

## 8. Elementi finiti monodimensionali di base

### 8.1. Introduzione

Si consideri un corpo  $B$ , di volume  $V$  e di frontiera  $F$ , soggetto alle forze superficiali  $\mathbf{T}$ , alle forze di massa  $\mathbf{X}$ , ed alle  $q$  forze concentrate  $F_i, i = 1, 2, \dots, q$ . Il principio degli spostamenti virtuali si scrive:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \mathbf{e} dV = \int_V \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{F_i} \mathbf{T}^T \delta \mathbf{u} ds + \sum_{i=1}^q F_i \delta s_i \quad (8.1)$$

dove il simbolo  $\delta$  indica le quantità virtuali,  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore di dimensione 9 delle componenti di tensione:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{32}\} \quad (8.2)$$

e è il corrispondente vettore di dimensione 9 delle componenti di deformazione,  $\mathbf{u}$  è vettore di ordine 3 delle componenti di spostamento:

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, u_3\} \quad (8.3)$$

$\mathbf{X}$  e  $\mathbf{T}$  sono i vettori, di ordine 3, delle forze di superficie e di massa, rispettivamente, ed infine i  $\delta s_i$  sono gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze concentrate.

Si approssimi ora il corpo in un assemblaggio di  $M$  elementi finiti discreti, con gli elementi connessi tra loro in  $N$  punti nodali situati sulle frontiere degli elementi, e si assuma, per semplicità, che le forze concentrate agiscano in corrispondenza dei nodi, ossia che preventivamente sia stata operata la riduzione a carichi nodali equivalenti.

Gli spostamenti, e di conseguenza le deformazioni e le tensioni, misurate in un riferimento locale  $(x_1, x_2, x_3)$  intrinseco al generico elemento, sono per ipotesi funzione degli spostamenti dei punti nodali che connettono gli elementi

Si ha perciò, per il generico elemento  $k$ -mo:

$$\mathbf{u}_k(x_i) = \mathbf{N}_k(x_i) \mathbf{d} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{e}_k(x_i) = \mathbf{B}_k(x_i)\mathbf{d} \quad (8.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k(x_i) = \mathbf{S}_k(x_i)\mathbf{d} \quad (8.6)$$

dove  $\mathbf{d}$  è il vettore di ordine  $3N$ , se  $N$  è il numero dei nodi della struttura, contenente gli spostamenti nodali:

$$\mathbf{d}^T = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N\} \quad (8.7)$$

Se è valida la legge di Hooke, allora le tensioni possono anche esprimersi utilizzando la matrice di elasticità  $\mathbf{E}$  del generico elemento:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{E}_k \mathbf{e}_k + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k \quad (8.8)$$

dove  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  è un vettore di autotensioni. Si noti che la matrice di elasticità non è legata in alcun modo all'ipotesi di isotropia, e che può variare al variare dell'elemento. Ne segue che la schematizzazione agli elementi finiti rende immediato lo studio dei materiali monoclini od ortotropi, anche non omogenei.

Il principio degli spostamenti virtuali può risciversi come somma dei contributi dei singoli  $M$  elementi:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}_e^T \delta \mathbf{e}_e dV_e &= \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \mathbf{X}_e^T \delta \mathbf{u}_e dV_e \\ &+ \sum_{e=1}^M \int_{F_{te}^e} \mathbf{T}_e^T \delta \mathbf{u}_e ds + \sum_{i=1}^q F_i \delta s_i \end{aligned} \quad (8.9)$$

dove il simbolo  $e$  sta a significare *elementare*.

Usando le formule (8.4), (8.5), (8.8) si giunge a:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^T \left[ \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e dV_e \right] \delta \mathbf{d} &= \left[ \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \mathbf{X}_e^T \mathbf{N}_e dV_e \right] \delta \mathbf{d} + \\ &\left[ \sum_{e=1}^M \int_{F_{te}^e} \mathbf{T}_e^T \mathbf{N}_e ds_e \right] \delta \mathbf{d} - \left[ \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_e^T \mathbf{B}_e dV_e \right] \delta \mathbf{d} - \mathbf{F}^T \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Per ottenere le equazioni di equilibrio, si usa imporre uno spostamento virtuale unitario al grado di libertà  $j$ , annullando tutti gli altri spostamenti virtuali. In questo caso è perciò:

$$\delta \mathbf{d}^T = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\} \quad (8.11)$$

Ripetendo per  $j$  che varia da 1 a  $3N$  si ottengono le equazioni di equilibrio nella forma matriciale:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{b} \quad (8.12)$$

con matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  fornita da:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e dV_e \quad (8.13)$$

Il vettore  $\mathbf{b}$  dei carichi nodali è in genere somma algebrica dei seguenti contributi:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_v + \mathbf{b}_s - \mathbf{b}_d + \mathbf{b}_c \quad (8.14)$$

dove:

$$\mathbf{b}_v = \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \mathbf{X}_e^T \mathbf{N}_e dV_e \quad (8.15)$$

è il contributo delle forze di massa,

$$\mathbf{b}_s = \sum_{e=1}^M \int_{F_{te}} \mathbf{T}_e^T \mathbf{N}_e ds_e \quad (8.16)$$

è il contributo delle forze superficiali,

$$\mathbf{b}_d = \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_e^T \mathbf{B}_e dV_e \quad (8.17)$$

è il contributo delle autotensioni, ed infine:

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{F} \quad (8.18)$$

è il contributo delle forze nodali concentrate.

## 8.2. L'elemento asta di base: l'approccio alla Ritz

In questo caso le notazioni del paragrafo precedente si semplificano secondo il seguente schema:

$$\mathbf{e} \Rightarrow e_x \quad (8.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \sigma_x \quad (8.20)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow u(x) \quad (8.21)$$

$$\mathbf{E} \Rightarrow E \quad (8.22)$$

ed in regime elastico lineare, cui ci si limiterà in seguito,  $\mathbf{E}$  può essere considerata costante, e coincidente con la costante di Young. Inoltre, essendo nell'ambito di validità dell'elasticità lineare, si può anche usare il principio di minimo dell'energia potenziale totale.

Volendo infine studiare il singolo elemento finito, si trascura il pedice  $e$  in quel che segue.

### 1. Scelta dell'elemento da studiare

L'elemento asta di base avrà sezione costante, di area  $A$ , materiale omogeneo, identificato dalla costante di Young  $E$ , e lo spostamento  $u(x)$  di un suo punto generico all'ascissa  $x$  potrà essere definito in funzione degli spostamenti nodali  $d_1$  e  $d_2$  degli estremi:

$$u(x) = N_1(x)d_1 + N_2(x)d_2 \quad (8.23)$$

### 2. Deduzione delle funzioni di forma

Esistono più metodi per dedurre le funzioni di forma  $N_i$ , ed uno di questi è già stato presentato nel capitolo 4. D'altro canto non sempre è possibile, o conveniente, risolvere l'equazione differenziale della linea elastica, ed è quindi opportuno adoperare metodi approssimati.

