

3. Metodo delle forze e metodo dei cedimenti

3.1. Cenni storici

Per quanto possa sembrare strano, il metodo dei cedimenti (o delle deformazioni, o ancora degli spostamenti) è storicamente nato prima del metodo delle forze, pur essendo poi caduto nell'oblio per lunghi anni, a causa della difficoltà di risoluzione del sistema di equazioni lineari cui esso conduce. Trascurando infatti la prima applicazione di Navier [1826] al problema delle tre aste concorrenti in un punto, la completa esposizione del metodo dei cedimenti si ritrova nell'ultimo capitolo del trattato di Clebsch [1862], dove si fornisce un metodo per l'analisi delle travi reticolari. Clebsch dimostra che scegliendo come incognite gli spostamenti delle cerniere si giunge a scrivere tante equazioni lineari quante sono le incognite, e che quindi il problema ha soluzione. Resta lo scoglio operativo della soluzione effettiva di un sistema di equazioni a molte incognite, e questo spiega il dominio del metodo delle forze per i decenni successivi.

Occorre infatti giungere ai lavori di Mancy [1915] negli Stati Uniti, e di Ostenfeld [1926] e Beyer [1927] in Germania, per assistere al ritorno del metodo, anche se la vera svolta si ha nel 1932, con il lavoro di H. Cross, in cui si mostra come risolvere il sistema di equazioni di equilibrio senza in realtà neppure scriverlo esplicitamente. Da allora in poi si susseguono miglioramenti continui del metodo manuale originariamente proposto da Cross [1932], finchè si giunge alle prime formulazioni matriciali [Turner et al. 1956], [Argyris et al. 1960], ed all'avvento dell'era dei calcolatori, con la conseguente possibilità di scrivere e risolvere grandi sistemi di equazioni. Comincia l'epoca degli elementi finiti. Il metodo delle forze è invece mirabilmente sintetizzato per la prima volta da Maxwell in un lavoro di sei pagine, del 1864, e poi riscoperto e volgarizzato da Castigliano [1873], Mohr [1874a, 1874b, 1875, 1881], Crotti [1888], Müller-Breslau [1883]. Il metodo fu egemone in analisi strutturale per più di cinquant'anni, perchè — a differenza del metodo dei cedimenti — conduceva ad un sistema di equazioni lineari di dimensioni ridotte (pari al numero di iperstaticità presenti), almeno per le strutture reticolari dell'epoca. Proprio questa caratteristica ha segnato comunque il progressivo abbandono del metodo delle forze, atteso che la scelta delle incognite iperstatiche non

può essere facilmente automatizzata; tutti i moderni metodi ed i moderni programmi di analisi strutturali si basano sul metodo dei cedimenti.

Solo recentemente si assiste ad un rinnovato interesse per versioni opportunamente modificate del metodo delle forze, e ci si comincia ad interrogare se non sia possibile re-introdurre questo approccio [Felippa 1987]. Le linee di ricerca attuale sono volte ad automatizzare convenientemente la scelta delle incognite iperstatiche [Kaneko et al. 1982], o a modificare sostanzialmente la stessa logica portante del metodo, eliminando del tutto le incognite iperstatiche, ed assumendo quali incognite primarie tutte le caratteristiche della sollecitazione interna nelle aste. Questa è la via seguita nel cosiddetto metodo delle forze integrale (IFM) [Patnaik et al. 1973, 1976, 1982, 1989, 1990, 1991] che in un confronto diretto col classico metodo degli elementi finiti (basato sul metodo dei cedimenti) riesce vincitore, sia sul piano della velocità computazionale, che sul piano dell'affidabilità dei risultati (Patnaik et al. [1991]).

3.2. I carichi nodali

I carichi agenti su di una struttura possono suddividersi in carichi *nodali*, che agiscono nei nodi, e carichi agenti sugli elementi. Ai fini di una qualsiasi analisi matriciale della struttura, questi carichi agenti sugli elementi devono essere in qualche modo rimpiazzati da *carichi nodali equivalenti*:

Definizione 3.22: Assegnata una struttura S , soggetta ai carichi $\{Q_i\}$ agenti sugli elementi, si definiscono *carichi nodali equivalenti* ai $\{Q_i\}$, i carichi nodali che, applicati alla struttura, causano gli stessi spostamenti nodali causati dai $\{Q_i\}$.

L'effettiva determinazione dei carichi nodali equivalenti può condursi applicando il:

Teorema 3.1: Sia assegnata una struttura S , soggetta ai carichi nodali $\{P_i\}$ ed ai carichi sugli elementi $\{Q_i\}$. Per ottenere i carichi nodali equivalenti ai $\{Q_i\}$:

1. si separano i carichi nodali dai carichi sugli elementi
2. si eliminano tutte le libertà di nodo, incastrando tutti i nodi
3. si calcolano le caratteristiche nei nodi che nascono sullo schema incastrato per effetto dei carichi sugli elementi
4. le caratteristiche così trovate, cambiate di segno, forniscono i carichi nodali equivalenti
5. la somma dei carichi nodali e dei carichi nodali equivalenti fornisce l'insieme di carichi desiderati.

DIM. La dimostrazione si basa sul principio di sovrapposizione degli effetti, e può essere condotta sull'esempio di Figura 3.1, dove è illustrata una trave incastrata ed appoggiata, con sbalzo, soggetta ai carichi nodali \mathcal{M} e P , ed ai carichi sugli elementi q e P' .

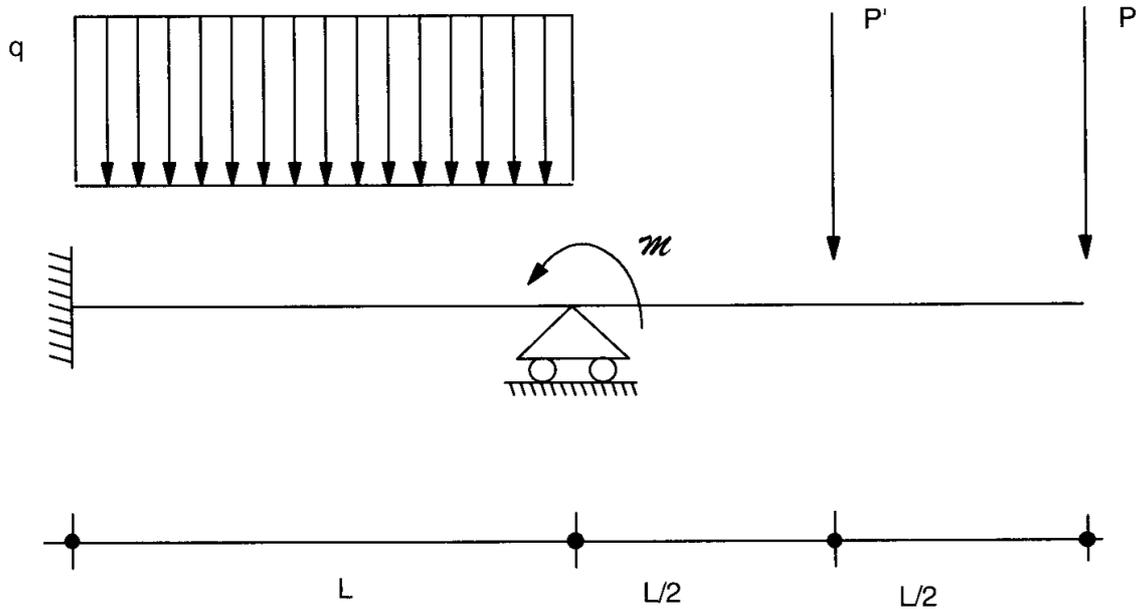


Figura 3.1- Schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto

Questi ultimi due carichi andranno sostituiti con un insieme di carichi nodali (forze e coppie) equivalenti, nel senso detto. A ciò fare, si eliminino tutte le libertà di movimento della trave, incastrandò i tre nodi (Figura 3.2); le due travi risultanti, soggette ai carichi sugli elementi q e P' , vedranno nascere agli estremi dei tagli e dei momenti flettenti.(Figura 3.3).

