

## 12. Problemi speciali

Esistono svariati ed importanti campi della teoria delle strutture in cui è possibile ricondurre, tramite opportune ipotesi e semplificazioni, il problema strutturale d'origine ad un problema più semplice di tipo monodimensionale. Ad alcuni di questi casi è dedicato quest'ultimo capitolo.

### 12.1. Le travi snelle a vincoli elasticamente cedevoli

Si è visto nel paragrafo 8.8. come sia possibile tener conto degli eventuali cedimenti anelastici, operando sulla matrice di rigidezza globale.

È invece più semplice modificare la matrice di rigidezza elementare, se agli estremi della trave sono presenti cedimenti di tipo elastico. Si consideri infatti lo schema di Figura 12.1, in cui sono presenti, agli estremi dell'elemento finito, due cedimenti elastici rotazionali e due cedimenti elastici trasversali.

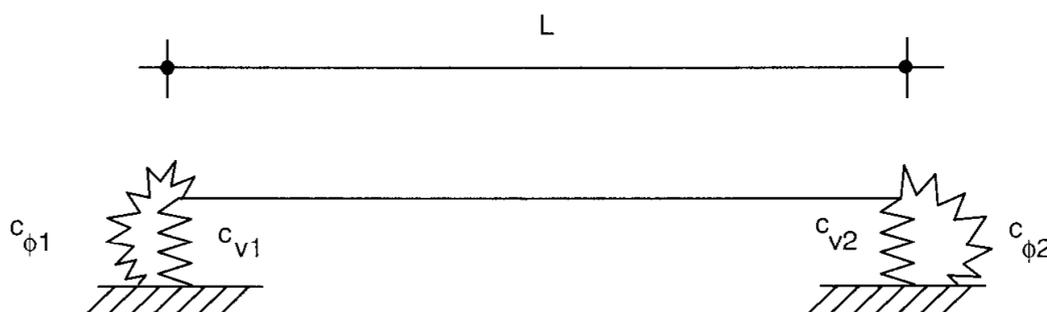


Figura 12.1- Elemento finito trave a vincoli elasticamente cedevoli

Supponendo lineare la relazione che lega le rotazioni e gli abbassamenti alle coppie reattive ed alle reazioni, rispettivamente, si ha:

$$v(0) = -c'_{v1} EI v'''(0) \quad (12.1)$$

$$\varphi(0) = -c'_{\varphi 1} EI v''(0) \quad (12.2)$$

all'estremo di sinistra, e:

$$v(L) = c'_{v 2} EI v'''(L) \quad (12.3)$$

$$\varphi(L) = c'_{\varphi 2} EI v''(L) \quad (12.4)$$

all'estremo di destra. Le due costanti  $c'_{v 1}$  e  $c'_{v 2}$  giocano il ruolo di flessibilità trasversali, mentre le costanti  $c'_{\varphi 1}$  e  $c'_{\varphi 2}$  sono flessibilità rotazionali.

Per il calcolo della matrice di rigidezza elementare, si ipotizzi ad esempio un polinomio interpolante di tipo cubico:

$$v(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 \quad (12.5)$$

e si impongano le condizioni ai limiti:

$$A_0 + 6c_{v 1} A_3 = v_1 \quad (12.6)$$

$$-A_1 + 2c_{\varphi 1} A_2 = \varphi_1 \quad (12.7)$$

$$A_0 + A_1 L + A_2 L^2 + A_3 L^3 - 6c_{v 2} A_3 = v_2 \quad (12.8)$$

$$-A_1 - 2A_2 L - 3A_3 L^2 - c_{\varphi 2}(2A_2 + 6A_3 L) = \varphi_2 \quad (12.9)$$

avendo posto, per comodità:

$$c_{v 1} = EI c'_{v 1} \quad (12.10)$$

$$c_{\varphi 1} = EI c'_{\varphi 1} \quad (12.11)$$

$$c_{v 2} = EI c'_{v 2} \quad (12.12)$$

$$c_{\varphi 2} = EI c'_{\varphi 2} \quad (12.13)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  è quindi fornita da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6c_{v 1} \\ 0 & -1 & 2c_{\varphi 1} & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 - 6c_{v 2} \\ 0 & -1 & -2L - 2c_{\varphi 2} & -3L^2 - 6c_{\varphi 2} L \end{bmatrix} \quad (12.14)$$

ed il prodotto  $\alpha \mathbf{C}^{-1}$  fornisce, come usuale, le funzioni di forma:

$$N_1 = \frac{12(c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2} + L)c_{v 2} + 12c_{\varphi 1}c_{\varphi 2}L^2 + 4c_{\varphi 1}L^3 + 4c_{\varphi 2}L^3}{D} + \frac{L^4 - 12c_{\varphi 1}c_{\varphi 2}Lz - 6c_{\varphi 1}L^2z - 6c_{\varphi 2}Lz^2 - 3L^2z^2 + 2(c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2} + L)z^3}{D} \quad (12.15)$$

$$N_2 = \frac{12c_{\varphi 2}c_{v 1}(L - z) + 6c_{v 1}(L^2 + z^2) - 12c_{\varphi 2}c_{v 2}z}{D} - \frac{+12Lz(c_{v 1} + c_{v 2}) + 4c_{\varphi 2}L^3z + L^4z - 6c_{v 2}z^2}{D} + \frac{6c_{\varphi 2}L^2z^2 + 2L^3z^2 - 2c_{\varphi 2}Lz^3 - L^2z^3}{D} \quad (12.16)$$

$$N_3 = \frac{12(c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2} + L)c_{v 1} + 12c_{\varphi 1}c_{\varphi 2}Lz + 6c_{\varphi 1}L^2z + 6c_{\varphi 2}Lz^2}{D} + \frac{3L^2z^2 - 2c_{\varphi 1}z^3 - 2Lz^3 - 2c_{\varphi 2}z^3}{D} \quad (12.17)$$

$$N_4 = \frac{12c_{\varphi 1}c_{v 1}(L - z) + 6c_{v 1}(L^2 - z^2) - 12c_{\varphi 1}c_{v 2}z}{D} + \frac{2c_{\varphi 1}L^3z - 6c_{v 2}z^2 + L^3z^2 - 2c_{\varphi 1}Lz^3 - L^2z^3}{D} \quad (12.18)$$

con:

$$D = 12(c_{v 1} + c_{v 2})(c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2} + L) + 12c_{\varphi 1}c_{\varphi 2}L^2 + 4c_{\varphi 1}L^3 + 4c_{\varphi 2}L^3 + L^4 \quad (12.19)$$

