

## 6. Le strutture intelaiate spaziali

Si consideri un elemento di trave tridimensionale a sezione costante  $A$ , momenti d'inerzia costanti  $I_x$  ed  $I_y$ , con modulo di Young  $E$  e modulo di Lamè  $G$ , fattore di torsione  $q$  e fattore di taglio  $\chi$ . Ogni nodo ha 6 possibilità di movimento, e quindi l'elemento da studiare ha 12 gradi di libertà. In riferimento locale il vettore delle incognite nodali è:

$$\mathbf{d}_e^T = \{u_{z1}, v_{y1}, w_{x1}, \vartheta_{z1}, \vartheta_{y1}, \vartheta_{x1}, u_{z2}, v_{y2}, w_{x2}, \vartheta_{z2}, \vartheta_{y2}, \vartheta_{x2}\} \quad (6.1)$$

cui corrisponde il vettore delle forze nodali:

$$\mathbf{f}_e^T = \{F_{z1}, F_{y1}, F_{x1}, \mathcal{M}_{z1}, \mathcal{M}_{y1}, \mathcal{M}_{x1}, F_{z2}, F_{y2}, F_{x2}, \mathcal{M}_{z2}, \mathcal{M}_{y2}, \mathcal{M}_{x2}\} \quad (6.2)$$

La matrice di rigidezza elementare in coordinate locali avrà quindi dimensioni ( $12 \times 12$ ), e può essere dedotta applicando il principio degli spostamenti virtuali.

### 6.1. La matrice di rigidezza elementare

Le matrici di rigidezza per travi soggette a sforzo normale (cfr. 4.22) ed a flessione-taglio intorno all'asse  $x$  (cfr. 5.27) sono già state dedotte. Restano da determinare le matrici di rigidezza per travi soggette a momento torcente ed a momento flettente-taglio intorno all'asse  $y$ .

#### 6.1.1. Matrice di rigidezza in presenza di torsione alla De Saint Venant

Si consideri la trave di Figura 6.1, soggetta a momento torcente  $M_t(z)$ . I due nodi ruotano dell'angolo  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , rispettivamente, e corrispondentemente sorgeranno due coppie torcenti nodali  $\mathcal{M}_{t1}$  ed  $\mathcal{M}_{t2}$ . La matrice di rigidezza avrà quindi dimensione ( $2 \times 2$ ). L'equazione della linea elastica può dedursi dall'equilibrio del concio di figura 6.1 alla rotazione intorno all'asse  $z$  della trave. Si ha:

$$\frac{dM_t}{dz} = 0 \quad (6.3)$$

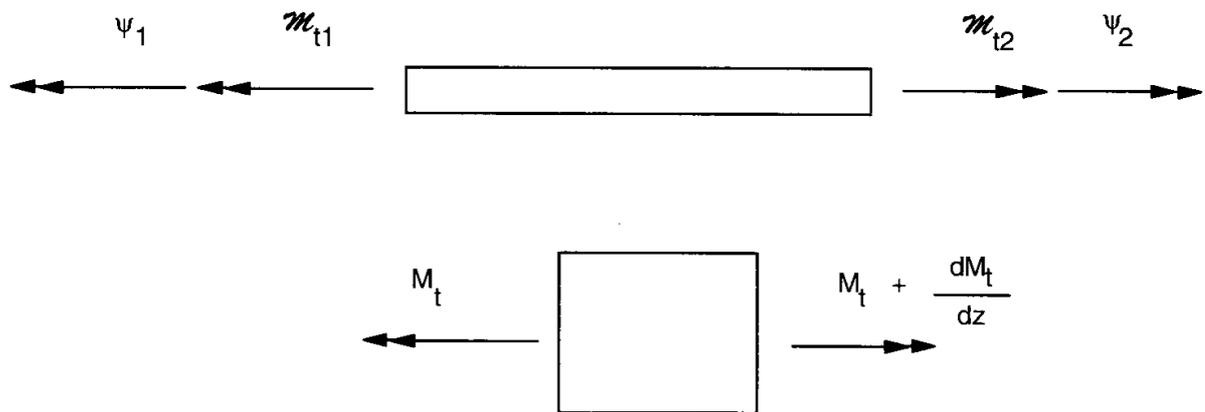


Figura 6.1- Trave soggetta a momento torcente

ed usando la relazione (cfr. Franciosi [1987], Vol.2 p. 197):