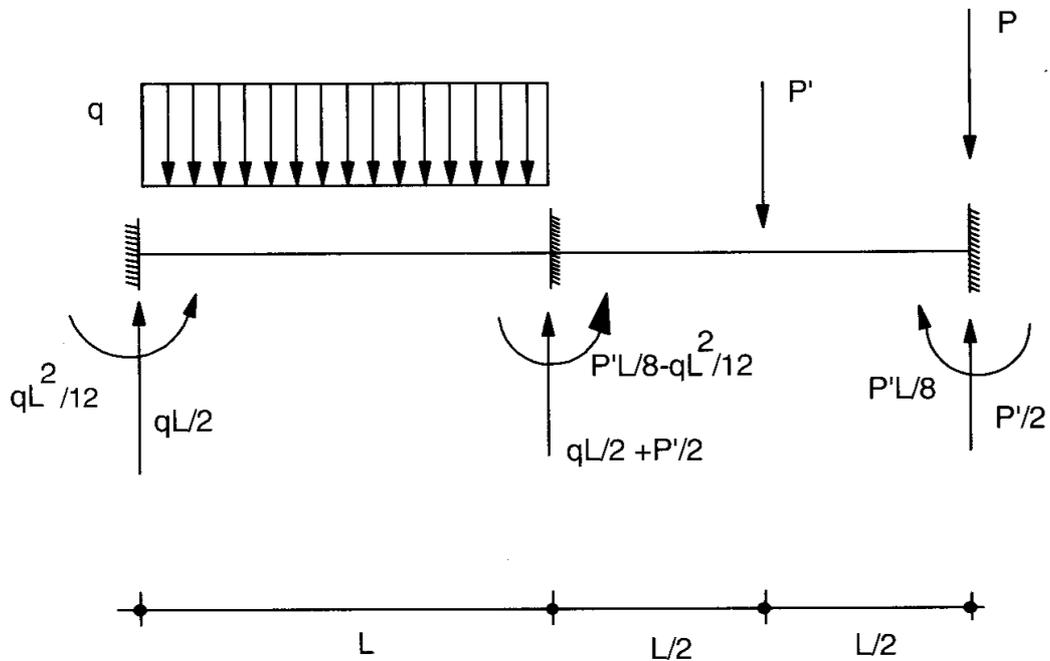


Figura 3.2- Schema a nodi fissi

Questi momenti e questi tagli, cambiati di segno, costituiscono il ricercato insieme di forze nodali equivalenti, ed aggiunti ai carichi nodali M e P , costituiscono l'insieme dei carichi nodali da applicare alla struttura (Figura 3.4). Per dimostrare che in realtà gli spostamenti nodali sul sistema di figura 3.1. sono gli stessi di quelli di figura 3.4 si può fare ricorso al principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti è ovvio che la somma dei carichi di figura 3.3 e di figura 3.4 è pari ai carichi effettivi di figura 3.1, ed è quindi dimostrato che la somma degli spostamenti nodali, calcolati sullo schema di figura 3.3 e sullo schema di figura 3.4 è uguale agli spostamenti nodali (effettivi) di figura 3.1.

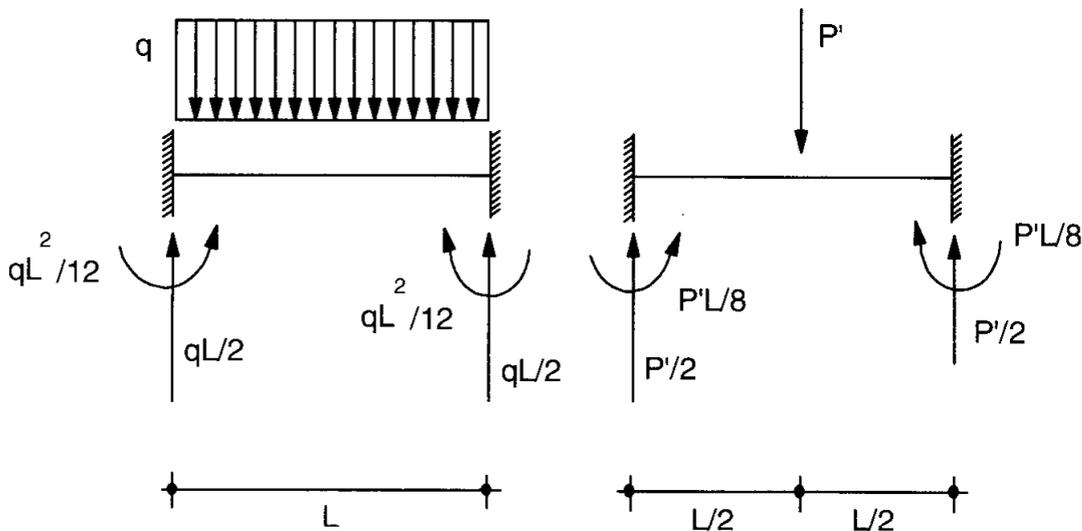


Figura 3.3- Momenti e tagli sullo schema a nodi fissi

Poichè però lo schema di figura 3.3 corrisponde a spostamenti nodali nulli, si ha l'asserto.

Nota 3.1: Le caratteristiche nei nodi dovute ai carichi effettivi *non* sono uguali alle caratteristiche dovute ai carichi nodali equivalenti. Infatti, a queste ultime vanno aggiunte le caratteristiche calcolate sugli schemi incastrati.

3.3. Flessibilità

a) *Elemento di trave piana*

Si consideri un elemento di trave piano i , soggetto a flessione e taglio, di luce L , e si supponga, arbitrariamente, che l'estremo 1 sia incastrato, mentre l'estremo 2 sia libero (Figura 3.5).

L'estremo libero può abbassarsi di una quantità v_2 e ruotare di un angolo φ_2 . Le forze che possono agire nello stesso estremo libero sono una forza verticale P_2 , positiva

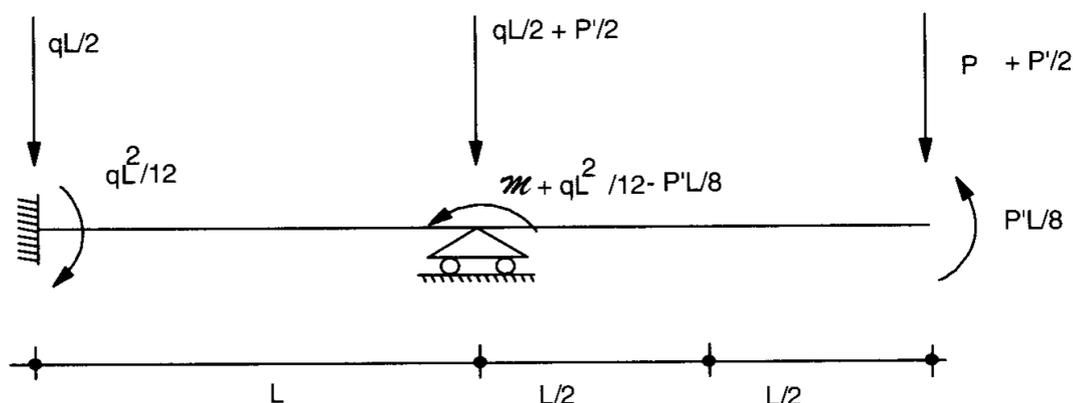


Figura 3.4- Carichi nodali equivalenti ai carichi di Figura 3.1

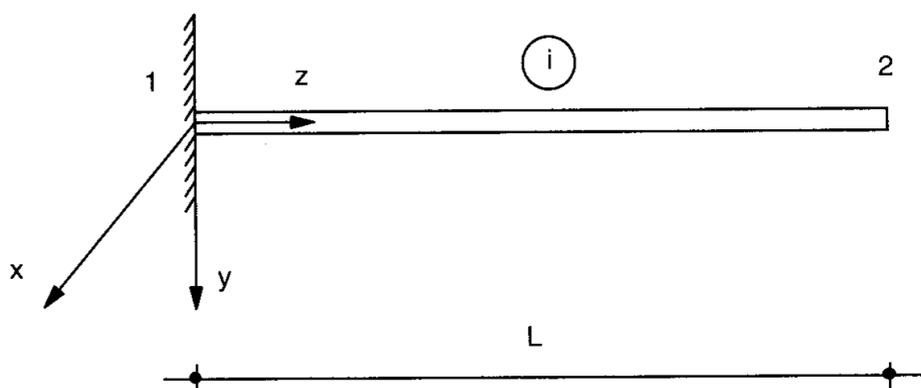


Figura 3.5- Elemento di trave piana

se verso il basso, ed una coppia flettente M_2 , positiva se antioraria.