**Nota 12.1:** Nel caso di cedibilità nulle si riottengono le funzioni di forma già dedotte nel capitolo 8.

La matrice di rigidezza si può calcolare, così come illustrato nello stesso capitolo 8, ottenendo:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{D^2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 & k_6 \\ -k_1 & k_5 & k_1 & -k_3 \\ k_3 & k_6 & -k_3 & k_7 \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

con:

$$k_1 = 12L^3(4c_{\varphi 1}^2 - 4c_{\varphi 1}c_{\varphi 2} + 4c_{\varphi 2}^2 + 2c_{\varphi 1}L + 2c_{\varphi 2}L + L^2) \quad (12.21)$$

$$k_2 = 6L^2 [12(c_{v1} + c_{v2})(c_{\varphi1} - c_{\varphi2}) + 4c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2 - 8c_{\varphi2}^2L^2 - 4c_{\varphi2}L^3 - L^4] \quad (12.22)$$

$$k_3 = 6L^2 [12(c_{v1} + c_{v2})(c_{\varphi2} - c_{\varphi1}) + 4c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2 - 8c_{\varphi1}^2L^2 - 4c_{\varphi1}L^3 - L^4] \quad (12.23)$$

$$k_4 = 4L [36(c_{v1}^2 + c_{v2}^2 + 2c_{v1}c_{v2} + c_{\varphi2}c_{v1}L^2 + c_{\varphi2}c_{v2}L^2) + 6L^3(c_{v1} + c_{v2}) + 12c_{\varphi2}^2L^4 + 6c_{\varphi2}L^5 + L^6] \quad (12.24)$$

$$k_5 = 6L^2 [12(c_{v1} + c_{v2})(c_{\varphi2} - c_{\varphi1}) - 4c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2 + 8c_{\varphi2}^2L^2 + 4c_{\varphi2}L^3 + L^4] \quad (12.25)$$

$$k_6 = -2L [72(c_{v1}^2 + c_{v2}^2 + 2c_{v1}c_{v2}) + 36L^2(c_{\varphi1}c_{v1} + c_{\varphi1}c_{v2} + c_{\varphi2}c_{v2} + c_{\varphi2}c_{v1}) + 12L^3(c_{v1} + c_{v2}) + 12c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^4 - L^6] \quad (12.26)$$

$$k_7 = 4L [36(c_{v1}^2 + c_{v2}^2 + 2c_{v1}c_{v2} + c_{\varphi1}c_{v1}L^2 + c_{\varphi1}c_{v2}L^2) + 6L^3(c_{v1} + c_{v2}) + 12c_{\varphi1}^2L^4 + 6c_{\varphi1}L^5 + L^6] \quad (12.27)$$

I carichi nodali equivalenti ad una stesa di carico uniformemente distribuita di intensità  $q$  si possono calcolare a partire dalla (8.95), ottenendo:

$$Q_1 = q \frac{L}{2} \left[ \frac{24c_{v2}(c_{\varphi1} + c_{\varphi2} + L) + 12c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2 + 3c_{\varphi1}L^3 + 5c_{\varphi2}L^3 + L^4}{D} \right] \quad (12.28)$$

$$Q_2 = q \frac{L^2}{12} \left[ \frac{72c_{\varphi2}(c_{v1} - c_{v2}) + 24c_{v1}L - 48c_{v2}L - 6c_{\varphi2}L^3 - L^4}{D} \right] \quad (12.29)$$

$$Q_3 = q \frac{L}{2} \left[ \frac{24c_{v1}(c_{\varphi1} + c_{\varphi2} + L) + 12c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2 + 3c_{\varphi2}L^3 + 5c_{\varphi1}L^3 + L^4}{D} \right] \quad (12.30)$$

$$Q_4 = q \frac{L^2}{12} \left[ \frac{72c_{\varphi1}(c_{v1} - c_{v2}) - 24c_{v2}L + 48c_{v1}L + 6c_{\varphi1}L^3 + L^4}{D} \right] \quad (12.31)$$

**Nota 12.2:** Il caso classico di trave ad estremi perfetti si ritrova come caso particolare in cui le quattro cedibilità sono nulle.

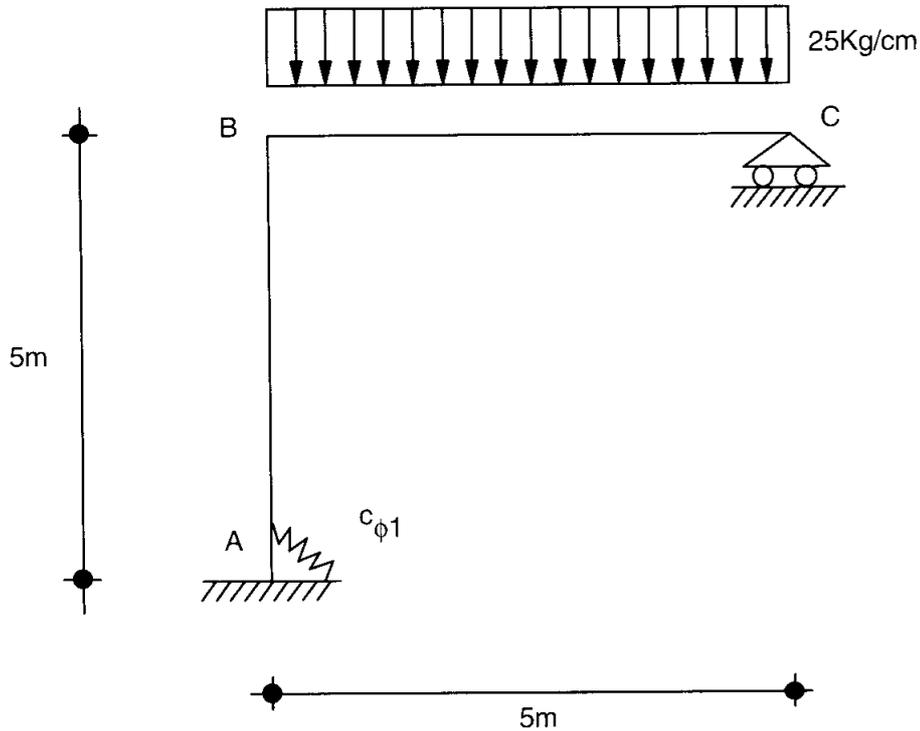


Figura 12.2- Portale zoppo con incastro elasticamente cedevole

**Esempio 12.1:** A titolo di esempio, si consideri il telaio zoppo con carrello di Figura 12.2. L'incastro al piede sia elasticamente cedevole alla rotazione, e si voglia calcolare, in funzione del coefficiente di flessibilità, lo spostamento orizzontale del carrello.

Il modulo di Young sia pari a  $250.000 \text{ Kg/cm}^2$ , il carico uniformemente distribuito sul traverso abbia intensità  $q = 25 \text{ kg/cm}$ . Il ritto abbia sezione rettangolare di dimensioni  $(30 \times 40) \text{ cm}$ , mentre il traverso abbia dimensioni  $(30 \times 60) \text{ cm}$ .

In ipotesi di incastro perfetto, un usuale procedimento alla Cross, ossia trascurando l'influenza delle deformazioni da sforzo assiale, porta ad uno spostamento del carrello pari a  $0.22 \text{ cm}$ . (Sarà [1978], pp 331-340).

Lo stesso caso, risolto discretizzando la struttura in 2 elementi finiti, porta ad uno spostamento pari a  $0.2146 \text{ cm}$ . Se le aree delle due sezioni rette vengono arbitrariamente assunte molto elevate, si ritrova il valore precedente.

Nel diagramma di Figura 12.3 si riporta lo spostamento orizzontale in funzione della cedibilità rotazionale dell'incastro.