Il primo approccio parte dalla constatazione che il campo di spostamenti (8.23) dipende da due parametri incogniti,  $d_1$  e  $d_2$ , e che quindi il più semplice campo di spostamenti polinomiale che può assumersi per  $u(x)$  è lineare:

$$u(x) = A_0 + A_1x \quad (8.24)$$

o, in forma matriciale:

$$u = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} \quad (8.25)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}$  è un vettore riga di monomi, mentre  $\mathbf{A}$  è un vettore colonna contenente le *coordinate lagrangiane*, o *coordinate generalizzate*. Tali coordinate si devono esprimere in termini di spostamenti nodali  $d_1$  e  $d_2$  imponendo il rispetto delle condizioni ai limiti:

$$u(0) = d_1 \quad (8.26)$$

$$u(L) = d_2 \quad (8.27)$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} \quad (8.28)$$

o, matricialmente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (8.29)$$

Invertendo la matrice  $\mathbf{C}$  si giunge ad esprimere  $\mathbf{A}$  in funzione di  $\mathbf{d}$ :

$$\begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (8.30)$$

ossia, matricialmente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} \quad (8.31)$$

Inserendo la (8.31) nella (8.25) si giunge alla relazione che lega lo spostamento di ciascun punto dell'asta agli spostamenti nodali:

$$u = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (8.32)$$

dove  $\mathbf{N}$  è il vettore riga delle funzioni di forma, pari a (Figura 8.1):

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}^{-1} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right] \quad (8.33)$$

Un secondo metodo, più diretto, consiste nell'imporre alle funzioni di forma alcune condizioni: prima di tutto dovranno essere lineari, perchè definite dai due valori assunti nei due nodi. Poi la prima funzione  $N_1$  dovrà essere pari ad 1 nel nodo 1, e 0 nel nodo 2, mentre la seconda funzione di forma  $N_2$  dovrà essere nulla nel nodo 1, ed assumere valore 1 nel nodo 2. Ciò basta a determinare le funzioni (8.33).

Infine, un terzo metodo fa uso delle tecniche di interpolazione lagrangiana, e sarà presentata nel prossimo capitolo.

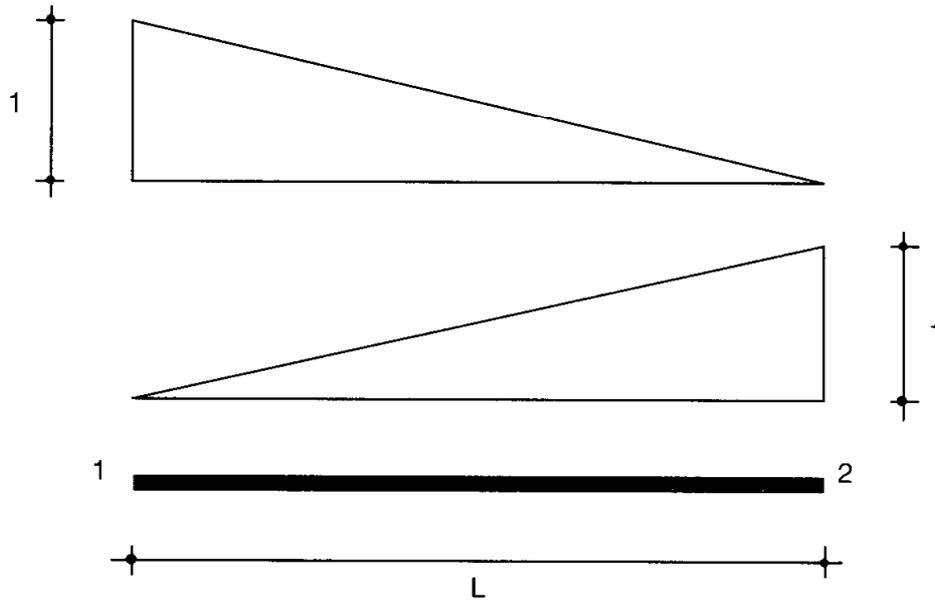


Figura 8.1- Funzioni di forma per l'elemento asta di base

### 3. Deduzione delle deformazioni

La (8.5) si specializza nella:

$$e_x = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (8.34)$$

e per esplicitare la matrice  $\mathbf{B}$  occorre usare le relazioni (2.23), che legano le deformazioni alle derivate degli spostamenti. Sarà:

$$e_x = \frac{du}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (8.35)$$

e quindi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

### 4. Scrittura dell'energia elastica

L'energia elastica estensionale è pari a:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^T e_x dV = \frac{1}{2} \int_V e_x^T E e_x dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV \right) \mathbf{d} \quad (8.37)$$

e dall'espressione generale dell'energia elastica:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (8.38)$$

si ottiene l'espressione della matrice di rigidezza:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \int_V \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV = \int_0^L \mathbf{B}^T (EA) \mathbf{B} dx \\ &= EA \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.39)$$

### 8.3. L'elemento asta di base: l'approccio alla Galerkin

Calcolate le funzioni di forma  $N_1$  ed  $N_2$ , così come illustrato nel punto 2) del paragrafo precedente, può utilizzarsi anche il metodo di Galerkin, al fine di ottenere la matrice di rigidezza richiesta. A tal fine si usa la funzione approssimante (cfr. (7.161)):

$$\psi(x) = N_1 d_1 + N_2 d_2 = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (8.40)$$

e l'equazione differenziale della linea elastica da trattare è la ben nota:

$$EAu'' = 0 \quad (8.41)$$

Le equazioni di Galerkin (7.167) si scrivono allora come:

$$EA \int_0^L \frac{d^2 \psi}{dx^2} N_i dx = 0 \quad i=1,2 \quad (8.42)$$

Integrando per parti si ottiene l'uguaglianza:

$$EA \int_0^L \frac{d\psi}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = \left[ EAN_i \frac{d\psi}{dx} \right]_0^L \quad (8.43)$$

Ma:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{d} \quad (8.44)$$

e quindi la (8.43) diviene:

$$\left( EA \int_0^L \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) \mathbf{d} = \left[ EAN_i \frac{d\psi}{dx} \right]_0^L \quad (8.45)$$

In forma matriciale la relazione precedente può scriversi nella nota forma:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (8.46)$$

avendo definito la matrice di rigidezza:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= EA \int_0^L \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right]^T \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] dx \\ &= EA \int_0^L \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_1' N_2' & N_2' N_2' \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (8.47)$$

Usando le funzioni di forma (8.33) si giunge alla matrice di rigidezza (8.39).

Si noti infine che l'identica espressione (8.47) può ottenersi tramite il primo teorema di Castigliano. Se infatti:

$$L = \frac{1}{2} EA \int_0^L \psi'^2 dx = \frac{1}{2} EA \int_0^L [N_1' d_1 + N_2' d_2]^2 dx \quad (8.48)$$

è l'energia elastica, le forze  $\mathbf{f}$  agli estremi si ottengono, applicando il citato teorema di Castigliano, come:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial L}{\partial d_1} = \frac{2EA}{2} \int_0^L [N_1' d_1 + N_2' d_2] N_1' dx \\ &= EA \left[ \left( \int_0^L N_1' N_1' dx \right) d_1 + \left( \int_0^L N_1' N_2' dx \right) d_2 \right] \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{\partial L}{\partial d_2} = \frac{2EA}{2} \int_0^L [N_1' d_1 + N_2' d_2] N_2' dx = \\ &EA \left[ \left( \int_0^L N_1' N_2' dx \right) d_1 + \left( \int_0^L N_2' N_2' dx \right) d_2 \right] \end{aligned} \quad (8.50)$$

In forma matriciale si riottiene quindi l'espressione (8.47) della matrice di rigidezza.

**Nota 8.1:** L'approccio alla Galerkin è più generale dell'approccio alla Ritz. Ed infatti operando alla Galerkin si parte dall'equazione differenziale, che può anche non essere deducibile da un principio variazionale (come ad esempio nei casi di forze non conservative), laddove il metodo di Ritz si basa su principi variazionali di estremo.