La *matrice elementare di flessibilità* F_i è una matrice (2×2) che lega gli spostamenti in 2 alle forze agenti in 2, secondo la relazione:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i11} & F_{i12} \\ F_{i21} & F_{i22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Per calcolare F_i si supponga che nell'estremo 2 agisca solo la forza P_2 (Figura 3.6); è allora ben noto che:

$$v_2 = \frac{P_2 L^3}{3EI} \quad (3.2)$$

$$\varphi_2 = -\frac{P_2 L^2}{2EI} \quad (3.3)$$

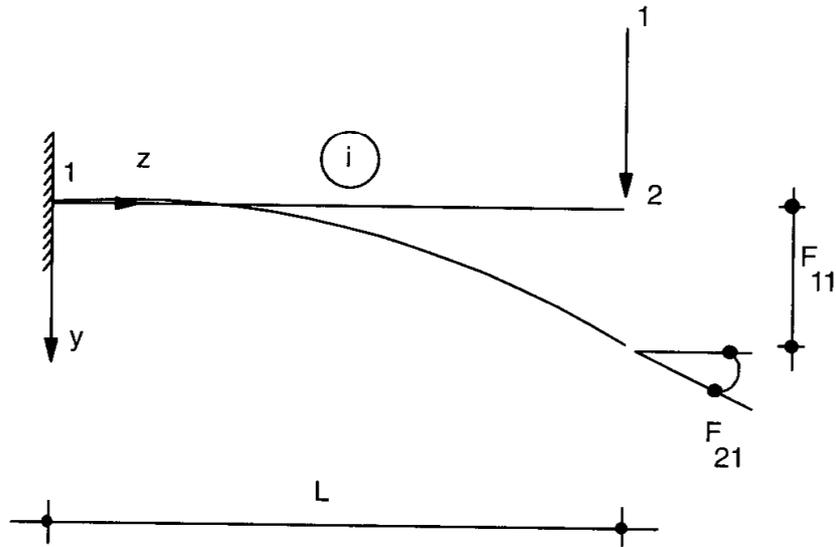


Figura 3.6- Flessibilità flessionali e taglianti

e quindi:

$$F_{i11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{i21} = -\frac{L^2}{2EI}. \quad (3.4)$$

Analogamente, se nell'estremo 2 agisce la coppia \$\mathcal{M}_2\$, si ha (Figura 3.7):

$$v_2 = -\frac{\mathcal{M}_2 L^2}{2EI} \quad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{\mathcal{M}_2 L}{EI} \quad (3.6)$$

e quindi:

$$F_{i21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad F_{i22} = \frac{L}{EI}. \quad (3.7)$$

La matrice elementare di rigidità dell'elemento trave piano è quindi data da:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Nota 3.2: Si osservi la simmetria della matrice elementare di flessibilità, garantita dal teorema di Betti.

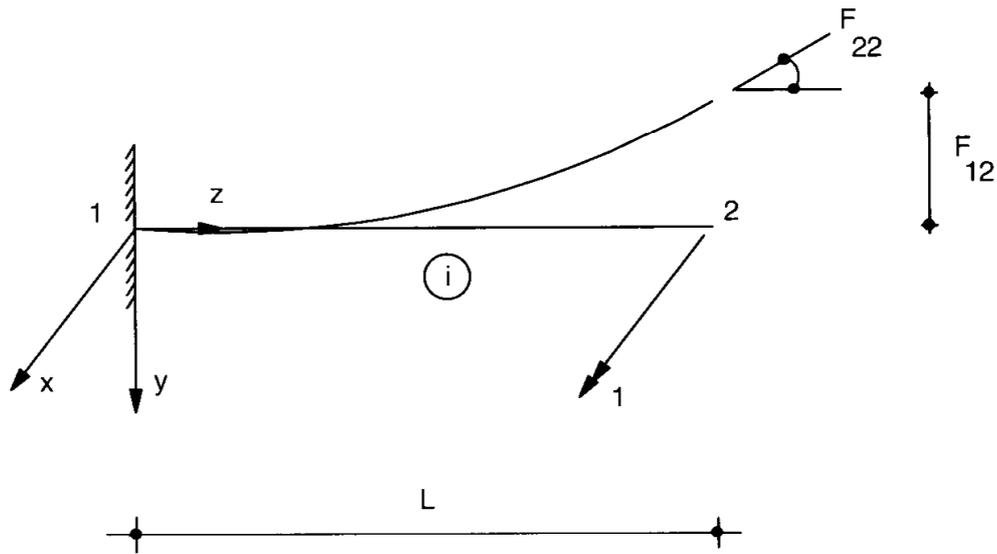


Figura 3.7- Flessibilità flessionali e taglianti

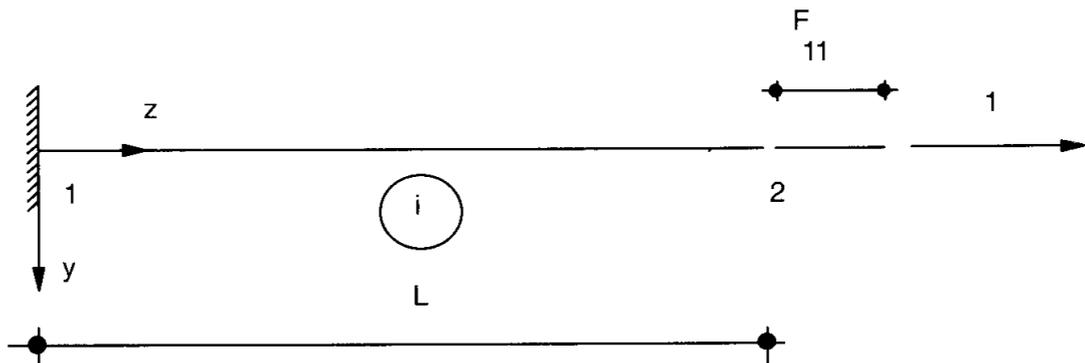


Figura 3.8- Flessibilità assiale

b) Elemento di telaio piano

Un elemento di telaio piano è soggetto, oltre che a momento flettente e taglio, anche a sforzo assiale. Si è tuttavia già visto che la sollecitazione di sforzo assiale si disaccoppia dalle sollecitazioni di momento e taglio, e quindi occorrerà calcolare il singolo termine di flessibilità sullo schema di Figura 3.8. La matrice di flessibilità è fornita da:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

c) *Elemento di un grigliato piano*

Anche in questo caso la matrice di flessibilità elementare si può ottenere aggiungendo un termine opportuno alla matrice di flessibilità elementare dell'elemento trave. Infatti, un tipico elemento di un grigliato piano è soggetto a momento flettente, taglio e momento torcente. Restano quindi da calcolare i coefficienti di flessibilità sullo schema di Figura 3.9.

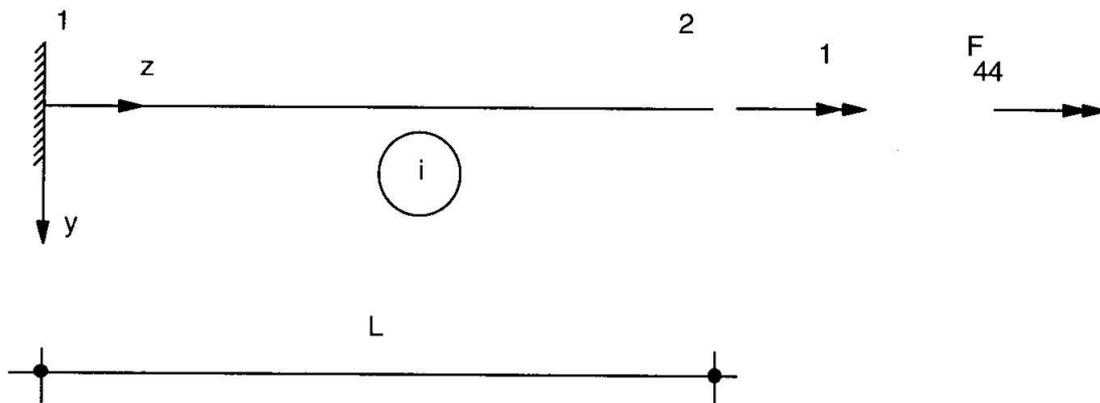


Figura 3.9- Flessibilità torsionale

Può comunque facilmente osservarsi che anche in questo caso la sollecitazione di torsione si disaccoppia da quelle di momento e taglio, e che quindi occorre calcolare la sola rotazione torsionale dovuta ad una coppia torcente unitaria applicata in 2. La matrice elementare di rigidità è quindi fornita da:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{qL}{GI_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

dove q è il *fattore di torsione*, ed I_p è il momento polare della sezione retta.

d) *Elemento di telaio spaziale*

Si è in presenza del caso più generale, per una struttura a scheletro, con le sei sollecitazioni esterne agenti in 2, come riportato in Figura 3.10.

