

5. Le strutture intelaiate piane

5.1. La matrice di rigidezza elementare dell'elemento di trave

Si consideri la trave prismatica di Figura 5.1, di luce L ed estremi 1 e 2, con momento d'inerzia I e modulo di Young E costanti lungo l'asse (trave ortodossa). Si assumono come gradi di libertà lo spostamento verticale v , positivo se verso il basso, e la rotazione φ , positiva se antioraria.

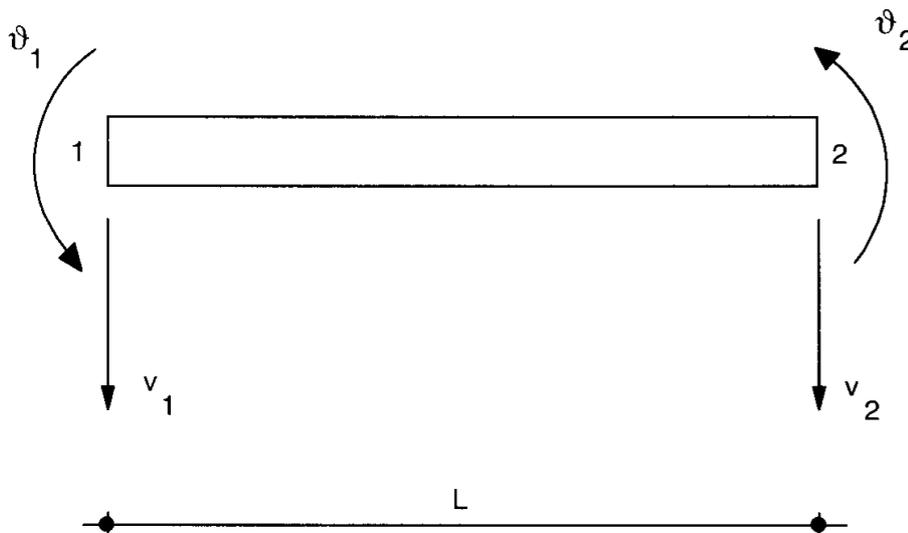


Figura 5.1- Libertà nodali per la trave ortodossa di Eulero – Bernoulli

Corrispondentemente, agli estremi della trave nasceranno due forze verticali F_{n1} ed F_{n2} , positive se dirette verso il basso, e due coppie \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 , positive se antiorarie, come illustrato in Figura 5.2.

Si è trascurato il grado di libertà $u(z)$ di traslazione orizzontale, perchè si è già visto nel capitolo 2 che esso si disaccoppia.

La matrice di rigidezza elementare di questo elemento avrà quindi quattro righe e quattro colonne, e per la sua deduzione può seguirsi la via illustrata nel capitolo 4 per l'elemento asta:

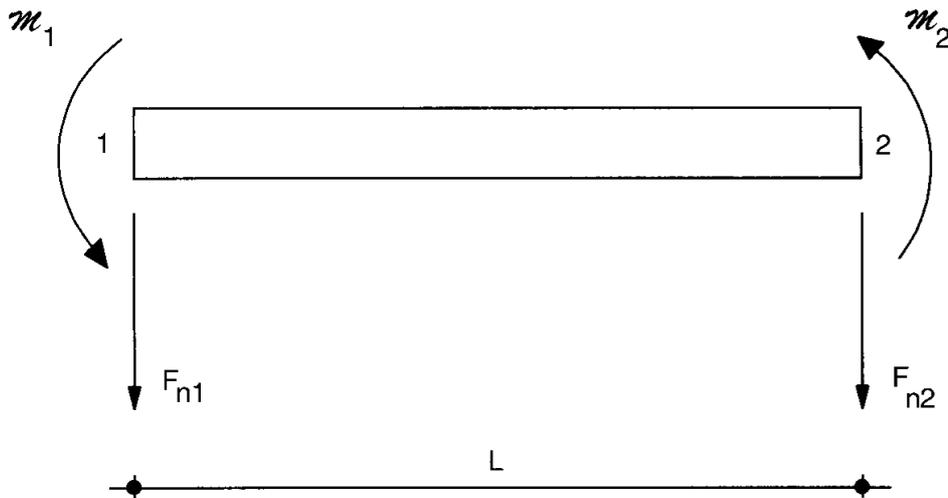


Figura 5.2- Forze nodali per la trave ortodossa di Eulero – Bernoulli

Deduzione dell'equazione differenziale della linea elastica

Imponendo l'equilibrio del concio elementare di Figura 5.3 si giunge alle equazioni:

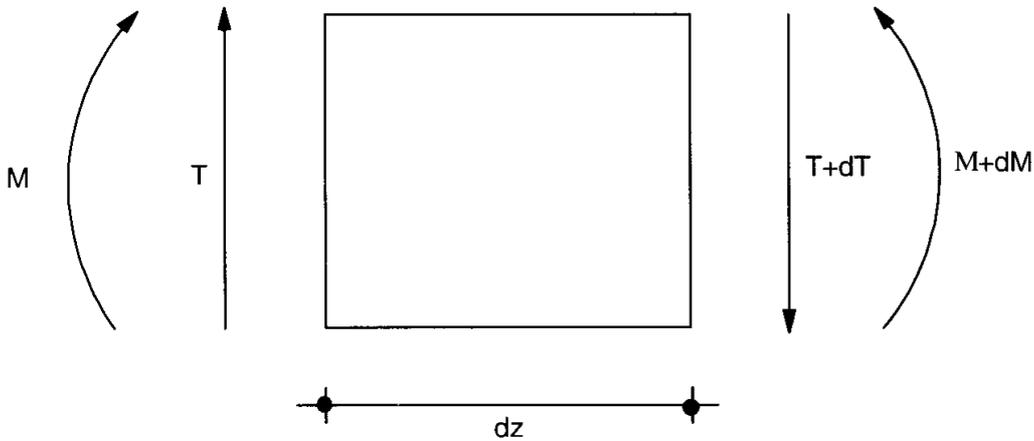


Figura 5.3- Forze agenti sul concio elementare

$$\frac{dT}{dz} = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{dM}{dz} = T \tag{5.2}$$

La prima esprime l'equilibrio delle forze rispetto alla traslazione verticale, la seconda l'equilibrio alla rotazione intorno alla faccia destra del concio. Ci si può banalmente ricondurre ad un'unica equazione:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = 0, \quad (5.3)$$

ed introducendo la nota relazione momenti–curvature:

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (5.4)$$

si ottiene la richiesta equazione differenziale della linea elastica:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \quad (5.5)$$

La soluzione di questa equazione si scrive:

$$v(z) = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} \quad (5.6)$$

dove $\boldsymbol{\alpha} = [1, z, z^2, z^3]$ è un vettore riga di monomi, ed $\mathbf{A} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ è un vettore colonna di costanti.

Imposizione delle condizioni ai limiti

Imponendo che gli estremi subiscano gli indicati spostamenti nodali si hanno le condizioni:

$$v(0) = v_{n1} \quad (5.7)$$

$$v'(0) = -\vartheta_1 \quad (5.8)$$

$$v(L) = v_{n2} \quad (5.9)$$

$$v'(L) = -\vartheta_2 \quad (5.10)$$

dove si è utilizzata la relazione che lega le rotazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\varphi(z) = -v'(z) \quad (5.11)$$

Si ottiene quindi il sistema di quattro equazioni:

$$C_1 = v_{n1} \quad (5.12)$$

$$C_2 = -\vartheta_1 \quad (5.13)$$

$$C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 = v_{n2} \quad (5.14)$$

$$C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 = -\vartheta_2 \quad (5.15)$$

che matricialmente si scrive:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{d} \quad (5.16)$$

con $\mathbf{d}^T = \{v_{n1}, \vartheta_1, v_{n2}, \vartheta_2\}$ e:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

L'inversione di \mathbf{C} può condursi manualmente, o tramite programma di calcolo simbolico (ad esempio MATHEMATICA), ottenendo:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

e quindi:

$$v(z) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{d} = \mathbf{N}^T \mathbf{d} = \sum_{i=1}^4 N_i(z)d_i \quad (5.19)$$

Svolgendo il prodotto $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$ si ottiene il vettore delle *funzioni di forma* \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ L(-\zeta + 2\zeta^2 - \zeta^3) \\ 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\ L(\zeta^2 - \zeta^3) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

dove si è introdotta l'ascissa adimensionale $\zeta = z/L$. Si noti che ciascuna funzione di forma assume valore unitario (in modulo) in corrispondenza del grado di libertà che le compete, ed è zero negli altri gradi di libertà. Ad esempio, N_1 è pari ad uno se valutata in $\zeta = 0$, è nulla in $\zeta = 1$, e la sua derivata è nulla sia in 0 che in 1. N_2 è nulla in ambedue gli estremi, e la sua derivata è pari a -1 in $\zeta = 0$, ed è nulla in $\zeta = 1$.

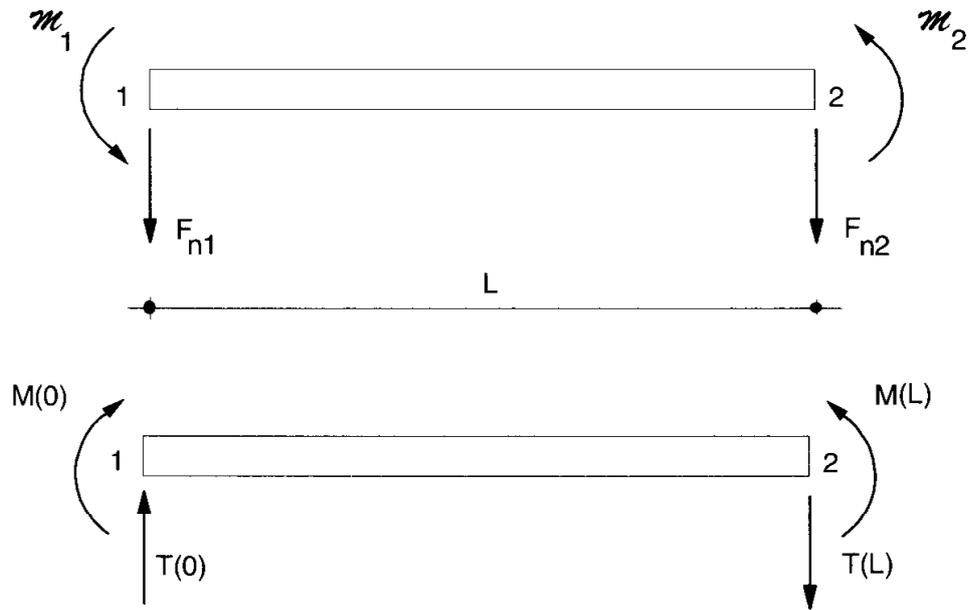


Figura 5.4- Caratteristiche e forze nodali sulla trave

Calcolo delle caratteristiche

Occorre calcolare sia il momento flettente $M(z)$ che il taglio $T(z)$:

$$M(z) = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^2 N_i}{dz^2} d_i \right] \quad (5.21)$$

$$T(z) = -EI \frac{d^3 v}{dz^3} = -EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^3 N_i}{dz^3} d_i \right] \quad (5.22)$$

Calcolo delle forze nodali

Paragonando le convenzioni dei segni per forze nodali e caratteristiche si ottiene (Figura 5.4):

$$F_{n1} = -T(0) = EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^3 N_i}{dz^3} d_i \right] = 12 \frac{EI}{L^3} v_{n1} - 6 \frac{EI}{L^2} \vartheta_1 - 12 \frac{EI}{L^3} v_{n2} - 6 \frac{EI}{L^2} \vartheta_2 \quad (5.23)$$

$$\mathcal{M}_1 = -M(0) = EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^2 N_i}{dz^2} d_i \right] = -6 \frac{EI}{L^2} v_{n1} + 4 \frac{EI}{L} \vartheta_1 + 6 \frac{EI}{L^2} v_{n2} + 2 \frac{EI}{L} \vartheta_2 \quad (5.24)$$

$$F_{n2} = T(L) = -EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^3 N_i}{dz^3} d_i \right] = -12 \frac{EI}{L^3} v_{n1} + 6 \frac{EI}{L^2} \vartheta_1 + 12 \frac{EI}{L^3} v_{n2} + 6 \frac{EI}{L^2} \vartheta_2 \quad (5.25)$$

$$\mathcal{M}_2 = M(L) = -EI \left[\sum_{i=1}^4 \frac{d^2 N_i}{dz^2} d_i \right] = -6 \frac{EI}{L^2} v_{n1} + 2 \frac{EI}{L} \vartheta_1 + 6 \frac{EI}{L^2} v_{n2} + 4 \frac{EI}{L} \vartheta_2 \quad (5.26)$$

da cui la matrice di rigidezza elementare di trave ortodossa:

$$\mathbf{k}_e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

5.2. Un approccio alternativo

Se l'elemento trave studiato non ha rigidezza flessionale costante, diviene complicato, se non impossibile, risolvere l'equazione differenziale della linea elastica. Può quindi essere preferibile calcolare prima le flessibilità, come illustrato nel capitolo 3, e da queste, tramite inversione, ricondursi alla matrice di rigidezza.