### 8.4. L'elemento trave snella di base: l'approccio di Ritz

L'usuale teoria tecnica delle travi (anche detta di Eulero – Bernoulli), valida per travi snelle, porta a semplificare nel modo seguente il procedimento generale:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow v(z) \quad (8.51)$$

$$\mathbf{e} \Rightarrow e_z = -yv'' \quad (8.52)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \sigma_z \quad (8.53)$$

$$\mathbf{E} \Rightarrow E \quad (8.54)$$

Si assume valida la relazione fondamentale, che lega la rotazione  $\varphi(z)$  della sezione retta all'abbassamento  $v(z)$ :

$$\varphi(z) = -v'(z) \quad (8.55)$$

Si ricorda che lo spostamento è positivo se diretto verso il basso, mentre la rotazione è positiva se antioraria.

Infine, è usuale definire, nell'ambito della teoria tecnica delle travi, alcune pseudo-quantità, che permettono di ridurre gli integrali di volume ad integrali di linea:

$$\chi = \text{curvatura} = -v'' = \text{pseudodeformazione}$$

$$M = \text{momento flettente} = \text{pseudotensione}$$

e la legge di Hooke diviene:

$$M = EI\chi = -EIv'' \quad (8.56)$$

**Nota 8.2:** Il prodotto  $EI$  è anche detto *pseudomodulo di Young*, o *rigidezza flessionale*.

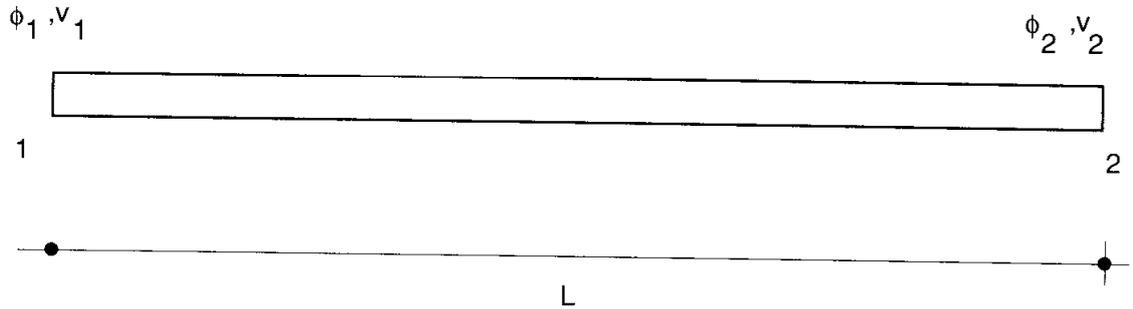


Figura 8.2- L'elemento trave di base

### 1. Scelta dell'elemento da studiare

Un elemento di trave è soggetto a sforzo assiale, momento flettente e sforzo di taglio, ed ogni sua sezione retta si sposta lungo l'asse, ortogonalmente all'asse, e ruota. Quindi il modello più semplice, a 2 nodi, ha sei gradi di libertà. D'altro canto si è già visto nel capitolo 3 che la sollecitazione di sforzo assiale si disaccoppia da quella flessionale-tagliante, e quindi ci si può limitare al modello a quattro gradi di libertà di Figura 8.2.

Il vettore  $\mathbf{d}$  dei gradi di libertà nodali è fornito da:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2\} \quad (8.57)$$

ed il corrispondente vettore dei carichi nodali è:

$$\mathbf{f}^T = \{F_{n1}, \mathcal{M}_1, F_{n2}, \mathcal{M}_2\} \quad (8.58)$$

### 2. Deduzione delle funzioni di forma

Il più semplice campo di spostamenti polinomiale che dipende da quattro incognite è un polinomio cubico:

$$v(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3] \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} \quad (8.59)$$

mentre la rotazione è:

$$\varphi(z) = -v'(z) = -[0 \quad 1 \quad 2z \quad 3z^2] \mathbf{A} \quad (8.60)$$

Imponendo che gli estremi subiscano gli indicati spostamenti nodali si hanno le condizioni:

$$v(0) = v_1 \quad v'(0) = -\varphi_1 \quad (8.61)$$

$$v(L) = v_2 \quad v'(L) = -\varphi_2 \quad (8.62)$$

Si ottiene quindi il sistema di quattro equazioni:

$$A_0 = v_1 \quad (8.63)$$

$$A_1 = -\varphi_1 \quad (8.64)$$

$$A_0 + A_1 L + A_2 L^2 + A_3 L^3 = v_2 \quad (8.65)$$

$$A_1 + 2A_2 L + 3A_3 L^2 = -\varphi_2 \quad (8.66)$$

che matricialmente si scrive:

$$\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{d} \quad (8.67)$$

con:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

L'inversione di  $\mathbf{C}$  è già stata effettuata nel capitolo 5:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

e quindi:

$$v(z) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{d} = \sum_{i=1}^4 N_i(z)d_i \quad (8.70)$$

Svolgendo il prodotto  $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$  si ottiene il vettore delle *funzioni di forma*  $\mathbf{N}$  (Figura 8.3):

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ L(-\zeta + 2\zeta^2 - \zeta^3) \\ 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\ L(\zeta^2 - \zeta^3) \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

dove si è introdotta l'ascissa adimensionale  $\zeta$ .

Si noti che ciascuna funzione di forma assume valore unitario, in modulo, in corrispondenza del grado di libertà che le compete, ed è zero negli altri gradi di libertà. Questa proprietà fornisce un metodo rapido di calcolo delle funzioni di forma, come discusso nell'ambito dell'analisi delle aste. Un ulteriore mezzo, più sistematico, di generare le funzioni di forma sarà illustrato nel capitolo 9, dove saranno introdotte le tecniche di interpolazione hermitiana.

### ELEMENTO FINITO TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

POLINOMIO CUBICO  
FUNZIONI DI FORMA

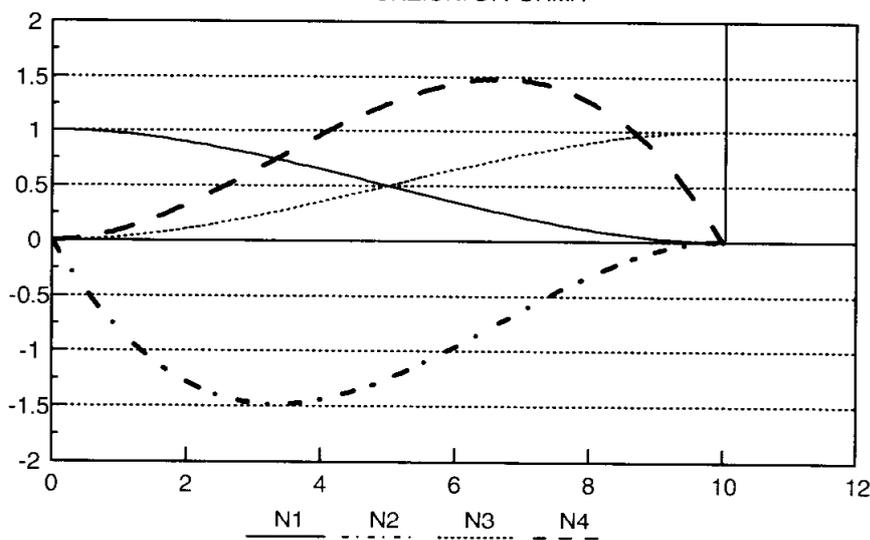


Figura 8.3- Le funzioni di forma per l'elemento trave di base

### 3. Deduzione delle deformazioni

In questo caso, come detto, si preferisce adoperare le pseudo - deformazioni, ossia le curvature. Sarà quindi:

$$\chi = -v'' = -\mathbf{N}''\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (8.72)$$

e la matrice  $\mathbf{B}$  si ottiene derivando due volte le funzioni di forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12z}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6z}{L^3} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12z}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6z}{L^2} \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

#### 4. Deduzione dell'energia elastica

Trascurando, come d'obbligo in una teoria tecnica delle travi snelle, il contributo tagliante ed assiale, si ha:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_z e_z dV = \frac{E}{2} \int_V y^2 v''^2 dV = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L M^T \chi dz = \frac{1}{2} \int_0^L \chi^T EI \chi dz \end{aligned} \quad (8.74)$$

Si noti che, pur essendo  $M$  e  $\chi$  due scalari, si è preferito indicare esplicitamente il segno di trasposta. Dalla (8.72) si giunge allora a scrivere:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left[ \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dz \right] \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (8.75)$$

con:

$$\mathbf{k}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dz \quad (8.76)$$

Eseguendo le operazioni matriciali, si ottiene la matrice di rigidezza già dedotta nel capitolo 5, tramite soluzione della linea elastica:

$$\mathbf{k}_e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

**Nota 8.3:** Ciò non deve sorprendere, perchè nel caso particolare il campo di spostamento assunto (polinomio di ordine cubico) è soluzione della equazione differenziale della linea elastica.