La matrice di flessibilità elementare sarà quindi di dimensioni 6, e può essere facilmente calcolata sugli schemi già descritti, e sui due ulteriori schemi di Figura 3.11 e Figura 3.12:

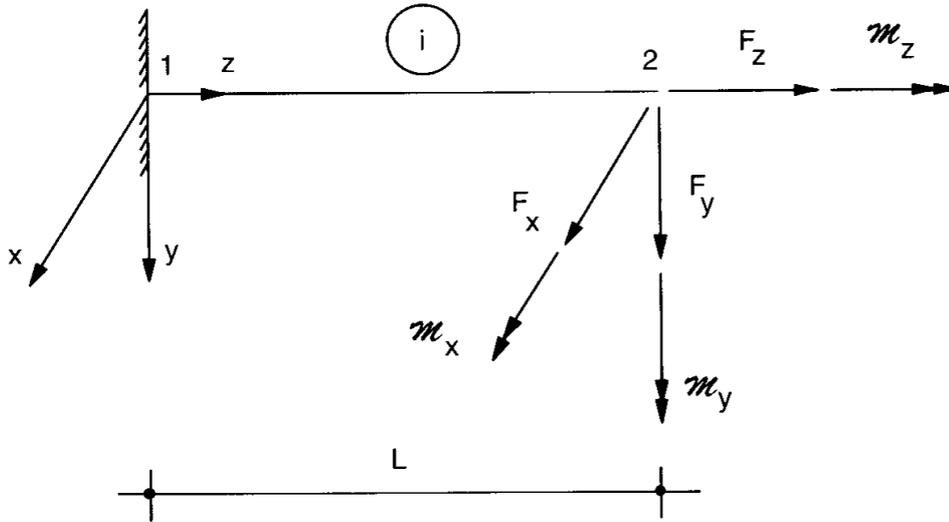


Figura 3.10- Sollecitazioni all'estremo di un elemento trave spaziale

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_z} & -\frac{L^2}{2EI_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI_z} & \frac{L}{EI_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI_y} & \frac{L^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI_y} & \frac{L}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{qL}{GI_p} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.4. Rigidezze

Concetto duale al concetto di flessibilità è quello di rigidezza: i termini della matrice elementare di flessibilità possono definirsi come gli spostamenti relativi dell'estremo 2 rispetto all'estremo 1, causati da forze unitarie nell'estremo 2, mentre i termini della matrice elementare di rigidezza sono le forze da applicare nell'estremo 2 per generare spostamenti relativi unitari tra gli estremi 2 ed 1 dell'elemento.

Risulta quindi evidente che esiste una semplice relazione che lega la matrice elementare di flessibilità \mathbf{F}_i alla matrice elementare di rigidezza \mathbf{k}_i :

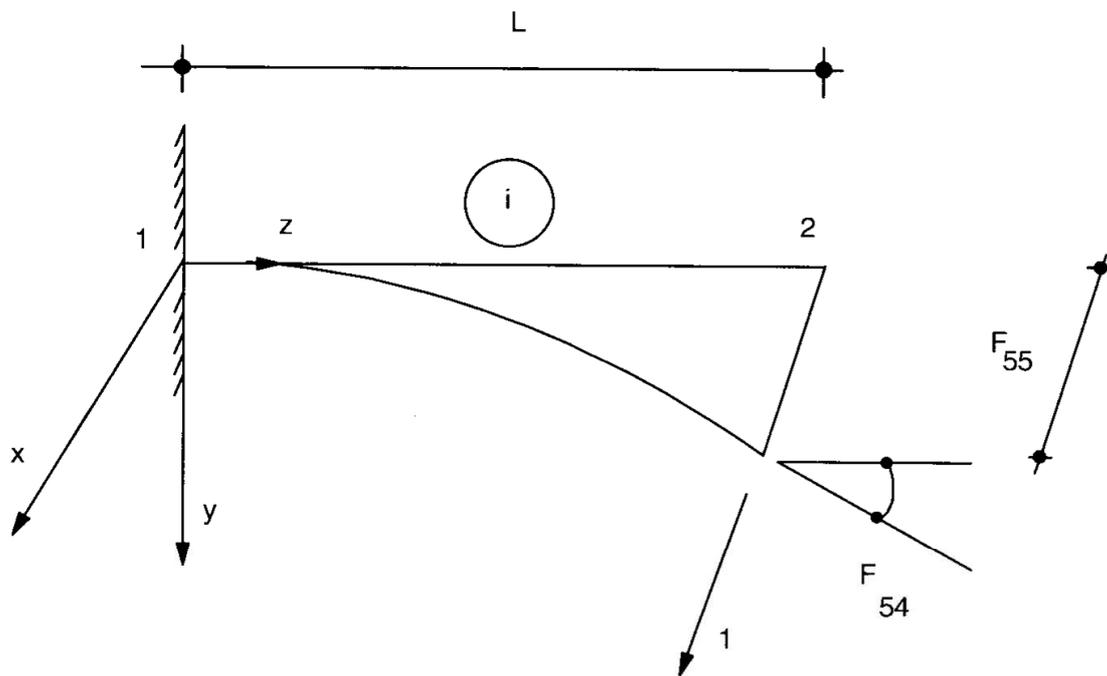


Figura 3.11- Flessibilità flessionali e taglienti fuori del piano

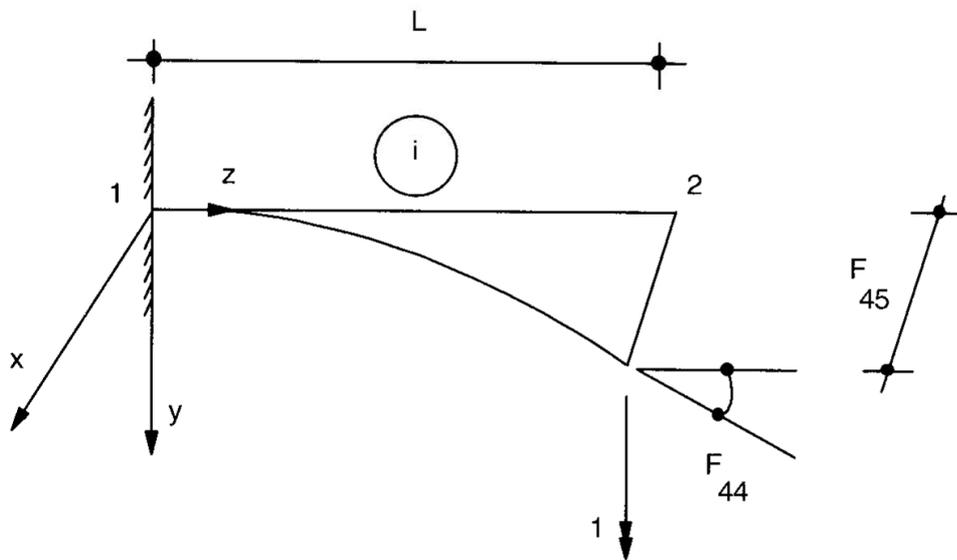


Figura 3.12- Flessibilità flessionali e taglienti fuori del piano

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{F}_i^{-1} \quad (3.12)$$

a) *Elemento di trave piana*

Invertendo la matrice (3.8) si ottiene subito la richiesta matrice di rigidità:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Si può anche ottenere lo stesso risultato risolvendo gli schemi di Figura 3.13 e Figura 3.14.

