Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico (*).

I carichi considerati in Elastostatica possono, come è noto, essere divisi, quando si scelga un adeguato criterio discriminativo, in due specie ben distinte. Così, più precisamente, ad una di queste si fanno appartenere quei tipi che, pur deformando il sistema, non ne mutano sensibilmente le proprietà caratteristiche di comportamento, in conformità a due classici teoremi riguardanti l'uno, la sovrapposizione degli effetti o degli stati di equilibrio, l'altro, la scomposizione del problema generale del moto oscillatorio libero, in un problema d'equilibrio ed uno di moto sotto l'azione di sole forze elastiche interne.

Nell'altra specie invece, al contrario, si includono quei tipi di sollecitazioni che, anche non portando a superare i limiti di elasticità, determinano variazioni notevoli delle proprietà dei sistemi. Rientrano in essa notoriamente i così detti carichi di punta per i sistemi unidimensionali, gli sforzi tangenziali o di superficie pei sistemi a due dimensioni.

Per fissare in particolare l'attenzione su queste variazioni delle caratteristiche più essenziali di comportamento, consideriamo un sistema, elementare e schematico, ridotto ad un punto materiale P, mobile lungo un asse x, soggetto ad una forza di richiamo $-\omega^2 x^2$ verso l'origine O delle coordinate ($\omega = \text{cost.}$). Essendo $U = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2$ il potenziale di una tale forza, si potrà anche dire, che si tratta di un sistema ad un parametro, di energia interna, $-U = +\frac{1}{2}\omega^2 x^2$. Ciò posto, se P (che per semplicità di scrittura assumeremo di massa unitaria) è ulteriormente sollecitato da una forza X, il movimento sarà caratterizzato dall'equazione,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = X. \tag{1}$$

Le due specie di carichi, e quindi di sollecitazioni sopra accennate rimangono in questo caso contraddistinte dalle due ipotesi: 1) $X = a$ ($a = \text{cost.}$); 2) X variabile con x perciò, in un intorno convenientemente prossimo dell'origine, con sufficiente approssimazione $= a + bx$ (b = costante non nulla).

Nel primo caso, quando si rimanga nei limiti della legge di Hooke (e conseguentemente di validità della nostra rappresentazione) si ha un semplice

(*) Dai «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. VI, vol. III, 1° sem., fasc. 12, giugno 1926.

spostamento della posizione di equilibrio da O in O_1 di ascissa $x_1 = \frac{a}{\omega^2}$; e le oscillazioni seguitano ad avvenire con la stessa legge armonica attorno ad O_1 e con la stessa frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$; come pure immutato rimane il comportamento statico di fronte a sollecitazioni della stessa specie. Nel secondo caso invece, posto $x_1 = x - \frac{a}{\omega^2 - b}$, si ha per x_1,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (\omega^2 - b)\, x_1 = 0, \tag{1 a}$$

e la struttura elastica rimane manifestamente modificata, intervenendo $(\omega^2 - b)$ al posto di ω^2. Se b è positivo (e, $< \omega^2$), il che corrisponde ad una forza variabile di natura repulsiva, ne rimane diminuita l'elasticità del sistema; il valore $b = \omega^2$ sarebbe addirittura critico, in quanto questa vien completamente meno.

Citerò ancora, a titolo di più espressiva conferma teorica e sperimentale, le condizioni critiche di sollecitazione d'una colonna sottoposta a determinati carichi assiali, la variazione delle frequenze di un'asta sollecitata a sforzi di trazione o compressione; i risultati infine, delle ricerche di Bryan, Pearson, Greenhill, Thymoschenko, Prandtl ed altri e le seguenti più generali considerazioni.