### 8.5. L'elemento trave snella di base: l'approccio di Galerkin

In questo caso la funzione approssimante è:

$$\psi(z) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (8.78)$$

e l'equazione differenziale della linea elastica da trattare è la ben nota:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \quad (8.79)$$

Le equazioni di Galerkin (7.167) si scrivono allora come:

$$EI \int_0^L \frac{d^4 \psi}{dz^4} N_i dz = 0 \quad i=1,2,3,4 \quad (8.80)$$

Integrando due volte per parti si ottiene l'uguaglianza:

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \psi}{dz^2} \frac{d^2 N_i}{dz^2} dz = \left[ -EIN_i \frac{d^3 \psi}{dz^3} \right]_0^L + \left[ EI \frac{d^2 \psi}{dz^2} \frac{dN_i}{dz} \right]_0^L \quad (8.81)$$

Ma:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dz^2} \mathbf{d} \quad (8.82)$$

e quindi:

$$\left[ EI \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{N}}{dz^2} \frac{d^2 N_i}{dz^2} dz \right] \mathbf{d} = \left[ -EIN_i \frac{d^3 \psi}{dz^3} \right]_0^L + \left[ EI \frac{d^2 \psi}{dz^2} \frac{dN_i}{dz} \right]_0^L \quad (8.83)$$

In forma matriciale la relazione precedente può scriversi nella nota forma:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (8.84)$$

avendo definito la matrice di rigidezza  $\mathbf{k}_e$  di coefficienti:

$$k_{e,ij} = EI \int_0^L \frac{d^2 N_i}{dz^2} \frac{d^2 N_j}{dz^2} dz \quad (8.85)$$

Usando le funzioni di forma (8.71) si giunge alla matrice di rigidezza (8.77).

Anche in questo caso il teorema di Castigliano permette di giungere alla stessa espressione cui si è giunti con il metodo di Galerkin.

Ed infatti:

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^L \psi''^2 dz = \frac{1}{2} EI \int_0^L [N_1'' d_1 + N_2'' d_2 + N_3'' d_3 + N_4'' d_4]^2 dz \quad (8.86)$$

è l'energia elastica, ed il teorema di Castigliano permette di ottenere le forze nodali come:

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial d_i} = \frac{2EI}{2} \int_0^L [N_1'' d_1 + N_2'' d_2 + N_3'' d_3 + N_4'' d_4] N_i'' dz \quad (8.87)$$

In forma matriciale si riottiene quindi l'espressione della matrice di rigidezza.

## 8.6. I carichi esterni

Se la struttura in esame è soggetta a carichi distribuiti, o a carichi concentrati non agenti direttamente nei nodi, sarà necessario introdurre i carichi nodali equivalenti, così come già fatto nel capitolo 3.

Una formulazione particolarmente semplice e generale si può ottenere operando in via energetica, tramite il principio di minimo dell'energia potenziale totale.

Si consideri all'uopo un carico  $p$  distribuito con legge arbitraria tra le due ascisse  $a$  e  $b$  dell'elemento asta di Figura 8.4. L'energia potenziale di questo carico è:

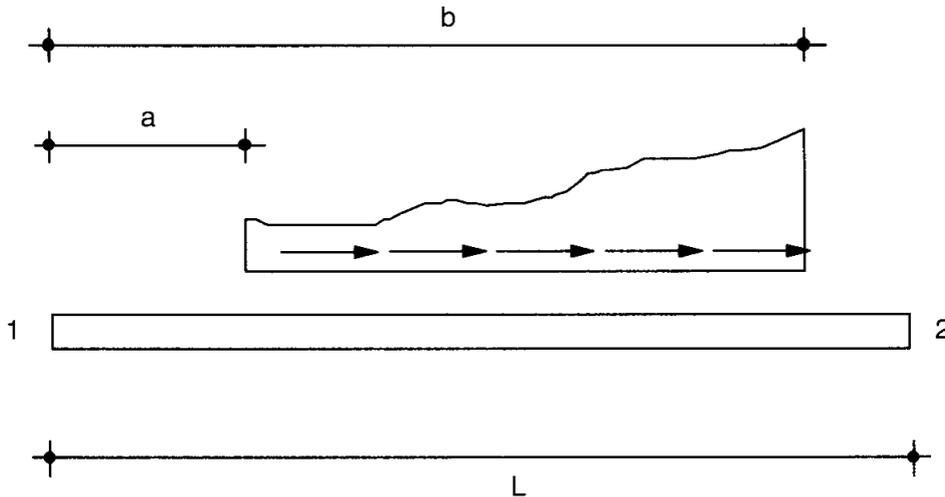


Figura 8.4- Elemento asta soggetta a carico distribuito

$$V = - \int_a^b \mathbf{u}^T p dx \quad (8.88)$$

dove  $\mathbf{u}$  è in realtà, in questo caso, una funzione scalare  $u(x)$ . Introducendo la relazione:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (8.89)$$

si giunge alla formula:

$$V = -\mathbf{d}^T \int_a^b \mathbf{N}^T p dx = -\mathbf{d}^T \mathbf{q} \quad (8.90)$$

con:

$$\mathbf{q} = \int_a^b \mathbf{N}^T p dx \quad (8.91)$$

L'energia potenziale totale del sistema in esame può scriversi:

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{q} \quad (8.92)$$

e, per il principio di minimo dovrà essere:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d} = \mathbf{q} \quad (8.93)$$

$\mathbf{q}$  è quindi il vettore *consistente* dei carichi nodali equivalenti.

**Nota 8.4:** Questa formulazione permette di trattare i carichi concentrati non nodali come caso limite dei carichi distribuiti, per  $a \rightarrow b$ . Se quindi esiste un carico assiale concentrato  $F$  all'ascissa  $x$ , i carichi nodali equivalenti saranno forniti da:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}^T(x_c) F_c \quad (8.94)$$

Analogo ragionamento può farsi per una stesa di carico verticale  $q(z)$ , distribuita con legge arbitraria tra le ascisse  $a$  e  $b$  di un elemento trave. Si giunge alla relazione, formalmente identica alla (8.91):

$$\mathbf{q} = \int_a^b \mathbf{N}^T q dz \quad (8.95)$$

ma le funzioni di forma saranno quelle relative alla trave. Se invece sulla trave agisce una stesa di coppie  $m(z)$  distribuita tra  $a$  e  $b$ , allora l'energia potenziale sarà:

$$V = - \int_a^b \varphi^T m dz \quad (8.96)$$

dove  $\varphi$  è in realtà, in questo caso, una funzione scalare  $\varphi(z)$ . Introducendo la relazione:

$$\varphi = -\mathbf{N}'\mathbf{d} \quad (8.97)$$

si giunge alla relazione:

$$V = -\mathbf{d}^T \int_a^b \mathbf{N}'^T m dz = -\mathbf{d}^T \mathbf{q} \quad (8.98)$$

con:

$$\mathbf{q} = - \int_a^b \mathbf{N}'^T m dz \quad (8.99)$$

### Esempi di calcolo di carichi nodali equivalenti

*i) Asta soggetta a carico assiale uniformemente distribuito*

In questo caso è immediato calcolare, se  $p$  è l'intensità del carico:

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx = p \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{Bmatrix} dx = pL \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \quad (8.100)$$

**Nota 8.5:** Il carico si è quindi suddiviso in parti uguali alle due estremità, rispecchiando l'evidenza fisica del fenomeno.