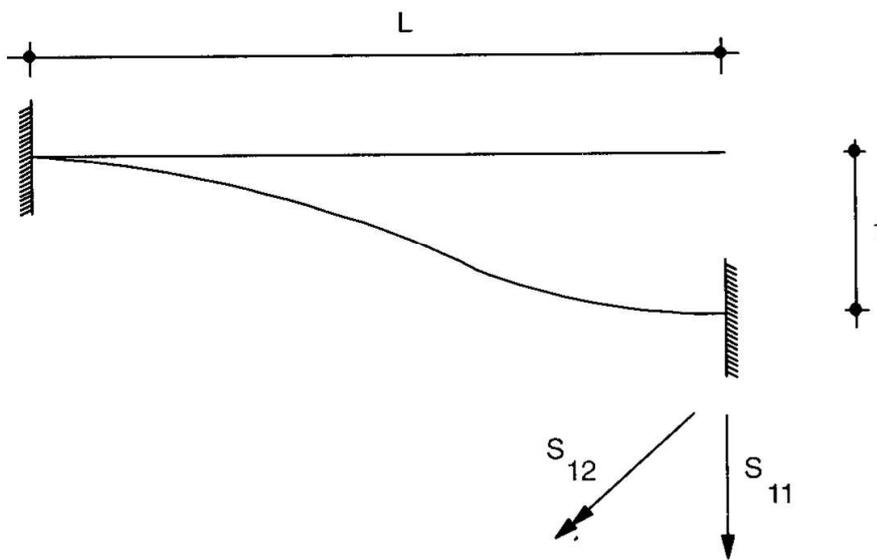


Figura 3.13- Rigidezze flessionali e taglienti per trave piana

Usando, ad esempio, il metodo della linea elastica, si ottiene, per lo schema di figura 3.13, una deformata pari a:

$$v(z) = -2\frac{z^3}{L^3} + 3\frac{z^2}{L^2} \quad (3.14)$$

e quindi il momento ed il taglio sono forniti da:

$$M(z) = -EIv'' = 12EI\frac{z}{L^3} - \frac{6EI}{L^2} \quad (3.15)$$

$$T(z) = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.16)$$

Si ha perciò:

$$k_{11} = T(L) = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.17)$$

$$k_{12} = M(L) = \frac{6EI}{L^2} \quad (3.18)$$

b) Elemento di telaio piano

Si osserva subito che la matrice di rigidità elementare è data da:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

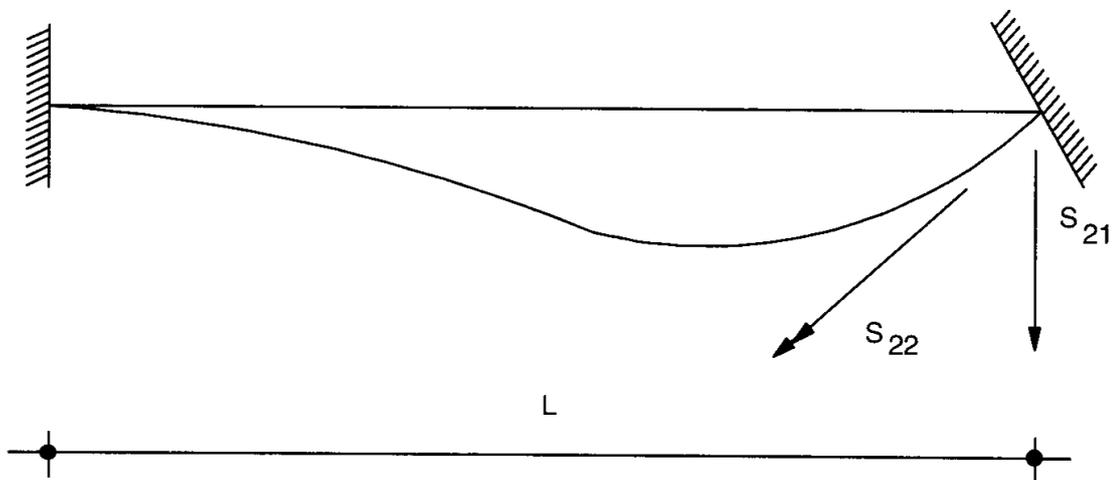


Figura 3.14- Rigidezze flessionali e taglianti per trave piana

c) Elemento di un grigliato piano

Anche in questo caso il risultato è immediato:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_p}{qL} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

d) Elemento di un telaio spaziale

Invertendo la corrispondente matrice di flessibilità si ottiene:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{qL} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.5. Il metodo delle forze

Si consideri una struttura S , discreta o discretizzata, a p nodi ed a aste. Sia m il numero totale delle caratteristiche interne delle aste, ed n il numero dei gradi di libertà della struttura. Si è visto nel paragrafo 2 che per ogni asta può scriversi una relazione matriciale del tipo (3.1):

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{f}_i \quad (3.22)$$

Assemblando le a relazioni elementari (3.22) in una singola relazione matriciale si ha:

$$\mathbf{d} = \mathbf{F} \mathbf{f} \quad (3.23)$$

dove \mathbf{d} è un vettore contenente gli spostamenti relativi agli estremi di ogni asta, \mathbf{f} è un vettore che contiene le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, ed $\mathbf{F} = \text{diag}\{\mathbf{F}_i\}$ è la cosiddetta *matrice delle flessibilità non assemblate*.

Le dimensioni di \mathbf{F} dipendono ovviamente dal problema in considerazione. Se le matrici di rigidezza elementare hanno dimensioni $(k \times k)$, allora \mathbf{F} ha dimensioni $(ka \times ka)$.

Siano poi $\mathbf{c}(n)$ il vettore dei gradi di libertà e $\mathbf{p}(n)$ il vettore dei carichi esterni nodali (effettivi o equivalenti)

Le *condizioni di equilibrio* possono esprimersi come:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{p} \quad (3.24)$$

dove \mathbf{A} è una matrice rettangolare, di dimensioni $(n \times m)$, detta *matrice di equilibrio*. Dalle definizioni di labilità, isostaticità ed iperstaticità discende:

S è *labile* se $m < n$ ed il rango di $\mathbf{A} = m$

S è *isostatica* se $m = n$ ed il rango di $\mathbf{A} = m$

S è *iperstatica* se $m > n$ ed il rango di $\mathbf{A} = n$.

Sono poi possibili casi intermedi, in cui S è contemporaneamente iperstatica e labile. Se ad esempio $m > n$, ed il rango di $\mathbf{A} = n - p$, allora la struttura è $(m - n)$ volte iperstatica e p volte labile.

Esempio 3.1: Si consideri la travatura reticolare di Figura 3.15.

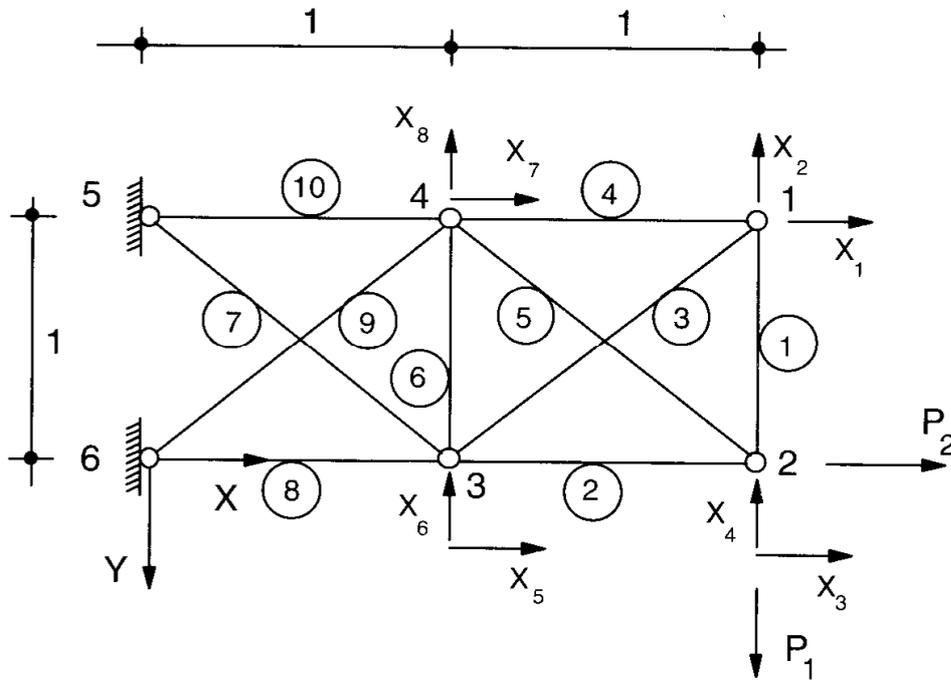


Figura 3.15- Travatura reticolare a 6 nodi e 10 aste

Si hanno 6 nodi e 10 aste, ed occorre scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale dei nodi non vincolati 1,2,3 e 4. In totale, quindi si hanno 8 gradi di libertà: $n = 8$.

Vi sono poi 10 aste, ed in ogni asta esiste solo sforzo normale, per cui si ha $m = 10$.