**Nota 12.3:** Si osservano due zone ad andamento quasi orizzontale, in cui il portale si comporta come incastrato al piede (nella zona di sinistra) e come incernierato (nella zona di destra). Al centro si nota una zona, relativamente ristretta, in cui lo spostamento varia con rapidità.

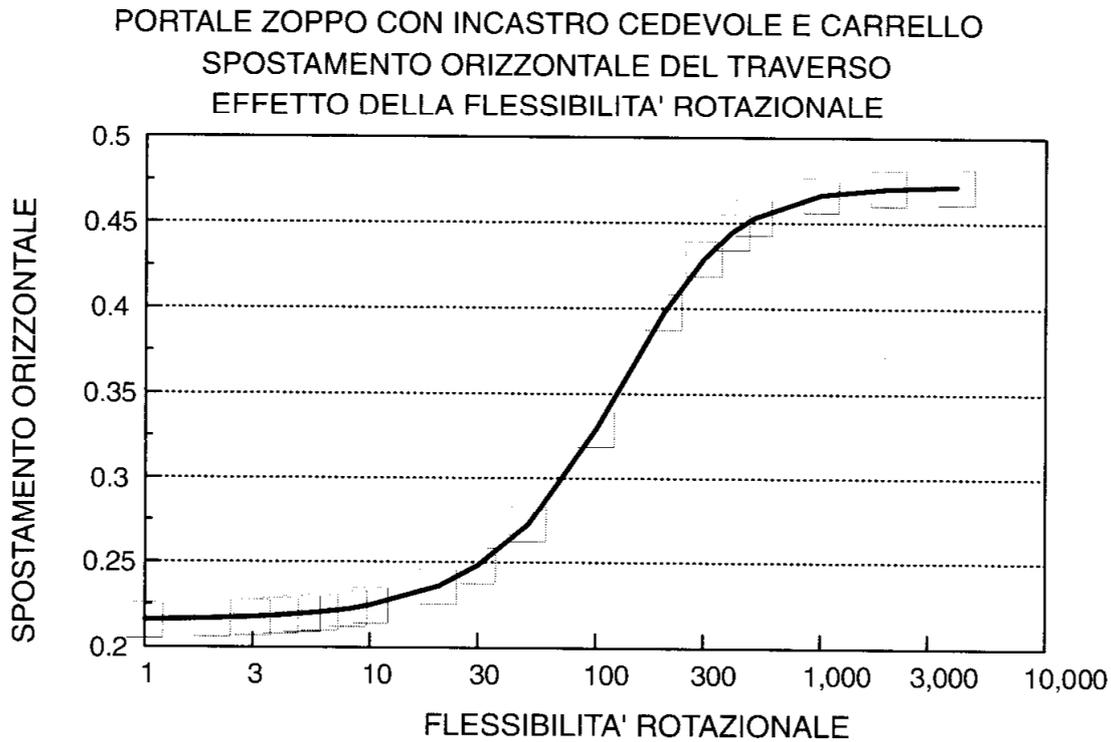


Figura 12.3- Spostamento orizzontale del carrello per il portale di figura 12.2

## 12.2. Le travi tozze a vincoli elasticamente cedevoli

Nel caso di travi alte, o comunque nel caso in cui si voglia utilizzare la teoria delle travi di Timoshenko, le relazioni che legano gli spostamenti e le rotazioni alle estremità con i corrispondenti momenti e tagli divengono (cfr.11.1–11.3):

$$v(0) = c'_{v1}T(0) = c'_{v1} \frac{GA}{\chi} \psi(0) = c'_{v1} \frac{GA}{\chi} \left( \varphi + \frac{dv}{dz} \right)_0 \quad (12.32)$$

$$\varphi(0) = c'_{\varphi1}M(0) = c'_{\varphi1}EI \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)_0 \quad (12.33)$$

$$v(L) = -c'_{v2}T(L) = -c'_{v2} \frac{GA}{\chi} \psi(L) = -c'_{v2} \frac{GA}{\chi} \left( \varphi + \frac{dv}{dz} \right)_L \quad (12.34)$$

$$\varphi(L) = -c'_{\varphi2}M(L) = -c'_{\varphi2}EI \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)_L \quad (12.35)$$

Si scelga, come elemento finito prototipo, l'elemento vincolato di base, per cui (cfr. 11.81, 11.84):

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (12.36)$$

$$\varphi(z) = -A_1 - 6CA_3 - 2A_2z - 3A_3z^2 \quad (12.37)$$

e:

$$C = \chi \frac{EI}{GA} \quad (12.38)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  che lega le coordinate lagrangiane alle coordinate nodali è solo leggermente modificata, rispetto alla (12.14):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6c_{v1} \\ 0 & -1 & 2c_{\varphi1} & -6C \\ 1 & L & L^2 & L^3 - 6c_{v2} \\ 0 & -1 & -2L - 2c_{\varphi2} & -3L^2 - 6c_{\varphi2}L - 6C \end{bmatrix} \quad (12.39)$$

Di conseguenza, anche la matrice di rigidità potrà essere convenientemente espressa come una estensione della (12.20):

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{D'^2} \begin{bmatrix} k'_1 & k'_2 & -k'_1 & k'_3 \\ k'_2 & k'_4 & k'_5 & k'_6 \\ -k'_1 & k'_5 & k'_1 & -k'_3 \\ k'_3 & k'_6 & -k'_3 & k'_7 \end{bmatrix} \quad (12.40)$$

con i coefficienti definiti come:

$$k'_1 = k_1 + 144CL(c_{\varphi1} + c_{\varphi2} + L)^2 \quad (12.41)$$

$$k'_2 = k_2 - 72CL^2(2c_{\varphi1}c_{\varphi2} + 2c_{\varphi2}^2 + 4c_{\varphi2}L + L^2) \quad (12.42)$$

$$k'_3 = k_3 - 72CL^2(2c_{\varphi1}c_{\varphi2} + 2c_{\varphi1}^2 + 4c_{\varphi1}L + L^2) \quad (12.43)$$

$$k'_4 = k_4 + 4CL(72c_{v1}L + 72c_{v2}L + 36CL^2 + 36c_{\varphi2}^2L^2 + 72c_{\varphi2}L^3 + 15L^4) \quad (12.44)$$

$$k'_5 = k_5 + 72CL^2(2c_{\varphi1}c_{\varphi2} + 2c_{\varphi2}^2 + 4c_{\varphi2}L + L^2) \quad (12.45)$$

$$k'_6 = k_6 - 144CL(2c_{v1}L + 2c_{v2}L + CL^2 - c_{\varphi1}c_{\varphi2}L^2) + 12CL^5 \quad (12.46)$$

$$k'_7 = k_7 + 4CL(72c_{v1}L + 72c_{v2}L + 36CL^2 + 36c_{\varphi1}^2L^2 + 72c_{\varphi1}L^3 + 15L^4) \quad (12.47)$$

ed infine:

$$D' = D + 12C(c_{\varphi1}L + c_{\varphi2}L + L^2) \quad (12.48)$$

**Nota 12.4:** Per  $C = 0$  si ritrovano i risultati del paragrafo precedente, per  $c_{\varphi1} = c_{\varphi2} = c_{v1} = c_{v2} = 0$  si ritrova la matrice di rigidezza dell'elemento di Timoshenko vincolato, e per  $C = 0$  e  $c_{\varphi1} = c_{\varphi2} = c_{v1} = c_{v2} = 0$  si riottiene la matrice dell'elemento classico di Eulero-Bernoulli a vincoli perfetti.