Sia allora \mathbf{F}_i la matrice che lega gli spostamenti nell'estremo 2 della trave alle forze agenti in 2. Invertendo la \mathbf{F}_i si calcolano le rigidezze corrispondenti ad una traslazione verticale unitaria e ad una rotazione unitaria in 2. Sarà:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} S_{i11} & S_{i12} \\ S_{i12} & S_{i22} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

con:

$$S_{i11} = \frac{F_{i22}}{\Delta} \quad (5.29)$$

$$S_{i12} = -\frac{F_{i12}}{\Delta} \quad (5.30)$$

$$S_{i22} = \frac{F_{i11}}{\Delta} \quad (5.31)$$

e:

$$\Delta = F_{i11}F_{i22} - F_{i12}^2. \quad (5.32)$$

Per ottenere le rigidezze corrispondenti ad una traslazione verticale unitaria ed una rotazione unitaria dell'estremo 1, bisogna ricorrere a considerazioni di equilibrio.

Si consideri allora la trave a mensola di Figura 5.5, e si partizioni la matrice di rigidezza \mathbf{k}_e separando i gradi di libertà attivi (nel caso in esame, la traslazione e la rotazione in 2) da quelli impediti (la traslazione e la rotazione in 1).

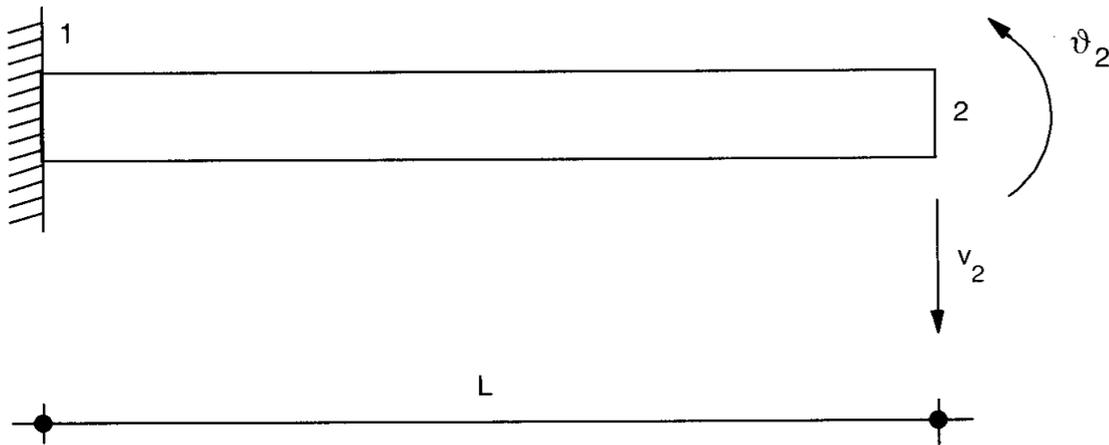


Figura 5.5- Trave a mensola

Si ha:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{vv} & \mathbf{k}_{vl} \\ \mathbf{k}_{lv} & \mathbf{k}_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_v \\ \mathbf{d}_l \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

o anche, essendo $\mathbf{d}_v = 0$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{vl} \\ \mathbf{k}_{ll} \end{bmatrix} \{\mathbf{d}_l\} \quad (5.34)$$

\mathbf{k}_{ll} è ovviamente uguale ad \mathbf{S}_i . Per ottenere le altre tre sottomatrici in funzione di \mathbf{k}_{ll} , si scriva la prima delle (5.34):

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{k}_{vl}\mathbf{d}_l \quad (5.35)$$

D'altra parte \mathbf{P}_v può anche ricavarsi immediatamente, a partire da \mathbf{P}_l , sfruttando le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno al nodo 1:

$$\mathbf{P}_v = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{P}_l = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_l \quad (5.36)$$

e quindi:

$$\mathbf{P}_v = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{P}_l = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \mathbf{d}_l \quad (5.37)$$

Paragonando la (5.37) con la (5.35) si ottiene:

$$\mathbf{k}_{vl} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \quad (5.38)$$

ed immediatamente:

$$\mathbf{k}_{lv} = \mathbf{k}_{ll} \boldsymbol{\Phi}^T \quad (5.39)$$

Per ottenere \mathbf{k}_{vv} si scrivano per esteso le relazioni di rigidezza (5.33):

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{k}_{vv} \mathbf{d}_v + \mathbf{k}_{vl} \mathbf{d}_l \quad (5.40)$$

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{k}_{lv} \mathbf{d}_v + \mathbf{k}_{ll} \mathbf{d}_l \quad (5.41)$$

Premoltiplicando la seconda per $\boldsymbol{\Phi}$ si ottiene:

$$\boldsymbol{\Phi} \mathbf{P}_l = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{lv} \mathbf{d}_v + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \mathbf{d}_l \quad (5.42)$$

ossia:

$$\mathbf{P}_v = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{lv} \mathbf{d}_v + \mathbf{k}_{vl} \mathbf{d}_l. \quad (5.43)$$

Un semplice paragone con la (5.40) porta a scrivere:

$$\mathbf{k}_{vv} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{lv} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \boldsymbol{\Phi}^T \quad (5.44)$$

In definitiva si ha:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \boldsymbol{\Phi}^T & \boldsymbol{\Phi} \mathbf{k}_{ll} \\ \mathbf{k}_{ll} \boldsymbol{\Phi}^T & \mathbf{k}_{ll} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Se, per semplicità di scrittura, si pone:

$$B = S_{i11} \quad C = S_{i12} \quad D = S_{i22} \quad (5.46)$$

allora \mathbf{k}_e si scrive, svolgendo i prodotti:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} B & -BL + C & -B & BL - C \\ -BL + C & BL^2 - 2CL + D & -C & CL - D \\ -B & -C & B & C \\ BL + C & CL - D & C & D \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

5.3. Gli elementi a sezione variabile

Seguendo il metodo descritto nella sezione precedente, si possono dedurre le matrici elementari di rigidezza per travi ad altezza linearmente variabile, oppure a larghezza linearmente variabile, oppure ancora con altezza variabile con legge parabolica (cfr. Eisenberger [1985]). Tutti gli integrali del paragrafo sono stati calcolati con MATHEMATICA.

Sezione con base linearmente variabile

Siano b_1 ed b_2 le basi della sezione nei nodi 1 e 2, come illustrato in Figura 5.6. La legge di variazione è fornita da:

$$b(z) = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{z}{L} \quad (5.48)$$

e di conseguenza il momento d'inerzia è dato da:

$$I(z) = \frac{h^3}{12} \left[b_1 + (b_2 - b_1) \frac{z}{L} \right] \quad (5.49)$$

Per il calcolo dei coefficienti della matrice di flessibilità si ricorre al metodo di Saviotti (Franciosi [1987] vol.III), che ben si presta ad essere automatizzato.

Si consideri prima il caso della forza unitaria nell'estremo 2.

Il momento flettente è pari a:

$$M(z) = -(L - z) \quad (5.50)$$

e quindi la rotazione è:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M}{EI} dz = -\frac{12}{Eh^3} \int_0^z \frac{L - z}{b_1 + (b_2 - b_1)z/L} dz \quad (5.51)$$

Svolgendo l'integrale si ha:

$$\varphi(z) = -\frac{12}{Eh^3} \left[-\frac{Lz}{b_2 - b_1} - \frac{b_2 L^2 \ln(b_1 L)}{(b_2 - b_1)^2} + \frac{b_2 L^2 \ln(b_1 L + (b_2 - b_1)z)}{(b_2 - b_1)^2} \right] \quad (5.52)$$

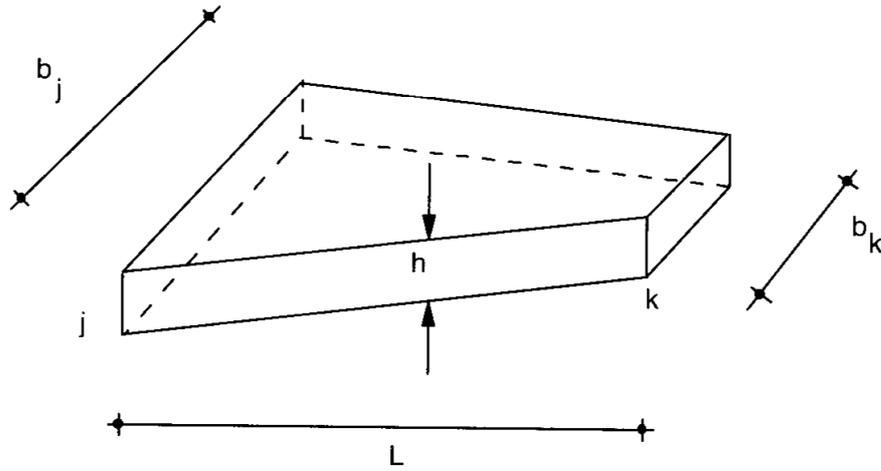


Figura 5.6- Trave a base linearmente variabile

che per $z = L$ fornisce il coefficiente F_{i12} :

$$F_{i12} = \frac{12L^3}{Eh^3(b_2 - b_1)^2} [b_2 - b_1 + b_2 \ln(b_1L) - \ln(b_2L)] \quad (5.53)$$

Si ha poi:

$$v(z) = - \int_0^z \varphi(z) dz \quad (5.54)$$

e svolgendo l'integrale:

$$v(z) = \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{b_1 b_2 L^3}{(b_2 - b_1)^3} - \frac{Lz^2}{2(b_2 - b_1)} - \frac{b_2 L^2 (b_1 L + (b_2 - b_1)z)}{(b_2 - b_1)^3} \right. \\ \left. - \frac{b_1 b_2 L^3 \ln(b_1 L)}{(b_2 - b_1)^3} - \frac{b_2 L^2 z \ln(b_1 L)}{(b_2 - b_1)^2} \right. \\ \left. + \frac{b_2 L^2 [b_1 L + (b_2 - b_1)z \ln(b_1 L + (b_2 - b_1)z)]}{(b_2 - b_1)^3} \right] \quad (5.55)$$

Valutando in $z = L$ si ha il coefficiente F_{i11} :

$$F_{i11} = \frac{6L^3}{Eh^3(b_1 - b_2)^3} [b_1^2 - 4b_1 b_2 + 3b_2^2 + 2b_2^2 [\ln(b_1 L) - \ln(b_2 L)]] \quad (5.56)$$

Analogamente si opera nel caso di coppia unitaria nell'estremo 2. In questo caso si ha $M(z) = 1$ e quindi:

$$\varphi(z) = \frac{12}{Eh^3} \int_0^z \frac{1}{b_1 + (b_2 - b_1)z/L} = \frac{12}{Eh^3} [\ln(b_1 + (b_2 - b_1)z/L - \ln b_1)] \quad (5.57)$$

da cui:

$$F_{i22} = \frac{12L}{Eh^3(b_2 - b_1)} [\ln(b_1) - \ln b_2] \quad (5.58)$$

Per verifica può ottenersi $v(z)$ anche in questo caso, e dovrà essere $F_{i12} = F_{i21}$.

Sezione con altezza linearmente variabile

Siano h_1 ed h_2 le altezze della sezione nei nodi 1 e 2, come illustrato in Figura 5.7. La legge di variazione è fornita da:

$$h(z) = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{L} \quad (5.59)$$

Si consideri prima il caso della forza unitaria nell'estremo 2. Il momento flettente è pari a:

$$M(z) = -(L - z) \quad (5.60)$$

e quindi la rotazione è:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M}{EI} dz = -\frac{12}{Eb} \int_0^z \frac{L - z}{(h_1 + (h_2 - h_1)z/L)^3} dz \quad (5.61)$$

Svolgendo l'integrale si ha:

$$\varphi(z) = -\frac{12}{Eb} \left[\frac{L^2 z (2Lh_1 - 2h_1 z + h_2 z)}{2h_1^2 (Lh_1 - h_1 z + h_2 z)^2} \right] \quad (5.62)$$

che per $z = L$ fornisce il coefficiente F_{i12} :

$$F_{i12} = \frac{6L^2}{Ebh_1^2 h_2} \quad (5.63)$$

Si ha poi:

$$v(z) = -\int_0^z \varphi(z) dz \quad (5.64)$$

e svolgendo l'integrale:

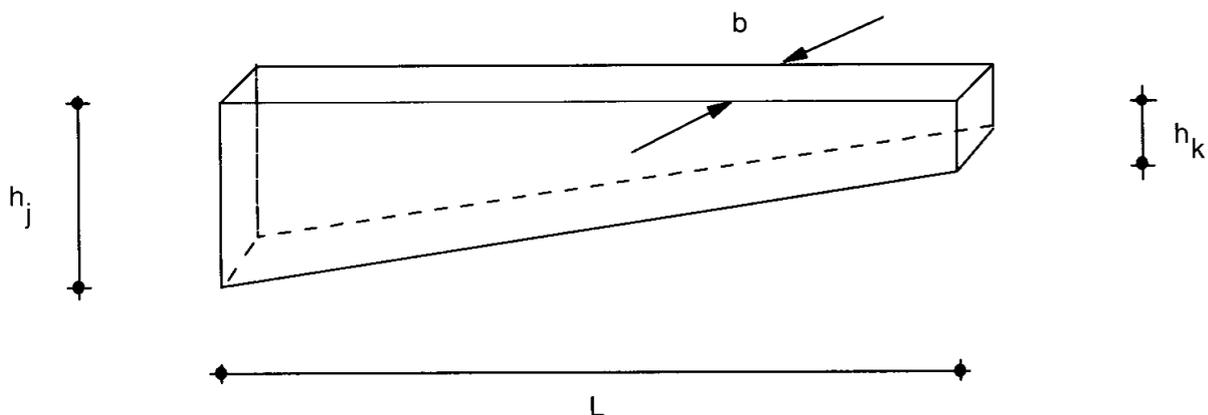


Figura 5.7- Trave ad altezza linearmente variabile

$$v(z) = \frac{12}{Eb} \left[\frac{L^3 h_2}{2h_1(h_2 - h_1)^3} + \frac{L^2 z}{h_1(h_1 - h_2)^2} - \frac{L^2 h_2 z}{2h_1^2(h_1 - h_2)^2} - \frac{L^4 h_2}{2(h_2 - h_1)^3(Lh_1 + (h_2 - h_1)z)} + \frac{L^3 \ln(Lh_1)}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{L^3 \ln(Lh_1 + (h_2 - h_1)z)}{(h_2 - h_1)^3} \right] \quad (5.65)$$

Valutando in $z = L$ si ha il coefficiente F_{i11} :

$$F_{i11} = \frac{12L^3}{Eb} \left[\frac{3h_1^2 + 4h_1 h_2 - h_2^2 + 2h_1^2 \ln(Lh_1) - 2h_1^2 \ln(Lh_2)}{2h_1^2(h_1 - h_2)^3} \right] \quad (5.66)$$

Analogamente si opera nel caso di coppia unitaria nell'estremo 2. In questo caso si ha:

$$M(z) = 1 \quad (5.67)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_0^z \frac{M}{EI} dz = \frac{12}{Eb} \int_0^z \frac{1}{(h_1 + (h_2 - h_1)z/L)^3} dz \\ &= \frac{12L}{Eb} \left[\frac{z(2Lh_1 - h_1 z + h_2 z)}{2h_1^2(Lh_1 - h_1 z + h_2 z)^2} \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

da cui:

$$F_{i22} = \frac{6L}{Eb} \left(\frac{h_1 + h_2}{h_1^2 + h_2^2} \right) \quad (5.69)$$

Per verifica può ottenersi $v(z)$ anche in questo caso, e dovrà essere $F_{i12} = F_{i21}$. Ed infatti:

$$v(z) = -\frac{6L}{Eb} \left[\frac{z^2}{h_1^2(Lh_1 - h_1z + h_2z)} \right] \quad (5.70)$$

5.4. L'effetto delle deformazioni da taglio

Tutto quanto detto finora si basa sulla relazione momenti – curvature valida per travi snelle, o cosiddette di Eulero – Bernoulli. Secondo tale teoria, le deformazioni dovute al taglio sono trascurabili rispetto alle deformazioni di origine flessionale. Ciò equivale ad ipotizzare un modulo G infinito, ed è giustificato se la trave non è molto tozza.

Se si vuol tener conto delle deformazioni indotte dal taglio, occorre modificare la relazione momenti – curvature già introdotta. Il modo più corretto conduce alla teoria delle travi cosiddette di Timoshenko, e sarà illustrato nella seconda parte del corso, dove verranno introdotti vari elementi finiti che seguono questa teoria. Un metodo più approssimato, ma indubbiamente più semplice, consiste nell'introdurre dei coefficienti correttivi nella matrice di rigidezza dedotta secondo la teoria di Eulero – Bernoulli, in modo da incrementare opportunamente le deformazioni (Bhatt [1986]).

Si consideri allora l'elemento di trave in Figura 5.8, e si indichi con v_t lo spostamento verticale dovuto al taglio.

La relazione generale che lega spostamenti e caratteristiche è fornita da (Franciosi [1987], Vol.II, pp.317-319):

$$\frac{dv_t}{dz} = \chi \frac{T}{GA} \quad (5.71)$$

dove G è il *modulo di elasticità tangenziale*, A è l'area della sezione retta, T è lo sforzo di taglio, e χ è il cosiddetto *fattore di taglio*.

Se T è costante, l'equazione (5.71) può integrarsi, ottenendo:

$$v_t = \chi \frac{T}{GA} z + C_1 \quad (5.72)$$

con C_1 costante di integrazione, che si ottiene imponendo che la v_t sia nulla all'ascissa generica z_1 :

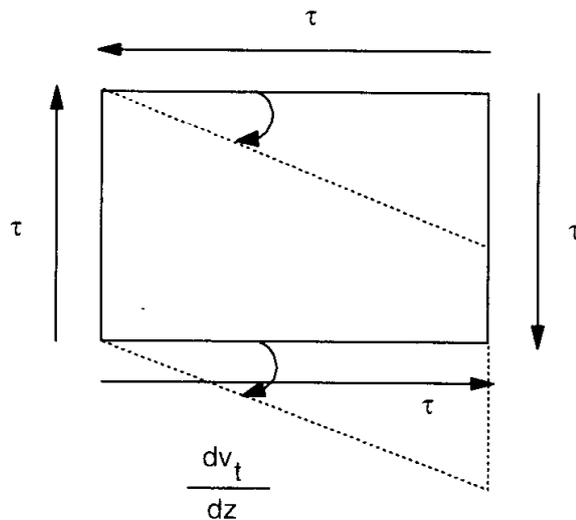


Figura 5.8- L'effetto delle deformazioni da taglio

$$v_t = \chi \frac{T}{GA} (z - z_1) \quad (5.73)$$

Si noti infine che le sezioni verticali restano indeformate per effetto delle deformazioni da taglio.

Tutto ciò premesso, si consideri l'elemento trave di Figura 5.9, e si supponga che l'estremo 1 sia soggetto al cedimento verticale V_{n1} . Trascurando le deformazioni da taglio, la relazione di rigidità:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (5.74)$$

fornisce le forze e le coppie agli estremi, ed il taglio $T = -F_{n1}$.

Se v_t si annulla in $z = L$, la deformazione da taglio è fornita da:

$$v_t = -\chi \frac{F_{n1}}{GA} (z - L) \quad (5.75)$$

Se ad esempio si sta esaminando una trave a sezione costante, allora la relazione (5.74) fornisce, per $\mathbf{d}^T = \{V_{n1}, 0, 0, 0\}$:

$$F_{n1} = 12 \frac{EI}{L^3} V_{n1} \quad (5.76)$$

In $z = 0$ si ottiene quindi:

$$v_t(0) = \chi \frac{F_{n1}}{GA} L = \beta V_{n1} \quad (5.77)$$

dove:

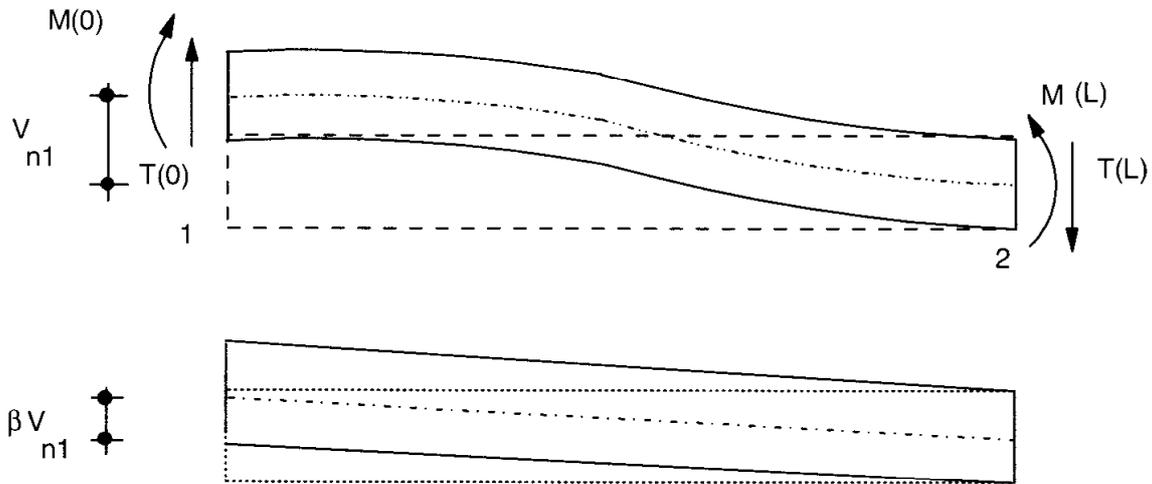


Figura 5.9- Trave soggetta a cedimento verticale a sinistra

$$\beta = 12\chi \frac{EI}{GAL^2} \tag{5.78}$$

è il coefficiente correttivo dovuto alle deformazioni da taglio, che si annulla per G che tende ad infinito.

Come si è detto, le deformazioni da taglio lasciano verticali le sezioni verticali, e quindi un abbassamento in 1 non causerà rotazioni agli estremi 1 e 2, né abbassamenti in 2. Pertanto, l'abbassamento totale dell'estremo 1 sarà somma dell'abbassamento flessionale V_{n1} e dell'abbassamento tagliante βV_{n1} . Si è quindi modificata la relazione di rigidità (5.74) come segue:

$$\begin{bmatrix} F_{n1} \\ \mathcal{M}_1 \\ F_{n2} \\ \mathcal{M}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_e \begin{bmatrix} (1 + \beta)V_{n1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

Per riportare il cedimento impresso al valore originario V_{n1} bisogna allora dividere la prima colonna della matrice \mathbf{k}_e per il coefficiente correttivo $(1 + \beta)$. Analogamente, anche la terza colonna andrà divisa per $(1 + \beta)$, per far sì che l'abbassamento dell'estremo 2 sia pari a V_{n2} .

Si consideri ora l'estremo 1 soggetto alla rotazione ϑ_1 , come illustrato in Figura 5.10. Se si tengono in conto solo gli effetti flessionali, la matrice di rigidità (per trave ortodossa) fornirà:

$$F_{n1} = -F_{n2} = -6 \frac{EI}{L^2} \vartheta_1 \tag{5.80}$$

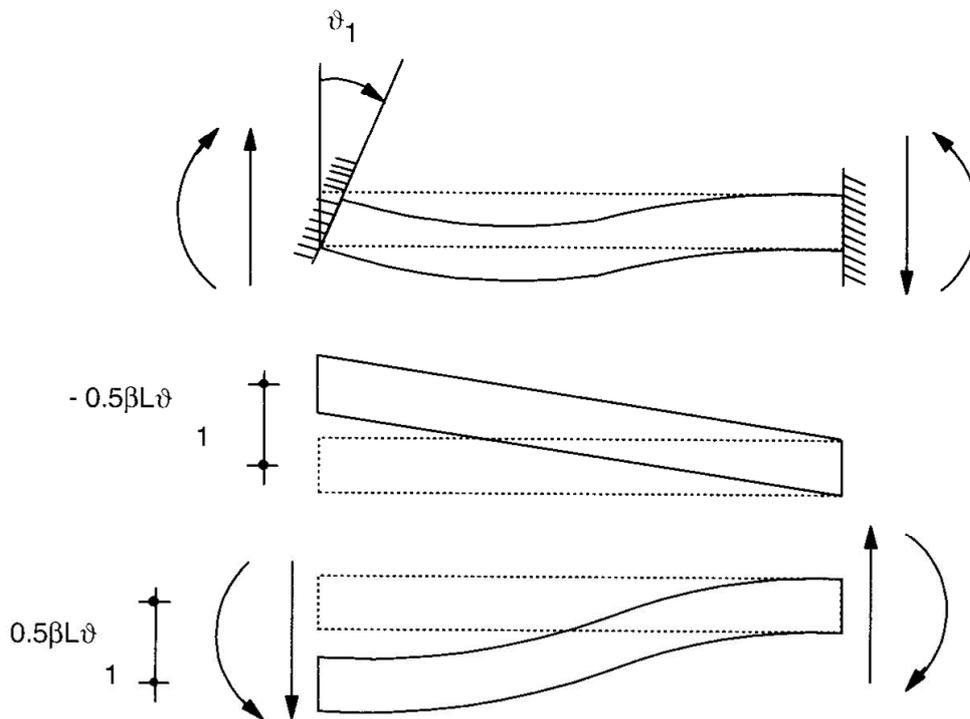


Figura 5.10- Trave soggetta a cedimento rotazionale a sinistra

$$\mathcal{M}_1 = \frac{4EI}{L}\vartheta_1 \quad (5.81)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2EI}{L}\vartheta_1 \quad (5.82)$$

La deformazione da taglio sarà allora pari a:

$$v_t(z) = -\chi \frac{F_{n1}}{GA}(z - L) \quad (5.83)$$

e nell'estremo 1 si avrebbe un abbassamento:

$$v_t(0) = -\frac{1}{2}\beta L\vartheta_1 \quad (5.84)$$

Questo abbassamento in realtà non esiste, ed occorre correggere questa incongruenza. Si imprima a ciò fare uno spostamento all'estremo 1 uguale e contrario allo spostamento (5.84). A seguito di questo cedimento impresso nascono le forze (tenendo conto delle deformazioni da taglio):

$$F_{n1} = -F_{n2} = \frac{12EI}{L^3} \frac{V_{n1}}{1 + \beta} \quad (5.85)$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = -\frac{6EI}{L^2} \frac{V_{n1}}{1 + \beta} \quad (5.86)$$

La somma delle forze così determinate fornisce le forze provocate da una rotazione all'estremo 1, tenendo conto delle deformazioni da taglio:

$$F_{n1} = -F_{n2} = -\frac{1}{1 + \beta} \frac{6EI}{L^2} \vartheta_1 \quad (5.87)$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{(4 + \beta)EI}{(1 + \beta)L} \vartheta_1 \quad (5.88)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{(2 - \beta)EI}{(1 + \beta)L} \vartheta_1 \quad (5.89)$$

Analoghi ragionamenti valgono quando l'estremo 2 subisce la rotazione ϑ_2 , e quindi la matrice di rigidezza della trave a sezione costante, corretta per tener conto delle deformazioni da taglio, è:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{(1 + \beta)L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 + \beta & \frac{6}{L} & 2 - \beta \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 - \beta & \frac{6}{L} & 4 + \beta \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Nel caso di travi a sezione variabile può consultarsi M. Eisenberger [1991].