Le equazioni di equilibrio sono, esplicitamente:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & -r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & -r & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & -r & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -r & -1 & 0 & 0 & -r & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 \\
 F_4 \\
 F_5 \\
 F_6 \\
 F_7 \\
 F_8 \\
 F_9 \\
 F_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 P_2 \\
 -P_1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (3.25)$$

avendo posto $r = \sqrt{2}/2$.

Esempio 3.2: Il telaio tridimensionale di Figura 3.16 ha 16 nodi e 24 aste.

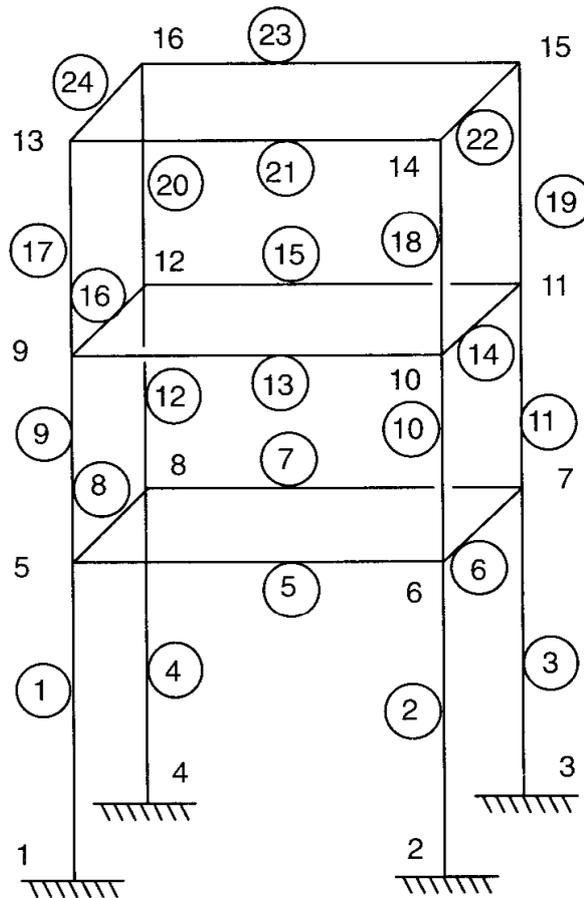


Figura 3.16- Telaio tridimensionale a 16 nodi e 24 aste

Ogni nodo libero ha 6 possibilità di movimento, mentre i quattro nodi incastrati non ne hanno alcuna.

Risulta quindi:

$$n = (16 - 4)6 = 72 \quad (3.26)$$

Ogni asta ha 6 caratteristiche della sollecitazione interna. Sarà quindi:

$$m = 24 \times 6 = 144 \quad (3.27)$$

Supposto che la struttura sia p volte iperstatica, il passo fondamentale del metodo delle forze è la scelta di un insieme di p incognite iperstatiche X_i . Ipotizzando di aver eseguito questa scelta, le equazioni di equilibrio (3.24) divengono:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

o anche:

$$\mathbf{B}\mathbf{f} = \mathbf{q} \quad (3.29)$$

dove \mathbf{B} è ora una matrice quadrata.

Si supponga ora di applicare un insieme arbitrario di forze virtuali $\delta\mathbf{q}$ alla struttura, ossia un insieme virtuale $\delta\mathbf{p}$ di forze nodali, più un insieme virtuale $\delta\mathbf{x}$ di incognite iperstatiche. Le equazioni di equilibrio (3.29) possono ora scriversi come:

$$\mathbf{B}\delta\mathbf{f} = \delta\mathbf{q} \quad (3.30)$$

Il lavoro esterno δL_e è fornito dalle forze virtuali $\delta\mathbf{q}$, che lavorano per gli spostamenti effettivi \mathbf{s} :

$$\delta L_e = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{s} = [\delta\mathbf{p} \quad \delta\mathbf{x}] \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{s}_x \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

dove \mathbf{c} contiene gli spostamenti effettivi dei nodi, ed \mathbf{s}_x contiene gli spostamenti effettivi corrispondenti alle prescelte iperstatiche.

Analogamente, il lavoro interno δL_i sarà fornito da:

$$\delta L_i = \delta\mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad (3.32)$$

Per il principio delle forze virtuali, si ha allora:

$$\delta\mathbf{q}^T \mathbf{s} = \delta\mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad (3.33)$$

Usando le (3.23), (3.29) e (3.30) si giunge a scrivere:

$$\delta \mathbf{f}^T \mathbf{B}^T \mathbf{s} = \delta \mathbf{f}^T \mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} \quad (3.34)$$

che per l'arbitrarietà di $\delta \mathbf{f}$ conduce al sistema:

$$\mathbf{B}^{-T} \mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{s} \quad (3.35)$$

Definendo $\mathbf{F}_a = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{F} \mathbf{B}^{-1}$, il sistema (3.35) può scriversi, più sinteticamente:

$$\mathbf{F}_a \mathbf{q} = \mathbf{s} \quad (3.36)$$

\mathbf{F}_a è la *matrice globale di flessibilità* della struttura.

Le incognite del sistema (3.36) sono gli spostamenti \mathbf{c} e le incognite iperstatiche \mathbf{x} . Conviene pertanto riscrivere il sistema come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{a11} & \mathbf{F}_{a12} \\ \mathbf{F}_{a21} & \mathbf{F}_{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{s}_x \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

La seconda equazione fornisce:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_{a22}^{-1} (\mathbf{s}_x - \mathbf{F}_{a21} \mathbf{p}) \quad (3.38)$$

Ricavate le iperstatiche, si può sostituire la \mathbf{x} nella prima equazione, ricavando quindi le \mathbf{c} . Le caratteristiche \mathbf{f} possono ricavarsi dalla (3.29), tenendo conto che — come osservato nel paragrafo 3.1 — \mathbf{f} conterrà solo le caratteristiche dovute ai carichi nodali. Ad esso andrà quindi aggiunto l'insieme delle caratteristiche \mathbf{f}_I calcolato sugli schemi incastrati.

Nota 3.3: L'intera esposizione del metodo delle forze è ripresa da Weaver et al. [1990], cui si rimanda anche per esempi concreti. Si è anche cercato, fin dove possibile, di seguirne la terminologia.

3.6. Il metodo dei cedimenti

Il metodo dei cedimenti può formalizzarsi in modo analogo al metodo delle forze, ricavando la matrice di rigidità globale da una applicazione del principio degli spostamenti virtuali. Il primo passo è scrivere le relazioni analoghe delle (3.23):

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_d \mathbf{d} \quad (3.39)$$

dove $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{\mathbf{k}_i\}$ è chiamata la *matrice delle rigidità non assemblate*. Le equazioni di equilibrio (3.24) verranno sostituite da equazioni di compatibilità, ed a questo scopo è necessario introdurre un vettore \mathbf{d}^* , contenente gli spostamenti nodali

incogniti \mathbf{c} , e gli spostamenti nodali imposti \mathbf{d}_v (eventualmente nulli se i vincoli sono perfetti).

Le equazioni di compatibilità possono scriversi:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\mathbf{d}^* = [\mathbf{C}_L \quad \mathbf{C}_V] \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

dove la *matrice di compatibilità* \mathbf{C} è stata partizionata nelle due sottomatrici \mathbf{C}_L e \mathbf{C}_V . Ogni colonna in \mathbf{C}_L contiene gli spostamenti degli elementi causati da uno spostamento nodale unitario, mentre ogni colonna in \mathbf{C}_V contiene gli spostamenti degli elementi dovuti ad uno spostamento unitario di un vincolo.

Si consideri ora un insieme arbitrario di spostamenti virtuali di tutti i nodi della struttura $\delta\mathbf{d}^*$, che causa un insieme di spostamenti virtuali degli elementi $\delta\mathbf{d}$ fornito da:

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{C}\delta\mathbf{d}^* = [\mathbf{C}_L \quad \mathbf{C}_V] \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{c} \\ \delta\mathbf{d}_v \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Il lavoro virtuale esterno δL_e generato dalle forze nodali effettive \mathbf{p} , per effetto degli spostamenti virtuali nodali $\delta\mathbf{d}^*$, è fornito da:

$$\delta L_e = \delta\mathbf{d}^{*T} \mathbf{p} = [\delta\mathbf{c} \quad \delta\mathbf{d}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_L \\ \mathbf{p}_v \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

dove \mathbf{p}_L sono le forze nodali in corrispondenza dei nodi liberi, e \mathbf{p}_v sono le forze applicate nei nodi vincolati, ossia le reazioni. Analogamente, il lavoro virtuale interno è pari a:

$$\delta L_i = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.43)$$

Il principio degli spostamenti virtuali permette di scrivere:

$$\delta\mathbf{d}^{*T} \mathbf{p} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.44)$$

Usando ora le equazioni (3.39), (3.40) e (3.41) si giunge a:

$$\delta\mathbf{d}^{*T} \mathbf{p} = \delta\mathbf{d}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{K}_d \mathbf{C} \mathbf{d}^* \quad (3.45)$$

Per l'arbitrarietà del vettore $\delta\mathbf{d}^*$, si giunge alla relazione:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{d}^* \quad (3.46)$$

con $\mathbf{K} = \mathbf{C}^T \mathbf{K}_d \mathbf{C}$, *matrice delle rigidità globali*.