$$M_t = \frac{GI_p}{q} \frac{d\psi}{dz} \quad (6.4)$$

si ottiene la richiesta equazione della linea elastica:

$$\frac{GI_p}{q} \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0 \quad (6.5)$$

Paragonando la (6.5) con la (4.6) si nota subito che tutto quanto detto per l'elemento asta può ripetersi per l'elemento a torsione, con le posizioni:

$$u_a \Rightarrow \psi \quad (6.6)$$

$$EA \Rightarrow \frac{GI_p}{q} \quad (6.7)$$

$$N \Rightarrow M_t \quad (6.8)$$

$$F \Rightarrow \mathcal{M}_t \quad (6.9)$$

Ad esempio, la matrice di rigidità elementare, in riferimento locale, della trave soggetta a torsione è fornita da:

$$\mathbf{k}_a = \frac{GI_p}{qL} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

### 6.1.2. Matrice di rigidezza in presenza di torsione non uniforme

Se si tiene conto della variabilità dell'angolo specifico di torsione lungo l'asse, occorre modificare la classica trattazione della torsione alla De Saint Venant, introducendo le tensioni normali indotte dall'ingobbimento della sezione retta. L'equazione differenziale della linea elastica è (cfr. Franciosi [1987], vol.II, p.385):

$$C_b \frac{d^4 \psi}{dz^4} + C_t \frac{d^2 \psi}{dz^2} = 0 \quad (6.11)$$

dove:

$$C_t = \frac{GI_p}{q}, \quad (6.12)$$

e  $C_b$  è il *bimomento*.

L'equazione caratteristica è:

$$\mu^4 + k^2 \mu^2 = 0 \quad (6.13)$$

avendo definito

$$k^2 = \frac{C_t}{C_b}. \quad (6.14)$$

La linea elastica è quindi fornita da:

$$\psi(z) = D_1 + D_2 z + D_3 \cosh(kz) + D_4 \sinh(kz) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} \quad (6.15)$$

con  $\boldsymbol{\alpha} = \{1, z, \cosh(kz), \sinh(kz)\}$ .

Le condizioni ai limiti sono:

$$\psi(0) = \psi_1 \quad (6.16)$$

$$\psi'(0) = \psi'_1 \quad (6.17)$$

$$\psi(L) = \psi_2 \quad (6.18)$$

$$\psi'(L) = \psi'_2 \quad (6.19)$$

e conducono al sistema ( $S = \text{Sinh}(kL)$ ,  $C = \text{Cosh}(kL)$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & L & C & S \\ 0 & 1 & kS & kC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi'_1 \\ \psi_2 \\ \psi'_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

ossia, matricialmente,  $\mathbf{CA} = \mathbf{d}$ . Invertendo la matrice  $\mathbf{C}$  si ottiene:

$$D_1 = \frac{(Sk^2L - kC + k)\psi_1 + (kLC - S)\psi'_1 + k(1 - C)\psi_2 + (S - kL)\psi'_2}{D} \quad (6.21)$$

$$D_2 = \frac{-Sk^2\psi_1 + k^2(1 - C)\psi'_1 + k^2S\psi_2 + k(1 - C)\psi'_2}{D} \quad (6.22)$$

$$D_3 = \psi_1 - D_1 \quad (6.23)$$

$$D_4 = \frac{\psi'_1 - D_2}{k}$$

$$D = k[2(1 - C)] + kLS \quad (6.24)$$

e quindi la linea elastica è:

$$\psi(z) = N_1\psi_1 + N_2\psi'_1 + N_3\psi_2 + N_4\psi'_2 \quad (6.25)$$

con le funzioni di forma:

$$N_1(z) = \frac{(k^2L - k^2z + k \sinh(kz))S + k(1 - C)(1 + \cosh(kz))}{D} \quad (6.26)$$

$$N_2(z) = \frac{kz(1 - C) - (CkL - S)(\cosh(kz) - 1) + (SkL + 1 - C) \sinh(kz)}{D} \quad (6.27)$$

$$N_3(z) = \frac{k(C - 1)(\cosh(kz) - 1) - kS(\sinh(kz) - kz)}{D} \quad (6.28)$$

$$N_4(z) = \frac{(C - 1)(\sinh(kz) - kz) - (S - kL)(\cosh(kz) - 1)}{D} \quad (6.29)$$

Le caratteristiche della sollecitazione sono il momento torcente  $M_t$ , pari a (cfr. Franciosi [1987], Vol.II, p.370):

$$M_t = M_1 + M_2 = C_t \frac{d\psi}{dz} - C_b \frac{d^3\psi}{dz^3} \quad (6.30)$$

ed ancora:

$$B = C_b \frac{d^2\psi}{dz^2} \quad (6.31)$$

Si noti che talvolta  $B$  viene chiamato *bimomento*, e che in tal caso la quantità  $C_b$  viene definita *inerzia torsionale*. Derivando opportunamente l'espressione della linea elastica si giunge a:

$$M_t = \frac{C_t}{D} [(\psi_2 - \psi_1)Sk^2 - (\psi'_1 + \psi'_2)(C - 1)k] \quad (6.32)$$

$$B = \frac{C_t}{D} \{(\psi_2 - \psi_1) [(C - 1)k \cosh(kz) - Sk \sinh(kz)] + (S - CkL) \cosh(kz) + (SkL + 1 - C) \sinh(kz)\} \psi'_1 \\ [(kL - S) \cosh(kz) + (C - 1) \sinh(kz)] \psi'_2 \quad (6.33)$$

Come sempre, le relazioni tra le caratteristiche interne e le forze nodali sono:

$$\mathcal{M}_{t1} = -M_t(0) \quad \mathcal{M}_{t2} = M_t(L) \quad (6.34)$$

$$\mathcal{B}_1 = -B(0) \quad \mathcal{B}_2 = B(L) \quad (6.35)$$

e quindi la matrice di rigidezza elementare è:

$$\mathbf{k}_e = \frac{C_t}{L} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 & -k_2 & k_4 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_4 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

con:

$$k_1 = \frac{Sk^2L}{D} \quad (6.37)$$

$$k_2 = \frac{L(C - 1)k}{D} \quad (6.38)$$

$$k_3 = \frac{L^2k}{D} \left( C - \frac{S}{kL} \right) \quad (6.39)$$

$$k_4 = \frac{L^2k}{D} \left( \frac{S}{kL} - 1 \right) \quad (6.40)$$

**6.1.3. Trave soggetta a flessione e taglio lungo l'asse  $y$** 

La trattazione è identica a quella svolta per la flessione-taglio lungo l'asse  $x$ . Occorre solo tener conto che la convenzione dei segni muta, e che, pertanto, tutti i coefficienti che legano forze a rotazioni (e quindi anche i coefficienti che legano le coppie alle traslazioni) devono cambiare di segno. Si ottiene quindi la matrice:

$$\mathbf{k}_e = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Non resta infine che assemblare le varie matrici parziali, per ottenere la matrice di un elemento di telaio spaziale in regime di torsione uniforme. Si ottiene così la matrice, corrispondente al vettore  $\mathbf{d}_a$  riportato in (6.1):

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e11} & \mathbf{k}_{e12} \\ \mathbf{k}_{e12}^T & \mathbf{k}_{e22} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

con:

$$\mathbf{k}_{e11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{qL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{k}_{e12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{qL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{k}_{e22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{qL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