5.5. La matrice di rigidezza per suolo elastico alla Winkler

Se la trave poggia direttamente sul suolo, occorre introdurre un modello di comportamento che sia in grado di rappresentare, con un certo grado di accuratezza, la presenza del terreno.

Secondo la più semplice ipotesi, si può idealizzare il suolo come un insieme distribuito di appoggi elastici, ognuno caratterizzato da una costante di rigidezza k . Secondo tale schema, proposto da Winkler [1867], e successivamente sviluppato da Hertz [1884], Zimmermann [1888], Schleicher [1926] ed Hetényi [1946], lo spostamento $v(z)$

in un qualsiasi punto del suolo, è direttamente proporzionale alla forza $q(z)$ applicata in quel punto, ed è indipendente da eventuali forze applicate in altri punti:

$$q(z) = k(z)v(z) \quad (5.91)$$

dove $k(z)$ è definito come *costante di sottofondo*.

La caratteristica fondamentale di questo tipo di suolo è che gli spostamenti si verificano esclusivamente al di sotto della zona caricata, e ciò rappresenta ovviamente solo una approssimazione. Si tenga d'altra parte conto che i classici esperimenti di Föppl [1922] hanno dimostrato la fondamentale rispondenza al vero di questa ipotesi per una grande varietà di suoli. Nel seguito si deduce la matrice di rigidezza per una trave a sezione costante poggiante su suolo alla Winkler con costante di sottofondo k uniforme.

Si consideri lo schema di Figura 5.11, rappresentante appunto una trave di lunghezza L , a sezione costante, poggiante su suolo alla Winkler con costante di sottofondo k , costante lungo la trave.

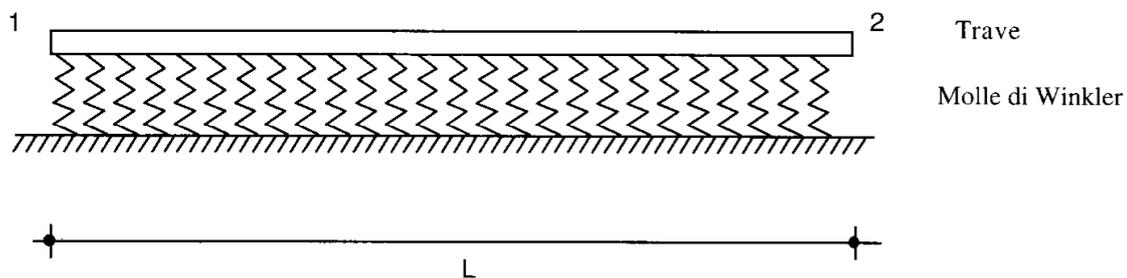


Figura 5.11- Trave su suolo elastico

Deduzione dell'equazione differenziale della linea elastica

Imponendo l'equilibrio del concio elementare di Figura 5.12 si ottiene:

$$\frac{dT}{dz} = kv \quad \frac{dM}{dz} = T \quad (5.92)$$

che può ridursi alla singola equazione:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = kv \quad (5.93)$$

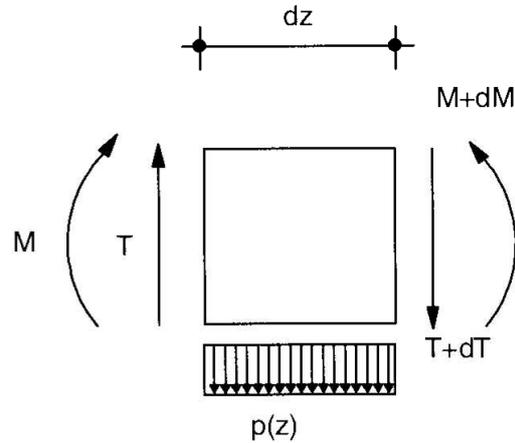


Figura 5.12- Forze agenti sul concio elementare di una trave su suolo alla Winkler

Introducendo la nota relazione $M = -EIv''$ si giunge alla richiesta equazione differenziale della linea elastica:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} + kv = 0 \quad (5.94)$$

Ponendo la soluzione nella forma:

$$v(z) = e^{\mu z} \quad (5.95)$$

si giunge all'equazione caratteristica:

$$\mu^4 = -\frac{k}{EI} \quad (5.96)$$

con radici:

$$\mu_1 = -\mu_3 = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} (1+i) = \lambda(1+i) \quad (5.97)$$

$$\mu_2 = -\mu_4 = \lambda(-1+i) \quad (5.98)$$

dove i è pari a $\sqrt{-1}$, e la costante:

$$\lambda = \left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4} \quad (5.99)$$

si chiama la *costante caratteristica* del sistema, ha dimensioni fisiche di $[L^{-1}]$, e la sua inversa prende il nome di *lunghezza caratteristica*.

La soluzione generale è quindi:

$$v(z) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\mu_i z} \quad (5.100)$$

Usando le note formule di Eulero:

$$e^{i\lambda z} = \cos(\lambda z) + i \sin(\lambda z) \quad (5.101)$$

$$e^{-i\lambda z} = \cos(\lambda z) - i \sin(\lambda z) \quad (5.102)$$

ed introducendo le nuove costanti di integrazione:

$$D_1 = (A_1 + A_4) \quad D_2 = i(A_1 - A_4) \quad (5.103)$$

$$D_3 = (A_2 + A_3) \quad D_4 = i(A_2 - A_3) \quad (5.104)$$

la soluzione può essere espressa nella forma:

$$v(z) = e^{\lambda z} (D_1 \cos \lambda z + D_2 \sin \lambda z) + e^{-\lambda z} (D_3 \cos \lambda z + D_4 \sin \lambda z) \quad (5.105)$$

oppure ancora, nella forma più conveniente:

$$\begin{aligned} v(z) = & C_1 \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) + C_2 \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) \\ & + C_3 \cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) + C_4 \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z) \end{aligned} \quad (5.106)$$

Volendo porre la soluzione nella forma $v(z) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}$, occorre definire il vettore riga:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) \quad \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) \quad \cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) \quad \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z)] \quad (5.107)$$

ed il vettore colonna di costanti:

$$\mathbf{A}^T = \{ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \} \quad (5.108)$$

Imposizione delle condizioni ai limiti

Le condizioni (5.7–5.10) portano al sistema $\mathbf{CA} = \mathbf{d}$ (cfr. 5.16), con la matrice \mathbf{C} definita da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \\ Cc & Ss & Cs & Sc \\ -(Sc - Cs)\lambda & -(Sc + Cs)\lambda & -(Ss + Cc)\lambda & -(Cc - Ss)\lambda \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

dove $C = \cosh(\lambda L)$, $S = \sinh(\lambda L)$, $c = \cos(\lambda L)$, $s = \sin(\lambda L)$.

L'inversione di \mathbf{C} può condursi analiticamente, e si ottiene:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s^2 + S^2}{D} & \frac{SC - sc}{\lambda D} & \frac{2Ss}{D} & \frac{Cs - Sc}{\lambda D} \\ \frac{SC + sc}{D} & -\frac{S^2}{\lambda D} & -\frac{Cs + Sc}{D} & -\frac{Ss}{\lambda D} \\ -\frac{SC + sc}{D} & \frac{s^2}{\lambda D} & \frac{Cs + Sc}{D} & \frac{Ss}{D} \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

con $D = S^2 - s^2$.

La linea elastica è quindi esprimibile nella forma (5.19), e le funzioni di forma, in questo caso, sono:

$$N_1 = \frac{(S^2 - s^2) \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) - (C^2 - c^2) \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z)}{D} + \frac{(SC + sc)(\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z))}{D} \quad (5.111)$$

$$N_2 = \frac{(sc - SC) \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) + S^2 \cosh(\lambda z) \sin(\lambda z)}{\lambda D} - \frac{s^2 \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z)}{\lambda D} \quad (5.112)$$

$$N_3 = \frac{2Ss \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z)}{D} - \frac{(Cs + Sc)(\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z))}{D} \quad (5.113)$$

$$N_4 = \frac{(Sc - Cs) \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z)}{\lambda D} + \frac{Ss(\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z))}{\lambda D} \quad (5.114)$$

Anche in questo caso può verificarsi che ogni funzione di forma assume valore unitario nel grado di libertà cui è associata, e si annulla negli altri gradi di libertà.

Calcolo delle caratteristiche e delle forze nodali

I momenti ed i tagli sono forniti dalle (5.21) e (5.22), rispettivamente, mentre le forze nodali sono:

$$F_{n1} = -T(0) \quad (5.115)$$

$$\mathcal{M}_1 = -M(0) \quad (5.116)$$

$$F_{n2} = T(L) \quad (5.117)$$

$$\mathcal{M}_2 = M(L) \quad (5.118)$$

La matrice di rigidezza per trave su suolo alla Winkler è quindi data da:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{D} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_2 & k_5 & -k_4 & k_6 \\ k_3 & -k_4 & k_1 & -k_2 \\ k_4 & k_6 & -k_2 & k_5 \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

con:

$$k_1 = 4\lambda^3(cs + CS) \quad k_2 = -2\lambda^2(s^2 + S^2) \quad (5.120)$$

$$k_3 = -4\lambda^3(Cs + Sc) \quad k_4 = -4\lambda^2Ss \quad (5.121)$$

$$k_5 = 2\lambda(CS - cs) \quad k_6 = 2\lambda(Cs - Sc) \quad (5.122)$$

5.6. La trave su suolo elastico a due parametri

Si è visto che la principale diffidenza verso l'ipotesi di Winkler ha origine dal comportamento discontinuo della reazione del suolo, per cui solo l'area al di sotto del carico viene chiamata in causa. Per ovviare a questa inoppugnabile incongruenza sono stati proposti innumerevoli modelli di comportamento del suolo, a partire da due approcci fondamentalmente diversi. Secondo il primo, il suolo è schematizzato come un solido tridimensionale, elastico ed isotropo, oppure anisotropo, oppure ancora a comportamento elasto-plastico. In tutti i casi, la risposta di questo modello è notevolmente complessa. Il secondo approccio è invece teso a migliorare il modello di Winkler, ipotizzando in qualche modo una interazione tra le molle:

Modello di Filonenko-Borodich

Secondo questo modello, proposto da Filonenko-Borodich nel 1940, e perfezionato poi nel 1945, le molle vengono collegate tra loro da una membrana elastica soggetta ad uno sforzo di trazione T . Si dimostra che la relazione di Winkler (5.91) diviene:

$$q(z) = kv(z) - T \frac{d^2v}{dz^2} \quad (5.123)$$

e che quindi il suolo è interamente definito dalle due costanti k e T .

Modello di Pasternak

Secondo questo modello, proposto da Pasternak nel 1954, esiste uno strato incompressibile, resistente solo a taglio, che connette le estremità superiori delle molle (Figura 5.13). La relazione di Winkler si generalizza in modo formalmente identico alla (5.123), dove T rappresenta ora il modulo di elasticità trasversale dello strato rigido.

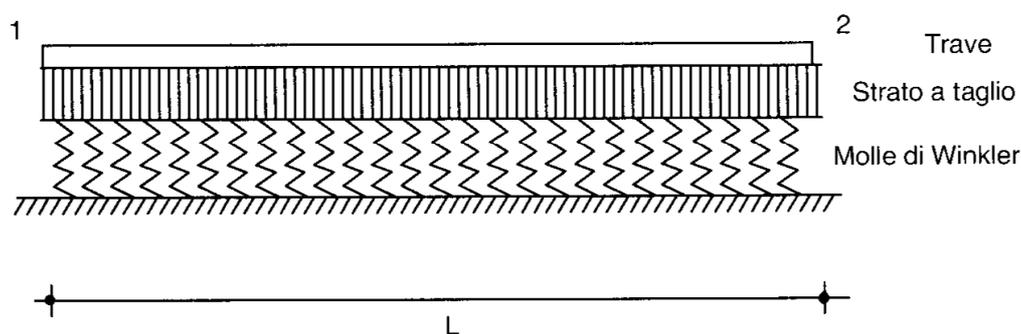


Figura 5.13- Trave su suolo elastico a 2 parametri

Modello di Winkler generalizzato

Sotto questo nome è conosciuto un modello di suolo in cui si assume che nei punti di contatto tra suolo e fondazione esistano sia reazioni normali che coppie reagenti. Si assume inoltre che queste coppie sono proporzionali all'angolo di rotazione, e quindi si ritrova la (5.123), dove T è la costante di proporzionalità tra le coppie e l'angolo di rotazione.