Le equazioni (3.46) possono partizionarsi come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_L \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Le incognite sono gli spostamenti nodali \mathbf{c} e le reazioni \mathbf{p}_v , ed è quindi conveniente risolvere la prima delle due equazioni matriciali precedenti:

$$\mathbf{c} = \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{p}_L - \mathbf{K}_{12}\mathbf{d}_v) \quad (3.48)$$

e poi eventualmente ottenere le reazioni:

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{K}_{21}\mathbf{c} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{d}_v \quad (3.49)$$

Infine, le caratteristiche negli elementi possono calcolarsi sostituendo la (3.40) nella (3.39):

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_d \mathbf{C} \mathbf{d}^* \quad (3.50)$$

senza dimenticare di aggiungere alla (3.50) le caratteristiche che sorgono a causa degli eventuali carichi non nodali (vedi paragrafo 1).

Nota 3.4: Anche in questo caso la trattazione è ripresa da Weaver et al. [1990], cui si rimanda per esempi ed approfondimenti

3.7. Il metodo delle forze: aspetti computazionali

Come si è visto, il passo fondamentale nel metodo delle forze è la scelta delle incognite iperstatiche \mathbf{x} . Operata questa scelta, le equazioni di equilibrio divengono (cfr. 3.28):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

ossia:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}_x] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_0 \mathbf{p} + \mathbf{D}_x \mathbf{x} \quad (3.52)$$

dove:

$$[\mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}_x] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.53)$$

\mathbf{D}_0 è una matrice ad m righe ed n colonne, e \mathbf{D}_x è una matrice ad m righe ed $m - n$ colonne.

Se ne può dedurre che scegliere le incognite iperstatiche \mathbf{x} equivale a scegliere la coppia di matrici $(\mathbf{D}_0 \ \mathbf{D}_x)$, tali da poter scrivere la (3.52). Occorre quindi che sia:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}_0 = \mathbf{I} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{D}_x = \mathbf{0} \quad (3.55)$$

La matrice di flessibilità globale può partizionarsi come segue (cfr. 3.36):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{a11} & \mathbf{F}_{a12} \\ \mathbf{F}_{a21} & \mathbf{F}_{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0^T \\ \mathbf{D}_x^T \end{bmatrix} \mathbf{F} [\mathbf{D}_0 \ \mathbf{D}_x] \quad (3.56)$$

e quindi il sistema (3.38) si scrive:

$$(\mathbf{D}_x^T \mathbf{F} \mathbf{D}_x) \mathbf{x} = \mathbf{s}_x - \mathbf{D}_x^T \mathbf{F} \mathbf{D}_0 \mathbf{p} \quad (3.57)$$

Il metodo delle forze consiste quindi nei seguenti passi:

1. scelta di $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_x)$ tale che valga la (3.52)
2. calcolo di $\mathbf{D}_x^T \mathbf{F} \mathbf{D}_x$ e $\mathbf{D}_x^T \mathbf{F} \mathbf{D}_0$,
3. soluzione del sistema (3.57)
4. Calcolo spostamenti \mathbf{c} (cfr.3.37):

$$\mathbf{c} = (\mathbf{D}_0^T \mathbf{F} \mathbf{D}_0) \mathbf{p} + (\mathbf{D}_0^T \mathbf{F} \mathbf{D}_x) \mathbf{x} \quad (3.58)$$

Poichè esistono infinite scelte di $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_x)$, vale la pena di *ottimizzare* la \mathbf{D}_x , privilegiando le matrici più sparse ed a banda più stretta [Kaneko et al. 1982]. Tra i metodi proposti per il calcolo delle matrici \mathbf{D}_x e \mathbf{D}_0 , si segnalano:

3.7.1 Il metodo QR

Fattorizzando la trasposta della matrice di equilibrio \mathbf{A} secondo il metodo QR si ottiene:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (3.59)$$

dove \mathbf{Q} è una matrice ortogonale ($m \times m$), ed \mathbf{R} è una matrice ($m \times n$) dalla forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

con $\hat{\mathbf{R}}$ matrice triangolare alta non singolare ($n \times n$), e $\mathbf{0}$ matrice ($m - n \times n$) nulla. Si partizioni ora \mathbf{Q} come segue:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \quad (3.61)$$

dove \mathbf{Q}_1 ha n colonne e \mathbf{Q}_2 ha $m - n$ colonne.

La matrice \mathbf{A} può esprimersi come:

$$\mathbf{A}^T = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Si può dimostrare il:

Teorema 3.2: Data la descritta fattorizzazione di \mathbf{A}^T , può assumersi

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{R}}^{-T} \quad \mathbf{D}_x = \mathbf{Q}_2 \quad (3.63)$$

DIM. Infatti:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{R}^T = [\hat{\mathbf{R}}^T \quad \mathbf{0}] \quad (3.64)$$

e quindi:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \hat{\mathbf{R}}^T \quad (3.65)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

da cui:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{R}}^{-T} = \mathbf{I} \quad (3.67)$$

e quindi la scelta del teorema soddisfa le (3.54),(3.55).

Per la realizzazione pratica della decomposizione QR di una matrice rettangolare si rimanda ad un testo di calcolo numerico.

Ad esempio, nel libro di Gollub e Van Loan [1989, pp.211-221], vengono discussi metodi di fattorizzazione QR basati su trasformazioni di Householder, Householder a blocchi, di Givens e di Givens veloci. Può anche essere utile un qualsiasi package di software matematico, come ad esempio il MATLAB o il MATHEMATICA. Come ultima annotazione, il metodo QR è noto per essere un metodo numerico estremamente stabile, ma le matrici \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_x tendono ad essere piene.

3.7.2. Il metodo LU

Applicando il metodo di fattorizzazione LU alla matrice \mathbf{A} si ottiene la seguente decomposizione:

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad \mathbf{U}\mathbf{V} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \quad (3.68)$$

dove \mathbf{W} è una matrice booleana ($n \times n$) di permutazioni di righe, \mathbf{L} è una matrice ($n \times n$) non singolare, triangolare bassa, con termini unitari sulla diagonale, ed \mathbf{U} è una matrice ($n \times m$) le cui colonne possono essere permutate, tramite una matrice

$(m \times m)$ booleana \mathbf{V} , in $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$, dove \mathbf{U}_1 è una matrice triangolare alta $(n \times n)$, non singolare, ed \mathbf{U}_2 è una matrice $(n \times m - n)$ con elementi nulli nell'angolo a sinistra in basso.

L'utilità della fattorizzazione LU risiede nel seguente:

Teorema 3.3: Si può scegliere:

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_x = \mathbf{V} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

DIM. Ed infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{D}_0 &= \mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{W}^T \mathbf{L} (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \mathbf{D}_x &= \mathbf{U} \mathbf{V} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.71)$$

da cui $\mathbf{A} \mathbf{D}_x = \mathbf{0}$.

Nota 3.5: L'effettiva decomposizione LU di una matrice rettangolare \mathbf{A} può essere consultata in I.Kaneko et al., [1982]

3.7.3. Il metodo LU inverso

Si fa solo cenno all'esistenza di un metodo LU modificato, proposto da Topçu nella tesi di dottorato del 1979. Essenzialmente, si modifica la matrice \mathbf{D}_x in modo da minimizzare la banda. In alcuni casi, sembra che il maggiore impegno computazionale per costruire \mathbf{D}_x sia più che ripagato dall'aver una matrice di flessibilità a banda molto ristretta.

3.8. Il metodo integrale delle forze

Il passo più difficile del metodo delle forze classico è senza dubbio la scelta delle incognite iperstatiche. Si sono allora visti tre metodi che automatizzano tale scelta, ed ognuno di essi presenta luci ed ombre. Vi è poi da fare un cenno al cosiddetto *metodo delle forze integrali*, o *integrated force method*, o ancora IFM di S. Patnaik, che rinuncia del tutto alla scelta delle incognite iperstatiche, ed assume direttamente

tutte le caratteristiche della sollecitazione interna \mathbf{f} come incognite primarie [Patnaik et al. 1973, 1976, 1982, 1986, 1989, 1990, 1991].