I carichi nodali equivalenti ad una stesa di carico uniformemente distribuito si possono anch'essi esprimere come estensione dei carichi del paragrafo precedente:

$$Q'_1 = Q_1 + 6qCL^2 \left( \frac{c_{\varphi1} + c_{\varphi2} + L}{D'} \right) \quad (12.49)$$

$$Q'_2 = Q_2 - qL^4 \frac{C}{D'} \quad (12.50)$$

$$Q'_3 = Q_3 + 6qCL^2 \left( \frac{c_{\varphi1} + c_{\varphi2} + L}{D'} \right) \quad (12.51)$$

$$Q'_4 = Q_4 + qL^4 \frac{C}{D'} \quad (12.52)$$

### 12.3. Le travi su suolo elastico

Nel capitolo 5 sono stati introdotti il modello di suolo alla Winkler, caratterizzato da un solo parametro, ed il modello a 2 parametri. L'interpretazione fisica del suolo alla Winkler prevede una schematizzazione del suolo in una distribuzione continua di molle elastiche assialmente, senza alcuna connessione. Il modello a 2 parametri, invece, può interpretarsi fisicamente in diversi modi, dando luogo — come illustrato nel capitolo 5 — ai suoli di Filonenko-Borodich, Pasternak, e Vlasov.

Tralasciando per ora il significato meccanico dei modelli proposti, la forma più generale di relazione tra la pressione  $p(z)$  e lo spostamento  $v(z)$  può scriversi (Kerr et al. [1967]):

$$p(z) = f(v, v', v'', \dots, p', p'', \dots) \quad (12.53)$$

dove la pressione è funzione sia dello spostamento che delle sue derivate, ed anche delle derivate successive della stessa pressione.

Ipotizzando in un primo tempo che la pressione non dipenda dalle sue derivate, la relazione (12.53) può essere sviluppata in serie di Taylor, ottenendo (Favre [1960, 1961]):

$$\begin{aligned} p(z) = & f(0, 0, \dots) + \frac{\partial f}{\partial v} v + \frac{\partial f}{\partial v'} v' + \frac{\partial f}{\partial v''} v'' + \dots \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v'} v v' + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (12.54)$$

Trascurando i termini non lineari, e considerando che  $f(0, 0, \dots) = 0$ , si giunge alla relazione rappresentativa dei suoli a comportamento lineare:

$$p(z) = \frac{\partial f}{\partial v} v + \frac{\partial f}{\partial v'} v' + \frac{\partial f}{\partial v''} v'' + \dots \quad (12.55)$$

È anche possibile, utilizzando considerazioni di simmetria, dimostrare che i coefficienti delle derivate di ordine dispari sono nulli, e che quindi la relazione precedente si semplifica in:

$$p(z) = k_0 v + k_1 v'' + k_2 v'''' + \dots + k_n v^{2n} + \dots \quad (12.56)$$

Infine, sembra logico imporre che il lavoro compiuto da un carico  $q$  per lo spostamento  $v$  sia non negativo. In tali ipotesi si può dimostrare (Levinson et al. [1978], Levinson [1979], Baratha et al. [1980]) che:

$$k_0 \geq 0; \quad k_1 \leq 0; \quad k_2 \geq 0; \dots (-1)^j k_j \geq 0 \quad (12.57)$$

All'aumentare di  $n$ , si ottengono vari modelli di suolo via via più sofisticati. Al primo livello,  $n = 0$ , si ritrova il modello di Winkler, al secondo livello,  $n = 1$ , si ha il modello già introdotto sotto il nome di modello a 2 parametri. Al terzo livello,  $n = 2$ , si ha un *modello a 3 parametri*:

$$p(z) = k_0 v(z) + k_2 v''(z) + k_4 v''''(z) \quad (12.58)$$

la cui interpretazione fisica è illustrata in Figura 12.4.

Si tratta di un insieme di molle connesso da uno strato a taglio, su cui è posto uno strato a flessione, e quindi il primo coefficiente può essere visto come la rigidità assiale delle molle, il secondo coefficiente cambiato di segno,  $-k_1$ , può vedersi come

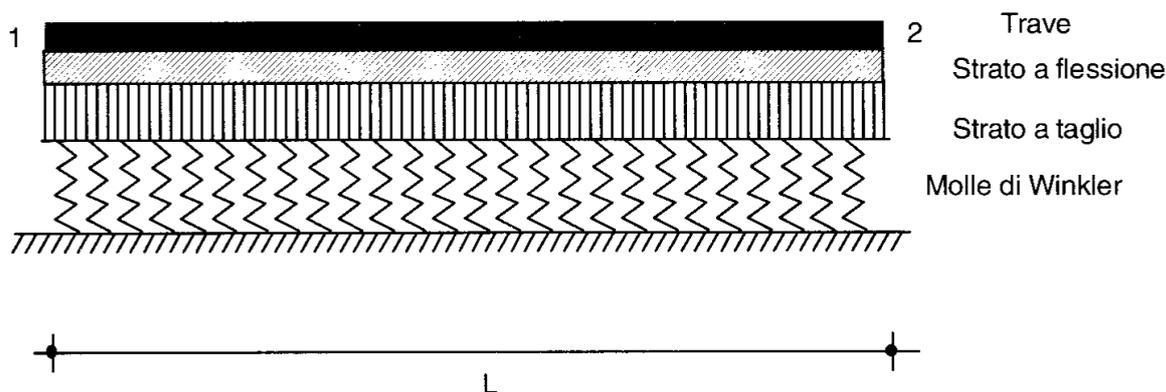


Figura 12.4- Modello di Levinson-Bharatha di ordine 3

la rigidezza a taglio dello strato tagliante, ed il terzo coefficiente,  $k_2$ , rappresenta la rigidezza flettente dello strato a flessione.

Se si usa la relazione pressione–spostamenti completa (12.53), si possono generare modelli ancora più complessi, come illustrato in Kerr [1984].

Al primo stadio si ha:

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right) p(z) - \frac{G}{c} p''(z) = kv(z) - Gv''(z) \quad (12.59)$$

con il corrispondente modello meccanico di Figura 12.5, in cui un primo strato di molle, di rigidezza  $k_1$ , è connesso da uno strato a taglio di rigidezza  $G$ , che a sua volta è collegato ad un altro letto di molle, di rigidezza  $c$ .