Modello di Vlasov

L'ultimo modello citato fu proposto da Vlasov nel 1949, e si basa su di uno studio preliminare del suolo come mezzo continuo semi-infinito elastico ed isotropo, con modulo di Young E_s e modulo di Poisson ν_s . Tramite metodi variazionali, ed imponendo opportune restrizioni sugli spostamenti, si giunge ad una relazione identica alla (5.123), in cui:

$$T = \frac{E_s B}{4(1 + \nu_s)\mu} \quad (5.124)$$

dove B è la larghezza della trave, e μ è una costante funzione delle proprietà del suolo e della fondazione, e del tipo di carico applicato sulla trave. Un metodo di calcolo iterativo del parametro μ , nel caso di suolo uniforme ad altezza uniforme, poggiante su base rigida, è stato proposto recentemente da Vallabhan et al [1988]. Infine, il modello di Vlasov è stato recentemente generalizzato dagli stessi autori per il caso di suolo con modulo di Young variabile linearmente con la profondità, ed anche in questo caso il parametro μ può calcolarsi con un semplice processo iterativo (Vallabhan et al. [1991]).

Sembra allora opportuno allora (Ghani Razaqpur et al. [1991]) ricercare la matrice di rigidezza di una trave su suolo elastico a due parametri, la cui linea elastica può essere descritta dall'equazione differenziale:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} - k_1 \frac{d^2 v}{dz^2} + kv = 0 \quad (5.125)$$

qualunque sia il significato fisico del secondo parametro k_1 .

Soluzione dell'equazione differenziale della linea elastica

L'equazione caratteristica della (5.125) è:

$$\mu^4 - \frac{k_1}{EI} \mu^2 + \frac{k}{EI} = 0 \quad (5.126)$$

e quindi occorre considerare tre casi:

i) $k_1 > \sqrt{4kEI}$

Il vettore α è dato da:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\cosh \beta z \cosh \gamma z \quad \cosh \beta z \sinh \gamma z \quad \sinh \beta z \cosh \gamma z \quad \sinh \beta z \sinh \gamma z] \quad (5.127)$$

dove:

$$\beta = \sqrt{\frac{k_1}{EI} + \sqrt{\frac{k}{4EI}}} \quad (5.128)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{k_1}{EI} - \sqrt{\frac{k}{4EI}}} \quad (5.129)$$

i) $k_1 < \sqrt{4kEI}$

Il vettore $\boldsymbol{\alpha}$ è dato da:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\cosh \beta z \cos \gamma_1 z \quad \cosh \beta z \sin \gamma_1 z \quad \sinh \beta z \cos \gamma_1 z \quad \sinh \beta z \sin \gamma_1 z] \quad (5.130)$$

dove:

$$\gamma_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI}} - \frac{k_1}{EI}} \quad (5.131)$$

iii) $k_1 = \sqrt{4kEI}$

Si tratta di un caso limite, che può farsi agevolmente rientrare nel caso i), incrementando leggermente k_1 . D'altro canto, casi eccezionali di perfetta coincidenza non possono costituire fenomeni fisici interessanti

Imposizione delle condizioni ai limiti

Si consideri prima il caso i). Imponendo le condizioni ai limiti (5.7–5.10) si giunge in questo caso a definire la matrice \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\beta & 0 \\ Rr & Tr & Rt & Tt \\ -(\gamma Tr + \beta Rt) & -(\gamma Rr + \beta Tt) & -(\gamma Tt + \beta Rr) & -(\gamma Rt + \beta Tr) \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

dove $r = \cosh(\beta L)$, $R = \cosh(\gamma L)$, $t = \sinh(\beta L)$, $T = \sinh(\gamma L)$.

L'inversione della matrice \mathbf{C} può ancora una volta condursi analiticamente, giungendo alla matrice \mathbf{G} , di elementi:

$$G_{11} = 0 \quad G_{12} = 0 \quad G_{13} = 0 \quad G_{14} = 0 \quad (5.133)$$

$$G_{21} = \beta \left(\frac{\gamma r t + \beta R T}{\Delta} \right) \quad G_{22} = -\gamma \frac{t^2}{\Delta} \quad (5.134)$$

$$G_{23} = -\beta \left(\frac{\gamma R t + \beta T r}{\Delta} \right) \quad G_{24} = -\beta \frac{T t}{\Delta} \quad (5.135)$$

$$G_{31} = -\gamma \left(\frac{\gamma r t + \beta R T}{\Delta} \right) \quad G_{32} = \beta \frac{T^2}{\Delta} \quad (5.136)$$

$$G_{33} = \gamma \left(\frac{\gamma R t + \beta T r}{\Delta} \right) \quad G_{34} = \gamma \frac{T t}{\Delta} \quad (5.137)$$

$$G_{41} = \beta \gamma \left(\frac{T^2 - t^2}{\Delta} \right) \quad G_{42} = -\frac{\beta R T + \gamma r t}{\Delta} \quad (5.138)$$

$$G_{43} = (\beta^2 - \gamma^2) \left(\frac{T t}{\Delta} \right) \quad G_{44} = -\frac{\gamma R t + \beta T r}{\Delta} \quad (5.139)$$

dove:

$$\Delta = \gamma^2 t^2 - \beta^2 T^2 \quad (5.140)$$

Nel caso ii), piú frequente in pratica, la matrice \mathbf{C} è fornita da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\beta & 0 \\ R_1 r & T_1 r & R_1 t & T_1 t \\ (\gamma_1 T_1 r - \beta R_1 t) & -(\gamma_1 R_1 r + \beta T_1 t) & (\gamma_1 T_1 t - \beta R_1 r) & -(\gamma_1 R_1 t + \beta T_1 r) \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

e l'inversa \mathbf{G} ha elementi:

$$G_{11} = 0 \quad G_{12} = 0 \quad G_{13} = 0 \quad G_{14} = 0 \quad (5.142)$$

$$G_{21} = -\beta \left(\frac{\gamma_1 r t + \beta R_1 T_1}{\Delta_1} \right) \quad G_{22} = -\gamma_1 \frac{t^2}{\Delta} \quad (5.143)$$

$$G_{23} = -\beta \left(\frac{\gamma_1 R_1 t + \beta T_1 r}{\Delta} \right) \quad G_{24} = -\beta \frac{T_1 t}{\Delta} \quad (5.144)$$

$$G_{31} = -\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1 r t + \beta R_1 T_1}{\Delta} \right) \quad G_{32} = -\beta \frac{T_1^2}{\Delta} \quad (5.145)$$

$$G_{33} = \gamma_1 \left(\frac{\gamma_1 R_1 t + \beta T_1 r}{\Delta} \right) \quad G_{34} = -\gamma_1 \frac{T_1 t}{\Delta} \quad (5.146)$$

$$G_{41} = \beta \gamma_1 \left(\frac{T_1^2 r^2 - R_1^2 t^2}{\Delta} \right) \quad G_{42} = -\frac{\beta R_1 T_1 - \gamma_1 r t}{\Delta} \quad (5.147)$$

$$G_{43} = -(\beta^2 + \gamma_1^2) \left(\frac{T_1 t}{\Delta} \right) \quad G_{44} = -\frac{\gamma_1 R_1 t - \beta T_1 r}{\Delta} \quad (5.148)$$

dove $R_1 = \cos(\gamma_1 L)$, $T_1 = \sin(\gamma_1 L)$, ed ora:

$$\Delta = \gamma_1^2 t^2 - \beta^2 T_1^2 \quad (5.149)$$

In ambedue i casi le funzioni di forma sono fornite dal prodotto matriciale $\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{G}$, e quindi la generica funzione di forma può esprimersi come:

$$N_i = G_{1i} \cosh(\beta z) \cosh(\gamma z) + G_{2i} \cosh(\beta z) \sinh(\gamma z) + G_{3i} \sinh(\beta z) \cosh(\gamma z) + G_{4i} \sinh(\beta z) \sinh(\gamma z) \quad (5.150)$$

nel caso i), e come:

$$N_i = G_{1i} \cosh(\beta z) \cos(\gamma_1 z) + G_{2i} \cosh(\beta z) \sin(\gamma_1 z) + G_{3i} \sinh(\beta z) \cos(\gamma_1 z) + G_{4i} \sinh(\beta z) \sin(\gamma_1 z) \quad (5.151)$$

nel caso ii).

Calcolo delle caratteristiche e matrice di rigidezza

Momenti e tagli sono forniti dalle (5.21) e (5.22), e sono quindi necessarie le espressioni delle derivate seconde e terze delle funzioni di forma. Essendo $\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{G}$, si avrà necessità di derivare il vettore $\boldsymbol{\alpha}$ due e tre volte, essendo:

$$\frac{d^2 \mathbf{N}}{dz^2} = \frac{d^2 \boldsymbol{\alpha}}{dz^2} \mathbf{G} \quad (5.152)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{N}}{dz^3} = \frac{d^3 \boldsymbol{\alpha}}{dz^3} \mathbf{G} \quad (5.153)$$

Passando poi alla conoscenza delle forze nodali, si giunge infine alla matrice di rigidezza per trave di fondazione su suolo a due parametri:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{\Delta} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_2 & k_5 & -k_4 & k_6 \\ k_3 & -k_4 & k_1 & -k_2 \\ k_4 & k_6 & -k_2 & k_5 \end{bmatrix} \quad (5.154)$$

dove i coefficienti valgono, nel caso i):

$$k_1 = 2\beta(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma rt + \beta RT) \quad (5.155)$$

$$k_2 = (\beta^2 + \gamma^2)\Delta + 2\beta^2\gamma^2(T^2 - t^2) \quad (5.156)$$

$$k_3 = 2\beta(\gamma^2 - \beta^2)(\gamma RT + \beta Tr) \quad (5.157)$$

$$k_4 = 2\beta(\gamma^2 - \beta^2)Tt \quad (5.158)$$

$$k_5 = 2\beta\gamma(\gamma rt - \beta RT) \quad (5.159)$$

$$k_6 = -2\beta\gamma(\beta Tr + \gamma Rt) \quad (5.160)$$

e nel caso ii):

$$k_1 = 2\beta\gamma_1(\beta^2 + \gamma_1^2)(\gamma_1 SC + \beta sc) \quad (5.161)$$

$$k_2 = (\beta^2 - \gamma_1^2)\Delta - 2\beta^2\gamma_1(s^2 + S^2) \quad (5.162)$$

$$k_3 = -2\beta\gamma_1(\gamma_1^2 + \beta^2)(\gamma_1 Sc + \beta Cs) \quad (5.163)$$

$$k_4 = -2\beta\gamma_1(\gamma_1^2 + \beta^2)Ss \quad (5.164)$$

$$k_5 = 2\beta\gamma_1(\beta sc - \gamma_1 SC) \quad (5.165)$$

$$k_6 = 2\beta\gamma_1(\beta Cs - \gamma_1 Sc) \quad (5.166)$$

5.7. La trave ad estremi flessibili

Può spesso incontrarsi, nella pratica tecnica, una trave di ridotte dimensioni, collegata agli estremi a due travi di dimensioni notevolmente maggiori. I due nodi di collegamento fungono, rispetto alla trave più piccola, da vincolo elastico, impedendo parzialmente la rotazione, e quindi comportandosi come una coppia di celle elastiche alla rotazione. Se k_1 e k_2 sono le rispettive rigidzze rotazionali, occorre studiare lo schema di Figura 5.14.

Se la trave è soggetta alle due coppie \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 , allora gli estremi 1 e 2 ruoteranno di ϑ_1 e ϑ_2 , rispettivamente.