## 6.2. La matrice di rigidezza in coordinate globali

In coordinate globali, il vettore dei gradi di libertà diviene:

$$\mathbf{d}_g^T = \{u_{X1}, v_{Y1}, w_{Z1}, \vartheta_{X1}, \vartheta_{Y1}, \vartheta_{Z1}, u_{X2}, v_{Y2}, w_{Z2}, \vartheta_{X2}, \vartheta_{Y2}, \vartheta_{Z2}\} \quad (6.46)$$

col corrispondente vettore di forze nodali:

$$\mathbf{f}_g^T = \{F_{X1}, F_{Y1}, F_{Z1}, \mathcal{M}_{X1}, \mathcal{M}_{Y1}, \mathcal{M}_{Z1}, F_{X2}, F_{Y2}, F_{Z2}, \mathcal{M}_{X2}, \mathcal{M}_{Y2}, \mathcal{M}_{Z2}\} \quad (6.47)$$

La matrice di rotazione  $\mathbf{R}$ , come già visto per le travature reticolari, è:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

e quindi la matrice  $\mathbf{k}$  di rigidezza elementare in coordinate globali sarà fornita da:

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}_T^T \mathbf{k}_e \mathbf{R}_T \quad (6.49)$$

con:

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

La prima riga della matrice  $\mathbf{R}$  contiene i coseni direttori degli angoli che l'asse  $z$  (ossia l'asse della trave) forma con gli assi  $X, Y$  e  $Z$ . Essi sono facilmente calcolabili, come già visto, e sono:

$$\lambda_{11} = \frac{X_2 - X_1}{L} \quad (6.51)$$

$$\lambda_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \quad (6.52)$$

$$\lambda_{13} = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad (6.53)$$

Le altre due righe di coseni direttori non giocavano alcun ruolo, nell'ambito delle travature tridimensionali.

Per definire anche i coseni direttori degli assi  $y$  ed  $x$ , occorre anzitutto orientare la terna  $(x, y, z)$ .

È sempre possibile ruotare gli assi in modo che l'asse  $y$  giaccia nel piano  $(X, Y)$ . Se tuttavia l'asse  $z$  della trave è allineato con l'asse  $Z$ , questa condizione è automaticamente soddisfatta, ed occorre imporre un'ulteriore condizione; si imporrà allora che l'asse  $y$  venga a coincidere con l'asse  $Y$ . In questo caso particolare, i coseni direttori sono forniti da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

nel caso illustrato in Figura 6.2, e:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

nel caso di Figura 6.3.

