(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{U} w_x + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{V} w_y + \dot{w})^2 d\mathrm{S}.$$

Il *lavoro di 2° ordine* della distribuzione n_{xx}, n_{xy}, n_{yy}, dianzi definita come sovrapposizione eventuale alla cinetica $\tilde{n}_{xx}, \tilde{n}_{xy}, \tilde{n}_{yy}$, già considerata in T_2, è

$$\mathfrak{L}_2^* = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathrm{S}} (n_{xx} w_x^2 + 2\, n_{xy} w_x w_y + n_{yy} w_y^2)\, d\mathrm{S}\,; \tag{9}$$

infine, il *lavoro dei carichi* p è

$$\mathfrak{L}_p = -\int_{\mathrm{S}} p w\, d\mathrm{S}. \tag{10}$$

Dal principio dell'Hamilton,

$$\delta \int_0^t \mathfrak{L}\, dt = 0\,, \qquad \text{con} \quad \mathfrak{L} = \mathrm{T} - \mathrm{P} + \mathfrak{L}_2^* - \mathfrak{L}_p,$$

seguono la (4 *b*) e, con qualche attenzione, le condizioni al contorno s di S, con $\mathrm{B} = 1$ per semplicità,

$$\begin{aligned}(4\,a)'\quad & \Big\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] + \\ & + \lambda\left[n_{xx}^* \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + n_{xy}^*\left(\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\right) + n_{yy}^* \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right] + \\ & + \mu(\tilde{\mathrm{U}}\dot{w}\cos\theta + \tilde{\mathrm{V}}\dot{w}\sin\theta)\sqrt{\lambda}\Big\}\,\delta w + \left[\nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right]\frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0.\end{aligned}$$

Da qui, per la piastra

a) *semplicemente appoggiata* al contorno s,

$$w = 0 \quad , \quad \nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0; \tag{4 a)''}$$

b) *incastrata* al contorno

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{4 a)'''}$$

Per il bordo libero le condizioni sono più complicate in quanto si debbono annullare proprio le { } a fattore di δw e di $\partial \delta w / \partial n$. Ma di questo caso tipico della piastra volante per ora non si tratta.

Ciò posto, riprendiamo la (4 *b*) limitatamente al caso stazionario, cioè al caso in cui t non interviene esplicito.

Si ha l'equazione, di cui l'espressione omogenea

$$\text{(4 } c\text{)} \qquad B\Delta\Delta w + \lambda \mathcal{L}^*(w) = 0$$

si identifica con l'equazione della piastra soggetta ad una distribuzione generale di sforzi piani.

Per calcolare il moltiplicatore critico λ_{cr} estendiamo un procedimento già indicato da Timoshenko [3] per il caso $n_{xy} \neq 0$ in cui sono però nulli n_{xx}, n_{yy}.

Con riferimento al principio variazionale di cui la (4 c) è l'euleriana, limitando anche l'espressione del potenziale elastico al solo termine $B\,(\Delta w)^2$ come è legittimo se le condizioni agli estremi sono quelle dell'incastro o quelle cui ci si riferisce, $w = 0$ e con sufficiente approssimazione $w'' = 0$ sui lati a e b di un contorno rettangolo;

$$\text{(10)} \qquad \Phi = \int_S B\,(\Delta w)^2\, dS - \lambda \int_S \left\{ n_{xx}^* \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\, n_{xy}^* \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + n_{yy}^* \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS$$

poniamo

$$w = \sum_{mn} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a}\, x \sin \frac{n\pi}{b}\, y$$

a_{mn} essendo coefficienti a priori incogniti.