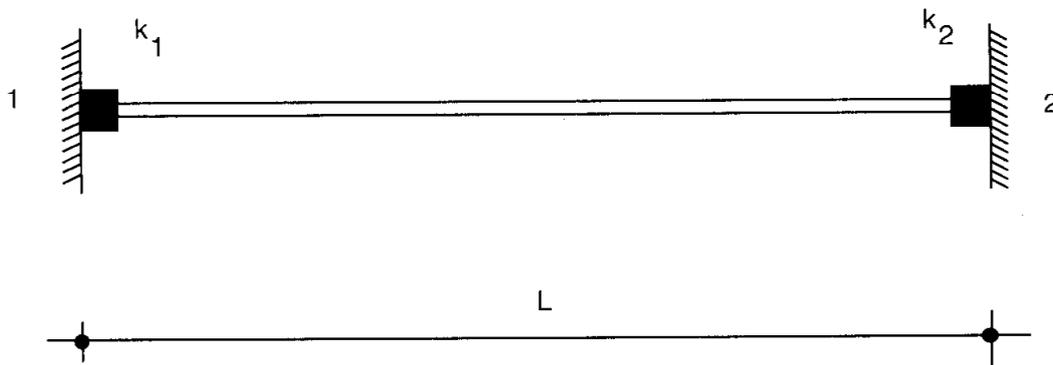


Figura 5.14- Trave ad estremi flessibili

Contemporaneamente, nelle celle si avranno le rotazioni ϕ_1 e ϕ_2 , e quindi le relazioni momenti-rotazioni saranno fornite da:

$$\mathcal{M}_1 = k_1(\vartheta_1 - \phi_1) \quad (5.167)$$

$$\mathcal{M}_2 = k_2(\vartheta_2 - \phi_2) \quad (5.168)$$

La matrice di rigidzza (5.90) fornisce invece:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{EI}{L} (S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2) \quad (5.169)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{EI}{L} (S_{12}\phi_1 + S_{22}\phi_2) \quad (5.170)$$

dove:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{4 + \beta}{1 + \beta} \quad S_{12} = \frac{2 - \beta}{1 + \beta} \quad (5.171)$$

Occorre ora eliminare le rotazioni ϕ_1 e ϕ_2 dalle equazioni (5.167)–(5.170). A tal fine, dalle (5.167)–(5.168) può ricavarsi:

$$\phi_1 = \vartheta_1 - \frac{\mathcal{M}_1}{k_1} \quad \phi_2 = \vartheta_2 - \frac{\mathcal{M}_2}{k_2} \quad (5.172)$$

ed introducendo queste espressioni nelle (5.169)–(5.170) si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{S_{11} EI}{k_1 L} & \frac{S_{12} EI}{k_2 L} \\ \frac{S_{12} EI}{k_1 L} & 1 + \frac{S_{22} EI}{k_2 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{Bmatrix} S_{11}\vartheta_1 + S_{12}\vartheta_2 \\ S_{12}\vartheta_1 + S_{22}\vartheta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.173)$$

Definendo le costanti:

$$\alpha_1 = \frac{EI}{k_1 L} \quad \alpha_2 = \frac{EI}{k_2 L} \quad (5.174)$$

si può risolvere il sistema precedente con la regola di Cramer, ottenendo:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{EI}{L} (S'_{11}\vartheta_1 + S'_{12}\vartheta_2) \quad (5.175)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{EI}{L} (S'_{12}\vartheta_1 + S'_{22}\vartheta_2) \quad (5.176)$$

con i nuovi coefficienti di rigidezza:

$$S'_{11} = \frac{4 + \beta + 12\alpha_2}{D'} \quad S'_{22} = \frac{4 + \beta + 12\alpha_1}{D'} \quad S'_{12} = \frac{2 - \beta}{D'} \quad (5.177)$$

e:

$$D' = 1 + \beta + (4 + \beta)(\alpha_1 + \alpha_2) + 12\alpha_1\alpha_2 \quad (5.178)$$

5.8. Il caso dell'elemento non ortodosso

Può capitare, più spesso di quanto ci si possa attendere, che nelle moderne strutture a telaio occorra introdurre elementi di forma non ortodossa, con variazioni della sezione di tipo arbitrario. Se infatti le considerazioni economiche non consigliano più l'uso di travi a sezione variabile, spesso considerazioni estetiche ed architettoniche impongono l'uso di elementi particolari. (Chugh et al. [1976]).

Un qualsiasi elemento monodimensionale può essere suddiviso in un numero, più o meno elevato, di sotto-elementi, e ciascun sotto-elemento può essere approssimativamente considerato a sezione costante. D'altra parte, è evidente che questo procedimento è estremamente dispendioso, sia come impegno di memoria, sia come tempo di calcolo.

Non può neanche ipotizzarsi di poter calcolare analiticamente la matrice di rigidezza per ciascun tipo di variazione di sezione retta.

Esiste però la possibilità di calcolare numericamente la matrice di rigidezza di un qualunque elemento di trave piana, facendo ricorso ad esempio alla tecnica proposta da Newmark [1943]. Si consideri all'uopo la trave di Figura 5.15, e si trascurino gli effetti delle deformazioni da taglio.

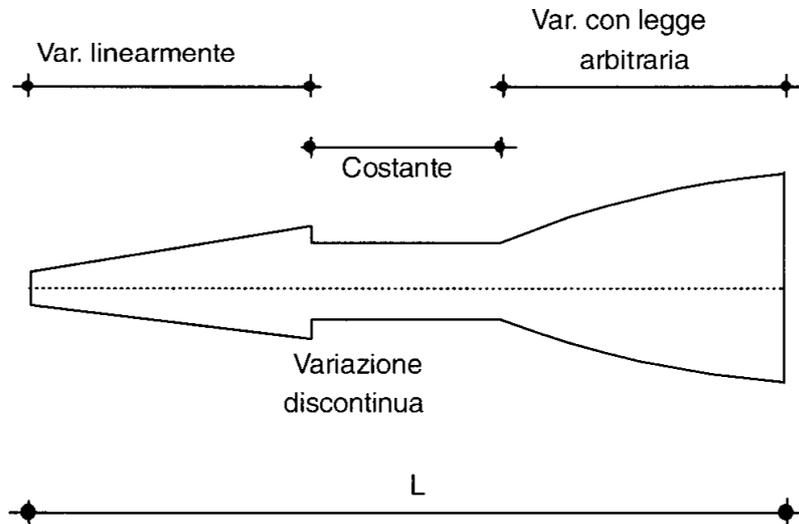


Figura 5.15- Trave non ortodossa

Limitandosi agli effetti flessionali, la matrice di rigidezza può scriversi in funzione dei soli due coefficienti rotazionali k_{22} e k_{42} . Ed infatti, si considerino gli schemi di Figura 5.16, che illustrano il significato fisico dei coefficienti di rigidezza. I due coefficienti rotazionali misti k_{12} e k_{32} possono ottenersi come:

$$k_{12} = -k_{32} = -\frac{k_{22} + k_{42}}{L} \quad (5.179)$$

mentre i restanti coefficienti sono dati da (cfr. Figura 5.17):

$$k_{14} = -\frac{k_{44} + k_{42}}{L} \quad (5.180)$$

$$k_{11} = -k_{31} = \frac{k_{21} + k_{41}}{L} \quad (5.181)$$

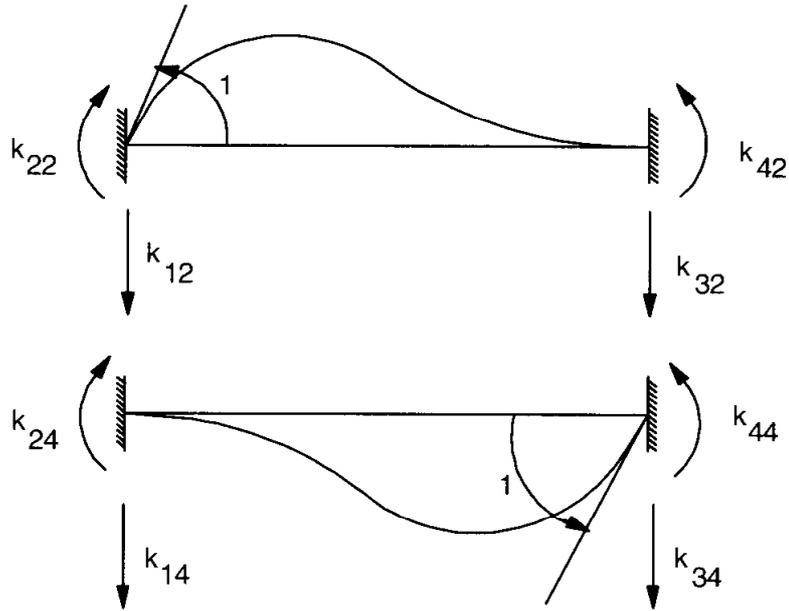


Figura 5.16- Rigidezze per travi non ortodosse

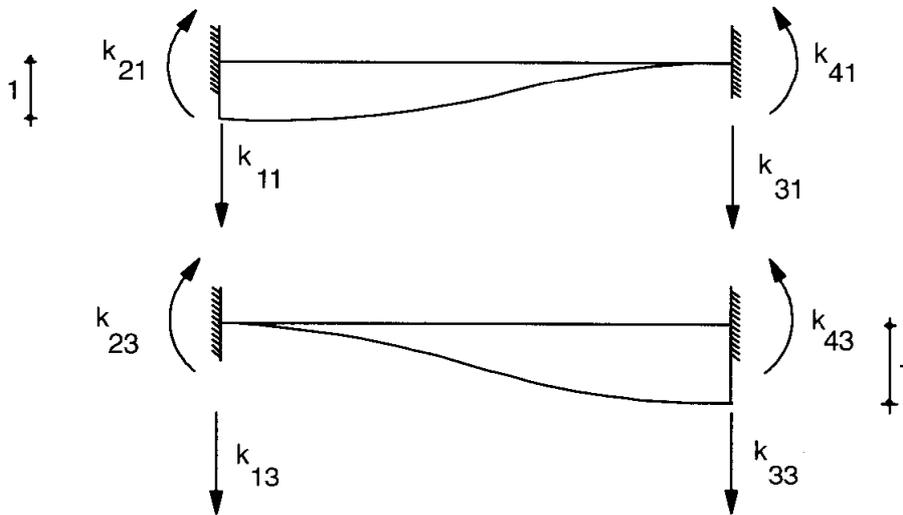


Figura 5.17- Rigidezze per travi non ortodosse

Il problema è quindi ridotto al calcolo dei coefficienti k_{22} e k_{42} , ossia alla soluzione dei due schemi di Figura 5.18. Ed infatti, conosciute le rotazioni ϑ_{11} e ϑ_{12} , provocate dalla coppia \mathcal{M}_1 applicata nel nodo 1, e le rotazioni ϑ_{21} e ϑ_{22} , provocate dalla coppia \mathcal{M}_2 applicata nel nodo 2, i coefficienti richiesti sono forniti da:

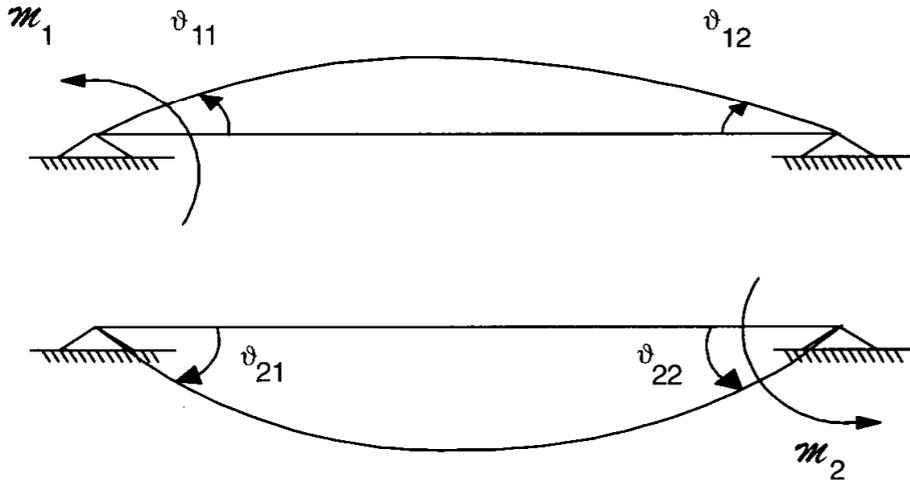


Figura 5.18- Rigidezze per travi non ortodosse: schemi di calcolo

$$k_{22} = \frac{\mathcal{M}_1 \vartheta_{22}}{\vartheta_{11} \vartheta_{22} - \vartheta_{12} \vartheta_{21}} \quad (5.182)$$

$$k_{42} = \frac{\mathcal{M}_2 \vartheta_{21}}{\vartheta_{12} \vartheta_{21} - \vartheta_{11} \vartheta_{22}} \quad (5.183)$$

Per ambedue questi schemi, il metodo proposto da Neimark permette la soluzione numerica in via estremamente efficace.

5.9. I carichi nodali equivalenti

Si esaminano le più comuni distribuzioni di carico all'interno dell'elemento, calcolandone i carichi nodali equivalenti.

Trave ortodossa

Se si è in presenza di un carico distribuito, l'equazione della linea elastica è:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = q \quad (5.184)$$

e la soluzione sarà:

$$v(z) = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + I \quad (5.185)$$

con I integrale particolare che dipende dal tipo di carico.