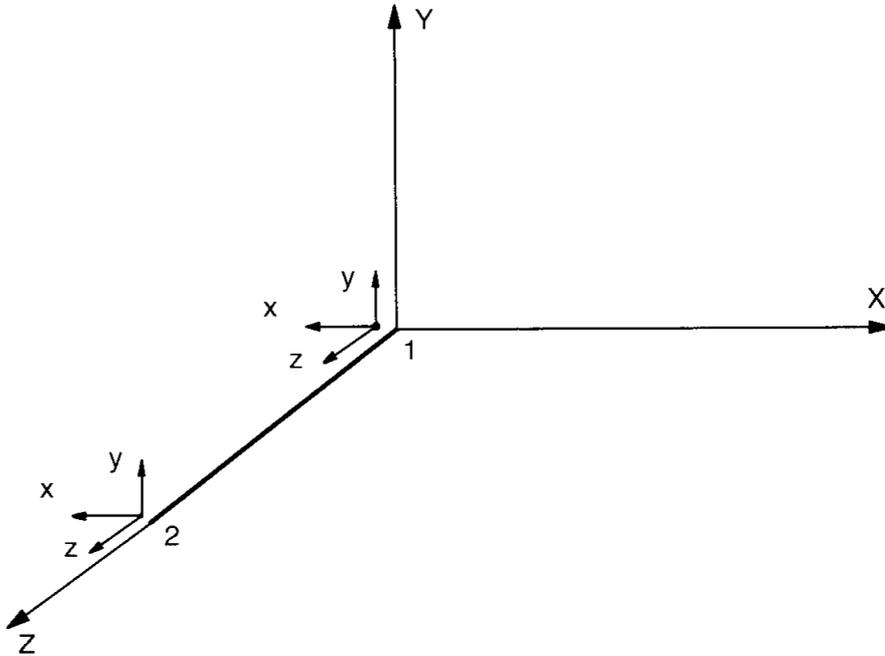


Figura 6.2- Primo caso particolare di allineamento

Se invece l'asse della trave non coincide con l'asse  $Z$ , il problema è più complesso, e va affrontato tramite l'uso dei prodotti vettoriali.

A tal fine, siano  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$  le componenti lungo  $(X, Y, Z)$  di un vettore unitario lungo  $z$ . L'asse  $y$  è ortogonale ad  $z$ , ed essendo costretto ad appartenere al piano  $(X, Y)$ , è anche ortogonale a  $Z$ . Quindi, il prodotto vettoriale tra un vettore lungo  $z$  ed un vettore lungo  $Z$  produrrà un vettore  $\mathbf{n}$  lungo  $y$ . Sarà quindi:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \end{bmatrix} = -\mathbf{i}\lambda_{12} + \mathbf{j}\lambda_{11} \quad (6.56)$$

e la lunghezza di  $\mathbf{n}$  sarà  $\sqrt{1 - \lambda_{13}^2}$ . Ne segue che i coseni direttori di un vettore unitario lungo  $y$  sono:

$$\lambda_{21} = -\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{1 - \lambda_{13}^2}} \quad (6.57)$$

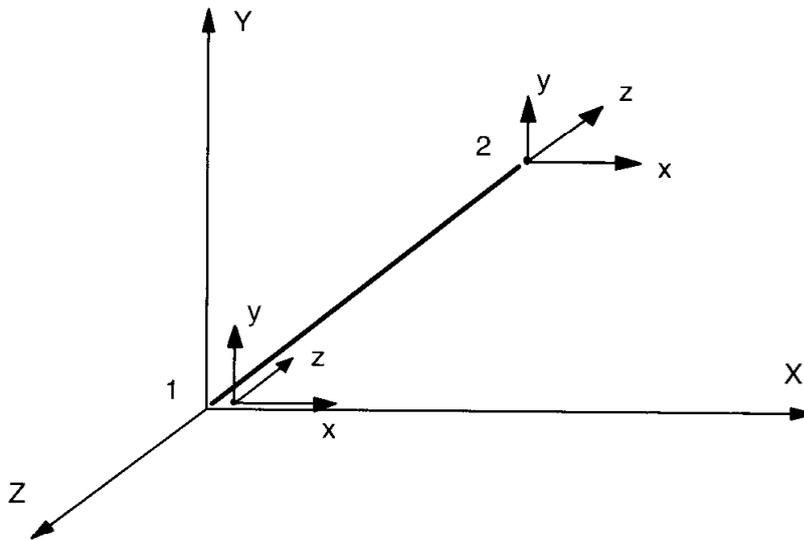


Figura 6.3- Secondo caso particolare di allineamento

$$\lambda_{22} = \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{1 - \lambda_{13}^2}} \quad (6.58)$$

$$\lambda_{23} = 0 \quad (6.59)$$

Un vettore in direzione  $x$  lo si può infine generare come prodotto vettoriale tra vettori unitari lungo  $z$  ed  $y$ :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

da cui:

$$\lambda_{31} = -\frac{\lambda_{11}\lambda_{13}}{\sqrt{1 - \lambda_{13}^2}} \quad (6.61)$$

$$\lambda_{32} = -\frac{\lambda_{12}\lambda_{13}}{\sqrt{1 - \lambda_{13}^2}} \quad (6.62)$$

$$\lambda_{33} = \sqrt{1 - \lambda_{13}^2} \quad (6.63)$$

Si noti ora che le relazioni tra forze nodali e spostamenti nodali sono state trattate nell'ipotesi che gli assi  $(x, y)$  siano assi principali d'inerzia della sezione retta. D'altro canto,  $y$  è stato costretto a giacere nel piano  $(X, Y)$ , come illustrato in Figura 6.4.