Le n equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{p} \quad (3.72)$$

vengono quindi affiancate da $(m - n)$ condizioni di compatibilità:

$$\overline{\mathbf{C}}\mathbf{d} = \mathbf{d}_L \quad (3.73)$$

dove $\overline{\mathbf{C}}$ è la *matrice di compatibilità*, di ordine $(m - n \times m)$, \mathbf{d} è il già definito vettore, di ordine m , delle deformazioni degli elementi, e \mathbf{d}_L è il vettore, di ordine $m - n$, delle eventuali deformazioni iniziali impresse.

Introducendo la trasformazione $\mathbf{d} = \mathbf{F}\mathbf{f}$ (cfr. 3.23), le condizioni di compatibilità divengono:

$$\overline{\mathbf{C}}\mathbf{F}\mathbf{f} = \mathbf{d}_L. \quad (3.74)$$

L'insieme delle equazioni di equilibrio e delle condizioni di compatibilità fornisce allora il sistema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \overline{\mathbf{C}}\mathbf{F} \end{Bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}_L \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

che può anche scriversi:

$$\mathbf{S}\mathbf{f} = \mathbf{p}^* \quad (3.76)$$

I passi essenziali per l'IFM sono allora:

1. generazione della matrice di equilibrio \mathbf{A} . Questo passo, comune a tutti i metodi delle forze, viene risolto assemblando le matrici di equilibrio elementari. D'altra parte, solo pochi elementi sono stati finora studiati. (cfr. [Robinson 1965], [Prziemeniecki et al. 1966], [Patnaik et al. 1991])
2. generazione della matrice di compatibilità $\overline{\mathbf{C}}$. Si vedrà tra breve come risolvere il problema estendendo il metodo proposto da De Saint-Venant per un solido continuo
3. generazione della matrice delle flessibilità non assemblate \mathbf{F}
4. assemblaggio vettore \mathbf{p}^*
5. soluzione del sistema $\mathbf{S}\mathbf{f} = \mathbf{p}^*$.

3.8.1. Generazione automatica della matrice di compatibilità $\bar{\mathbf{C}}$

Per un solido continuo le equazioni di compatibilità furono dedotte da De Saint Venant nel 1864. Partendo dalle relazioni spostamenti–deformazioni:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.77)$$

ed osservando che nelle sei relazioni precedenti vi sono 6 componenti di deformazione e 3 spostamenti, si ricavano 3 condizioni di compatibilità cui le e_{ij} devono obbedire. Tale metodo è stato recentemente esteso alle strutture discrete da Patnaik nel 1986. I passi fondamentali sono comunque gli stessi:

1. generazione delle relazioni deformazioni – spostamenti
2. eliminazione degli spostamenti dalle relazioni precedenti.

Per ottenere le relazioni deformazioni – spostamenti, si consideri che l'energia elastica di una struttura discreta può esprimersi nei due modi equivalenti:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{p} \quad (3.78)$$

ed usando le equazioni di equilibrio:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (3.79)$$

Se ne deduce che:

$$\frac{1}{2} \mathbf{f}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{c} - \mathbf{d}) = 0 \quad (3.80)$$

Le relazioni cercate saranno dunque fornite da:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{c} \quad (3.81)$$

Il secondo passo per la generazione della matrice di compatibilità $\bar{\mathbf{C}}$ è illustrato nel modo più semplice tramite un esempio.

Si consideri la travatura reticolare di Figura 3.17, per cui $m = 11$ ed $n = 6$. Le relazioni spostamenti–deformazioni sono fornite da:

$$\begin{aligned} d_1 &= c_3 \\ d_2 &= rc_5 + rc_6 \\ d_3 &= c_2 \\ d_4 &= -rc_1 + rc_2 + rc_3 - rc_4 \\ d_5 &= -c_1 + c_5 \\ d_6 &= -c_4 + c_6 \\ d_7 &= -rc_3 - rc_4 + rc_8 + rc_9 \\ d_8 &= -c_3 + c_7 \\ d_9 &= -rc_5 + rc_6 + rc_7 \end{aligned}$$

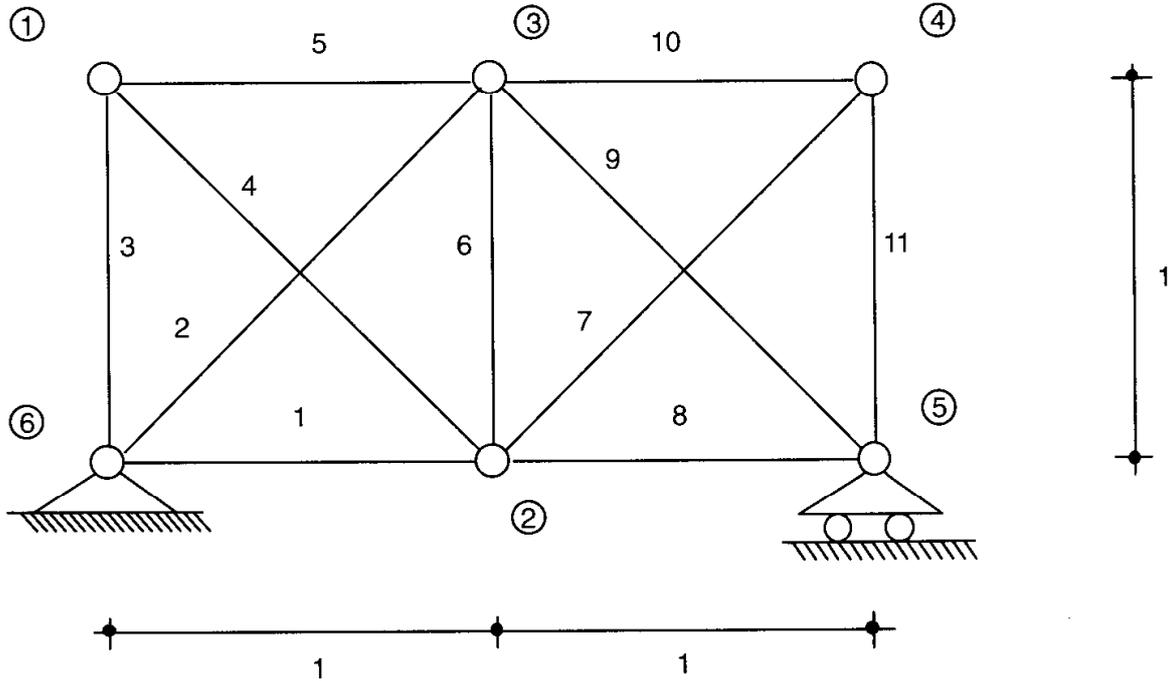


Figura 3.17- Travatura reticolare a 6 nodi ed 11 aste

$$d_{10} = -c_5 + c_8$$

$$d_{11} = c_9$$

$$\text{con } r = \sqrt{2}/2$$

Il problema è quello di eliminare i 9 spostamenti incogniti c_i dalle 11 relazioni precedenti. Si ottiene, dopo un po' di calcoli:

$$d_1 - \sqrt{2}d_2 + d_3 - \sqrt{2}d_4 + d_5 + d_6 = 0 \quad (3.82)$$

$$d_6 - \sqrt{2}d_7 + d_8 - \sqrt{2}d_9 + d_{10} + d_{11} = 0 \quad (3.83)$$

e quindi la matrice di compatibilità è fornita da:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Nota 3.6: Si osservi:

1. la generazione di $\bar{\mathbf{C}}$ non richiede alcuna scelta delle incognite iperstatiche
2. $\bar{\mathbf{C}}$ è sparsa ed a banda
3. in assenza di deformazioni impresse, $\bar{\mathbf{C}}$ soddisfa le equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

DIM. Infatti, dalla relazione $\bar{\mathbf{C}}\mathbf{d} = 0$, e dalla $\mathbf{d} = \mathbf{A}^T\mathbf{c}$, si trae $\bar{\mathbf{C}}\mathbf{A}^T\mathbf{c} = 0$, da cui l'asserto.

Nota 3.7: I metodi di generazione numerica della matrice $\bar{\mathbf{C}}$ sono descritti in [S. Patnaik, 1986]