Carico uniformemente distribuito

In questo caso l'integrale particolare è:

$$I(z) = \frac{qz^4}{24EI} \quad (5.186)$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo che gli estremi siano incastrati:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (5.187)$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (5.188)$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_3L^2 + C_4L^3 + \frac{qL^4}{24EI} = 0 \quad (5.189)$$

$$v'(L) = 0 \Rightarrow 2C_3L + 3C_4L^2 + \frac{qL^3}{6EI} = 0 \quad (5.190)$$

da cui:

$$C_3 = \frac{qL^2}{24EI} \quad (5.191)$$

$$C_4 = -\frac{qL}{12EI} \quad (5.192)$$

La linea elastica è quindi fornita da:

$$v(z) = \frac{q}{24EI} z^2(L-z)^2 \quad (5.193)$$

ed i corrispondenti momenti e tagli sono:

$$M(z) = -EIv''(z) = -\frac{q}{12}(L^2 - 6zL + 6z^2) \quad (5.194)$$

$$T(z) = -EIv'''(z) = \frac{q}{2}(L - 2z) \quad (5.195)$$

Infine, i carichi nodali equivalenti ad una stesa di carico uniformemente distribuita sono pari alle reazioni nodali cambiate di segno:

$$\mathcal{M}_{a1} = -M(0) = \frac{qL^2}{12} \Rightarrow \mathcal{M}_1 = -\frac{qL^2}{12} \quad (5.196)$$

$$F_{a1} = -T(0) = -\frac{qL}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{qL}{2} \quad (5.197)$$

$$\mathcal{M}_{a2} = M(L) = -\frac{qL^2}{12} \Rightarrow \mathcal{M}_2 = \frac{qL^2}{12} \quad (5.198)$$

$$F_{a2} = T(L) = -\frac{qL}{2} \Rightarrow F_2 = \frac{qL}{2} \quad (5.199)$$

Carico concentrato ad un'ascissa generica

Si consideri lo schema di carico di Figura 5.19, con una singola forza concentrata a distanza a dal nodo 1 e $b = L - a$ dal nodo 2.

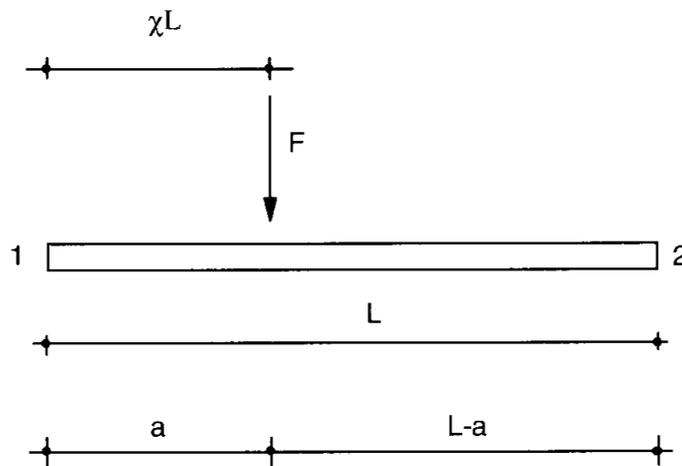


Figura 5.19- Trave soggetta a carico concentrato in una sezione generica

I diagrammi del momento e del taglio possono agevolmente calcolarsi tramite l'equazione della linea elastica, ma in questo caso risulta più comodo scrivere le equazioni di congruenza, ottenendo direttamente le reazioni alle estremità. Si ha (cfr. V.Franciosi [1987], Vol.III pp.209-211):

$$M(0) = -F \frac{ab^2}{L^2} \Rightarrow \mathcal{M}_1 = -F \frac{ab^2}{L^2} \quad (5.200)$$

$$T(0) = F \frac{b^2(3a+b)}{L^3} \Rightarrow F_1 = F \frac{b^2(3a+b)}{L^3} \quad (5.201)$$

$$M(L) = -F \frac{a^2b}{L^2} \Rightarrow \mathcal{M}_2 = F \frac{a^2b}{L^2} \quad (5.202)$$

$$T(L) = -F \frac{a^2(3b+a)}{L^3} \Rightarrow F_2 = F \frac{a^2(3b+a)}{L^3} \quad (5.203)$$

Variazione termica alla Navier

Si studia ora il caso di un elemento trave soggetto ad una variazione termica alla Navier, di intensità ΔT , e positiva se tende le fibre inferiori. Si ricorda che tale variazione termica è equivalente ad una distorsione distribuita di tipo flessionale, di intensità:

$$\mu(z) = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (5.204)$$

dove α è il coefficiente di espansione termica, ed h è l'altezza della sezione retta della trave (Figura 5.20).

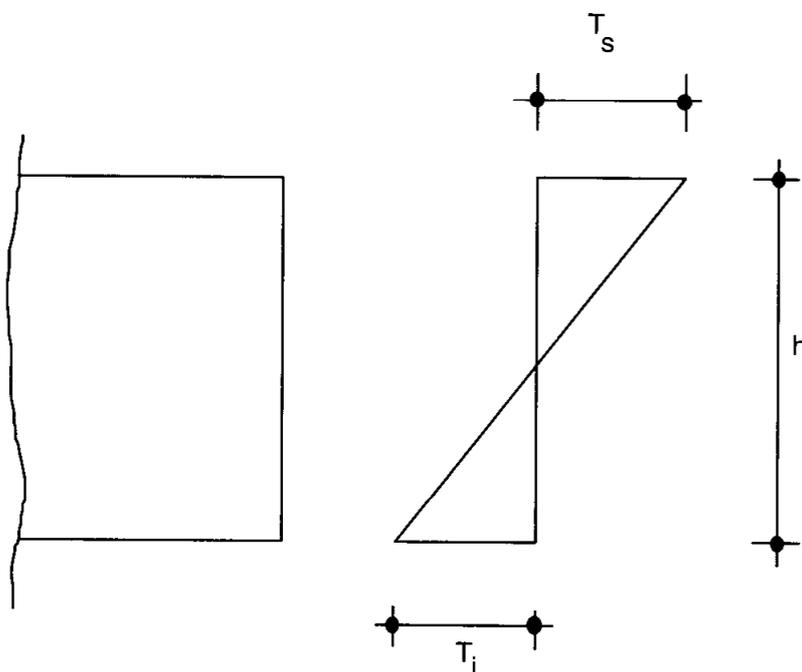


Figura 5.20- Variazione termica alla Navier

L'equazione della linea elastica è:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \quad (5.205)$$

e quindi le condizioni ai limiti per trave incastrata conducono ad una deformata identicamente nulla. Ne segue che il momento flettente è dato da:

$$M(z) = EI\mu(z) = -\alpha EI \frac{\Delta T}{h} \quad (5.206)$$

ed il taglio è identicamente nullo. Le forze nodali equivalenti si riducono perciò a due coppie, di intensità:

$$\mathcal{M}_1 = M(0) = -\alpha EI \frac{\Delta T}{h} \quad (5.207)$$

$$\mathcal{M}_2 = -M(L) = \alpha EI \frac{\Delta T}{h} \quad (5.208)$$

Trave su suolo elastico alla Winkler

Se la trave è caricata da una stesa di carico $q(z)$ distribuito, l'equazione della linea elastica è:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} + kv = q \quad (5.209)$$

Carico uniformemente distribuito

In questo caso la soluzione è:

$$\begin{aligned} v(z) = & C_1 \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) + C_2 \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) \\ & + C_3 \cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) + C_4 \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z) + \frac{q}{k} \end{aligned} \quad (5.210)$$

L'imposizione delle condizioni ai limiti di incastro perfetto conducono a determinare le quattro costanti come:

$$C_1 = -\frac{q}{k} \quad (5.211)$$

$$C_2 = -\frac{q(S-s)}{k(S+s)} \quad (5.212)$$

$$C_3 = -\frac{q(C-c)}{k(S+s)} \quad (5.213)$$

$$C_4 = -C_3 \quad (5.214)$$

La linea elastica è quindi definita da:

$$\begin{aligned} v(z) = & \frac{q}{k} \left[1 - \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) + \frac{S-s}{S+s} \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) \right. \\ & \left. - \frac{C-c}{S+s} (\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z)) \right] \end{aligned} \quad (5.215)$$

Il momento flettente ed il taglio si ottengono per derivazione:

$$M(z) = -EIv''(z) = -\frac{q}{2\lambda^2} \left[\sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) + \frac{S-s}{S+s} \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z) - \frac{C-c}{S+s} (\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) + \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z)) \right] \quad (5.216)$$

$$T(z) = -EIv'''(z) = -\frac{q}{2\lambda} \left[\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) + \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z) + \frac{S-s}{S+s} (\sinh(\lambda z) \cos(\lambda z) - \cosh(\lambda z) \sin(\lambda z)) - \frac{C-c}{S+s} (2 \cosh(\lambda z) \cos(\lambda z)) \right] \quad (5.217)$$

I carichi nodali equivalenti sono infine forniti da:

$$\mathcal{M}_1 = M(0) = -\frac{qL^2}{2} \left[\frac{S-s}{(\lambda L)^2(S+s)} \right] \quad (5.218)$$

$$F_1 = T(0) = \frac{q}{\lambda L} \frac{C-c}{S+s} \quad (5.219)$$

e, per la simmetria:

$$\mathcal{M}_2 = -\mathcal{M}_1 \quad (5.220)$$

$$F_2 = F_1 \quad (5.221)$$

Forza concentrata in mezzeria

Lo schema di Figura 5.21a) è simmetrico rispetto alla mezzeria, e quindi ci si può limitare allo studio dello schema ridotto di figura 5.21b).

L'equazione della linea elastica è la (5.94), con le condizioni ai limiti:

$$v(0) = 0 \quad (5.222)$$

$$v'(0) = 0 \quad (5.223)$$

$$v'(L/2) = 0 \quad (5.224)$$

$$v'''(L/2) = -\frac{F}{2EI} \quad (5.225)$$

Le costanti di integrazione sono allora date da:

$$C_1 = 0 \quad (5.226)$$

$$C_2 = -\frac{F\lambda(2S's')}{k(S+s)} \quad (5.227)$$

$$C_3 = -\frac{F\lambda(S'c' + C's')}{k(S+s)} \quad (5.228)$$

$$C_4 = -C_3 \quad (5.229)$$

con $S' = \sinh(\lambda L/2)$, $C' = \cosh(\lambda L/2)$, $s' = \sin(\lambda L/2)$, $c' = \cos(\lambda L/2)$.

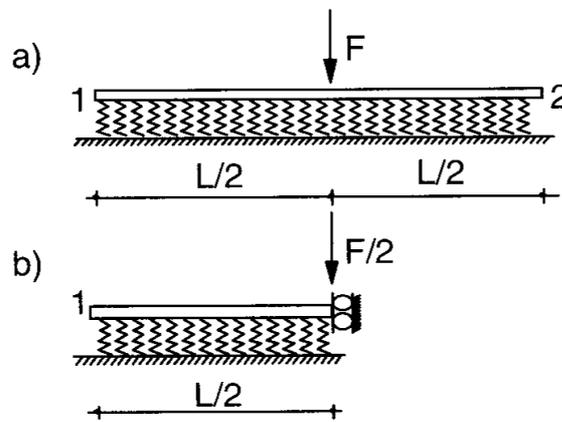


Figura 5.21- Trave su suolo elastico con forza in mezzeria

La linea elastica è quindi definita da:

$$v(z) = -\frac{F\lambda(2S's')}{k(S+s)} \sinh(\lambda z) \sin(\lambda z) + \frac{F\lambda(S'c' + C's')}{k(S+s)} (\cosh(\lambda z) \sin(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cos(\lambda z)) \quad (5.230)$$

e le forze nodali equivalenti:

$$\mathcal{M}_1 = M(0) = FL \left(\frac{S's'}{\lambda L(S+s)} \right) \quad (5.231)$$

$$F_1 = F \left(\frac{S'c' + C's'}{S+s} \right) \quad (5.232)$$

Come sopra, le altre due forze nodali si ottengono per simmetria, tramite le (5.220)–(5.221).

Trave ad estremi elastici

Il caso di carico uniformemente distribuito può risolversi sovrapponendo gli effetti dei due schemi di Figura 5.22b) e c).