Sia S, una piastra sottile di spessore h, finita ed isotropa, di modulo di elasticità E, coefficiente di contrazione ν. Orientati nella superficie mediana due assi cartesiani x, y; sia l'asse z ad essi normale. Allora, se con $p(x, y)$ si indica una distribuzione di pressioni (dunque agente secondo z), gli spostamenti $w(x, y)$ del punto P di detta superficie (contati ad essa normalmente), sono retti dall'equazione,

$$B\Delta\Delta\, w(x, y) = p(x, y). \tag{2}$$

In essa, B è dato dal rapporto, $\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ che sta manifestamente a indicare la flessorigidezza del sistema, mentre, come al solito, il simbolo $\Delta\Delta$ rappresenta l'operatore $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Allora, se con $G(x, y; \zeta, \eta) = G(P, P')$ specifichiamo una funzione atta a caratterizzare gli spostamenti d'ogni punto P della superficie mediana di S (che chiameremo con σ) generati da un carico normale unitario nel punto P′ di coordinate ζ e η, vale a dire, che sia soluzione dell'equazione

$$\Delta\Delta\, G = 0,$$

e, oltre a soddisfare alle condizioni al contorno, abbia, per $P = P'$ quella particolare singolarità che spetta proprio alla forza unitaria, avremo, come è intuitivamente manifesto,

$$w(P) = \int_\sigma G(P, P')\, p(P')\, d\sigma'. \tag{2}$$

Supponiamo ora, dopo questi preliminari, che la piastra sia sollecitata, oltreché da carichi normali $p(x, y)$, da azioni tangenziali assegnate. Dette in conformità, $n_{xx}(P')$, $n_{xy}(P')$ e $n_{yy}(P')$, le tre componenti dello sforzo in P', caratteristiche di tale sollecitazione tangenziale, avremo per gli spostamenti w, l'equazione, ove si considerino anche le reazioni di inerzia $-\mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ al moto oscillatorio trasversale, μ_0 essendo la massa per unità di superficie,

$$R\Delta\Delta w = p(x, y) + n_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3}$$

con le stesse condizioni al contorno assegnate dai vincoli alla (1). Poiché le n_{xx}, n_{xy}, n_{yy} derivano da una *funzione di Airy* e sono coefficienti di una forma quadratica (conica degli sforzi) che si premette *definita negativa* se $n_{xx} > 0$, $n_{yy} > 0$ *indica trazione*; *definita positiva, se*, all'uso tecnico, $n_{xx} > 0$, $n_{yy} > 0$ *indica compressione* con che, in ogni caso, $n_{xx} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$ e $n_{xx} < 0$ nel 1°, $n_{xx} > 0$ nel 2° (caso). Ammettendo per brevità $p(xy) = 0$, se τ è un parametro moltiplicatore della distribuzione di sforzi piani, posto

$$\Delta(P, P') = \frac{\partial^2 G(P, P') \cdot n_{xx}(P')}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 G(P, P') \cdot n_{xy}(P')}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 G(P, P') \cdot n_{yy}(P')}{\partial \eta^2} \tag{4}$$

si ha

$$w(P, t) = -\int_\sigma \rho(P') G(P, P') \frac{\partial^2 w(P', t)}{\partial t^2} d\sigma' + \tau \int_\sigma \Delta(P, P') w(P', t) d\sigma'. \tag{5}$$

Sostituendo all'uso classico, $w(P, t) = u(P) \operatorname{sen} \sigma t$, $u(P)$ essendo una funzione dei soli punti P e σ un parametro incognito, risulta,

$$u(P) = \sigma^2 \int_\sigma \rho(P') G(P, P') u(P') d\sigma' + \tau \int_\sigma \Delta(P, P') u(P') d\sigma'. \tag{6}$$

Per riportare questa equazione integrale al tipo di Fredholm, indicando con $v(P)$ una funzione ausiliaria incognita, basta porre, come materialmente si constata,

$$a) \qquad v(P) = u(P) - \tau \int_\sigma \Delta(P, P') u(P') d\sigma',$$

$$b) \qquad \sigma^2 \int \rho(P') G(P, P') u(P') d\sigma' = v(P).$$

Da questo sistema manifestamente equivalente alla (6), risolvendo la *a*), ove si convenga d'indicarne con $\overset{*}{\Delta}(P, P')$ *la risolvente*, risulta,

$$u(P) = v(P) + \int_\sigma \overset{*}{\Delta}(P, P') v(P') d\sigma' \quad , \quad v(P) = \sigma^2 \int_\sigma L(P, P'') v(P'') d\sigma,$$

con il nucleo $L(PP'')$ dato dalla relazione,

$$L(P, P'') = \rho(P'') G(P, P'') + \int_\sigma \rho(P') G(P, P') \overset{*}{\Delta}(P', P'') d\sigma'.$$