Otteniamo

$$\text{(10}a\text{)} \quad \Phi = B\,\frac{\pi^4\, ab}{4} \sum_{mn} \left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 a_{mn}^2 - \frac{\pi^2\, ab}{4}\,\lambda \sum_{mn} \left\{ n_{xx}^* \left(\frac{m}{a}\right)^2 + n_{yy}^* \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\} \cdot a_{mn}^2 +$$

$$+ 8\,\lambda n_{xy}^* \sum_{mnpq}{}^{*} \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)\,(n^2 - q^2)}\, a_{mn}\, a_{pq}\,,$$

l' $*$ stando ad indicare che il sommatorio opera sui soli termini per cui $m \pm p$, $n \pm q$ sono numeri dispari.

Con le posizioni

$$\text{(11)} \qquad \frac{a}{b} = \beta \quad , \quad \nu = \frac{n_{yy}^*}{n_{xx}^*} \quad , \quad \varkappa = \frac{\pi^2}{32\,\beta}\,\frac{\pi^3\, B}{b^2\, \lambda n_{xy}^*} \quad , \quad \tau = \frac{\pi^2}{32\,\beta}\,\frac{n_{xx}^*}{n_{xy}^*}\,;$$

e, per $n_{xx} = n_{xy} = n_{yy} = 0$,

$$\text{(11 } a\text{)} \qquad \nu = \frac{V^2}{U^2} \quad , \quad \varkappa = \frac{\pi^2}{32\,\beta}\,\frac{\pi^2}{b^2}\,\frac{B}{\mu\lambda UV}\,,$$

le condizioni di estremo sono

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_{mn}} = 0\,.$$

Con riferimento ai primi sette coefficienti a_{mn}: a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, a_{42}, a_{24}; per i quali $m+n$ risulta *pari*, si ha il sistema, di cui compendiosamente indichiamo il solo discriminante $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\varkappa)$ che va posto $= 0$,

(12 *a*)

	a_{11}	a_{22}	a_{13}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	a_{24}
a_{11}	$\frac{\varkappa(1+\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(1+\nu\beta^2)$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$
a_{22}	$\frac{4}{9}$	$\frac{16\varkappa(1+\beta^2)^2}{\beta^2} - 4\tau(1+\nu\beta^2)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0	0
a_{13}	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{\varkappa(1+9\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(1+9\nu\beta^2)$	0	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$
a_{31}	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{\varkappa(9+\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(9+\nu\beta^2)$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{8}{25}$
a_{33}	0	$\frac{36}{25}$	0	0	$\frac{\varkappa(9+9\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(9+9\nu\beta^2)$	$-\frac{72}{35}$	$-\frac{72}{35}$
a_{42}	$\frac{8}{45}$	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$	$-\frac{72}{35}$	$\frac{\varkappa(16+4\beta^2)^2}{\beta^2} - \varkappa(16+4\nu\beta^2)$	0
a_{24}	$\frac{8}{45}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{8}{25}$	$-\frac{72}{35}$	0	$\varkappa(4+16\beta^2)^2 - 4\tau(1+4\nu\beta^2)$

Questa equazione in $\varkappa$ è perciò in λ, fornisce con la radice più piccola λ_{cr} il moltiplicatore λ_{cr} di n^* per cui si ha instabilità; $\sqrt{\lambda_{cr}}\,V$, $\sqrt{\lambda_{cr}}\,U$ sono le velocità critiche. Naturalmente il moltiplicatore λ può applicarsi anche alle sole U^2, V^2; alle sole n_{xx}, n_{xy}, n_{yy} a seconda del problema che si studia.

Ancora, a titolo di controllo, per $U = V = 0$ e $n_{xx} = n_{yy} = 0$, $n_{xy} \neq 0$ si ricade in una notissima espressione di $\mathfrak{D}$ dovuta a Timoshenko. Per la scrittura del sistema per $(m+n)$ *dispari* si può valersi della (18 *a*) della Nota II.

Una limitazione inferiore del λ_{cr}.