La matrice di rotazione  $\mathbf{R}^*$  che fa ruotare gli assi  $(x, y)$  fino a farli coincidere con gli assi principali d'inerzia è fornita da:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

poichè l'asse  $z$  è sempre principale.

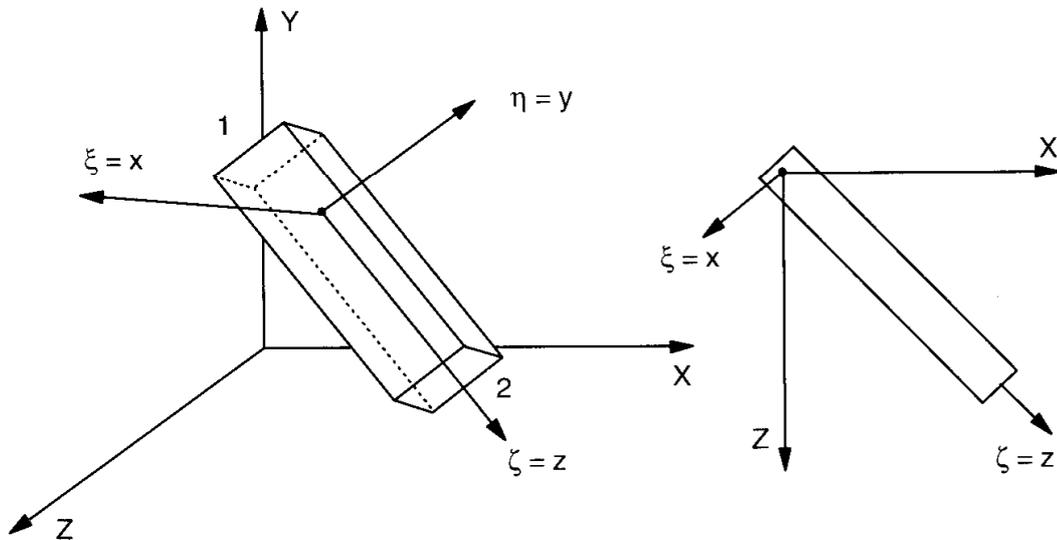


Figura 6.4- Assi locali principali d'inerzia ed assi globali in 3 dimensioni

Il vettore  $\mathbf{f}$ , espresso in termini di assi  $(x, y, z)$  diviene:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R}^{*-1} \mathbf{f} \quad (6.65)$$

ed analogamente il vettore degli spostamenti diviene:

$$\mathbf{d}' = \mathbf{R}^{*-1} \mathbf{d} \quad (6.66)$$

Ne segue che la relazione:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (6.67)$$

diviene:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{k}' \mathbf{d}' \quad (6.68)$$

con:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{R}^{*-1} \mathbf{k} \mathbf{R}^* \quad (6.69)$$

e  $\mathbf{k}'$  è la matrice di rigidità rispetto agli assi  $(x, y, z)$ .

La rotazione da assegnare alla coppia  $(x, y)$  per portarla a coincidere con gli assi principali d'inerzia della sezione retta non è sempre calcolabile in maniera immediata. Si può all'uopo usare il cosiddetto *metodo del terzo nodo*.

Si consideri la Figura 6.5, e si voglia calcolare l'angolo di cui va ruotata l'asta per far sì che gli assi principali di inerzia  $(\xi, \eta)$  vengano a coincidere con gli assi locali  $(x, y)$ , tenendo conto che la rotazione positiva è antioraria se vista dal nodo 1 al nodo 2.