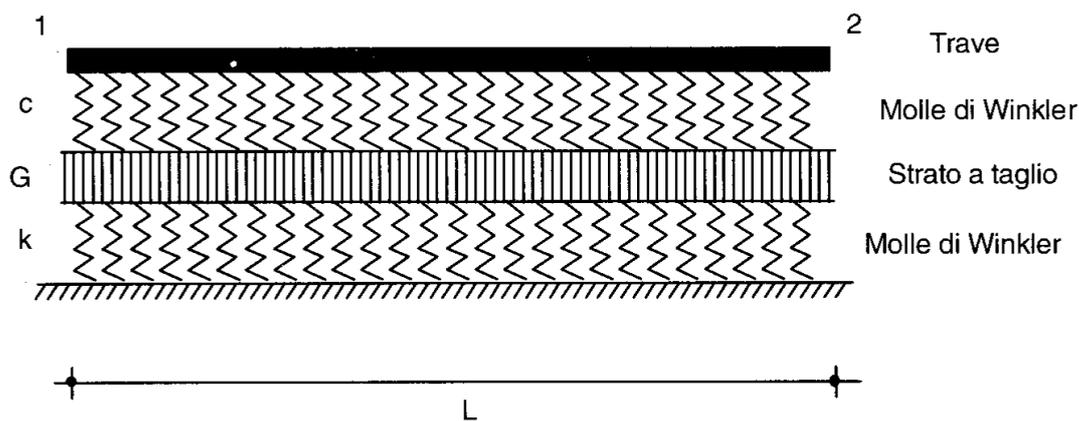


Figura 12.5- Modello di Kerr

Al secondo stadio è invece:

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right) p(z) - \frac{G_L}{c} p''(z) = kv(z) - G_u \left(1 + \frac{k}{c} + \frac{G_L}{G_u}\right) v''(z) + \frac{G_u G_L}{c} v''''(z) \quad (12.60)$$

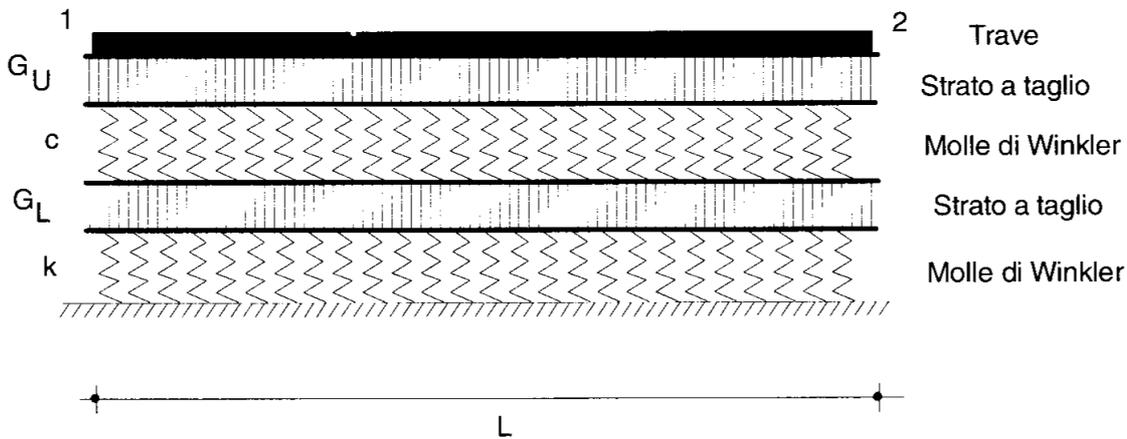


Figura 12.6- Modello di Kerr di ordine superiore

e l'interpretazione fisica porta a due suoli di Pasternak sovrapposti, come illustrato in Figura 12.6.

La serie di modelli di suolo proposta è ineccepibile, da un punto di vista teorico, e la sua utilizzazione in un calcolo agli elementi finiti non presenta difficoltà di sorta.

Tuttavia, i primi due coefficienti possono essere correlati — come visto nel capitolo 5 — alle proprietà fisiche del suolo, mentre i restanti coefficienti dei modelli più complessi restano pure entità numeriche. Nel seguito, quindi, ci si limita al suolo a due parametri.

## 12.4. Le travi snelle su suolo elastico

Si è visto nel capitolo 5 come sia possibile risolvere in via esatta le equazioni differenziali della linea elastica, sia per trave di Eulero – Bernoulli su suolo alla Winkler che per travi di Eulero – Bernoulli su suolo alla Pasternak. Le soluzioni, tuttavia, erano abbastanza complesse, dipendendo anche dal particolare valore delle costanti di sottofondo. Conseguentemente, risultavano complesse anche le espressioni finali delle matrici di rigidezza.

Soluzioni ottimamente approssimate si ottengono però facilmente utilizzando, per il calcolo dell'energia elastica, le funzioni di forma dedotte in assenza di suolo. Occorre, quindi, calcolare le aliquote:

$$L_f = \mathbf{d}^T \left( \frac{EI}{2} \int_0^L \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dz \right) \mathbf{d} \quad (12.61)$$

domiciliata nella trave,

$$L_w = \mathbf{d}^T \left( \frac{k}{2} \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \right) \mathbf{d} \quad (12.62)$$

dovuta al suolo alla Winkler, e:

$$L_p = \mathbf{d}^T \left( \frac{k_1}{2} \int_0^L \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dz \right) \mathbf{d} \quad (12.63)$$

se il suolo elastico è definito da 2 parametri.

Se, ad esempio, si usano le funzioni di forma hermitiane cubiche (cfr. 5.20), la prima aliquota dà luogo alla matrice di rigidezza (5.27), la seconda fornisce:

$$\mathbf{k}_w = \frac{k}{420} \begin{bmatrix} 156L & -22L^2 & 54L & 13L^2 \\ -22L^2 & 4L^3 & -13L^2 & -3L^3 \\ 54L & -13L^2 & 156L & 22L^2 \\ 13L^2 & -3L^3 & 22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (12.64)$$

e la terza:

$$\mathbf{k}_p = \frac{k_1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (12.65)$$

La matrice elementare di rigidezza sarà fornita dalla somma di  $\mathbf{k}_e$  (cfr. 5.27), di  $\mathbf{k}_w$  e di  $\mathbf{k}_p$ .

## 12.5. Le travi alte su suolo elastico

La deduzione esatta della matrice di rigidezza per una trave di Timoshenko uniforme poggiante su suolo elastico a 2 parametri è stata proposta recentemente in Shirima et al [1992]. Tuttavia, il risultato finale appare viziato da alcune imprecisioni di stampa, che lo rendono inutilizzabile.