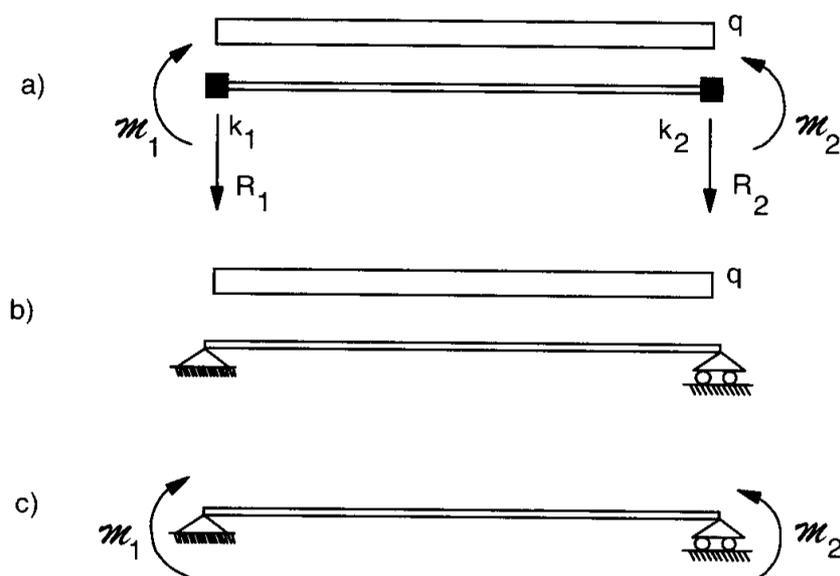


Figura 5.22- Trave ad estremi elastici soggetta a carico uniformemente distribuito

Le rotazioni agli estremi sono fornite da:

$$\phi_1 = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_1L}{3EI} - \frac{M_2L}{6EI} \quad (5.233)$$

$$\phi_2 = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_2L}{3EI} - \frac{M_1L}{6EI} \quad (5.234)$$

e, d'altro canto:

$$M_1 = k_1\phi_1 \quad M_2 = k_2\phi_2 \quad (5.235)$$

Eliminando le rotazioni tra le (5.233), (5.234) e (5.235) si ottiene:

$$M_1 = -\frac{qL^2}{12} \left[\frac{3 - 18\alpha_2}{(6\alpha_1 - 2)(6\alpha_2 - 2)} \right] \quad (5.236)$$

$$M_2 = \frac{qL^2}{12} \left[\frac{3 - 18\alpha_1}{(6\alpha_1 - 2)(6\alpha_2 - 2)} \right] \quad (5.237)$$

Elementari considerazioni di statica portano a scrivere:

$$F_1 = \frac{qL}{2} + \frac{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{L} \quad (5.238)$$

$$F_2 = \frac{qL}{2} - \frac{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{L} \quad (5.239)$$

Forza concentrata in mezzeria

In questo caso si ha, analogamente a quanto fatto per il carico uniformemente distribuito:

$$\phi_1 = -\frac{FL^2}{8EI} + \frac{\mathcal{M}_1 L}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_2 L}{6EI} \quad (5.240)$$

$$\phi_2 = \frac{FL^2}{8EI} + \frac{\mathcal{M}_2 L}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_1 L}{6EI} \quad (5.241)$$

e quindi:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{FL}{8} \left[\frac{6 - 36\alpha_2}{(6\alpha_1 - 2)(6\alpha_2 - 2)} \right] \quad (5.242)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{FL}{8} \left[\frac{6 - 36\alpha_1}{(6\alpha_1 - 2)(6\alpha_2 - 2)} \right] \quad (5.243)$$

$$F_1 = \frac{F}{2} + \frac{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{L} \quad (5.244)$$

$$F_2 = \frac{F}{2} - \frac{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{L} \quad (5.245)$$

5.10. La matrice di rigidezza in riferimento globale

Si è visto nel capitolo 3 che la sollecitazione di sforzo assiale si disaccoppia dalle sollecitazioni flesso-taglianti, se le equazioni di equilibrio vengono scritte con riferimento al concio indeformato. In questo caso, quindi, la matrice elementare di rigidezza, in riferimento locale, si costruisce assemblando la matrice dell'elemento asta (soggetta al solo sforzo assiale) e dell'elemento trave (soggetta a sforzo di taglio ed a momento flettente). In generale, si può scrivere:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e11} & \mathbf{k}_{e12} \\ \mathbf{k}_{e21} & \mathbf{k}_{e22} \end{bmatrix} \quad (5.246)$$

con:

$$\mathbf{k}_{e11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L^3} T_{11} & -\frac{EI}{L^2} Q_{11} \\ 0 & -\frac{EI}{L^2} Q_{11} & \frac{EI}{L} S_{11} \end{bmatrix} \quad (5.247)$$

$$\mathbf{k}_{e12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} N_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{L^3} T_{12} & -\frac{EI}{L^2} Q_{12} \\ 0 & -\frac{EI}{L^2} Q_{12} & \frac{EI}{L} S_{12} \end{bmatrix} \quad (5.248)$$

$$\mathbf{k}_{e21} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} N_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{L^3} T_{21} & \frac{EI}{L^2} Q_{21} \\ 0 & -\frac{EI}{L^2} Q_{21} & \frac{EI}{L} S_{21} \end{bmatrix} \quad (5.249)$$

$$\mathbf{k}_{e22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} N_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L^3} T_{22} & \frac{EI}{L^2} Q_{22} \\ 0 & \frac{EI}{L^2} Q_{22} & \frac{EI}{L} S_{22} \end{bmatrix} \quad (5.250)$$

I coefficienti N_{ij} sono di rigidezza assiale, i T_{ij} di rigidezza tagliante, gli S_{ij} di rigidezza flessionale, ed infine i coefficienti Q_{ij} sono misti di tipo flesso-tagliante.

Il corrispondente vettore dei gradi di libertà locale è:

$$\mathbf{d}_e^T = \{w_{a1}, v_{n1}, \vartheta_1, w_{a2}, v_{n2}, \vartheta_2\} \quad (5.251)$$

mentre le forze nodali in riferimento locale sono raggruppabili nel vettore:

$$\mathbf{f}_e^T = \{F_{a1}, F_{n1}, \mathcal{M}_1, F_{a2}, F_{n2}, \mathcal{M}_2\} \quad (5.252)$$

Se ci si vuole invece riferire al sistema di assi globali (X, Y) , il vettore dei gradi di libertà sarà:

$$\mathbf{d}_g^T = \{w_{X1}, v_{Y1}, \vartheta_1, w_{X2}, v_{Y2}, \vartheta_2\} \quad (5.253)$$

mentre le forze nodali in riferimento globale sono raggruppabili nel vettore:

$$\mathbf{f}_g^T = \{F_{X1}, F_{Y1}, \mathcal{M}_1, F_{X2}, F_{Y2}, \mathcal{M}_2\} \quad (5.254)$$

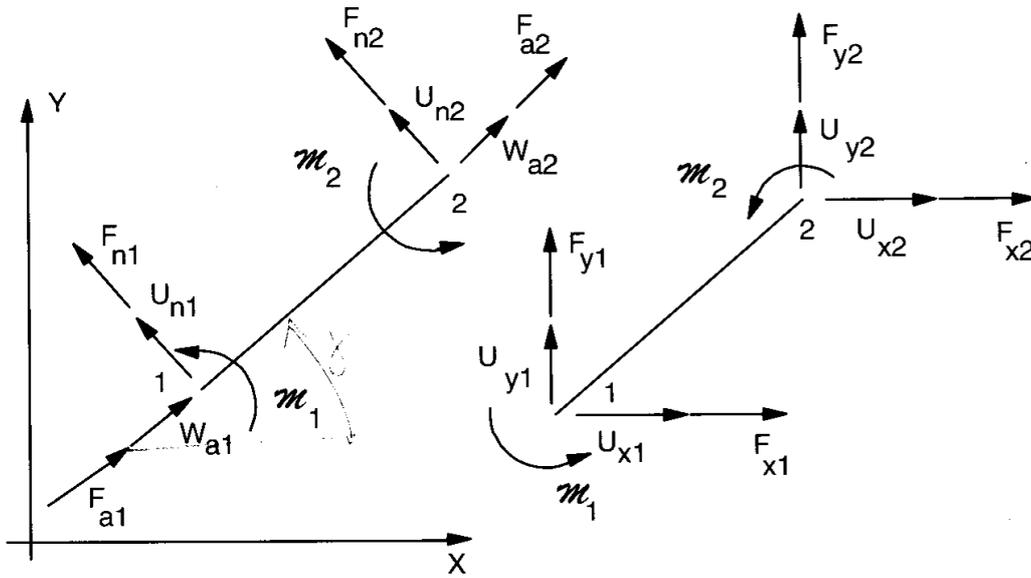


Figura 5.23- Forze nodali e spostamenti nodali in riferimento globale e locale

come illustrato in Figura 5.23

La matrice di rotazione \mathbf{R} è fornita da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.255)$$

e la matrice di rigidezza elementare in riferimento globale è definita dal triplo prodotto matriciale:

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}_T^T \mathbf{k}_e \mathbf{R}_T \quad (5.256)$$

con:

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.257)$$

Nota 5.1: La particolare struttura delle matrici di rigidezza elementari e delle matrici di trasformazione può essere utilmente sfruttata al fine di ridurre il numero di operazioni necessarie a svolgere il suddetto prodotto matriciale. All'uopo, può consultarsi Anekwe [1989].

5.11. Carichi nodali in riferimento globale

Si consideri il generico elemento trave, soggetto a sforzo assiale, sforzo di taglio e momento flettente, e siano \mathbf{f}_e ed \mathbf{f}_g i vettori delle forze nodali, in riferimento locale e globale, rispettivamente. La relazione tra i due vettori è facilmente deducibile dalla (4.37):

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{R}_T \mathbf{f}_e \quad (5.258)$$

ed esplicitamente:

$$F_{X1} = F_{a1} \cos \gamma + F_{n1} \sin \gamma \quad (5.259)$$

$$F_{Y1} = -F_{a1} \sin \gamma + F_{n1} \cos \gamma \quad (5.260)$$

$$F_{X2} = F_{a2} \cos \gamma + F_{n2} \sin \gamma \quad (5.261)$$

$$F_{Y2} = -F_{a2} \sin \gamma + F_{n2} \cos \gamma \quad (5.262)$$

5.12. Il calcolo delle caratteristiche

Calcolate le matrici elementari di rigidezza, e dedotte le reazioni di incastro perfetto, l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale e del vettore dei carichi nodali globali avviene con una procedura identica a quella illustrata per le travature reticolari, con la sola differenza che nei telai piani ogni nodo possiede tre gradi di libertà e non due.

Il sistema di equazioni di equilibrio si risolve con il metodo di Gauss, come illustrato precedentemente, e dagli spostamenti occorre risalire alle caratteristiche — momento flettente, sforzo normale e sforzo di taglio. A questo proposito si ricorda che occorre sommare i termini dovuti agli spostamenti dei nodi, e le reazioni di incastro perfetto (cfr. cap.3)

La prima aliquota può ricavarsi utilizzando le matrici di rigidezza elementari degli elementi. Se infatti l'elemento generico subisce gli spostamenti contenuti nel vettore \mathbf{d}_g , allora le forze nodali \mathbf{f}_g saranno fornite dal prodotto $\mathbf{k} \mathbf{d}_g$, e da esse sarà possibile risalire alle caratteristiche. Talvolta può essere più comodo utilizzare la matrice \mathbf{k}_e , in coordinate locali, ed in questo caso è necessario il calcolo preventivo del vettore \mathbf{d}_e :

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{R}_T^T \mathbf{d}_g \quad (5.263)$$

Ciò fatto, il vettore \mathbf{f}_e delle forze nodali in coordinate locali è fornito dal prodotto $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$.

5.13. Note bibliografiche

Per una bibliografia approfondita sugli effetti delle deformazioni da taglio, si rimanda al capitolo 11, interamente dedicato alle travi alte. Il riferimento canonico sul suolo elastico alla Winkler è Hetényi [1946], mentre un testo molto più moderno e comprensivo può essere, ad esempio, Selvadurai [1979]. Nell'ambito più specifico di questo capitolo, ossia nell'ambito dell'analisi matriciale delle strutture, è da segnalare che soluzioni analitiche dell'equazione differenziale della trave su suolo elastico alla Winkler sono state fornite dallo stesso Hetényi [1946], e più recentemente da Miranda e Nair [1966], Ting [1982], Eisenberger e Yankelevsky [1985]. Quest'ultimo fornisce anche l'espressione della matrice di rigidezza esatta.

Due ulteriori aspetti del suolo alla Winkler non sono stati neanche menzionati nel testo, per problemi di spazio. Tuttavia, il lettore interessato al problema del suolo di Winkler unilaterale (ossia resistente solo a compressione) può utilmente consultare Tsai e Westmann [1967], Weitsman [1970] e Celep et al. [1989]. Lo stesso problema, ma per un suolo alla Winkler di tipo viscoelastico è presentato in Kuczma e Świtka [1990].

Altrettanto importante è il caso di suolo alla Winkler non lineare, in cui cioè la reazione del suolo è una funzione non lineare del corrispondente abbassamento. Nel caso particolare di suolo iperbolico, ad esempio, la reazione del suolo può esprimersi come:

$$q = \frac{k_0 v}{1 + \mu v} \quad (5.264)$$

dove k_0 è il modulo tangente di Winkler, e μ è un parametro di nonlinearità. Per questo caso si può ottenere una soluzione analitica, riportata in Soldatos e Selvadurai [1985], mentre il caso di reazione lineare a tratti può essere risolto in via iterativa (cfr. Yankelevsky et al. [1989]).

Per il caso in cui la reazione del terreno dipende in modo quadratico dallo spostamento, si veda Sacco [1988]. Un caso più generale, in cui il modulo di Winkler è espresso come serie di Taylor:

$$k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \quad (5.265)$$

è sviluppato in Al-Mahaidi et al. [1990].

L'equazione differenziale (5.125) della trave su suolo a 2 parametri è una particolare dell'equazione fondamentale della teoria generalizzata della trave (Schardt [1983]):

$$a \frac{d^4 v}{dz^4} \pm b \frac{d^2 v}{dz^2} + cv = p(z) \quad (5.266)$$

che governa anche il comportamento a flessione di una trave soggetta a forza assiale (di trazione o di compressione), o il comportamento a torsione di una trave in regime di torsione non uniforme. Lo studio dettagliato di questa equazione, fino alla deduzione della matrice di rigidezza esatta, è riportato in Davies [1986].

Infine, si possono segnalare due applicazioni dell'analisi matriciale delle strutture alle travi ad asse parabolico (Marquis et al. [1989]) ed alle strutture pieghevoli (Shan [1992]).