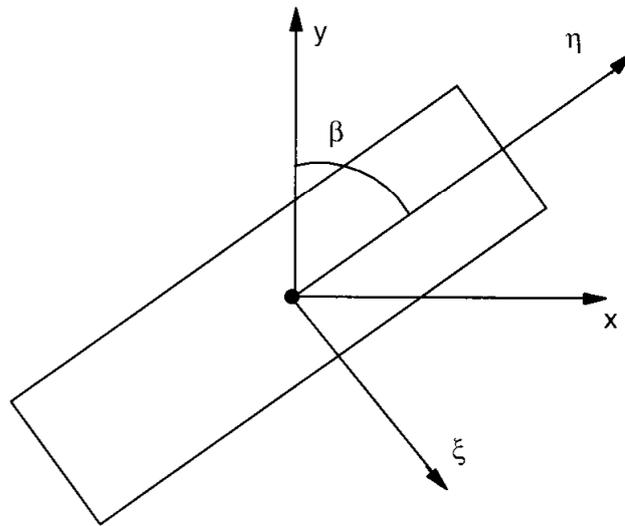


Figura 6.5- Metodo del terzo nodo

Per risolvere il problema, si scelga un punto  $p$  appartenente al piano  $(\xi, \eta)$ , ma non all'asse  $\xi$ . I tre nodi  $(1, 2, p)$  definiscono il piano principale  $(\xi, \eta)$ . Nel caso di figura, l'asse  $Y$  appartiene al piano  $(\xi, \eta)$  dell'elemento, e quindi può scegliersi un qualunque punto di  $Y$ , eccetto il nodo 1.

Il prodotto vettoriale di due vettori indipendenti appartenenti al piano  $(\xi, \eta)$  forniranno un vettore normale a tale piano (e quindi in direzione  $\zeta$ ). Scegliendo i vettori  $\vec{12}$  e  $\vec{1p}$  si ha il vettore:

$$\zeta^* = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_p - x_1) & (y_p - y_1) & (z_p - z_1) \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

di componenti:

$$\zeta_x = (y_2 - y_1)(z_p - z_1) - (y_p - y_1)(z_2 - z_1) \quad (6.71)$$

$$\zeta_y = (x_2 - x_1)(z_p - z_1) - (x_p - x_1)(z_2 - z_1) \quad (6.72)$$

$$\zeta_z = (x_2 - x_1)(y_p - y_1) - (x_p - x_1)(y_2 - y_1) \quad (6.73)$$

La lunghezza del vettore  $\zeta$  è quindi fornita da:

$$E = \sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2} \quad (6.74)$$

ed i suoi coseni direttori sono:

$$\lambda_\zeta = \frac{\zeta_x}{E} \quad (6.75)$$

$$\mu_\zeta = \frac{\zeta_y}{E} \quad (6.76)$$

$$\nu_\zeta = \frac{\zeta_z}{E} \quad (6.77)$$

$(\lambda_\zeta, \mu_\zeta, \nu_\zeta)$  sono le componenti di un vettore unitario steso sull'asse  $\zeta$ , ed analogamente,  $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$  sono le componenti di un vettore unitario steso sull'asse  $z$ . L'angolo tra questi due vettori è tale che:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} \quad (6.78)$$

con  $a = b = 1$ . Ne segue che:

$$\cos \beta = 1 - \frac{c^2}{2} \quad (6.79)$$

con:

$$c^2 = (\lambda_\zeta - \lambda_{11})^2 + (\mu_\zeta - \lambda_{12})^2 + (\nu_\zeta - \lambda_{13})^2 \quad (6.80)$$

Un'ulteriore complicazione sorge se l'angolo tra  $y$  e  $z$  è minore di  $90^\circ$ . (Figura 6.6). In tal caso  $\beta$  deve essere scalato in  $(360^\circ - \beta)$ . I coseni direttori di  $\zeta$  sono già noti, i coseni direttori di  $y$  sono immediatamente calcolabili, e quindi l'angolo  $\beta$  è subito deducibile.