In un ambito approssimato, è d'altro canto immediato il calcolo dell'energia elastica domiciliata nel suolo, a partire dall'espressione generale:

$$L_s = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left( \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{E}_s \mathbf{N} dz \right) \mathbf{d} \quad (12.66)$$

dove  $\mathbf{N}$  è la matrice delle funzioni di forma, ed  $\mathbf{E}_s$  è la matrice, diagonale, dei parametri del suolo:

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad (12.67)$$

### 1. L'elemento vincolato di base (Yokoyama [1988])

Utilizzando le funzioni di forma dell'elemento cubico vincolato, riportate nel capitolo 11, si ha:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{cccc} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_{\varphi 1} & N_{\varphi 2} & N_{\varphi 3} & N_{\varphi 4} \end{array} \right\} \quad (12.68)$$

e l'integrale del triplo prodotto matriciale fornisce la matrice di rigidezza dovuta al suolo:

$$\mathbf{k}_s = k \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{12} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{13} & k'_{23} & k'_{33} & k'_{34} \\ k'_{14} & k'_{24} & k'_{34} & k'_{44} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} k''_{11} & k''_{12} & k''_{13} & k''_{14} \\ k''_{12} & k''_{22} & k''_{23} & k''_{24} \\ k''_{13} & k''_{23} & k''_{33} & k''_{34} \\ k''_{14} & k''_{24} & k''_{34} & k''_{44} \end{bmatrix} \quad (12.69)$$

con:

$$k'_{11} = k'_{33} = \frac{L(1680C^2 + 294CL^2 + 13L^4)}{35D} \quad (12.70)$$

$$k'_{12} = -k'_{34} = \frac{-L^2(1260C^2 + 231CL^2 + 11L^4)}{210D} \quad (12.71)$$

$$k'_{13} = \frac{3L(560C^2 + 84CL^2 + 3L^4)}{70D} \quad (12.72)$$

$$k'_{14} = -k'_{23} = \frac{L^2(2520C^2 + 378CL^2 + 13L^4)}{420D} \quad (12.73)$$

$$k'_{22} = k'_{44} = \frac{L^3(126C^2 + 21CL^2 + L^4)}{105D} \quad (12.74)$$

$$k'_{24} = \frac{-L^3(168C^2 + 28CL^2 + L^4)}{140D} \quad (12.75)$$

per la matrice di Winkler, e:

$$k''_{11} = k''_{33} = -k''_{13} = \frac{6L^3}{5D} \quad (12.76)$$

$$k''_{12} = k''_{14} = -k''_{23} = -k''_{34} = \frac{L^2(60C - L^2)}{10D} \quad (12.77)$$

$$k''_{22} = k''_{44} = \frac{2L(360C^2 + 15CL^2 + L^4)}{15D} \quad (12.78)$$

$$k''_{24} = \frac{L(720C^2 - 60CL^2 - L^4)}{30D} \quad (12.79)$$

$$D = (12C + L^2)^2 \quad (12.80)$$

per l'aliquota dovuta al secondo parametro del suolo.

## 2. L'elemento vincolato quintico

Svolgendo gli stessi calcoli del caso precedente, ma partendo dalle funzioni di forma definite nel capitolo 11, si ottiene:

$$k'_{11} = k'_{55} = \frac{L(523L^8 + 88554CL^6 + 5828688C^2L^4 + 179055360C^3L^2)}{3465D_1D_2} + \frac{2189721600C^4L}{3465D_1D_2} \quad (12.81)$$

$$k'_{12} = -k'_{65} = \frac{-(19L^{10} + 2061CL^8 + 93060C^2L^6 + 2871360C^3L^4)}{2310D_1D_2} - \frac{(36495360C^4L^2 - 729907200C^5)}{2310D_1D_2} \quad (12.82)$$

$$k'_{13} = \frac{4L(5L^4 + 540CL^2 + 12096C^2)}{315D_1} \quad (12.83)$$

$$k'_{14} = -k'_{54} = \frac{8(L^6 + 177CL^4 - 792C^2L^2 - 23760C^3)}{693D_2} \quad (12.84)$$

$$k'_{15} = k'_{55} = \frac{L(131L^8 + 49668CL^6 + 4440816C^2L^4 + 141419520C^3L^2)}{6930D_1D_2} + \frac{1368576000C^4}{6930D_1D_2} \quad (12.85)$$

$$k'_{16} = -k'_{25} = \frac{L^2(29L^8 + 9546CL^6 + 526680C^2L^4 - 120960C^3L^2)}{13860D_1D_2} + \frac{(-218972160C^4L^2 + 4379443200C^5)}{13860D_1D_2} \quad (12.86)$$

$$k'_{22} = k'_{66} = \frac{L^6(2L^6 + 129CL^4 + 6774C^2L^2 + 193536C^3)}{3465D_1D_2} + \frac{(-11335680C^4L^4 + 291962880C^5L^2 + 35035545600C^6)}{3465D_1D_2} \quad (12.87)$$

$$k'_{23} = -k'_{36} = \frac{-2L^4(L^2 + 72C)}{315D_1} \quad (12.88)$$

$$k'_{24} = k'_{46} = \frac{-(L^8 + 76CL^6 - 9440C^2L^4 + 929280C^3L^2 + 10137600C^4)}{1155D_2} \quad (12.89)$$

$$k'_{26} = \frac{-(L^{12} + 268CL^{10} + 4168C^2L^8 - 258048C^3L^6)}{4620D_1D_2} - \frac{-(15114240C^4L^4 - 389283840C^5L^2 - 46714060800C^6)}{4620D_1D_2} \quad (12.90)$$

$$k'_{33} = \frac{128L(L^4 + 108CL^2 + 3024C^2)}{315D_1} \quad (12.91)$$

$$k'_{34} = 0 \quad (12.92)$$

$$k'_{35} = \frac{4L(5L^4 + 540CL^2 + 12096C^2)}{315D_1} \quad (12.93)$$

$$k'_{44} = \frac{32(L^8 + 288CL^6 + 24960C^2L^4 + 411840C^3L^2 + 1900800C^4)}{3465D_2} \quad (12.94)$$

per la matrice di Winkler, e:

$$k''_{11} = k''_{55} = \frac{2L^3(139L^4 + 14880CL^2 + 403200C^2)}{105D_1D_2} \quad (12.95)$$

$$k''_{12} = k''_{56} = \frac{L^2(-13L^6 + 5148CL^4 + 656640C^2L^2 + 18662400C^3)}{210D_1D_2} \quad (12.96)$$

$$k''_{13} = \frac{-256L^3}{105D_1} \quad (12.97)$$

$$k''_{14} = -k''_{45} = \frac{8L^2(60C - L^2)}{21D_2} \quad (12.98)$$

$$k''_{15} = \frac{2L^3(-11L^4 + 480CL^2 + 57600C^2)}{105D_1D_2L} \quad (12.99)$$

$$k''_{16} = -k''_{25} = \frac{L^2(L^6 + 564CL^4 + 23040C^2L^2 - 230400C^3)}{70D_1D_2} \quad (12.100)$$

$$k''_{22} = k''_{66} = \frac{2L(7L^8 + 1263CL^6 + 153144C^2L^4 + 9711360C^3L^2 + 219801600C^4)}{315D_1D_2} \quad (12.101)$$

$$k''_{23} = -k''_{36} = \frac{8L^2(L^2 - 336C)}{105D_1} \quad (12.102)$$

$$k''_{24} = k''_{46} = \frac{4L(-L^4 - 600CL^2 + 18000C^2)}{315D_2} \quad (12.103)$$

$$k''_{26} = \frac{-L(5L^8 + 924CL^6 - 9936C^2L^4 - 2557440C^3L^2 + 8294400C^4)}{630D_1D_2} \quad (12.104)$$

$$k''_{33} = \frac{512L^3}{105D_1} \quad (12.105)$$

$$k''_{34} = 0 \quad (12.106)$$

$$k''_{35} = \frac{-256L^3}{105D_1} \quad (12.107)$$

$$k''_{44} = \frac{128L(L^4 + 60CL^2 + 3600C^2)}{315D_2} \quad (12.108)$$

$$D_1 = (L^2 + 48C)^2 \quad (12.109)$$

$$D_2 = (L^2 + 60C)^2 \quad (12.110)$$

per la matrice dovuta al secondo parametro del suolo.