Indipendentemente dalla (12 *a*) che, se vale la (5) con $n^*_{xx} > 0$, dà, in ogni caso, limitazioni superiori per il λ_{cr}, merita calcolarne un limite inferiore di cui è ovvio l'interesse pratico. Supponiamo dunque che si sappiano, come si sa infatti, calcolare i λ_{cr} per i casi in cui, ordinatamente, è diversa da zero una ed una sola, delle componenti n^*_{xx}, n^*_{xy}, n^*_{yy}. Indichiamo, omettendo il deponente *cr*, con λ_x, λ_{xy}, λ_y questi valori. Sarà dunque

$$(13)\quad \lambda_x = \min. \frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS}\ ,\quad \lambda_{xy} = \min. \frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} dS}\ ,\quad \lambda_y = \min. \frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS}\ .$$

Orbene, avendosi, equivalente alla (4 *c*), per $n^*_{xx}\, n^*_{yy} - n^{*2}_{xy} > 0$, $n^*_{xx} > 0$ (e quindi $n^*_{yy} > 0$), e con riguardo alle (2), (2 *a*), (4 *a*)',

$$(14)\qquad \lambda_{cr} = \min. \frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S \left\{ n^*_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\, n^*_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + n^*_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS}\ ,$$

si avrà la limitazione inferiore alla Southwell,

$$(15)\qquad \lambda_{cr} \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_x} + \left|\frac{1}{\lambda_{xy}}\right| + \frac{1}{\lambda_y}}\ .$$

Quanto a λ_x, λ_{xy}, λ_y, per cose note, si possono porre nella forma

$$\lambda_x = k_{xx}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{xx}\, b^2}\ ,\quad \lambda_{xy} = k_{xy}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{xy}\, b^2}\ ,\quad \lambda_{yy} = k_{yy}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{yy}\, a^2}$$

con k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} coefficienti numerici dipendenti dal rapporto $\beta = a/b$ tra i lati a, b dell'area rettangolare S e dalle condizioni di vincolo su detti lati.

Per il semplice appoggio sui 4 lati, cfr. op. cit. in [3], ricordando per completezza che, con simboli ovvi,

$$\beta = \frac{a}{b}\ ,\quad B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\ ,$$

$$k_{xx} = \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)^2 \quad \text{per}\ \beta \leq 1\ ;\quad k_{xx} = 4 \quad \text{per}\ \beta \geq 1,$$

$$k_{xy} = \left(4 + \frac{5{,}34}{\beta^2}\right) \quad \text{per}\ \beta \leq 1\ ;\quad k_{xy} = 5{,}34 + \frac{4}{\beta^2} \quad \text{per}\ \beta \geq 1,$$

$$k_{yy} = 4 \quad \text{per}\ \beta \leq 1\ ;\quad k_{xy} = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad \text{per}\ \beta \geq 1,$$

attese le (13), si ha da (15),

$$\lambda_{cr} \geq \frac{\pi^2 B}{n_{xx}^* b^2} \frac{1}{\dfrac{1}{k_{xx}} + \dfrac{|n_{xy}^*|}{n_{yy}^*} \dfrac{1}{k_{xy}} + \dfrac{n_{yy}^*}{n_{xx}^*} \dfrac{\beta^2}{k_{yy}}} . \tag{15 a}$$

Per $n_{xx} = n_{xy} = n_{yy} = 0$, $U \neq 0$, $V = 0$,

$$\lambda_{cr} \geq \frac{\pi^2 B}{\mu U^2 b^2} \cdot \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\beta} + \beta\right)^2 & \text{per} \quad \beta \leq 1, \\ 4 & \text{per} \quad \beta \geq 1. \end{cases} \tag{15 b}$$

Nella Memoria pp. 319–360 sui *Principi variazionali della Stabilità dell'equilibrio elastico* daremo, per il problema di cui si tratta un grafico sintetico con cui si può considerare ogni plausibile condizione di vincolo sui quattro lati del rettangolo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. KRALL, *Sulle configurazioni d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile*, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo IV, pp. 257–278 (1927).

[2] G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. II, cap. XIV, par. 3, Zanichelli, Bologna 1940.

[3] S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, 9.7, pp. 379–381. McGraw-Hill, London-New York 1961.