*ii) Asta soggetta a carico trapezoidale*

Il carico può esprimersi come:

$$p(x) = c + (d - c) \frac{x}{L} = c + h \frac{x}{L} \quad (8.101)$$

dove  $c$  e  $d$  sono i valori del carico a sinistra e destra, rispettivamente. Il vettore delle forze nodali equivalenti è quindi calcolabile come:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \int_0^L \mathbf{N}^T p dx \\ &= c \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{Bmatrix} dx + \frac{h}{L} \int_0^L \begin{Bmatrix} x - x^2/L \\ x^2/L \end{Bmatrix} dx = \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} 3c + h \\ 3c + 2h \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.102)$$

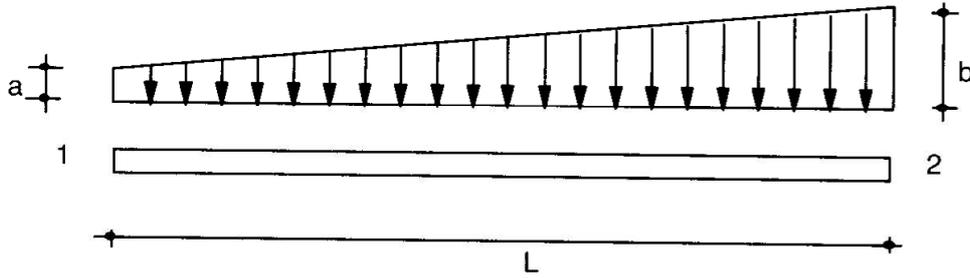


Figura 8.5- Trave soggetta a carico trapezoido

iii) *Trave soggetta a carico trapezoido*

Il carico è esprimibile nella forma (Figura 8.5):

$$q(z) = a + (b - a) \frac{z}{L} = a + g \frac{z}{L} \quad (8.103)$$

e quindi il vettore delle forze nodali equivalenti calcolabile come:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \int_0^L \mathbf{N}^T q dz \\ &= a \int_0^L \left[ 1 - 3 \frac{z^2}{L^2} + 2 \frac{z^3}{L^3} \quad -z + 2 \frac{z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \quad 3 \frac{z^2}{L^2} - 2 \frac{z^3}{L^3} \quad \frac{z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \right]^T dz \\ &\quad + \frac{g}{L} \int_0^L \left[ z - 3 \frac{z^3}{L^2} + 2 \frac{z^4}{L^3} \quad -z^2 + 2 \frac{z^3}{L} - \frac{z^4}{L^2} \quad 3 \frac{z^3}{L^2} - 2 \frac{z^4}{L^3} \quad \frac{z^3}{L} - \frac{z^4}{L^2} \right]^T dz \end{aligned} \quad (8.104)$$

Svolgendo gli integrali si ottiene infine:

$$\mathbf{q} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 30a + 9g \\ -L(5a + 2g) \\ 30a + 21g \\ L(5a + 3g) \end{Bmatrix} \quad (8.105)$$

Come casi particolari si ritrovano le forze nodali equivalenti ad una stesa di carico uniforme ( $g = 0$ ) e triangolare ( $a = 0, g = b$ ).

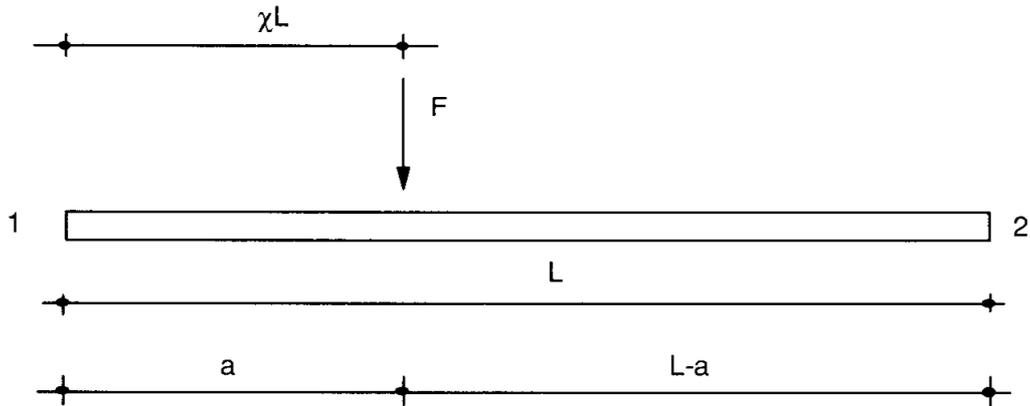


Figura 8.6- Trave soggetta a carico concentrato

## iv) Trave soggetta a forza concentrata

Se  $F$  è l'intensità della forza, e se  $\chi = c/L$  è la sua ascissa adimensionalizzata (Figura 8.6), si ha il vettore di forze nodali:

$$\mathbf{q} = F\mathbf{N}^T(\chi) = F \begin{Bmatrix} 1 - 3\chi^2 + 2\chi^3 \\ -\chi L + 2\chi^2 L - \chi^3 L \\ 3\chi^2 - 2\chi^3 \\ \chi^2 L - \chi^3 L \end{Bmatrix} \quad (8.106)$$

Se  $F$  agisce in mezzeria, sarà  $\chi = 0.5$ , ed il vettore  $\mathbf{q}$  diviene:

$$\mathbf{q} = F \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -L/8 \\ 1/2 \\ L/8 \end{Bmatrix} \quad (8.107)$$

Se  $F$  agisce a  $3/4$  della luce, si avrà l'insieme di forze nodali equivalenti:

$$\mathbf{q} = \frac{F}{64} \begin{Bmatrix} 10 \\ -3L \\ 54 \\ 9L \end{Bmatrix} \quad (8.108)$$

che, come si vede, non è di certo intuibile in base a considerazioni fisiche.

## v) Trave soggetta a coppie uniformemente distribuite

Si consideri la trave di Figura 8.7, soggetta ad una distribuzione uniforme di coppie distribuite di intensità  $m$ .