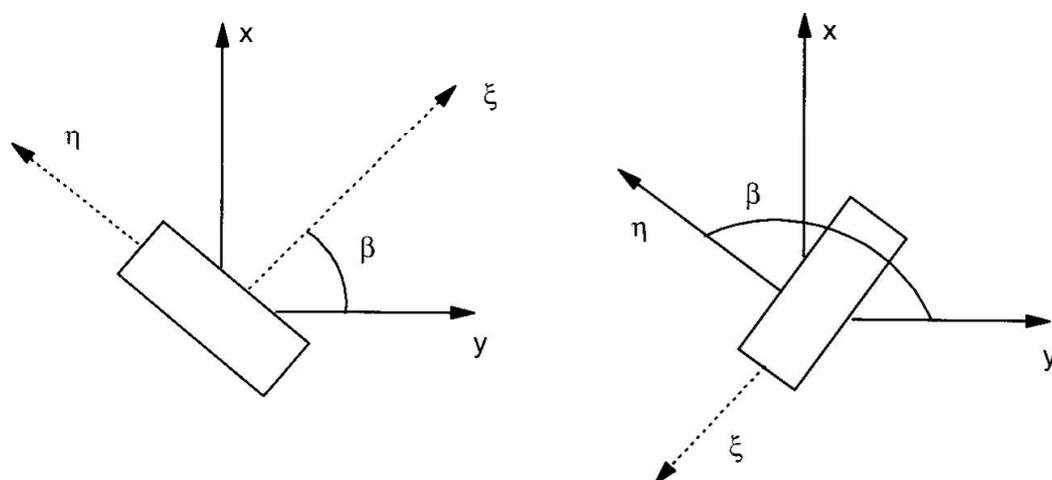


Figura 6.6- Un caso particolare del metodo del terzo nodo

### 6.3. Note bibliografiche

La matrice di rigidezza torsionale, basata sulle ipotesi di De Saint Venant, deve essere utilizzata in presenza di travi a sezione compatta, mentre la variabilità dell'angolo specifico di torsione gioca un ruolo determinante qualora le travi siano in parete sottile, ed a sezione aperta. In quest'ultimo caso Chaudhary [1982] ha seguito la teoria approssimata di Vlasov [1961], risolvendo l'equazione differenziale della linea elastica, e deducendo la matrice di rigidezza per travi di sezione sottile dotate di un asse di simmetria. Ulteriori investigazioni possono consultarsi in Wekezer [1984], Yang e McGuire [1984], Lee e Kim [1987], Mottershead [1988], Dvorkin et al. [1989] e Krajcinovic [1970]. Nel caso di travi a sezione moderatamente sottile, può consultarsi Krenk e Jeppesen [1989].

Sebbene, in linea di principio, quasi tutte le strutture intelaiate siano da considerare spaziali, è raro che si conduca una accurata analisi tridimensionale secondo i dettami del presente capitolo. Molto spesso si riesce ad individuare un modello piano semplificato, riconducendosi alle analisi bidimensionali del capitolo precedente.

Un discorso a parte merita la modellazione dell'insieme travi-solai, che porterebbe, se affrontato in rigore, ad utilizzare elementi monodimensionali (a schematizzare travi e pilastri) e bidimensionali (a schematizzare i solai). E' invece usuale considerare i solai infinitamente rigidi nel loro piano, giungendo ad un modello monodimensionale semplificato, (si veda ad esempio Weaver e Gere [1990, pp.374-378]). I più noti programmi di calcolo commerciali di edifici tridimensionali si basano su questa ipotesi (cfr. Wilson e Dovey [1972], poi in parte indebolita (Li [1989a, 1989b])).

Si può poi schematizzare la struttura come un modello continuo, da trattare analiticamente o numericamente. Quest'ultimo approccio è particolarmente seguito

nell'analisi degli edifici alti, dove la cosiddetta *analogia della membrana ortotropa* fornisce risultati soddisfacenti (Si veda Ha et al. [1978], [1989]).