### 3. L'elemento bi-cubico a 2 nodi (Abbas et al. [1978])

In questo caso le funzioni di forma, sia dell'abbassamento che della rotazione, sono polinomi cubici. Si ha:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \quad (12.111)$$

con:

$$N_1 = 1 - 3\frac{z^2}{L^2} + 2\frac{z^3}{L^3} \quad (12.112)$$

$$N_2 = z - 2\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \quad (12.113)$$

$$N_3 = 3\frac{z^2}{L^2} - 2\frac{z^3}{L^3} \quad (12.114)$$

$$N_4 = -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \quad (12.115)$$

Di conseguenza, si avrà:

$$\mathbf{k}_s = k \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & 0 & 0 & k'_{13} & k'_{14} & 0 & 0 \\ k'_{12} & k'_{22} & 0 & 0 & k'_{23} & k'_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k'_{13} & k'_{23} & 0 & 0 & k'_{33} & k'_{34} & 0 & 0 \\ k'_{14} & k'_{24} & 0 & 0 & k'_{34} & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.116)$$

$$+ k_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{11} & k'_{12} & 0 & 0 & k'_{13} & k'_{14} \\ 0 & 0 & k'_{12} & k'_{22} & 0 & 0 & k'_{23} & k'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{31} & k'_{32} & 0 & 0 & k'_{33} & k'_{34} \\ 0 & 0 & k'_{41} & k'_{42} & 0 & 0 & k'_{43} & k'_{44} \end{bmatrix}$$

con:

$$k'_{11} = k'_{33} = \frac{13L}{35}; \quad k'_{12} = -k'_{34} = \frac{11L^2}{210}; \quad k'_{13} = \frac{9L}{70}; \quad k'_{14} = -\frac{13L^2}{420} \quad (12.117)$$

$$k'_{22} = k'_{44} = \frac{L^3}{105}; \quad k'_{23} = \frac{13L^2}{420}; \quad k'_{24} = -\frac{L^3}{140} \quad (12.118)$$

#### 4. Elemento bi-quintico a 3 nodi QQ1

Le funzioni di forma della rotazione sono anche in questo caso identiche alle funzioni di forma dell'abbassamento. Con la scelta (11.65) di incognite nodali, si ha:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 \end{array} \right\} \quad (12.119)$$

e quindi:

$$\mathbf{k}_s = k \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & 0 & 0 & k'_{13} & k'_{14} & 0 & 0 & k'_{15} & k'_{16} & 0 & 0 \\ k'_{12} & k'_{22} & 0 & 0 & k'_{23} & k'_{24} & 0 & 0 & k'_{25} & k'_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k'_{13} & k'_{23} & 0 & 0 & k'_{33} & k'_{34} & 0 & 0 & k'_{35} & k'_{36} & 0 & 0 \\ k'_{14} & k'_{24} & 0 & 0 & k'_{34} & k'_{44} & 0 & 0 & k'_{45} & k'_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k'_{15} & k'_{25} & 0 & 0 & k'_{35} & k'_{45} & 0 & 0 & k'_{55} & k'_{56} & 0 & 0 \\ k'_{16} & k'_{26} & 0 & 0 & k'_{36} & k'_{46} & 0 & 0 & k'_{56} & k'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.120)$$

$$+ k_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{11} & k'_{12} & 0 & 0 & k'_{13} & k'_{14} & 0 & 0 & k'_{15} & k'_{16} \\ 0 & 0 & k'_{12} & k'_{22} & 0 & 0 & k'_{23} & k'_{24} & 0 & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{13} & k'_{23} & 0 & 0 & k'_{33} & k'_{34} & 0 & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ 0 & 0 & k'_{14} & k'_{24} & 0 & 0 & k'_{34} & k'_{44} & 0 & 0 & k'_{45} & k'_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'_{15} & k'_{25} & 0 & 0 & k'_{35} & k'_{45} & 0 & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & 0 & k'_{16} & k'_{26} & 0 & 0 & k'_{36} & k'_{46} & 0 & 0 & k'_{56} & k'_{66} \end{bmatrix}$$

con:

$$k'_{11} = k'_{55} = \frac{523L}{3465}; \quad k'_{12} = -k'_{56} = \frac{19L^2}{2310}; \quad k'_{13} = \frac{4L}{63} \quad (12.121)$$

$$k'_{14} = -\frac{8L^2}{693}; \quad k'_{15} = \frac{131L}{6930}; \quad k'_{16} = -\frac{29L^2}{13860} \quad (12.122)$$

$$k'_{22} = k'_{66} = \frac{2L^3}{3465}; \quad k'_{23} = \frac{2L^2}{315}; \quad k'_{24} = -\frac{L^3}{1155} \quad (12.123)$$

$$k'_{25} = \frac{29L^2}{13860}; \quad k'_{26} = -\frac{L^3}{4620}; \quad k'_{33} = \frac{128L}{315} \quad (12.124)$$

$$k'_{34} = 0; \quad k'_{35} = \frac{4L}{63}; \quad k'_{36} = -\frac{2L^2}{315}; \quad k'_{44} = \frac{32L^3}{3465} \quad (12.125)$$

$$k'_{45} = \frac{8L^2}{693}; \quad k'_{46} = -\frac{L^3}{1155} \quad (12.126)$$

## 12.5. Esempi numerici

Si consideri la trave libera di Figura 12.7, di 5 metri di luce, e soggetta ad una coppia concentrata in mezzeria, di intensità  $50 \text{ KNm}$ . La sezione retta sia rettangolare, alta 1 metro e larga 40 centimetri. Il modulo di Young è pari a  $10500 \text{ MN/m}^2$ , mentre  $G$  sia pari ad  $E/2.5$ . Infine, il fattore di taglio sia pari ad 1.2.

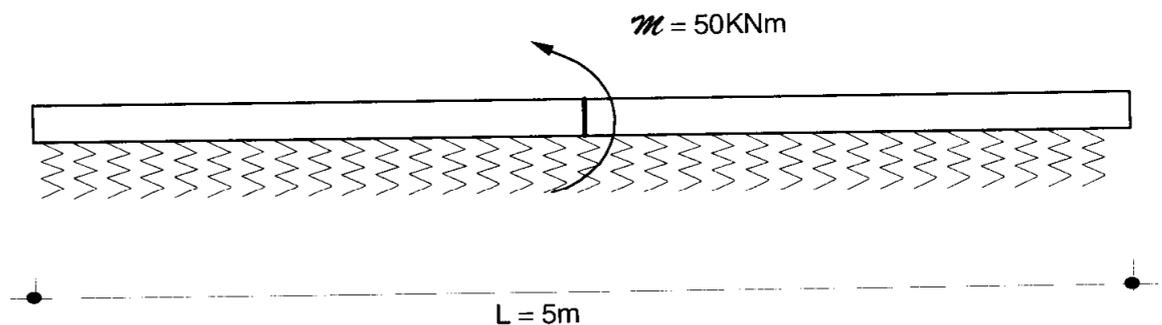


Figura 12.7- Trave libera soggetta a coppia in mezzeria

Utilizzando l'elemento cubico di Eulero–Bernoulli, e l'elemento quintico vincolato di Timoshenko, si ottengono i valori dell'abbassamento agli estremi liberi riportati in Tabella 12.1 e Tabella 12.2.