Secondo la relazione (8.99) si ottengono i carichi nodali equivalenti:

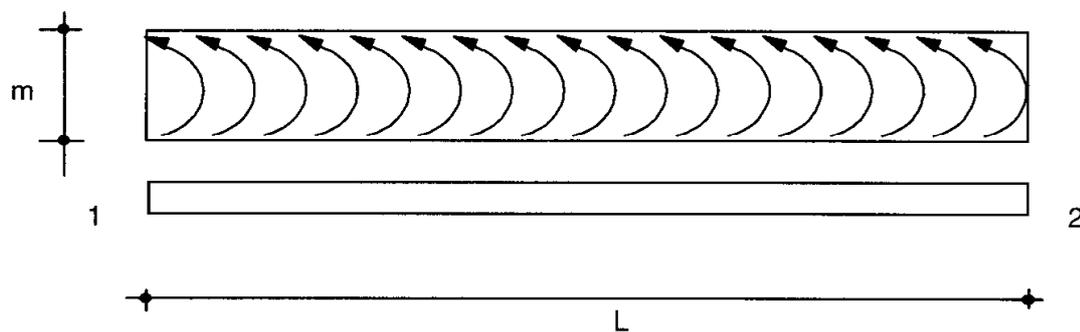


Figura 8.7- Trave soggetta a coppie distribuite uniformemente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= -m \int_0^L \mathbf{N}'^T dz \\
 &= -m \int_0^L \left[ -\frac{6z}{L^2} + 6\frac{z^2}{L^3} \quad -1 + \frac{4z}{L} - 3\frac{z^2}{L^2} \quad 6\frac{z}{L^2} - 6\frac{z^2}{L^3} \quad 2\frac{z}{L} - 3\frac{z^2}{L^2} \right]^T dz
 \end{aligned} \tag{8.109}$$

Svolgendo gli integrali si deduce che le coppie nodali equivalenti si annullano:

$$\mathbf{q} = m \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.110}$$

## 8.7. L'assemblaggio della matrice globale di rigidezza

L'energia elastica del singolo elemento è pari a:

$$L^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \tag{8.111}$$

dove  $\mathbf{d}_e$  è il vettore dei gradi di libertà locali, e  $\mathbf{k}_e$  è la matrice di rigidezza locale dell'elemento.

Se la struttura è composta da  $E$  elementi, ed ha  $n$  gradi di libertà, allora l'energia elastica dell'intero sistema sarà fornita da:

$$L = \sum_{e=1}^E L_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^* \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}^* \mathbf{d} \quad (8.112)$$

La matrice  $\mathbf{K}_e^*$  ha dimensioni  $(n, n)$ , ed è costruita a partire da  $\mathbf{k}_e$ , ponendo i termini di  $\mathbf{k}_e$  nelle righe e colonne adatte, secondo un procedimento identico a quanto illustrato nel capitolo 4. La matrice  $\mathbf{K}^*$ , di rigidezza globale, è quindi somma diretta delle matrici  $\mathbf{K}_e^*$ :

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \mathbf{K}_e^* \quad (8.113)$$

Identico ragionamento può farsi, a partire dall'energia potenziale delle forze agenti sul singolo elemento, per dedurre il vettore globale delle forze nodali consistenti.

Se infatti

$$V_e = -\mathbf{d}_e^T \mathbf{q}_e \quad (8.114)$$

è l'energia potenziale dei carichi  $\mathbf{q}_e$  (direttamente applicati ai nodi, e carichi nodali equivalenti), allora l'energia potenziale dell'intera struttura ad  $E$  elementi sarà:

$$V = \sum_{e=1}^E V_e = - \sum_{e=1}^E \mathbf{d}_e^T \mathbf{q}_e = -\mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (8.115)$$

Il vettore  $\mathbf{q}_e^*$  ha dimensioni  $n$ , ed è ottenuta così come  $\mathbf{K}_e^*$  è ottenuta a partire da  $\mathbf{k}_e$ , e quindi  $\mathbf{f}$ , vettore globale delle forze nodali, sarà dato, per somma diretta, da:

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^E \mathbf{q}_e^* \quad (8.116)$$

L'energia potenziale totale della struttura in esame è data da:

$$E_t = L + V = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}^* \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (8.117)$$

e le equazioni di equilibrio possono ottendersi dal principio di minimo dell'energia potenziale totale (cfr.cap.2):

$$\mathbf{K}^* \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (8.118)$$

## 8.8. Le condizioni ai limiti

La matrice di rigidezza globale  $\mathbf{K}^*$ , così come ottenuta, è sicuramente singolare, perchè la struttura, non vincolata, può muoversi rigidamente. L'imposizione delle condizioni ai limiti può procedere secondo due vie. Si ipotizzi per il momento che non vi siano cedimenti anelastici, e si partizioni il vettore  $\mathbf{d}$  dei gradi di libertà come:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} \quad (8.119)$$

dove  $\mathbf{d}_a$  sono i gradi di libertà attivi, e  $\mathbf{d}_v$  sono i gradi di libertà annullati dai vincoli.

Le equazioni di equilibrio si scrivono allora come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^* & \mathbf{K}_{av}^* \\ \mathbf{K}_{va}^* & \mathbf{K}_{vv}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (8.120)$$

$\mathbf{f}_a$  è il vettore delle forze esterne, mentre  $\mathbf{f}_v$  è il vettore (incognito) delle reazioni. Ponendo  $\mathbf{d}_v = 0$  si hanno le due equazioni:

$$\mathbf{K}_{aa}^* \mathbf{d}_a = \mathbf{f}_a \quad (8.121)$$

$$\mathbf{K}_{va}^* \mathbf{d}_a = \mathbf{f}_v \quad (8.122)$$

Il primo sistema fornisce le coordinate lagrangiane libere, mentre il secondo prodotto matriciale fornisce le reazioni incognite.

Operativamente si preferisce costruire direttamente la matrice di rigidezza globale  $\mathbf{K}$  ridotta, pari a  $\mathbf{K}_{aa}^*$ , come illustrato nel capitolo 4. In ambedue i casi, si giunge al sistema lineare ridotto:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (8.123)$$

avendo richiamato  $\mathbf{d}$  ed  $\mathbf{f}$  i vettori delle coordinate lagrangiane e delle corrispondenti forze nodali.

Se sulla struttura insistono cedimenti anelastici, allora il vettore  $\mathbf{d}$  deve essere di nuovo partizionato, secondo lo schema:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_l \\ \mathbf{d}_p \end{Bmatrix} \quad (8.124)$$

ed ora il vettore  $\mathbf{d}_l$  contiene i gradi di libertà liberi, mentre il vettore  $\mathbf{d}_p$  è relativo ai gradi di libertà prescritti.

Il sistema (8.123) si scriverà:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lp} \\ \mathbf{K}_{pl} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_l \\ \mathbf{d}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_l \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} \quad (8.125)$$

Il vettore  $\mathbf{f}_l$  è relativo alle forze nodali agenti in corrispondenza dei gradi di libertà attivi, ed  $\mathbf{f}_p$  contiene le forze nodali incognite, necessarie a produrre i cedimenti imposti *a priori*  $\mathbf{d}_p$ . Scrivendo per esteso le due relazioni precedenti si ottiene:

$$\mathbf{K}_{ll}\mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{lp}\mathbf{d}_p = \mathbf{f}_l \quad (8.126)$$

$$\mathbf{K}_{pl}\mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{pp}\mathbf{d}_p = \mathbf{f}_p \quad (8.127)$$

Dalla prima formula si possono ricavare gli spostamenti incogniti  $\mathbf{d}_l$  :

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{K}_{ll}^{-1} \{ \mathbf{f}_l - \mathbf{K}_{lp}\mathbf{d}_p \} \quad (8.128)$$

e, volendo, è possibile conoscere anche le forze che producono gli assegnati spostamenti, a partire dalla seconda formula.

## 8.9. Il calcolo delle tensioni

Il sistema (8.123) può essere risolto tramite uno dei metodi illustrati nel capitolo 4, oppure impiegando più potenti approcci frontali, di cui si farà cenno in seguito. Calcolate comunque le coordinate lagrangiane  $\mathbf{d}$ , occorrerà risalire alle tensioni (o alle pseudo-tensioni) negli elementi, secondo la formula (8.6).

Nel caso delle aste si ha una sola componente di tensione, esprimibile come:

$$\sigma_x = Ee_x = E\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{S}\mathbf{d} \quad (8.129)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  è usualmente variabile all'interno dell'elemento, e quindi va valutata nei punti in cui si vuol conoscere la tensione. Nel caso delle aste di base, invece, è costante.

Per le travi si è preferito introdurre la pseudo-tensione  $M$ , momento flettente, esprimibile come:

$$M = -EIv'' = E\mathbf{I}\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{S}\mathbf{d} \quad (8.130)$$

ed  $\mathbf{S}$ , matrice delle tensioni, è fornita dal prodotto  $E\mathbf{I}\mathbf{B}$ .

### 8.10. Un esempio numerico

Si consideri la mensola di Figura 8.8, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $p$ . Utilizzando un solo elemento finito del tipo trave, la struttura si riduce ad un sistema a 2 gradi di libertà, ossia l'abbassamento  $v_2$  e la rotazione  $\varphi_2$  all'estremo libero.

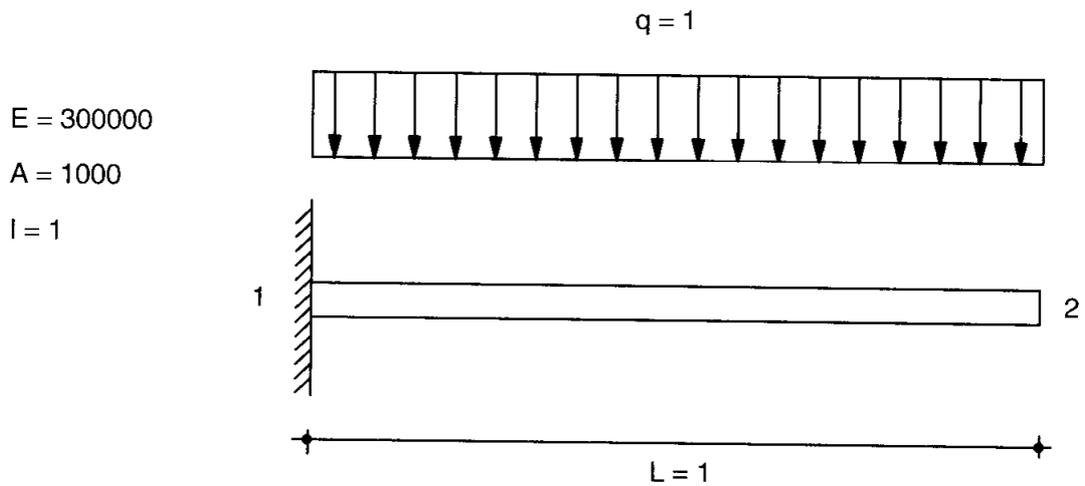


Figura 8.8- Trave a mensola soggetta a carico distribuito

Le forze nodali equivalenti sono fornite dalla (8.105), come:

$$\mathbf{q} = p \begin{Bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (8.131)$$

e quindi le equazioni di equilibrio sono:

$$12 \frac{EI}{L^3} v_2 + 6 \frac{EI}{L^2} \varphi_2 = \frac{pL}{2} \quad (8.132)$$

$$6 \frac{EI}{L^2} v_2 + 4 \frac{EI}{L} \varphi_2 = \frac{pL^2}{12} \quad (8.133)$$

La soluzione fornisce i risultati esatti:

$$v_2 = \frac{pL^4}{8EI} \quad \varphi_2 = -\frac{pL^3}{6EI} \quad (8.134)$$

I momenti flettenti sono ottenibili dalla (8.6):

$$M(z) = EI \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12z}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6z}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12z}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6z}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{pL^4}{8EI} \\ -\frac{pL^3}{6EI} \end{Bmatrix} \quad (8.135)$$

$$= \frac{pL}{EI} \left( \frac{z}{3} - \frac{5}{12}L \right)$$

Agli estremi sarà quindi:

$$M(0) = -\frac{5}{12}pL^2 \quad M(L) = -\frac{pL^2}{12} \quad (8.136)$$

da paragonare ai valori esatti:

$$M(0) = -\frac{1}{2}pL^2 \quad M(L) = 0 \quad (8.137)$$

**Nota 8.6:** Se si usano due elementi finiti si ottiene un diagramma del momento flettente costituito da una spezzata, con un valore in  $L$  più vicino a zero, ma non nullo.

**Nota 8.7:** Pur avendo adoperato la matrice di rigidezza esatta, non si sono ottenuti risultati esatti in termini di tensioni, mentre gli spostamenti nodali sono stati dedotti con precisione. Ciò dipende dal fatto che le tensioni sono state calcolate a partire dalla (8.6), e quindi sono dovute ai soli spostamenti nodali dovuti ai carichi consistenti. D'altro canto, questo insieme di carichi consistenti è uguale alle reazioni di incastro perfetto cambiate di segno (cfr. capitolo 3), e quindi si sono trascurate le tensioni causate dal carico distribuito che agisce sull'elemento incastrato.

**Nota 8.8:** Anche se il momento flettente all'estremo libero non sarà mai nullo, esso diverrà rapidamente trascurabile all'aumentare del numero di elementi finiti usati. Ed infatti in Figura 8.9 è riportato il momento all'estremo libero in funzione del numero di gradi di libertà del sistema, così come ottenuto tramite un semplice programma di calcolo.

Si noti che anche il tempo di calcolo aumenta corrispondentemente, come può notarsi dal diagramma di figura 8.10.

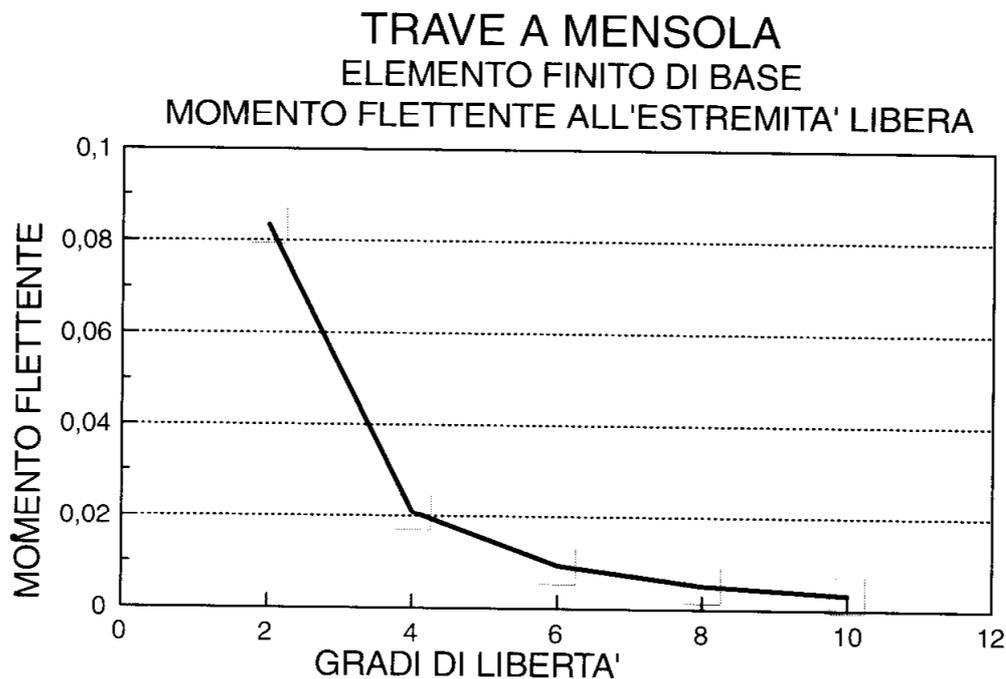


Figura 8.9- Momento all'estremo libero, in funzione del numero di gradi di libertà

### 8.11. Il problema della conformità

Come si è visto nell'esempio precedente, all'aumentare del numero di elementi finiti usati, la soluzione approssimata converge rapidamente al valore esatto. Ciò significa che l'elemento finito usato si comporta in maniera soddisfacente per i nostri scopi. Poiché poi l'uso di un predeterminato campo di spostamenti implica che la struttura fittizia è più vincolata di quella reale, si può anche dimostrare che la sua energia potenziale totale è maggiore dell'energia potenziale totale della struttura reale. Quindi la convergenza al valore esatto avviene monotonicamente, fornendo approssimazioni superiori nel senso dell'energia.