Trave su suolo a due parametri: elemento di Eulero-Bernoulli				
	$S_R = 0$	$S_R = 0.5$	$S_R = 1$	$S_R = 2.5$
$\alpha = 0.1$	0.21427	$3.6121 \times 10^{-4}$	$1.8076 \times 10^{-4}$	$7.2343 \times 10^{-5}$
$\alpha = 1$	$2.1411 \times 10^{-2}$	$3.5547 \times 10^{-4}$	$1.7924 \times 10^{-4}$	$7.2076 \times 10^{-5}$
$\alpha = 10$	$2.1254 \times 10^{-2}$	$3.0643 \times 10^{-4}$	$1.6529 \times 10^{-4}$	$6.9503 \times 10^{-5}$
$\alpha = 100$	$1.9726 \times 10^{-4}$	$1.2354 \times 10^{-4}$	$9.0397 \times 10^{-5}$	$5.0606 \times 10^{-5}$

Tabella 12.1- Spostamento all'estremo in ipotesi di Eulero - Bernoulli

È immediato realizzare che l'influenza del secondo parametro di fondazione si risente notevolmente, anche per forti valori del parametro adimensionale di Winkler, e che l'abbassamento tende sempre a diminuire. Viceversa, l'influenza delle deformazioni da taglio non sembra particolarmente rilevante.

Trave su suolo a due parametri: elemento quintico vincolato				
	$S_R = 0$	$S_R = 0.5$	$S_R = 1$	$S_R = 2.5$
$\alpha = 0.1$	0.21427	$3.6321 \times 10^{-4}$	$1.8277 \times 10^{-4}$	$7.4388 \times 10^{-5}$
$\alpha = 1$	$2.1415 \times 10^{-2}$	$3.5722 \times 10^{-4}$	$1.8115 \times 10^{-4}$	$7.4022 \times 10^{-5}$
$\alpha = 10$	$2.1289 \times 10^{-2}$	$3.0641 \times 10^{-4}$	$1.6604 \times 10^{-4}$	$7.0890 \times 10^{-5}$
$\alpha = 100$	$2.0091 \times 10^{-4}$	$1.2226 \times 10^{-4}$	$8.8444 \times 10^{-5}$	$4.9165 \times 10^{-5}$

Tabella 12.2- Spostamento all'estremo in ipotesi di Timoshenko

Come ulteriore esempio, si consideri il telaio di Figura 12.8, discretizzato in 36 nodi e 36 elementi, di lunghezza 1 metro. Il modulo di Young sia pari a  $200000 \text{ Kg/cm}^2$ , il traverso abbia sezione retta rettangolare, larga 40 centimetri ed alta 80 centimetri, tutte le altre travi abbiano la stessa larghezza ed altezza 50 centimetri. Infine, la trave di collegamento poggianti su suolo elastico abbia momento di inerzia uguale a  $0.026 \text{ cm}^4$ .

Trascurando le deformazioni da taglio, se il telaio viene incastrato nei 2 nodi terminali, allora il momento flettente in mezzeria del traverso sarà pari a  $14315 \text{ Kg m}$ , mentre se si suppone semplicemente appoggiato, il momento salirà a  $14404 \text{ Kg m}$ .

Ipotizzando un modulo di Lamè pari a  $80000 \text{ Kg/cm}^2$  (corrispondente ad un materiale con coefficiente di Poisson  $\nu = 0.25$ ), il contributo del taglio appare trascurabile.

In Tabella 12.3 lo stesso momento è riportato per vari valori dei due coefficienti adimensionali del suolo. Si conferma l'influenza del secondo parametro, anche se quantitativamente la sua influenza risulta minore ed imprevedibile, nel senso che il momento aumenta e poi diminuisce all'aumentare di  $\alpha$ .

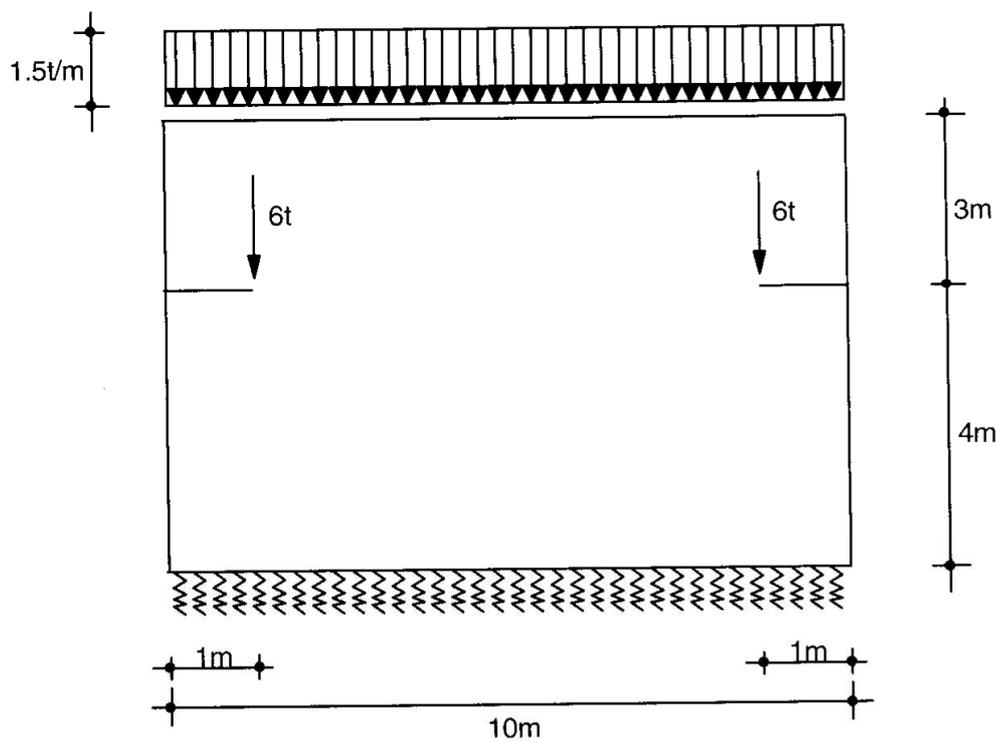


Figura 12.8- Telaio su suolo elastico a 2 parametri

Portale su suolo a due parametri		
	$S_R = 0$	$S_R = 10$
$\alpha = 1$	14315	14368
$\alpha = 10$	14639	14368
$\alpha = 100$	14607	14368
$\alpha = 1000$	14480	14365
$\alpha = 10000$	14388	14354

Tabella 12.3- Momento in mezzeria