Più in generale, si ammette il seguente:

**Postulato di convergenza monotona** - Condizione necessaria perchè la soluzione approssimata, ottenuta tramite discretizzazione agli elementi finiti, converga al valore esatto, dall'alto (nel senso dell'energia), è che il campo di spostamento adottato soddisfi ai seguenti requisiti:

1. il campo di spostamenti deve poter riprodurre gli eventuali moti rigidi dell'elemento

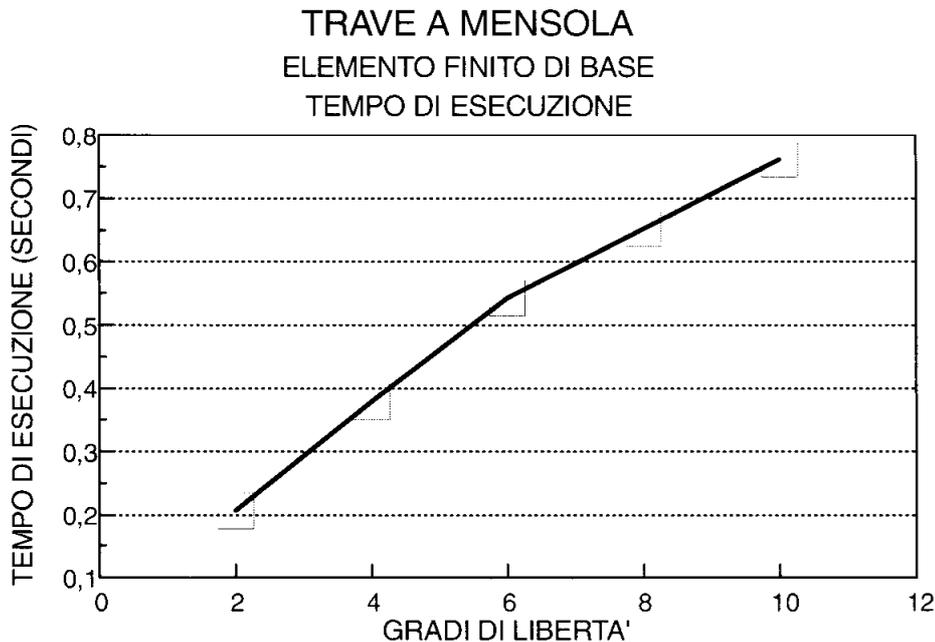


Figura 8.10- Tempo di calcolo, in funzione del numero di gradi di libertà

2. il campo di spostamenti deve poter riprodurre tutti gli eventuali stati a deformazione costante dell'elemento
3. il campo di spostamenti deve essere continuo all'interno dell'elemento
4. alla frontiera tra elementi diversi deve essere soddisfatta la compatibilità

**Nota 8.9:** I primi due requisiti sono equivalenti alla condizione che si impone sulle funzioni di Rayleigh-Ritz, e si basano ambedue sulla considerazione intuitiva che, al limite, quando gli elementi divengono numerosi, e di dimensioni molto ridotte, le deformazioni all'interno di ciascuno di essi saranno quasi costanti. Di conseguenza è necessario che il campo di spostamenti sia in grado di riprodurre questi stati deformativi (ed i moti rigidi, in cui le deformazioni sono nulle), se si vuole garantire la convergenza al valore esatto.

**Nota 8.10:** Gli ultimi due requisiti implicano che non debbano sorgere discontinuità negli spostamenti (e nelle derivate degli spostamenti) né all'interno dell'elemento, né alla sua frontiera.

Poiché l'energia potenziale totale è funzione degli spostamenti, e delle sue derivate fino all'ordine  $m$ , per poter valutare univocamente l'energia potenziale totale (e quindi soddisfare i requisiti di compatibilità) occorre che il campo di spostamenti sia di classe  $C^{m-1}$

Vale la seguente:

**Definizione 8.22:** Un elemento finito il cui campo di spostamenti soddisfa le quattro condizioni del postulato di convergenza monotona si dice *conforme*. Se invece

una o più condizioni sono violate, l'elemento si dice *non conforme*.

**Teorema 8.1:** L'elemento del tipo asta studiato in precedenza è conforme.

Infatti il solo moto rigido ammesso è quello di traslazione secondo  $x$ , fornito da  $u(x) = \text{costante}$ . Ora, il campo di spostamenti (8.24) può rappresentare un tale moto rigido, per  $A_0 \neq 0$ , ed  $A_1 = 0$ .

Esiste anche un solo stato a deformazione costante, fornito da  $e_x = 0$ , e corrispondente a  $u(x) = \text{cost.} \times x$ . Anche questa funzione spostamento è compresa nel campo di spostamenti (8.24). Il terzo requisito è chiaramente soddisfatto, perchè la (8.24) è una funzione polinomiale.

Per controllare che sia soddisfatto anche l'ultimo requisito, si consideri l'espressione dell'energia elastica per l'elemento asta:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x e_x dV = \frac{EA}{2} \int_0^L e_x^2 dx = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx \quad (8.138)$$

Poiché nell'energia elastica la derivata di ordine massimo che compare è la derivata prima, si ha  $m = 1$ , ed occorre richiedere la sola continuità della funzione spostamento alla frontiera tra diversi elementi. Questa continuità è chiaramente soddisfatta, perchè per un elemento monodimensionale la frontiera è costituita dai soli nodi, dove gli spostamenti sono uguali per tutti gli elementi che in quel nodo convergono.

**Teorema 8.2:** L'elemento del tipo trave studiato in precedenza è conforme.

Ed infatti in questo caso occorre considerare due possibili moti rigidi, di traslazione secondo  $y$ :

$$v(z) = c \quad (8.139)$$

e di rotazione:

$$\varphi(z) = -v'(z) = c \Rightarrow v(z) = c_0 + c_1 z \quad (8.140)$$

Ambedue questi moti rigidi sono adeguatamente rappresentati nel campo di spostamenti (8.59).

L'unico stato di deformazione costante è dato da:

$$\chi = -v''(z) = c \Rightarrow v(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \quad (8.141)$$

ed anche questo campo di spostamento quadratico è incluso in (8.59). La terza condizione di conformità è soddisfatta, poiché il campo di spostamenti assunto è polinomiale, mentre per controllare il quarto requisito occorre dedurre l'energia di deformazione dell'elemento trave:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z e_z dV = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dz \quad (8.142)$$

Ne segue che in questo caso bisogna richiedere la continuità della funzione abbassamento e della sua derivata prima, nei punti della frontiera. Ancora una volta, per elementi monodimensionali ciò è immediatamente verificato, e quindi l'elemento trave studiato è conforme.

Si fornisce infine la seguente:

**Definizione 8.23:** Sia  $m$  l'ordine massimo della derivata della funzione spostamento che compare nell'energia di deformazione. Il problema dell'imposizione della continuità del campo di spostamenti, e delle sue prime  $m - 1$  derivate, all'interno dell'elemento, e lungo la frontiera, si chiama *problema di classe  $C^{m-1}$* .

Secondo la definizione precedente, l'elemento asta appena trattato conduce ad un problema di tipo  $C^0$ , mentre l'elemento finito del tipo trave di Eulero-Bernoulli porta ad un problema di tipo  $C^1$ .