

11. Le travi alte

L'usuale teoria delle travi di Eulero–Bernoulli si basa sull'ipotesi fondamentale che segmenti normali all'asse neutro indeformato si conservano rettilinei, a seguito della deformazione, ed in più si conservano ortogonali all'asse neutro deformato.

Esiste quindi la ben nota relazione spostamenti–rotazioni $\varphi = -v'$. Questa ipotesi equivale a trascurare l'effetto delle deformazioni di tipo tagliante, e conduce ad ottimi risultati per travi snelle. Dal punto di vista degli elementi finiti, la relazione spostamenti–rotazioni implica la necessità di garantire la continuità anche della derivata prima dell'abbassamento (problema C^1).

11.1. La teoria di Timoshenko per le travi alte

Se la sezione retta ha dimensioni tali — rispetto alla luce — da non poter considerare trascurabili le deformazioni da taglio, si può far ricorso alla teoria di Timoshenko [Timoshenko 1921], che coniuga la semplicità all'accuratezza.

L'ipotesi di base di questa teoria è che i segmenti normali all'asse neutro indeformato si conservano rettilinei a seguito della deformazione, ma non saranno più ortogonali all'asse neutro deformato (Figura 11.1). La sezione retta, di conseguenza, ruoterà di un angolo:

$$\varphi = -v' + \psi \quad (11.1)$$

dove $-v'$ è l'inclinazione dell'asse neutro, e ψ è la rotazione addizionale dovuta al taglio. L'approssimazione della teoria risiede nell'aver assunto che la deformata effettiva del segmento ortogonale all'asse neutro possa confondersi con il segmento di figura 11.1.

All'equazione di congruenza (11.1) vanno affiancate le due usuali equazioni di equilibrio:

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad (11.2)$$

e le relazioni tra le pseudo–tensioni (M, T) e le pseudo–deformazioni (φ', ψ):

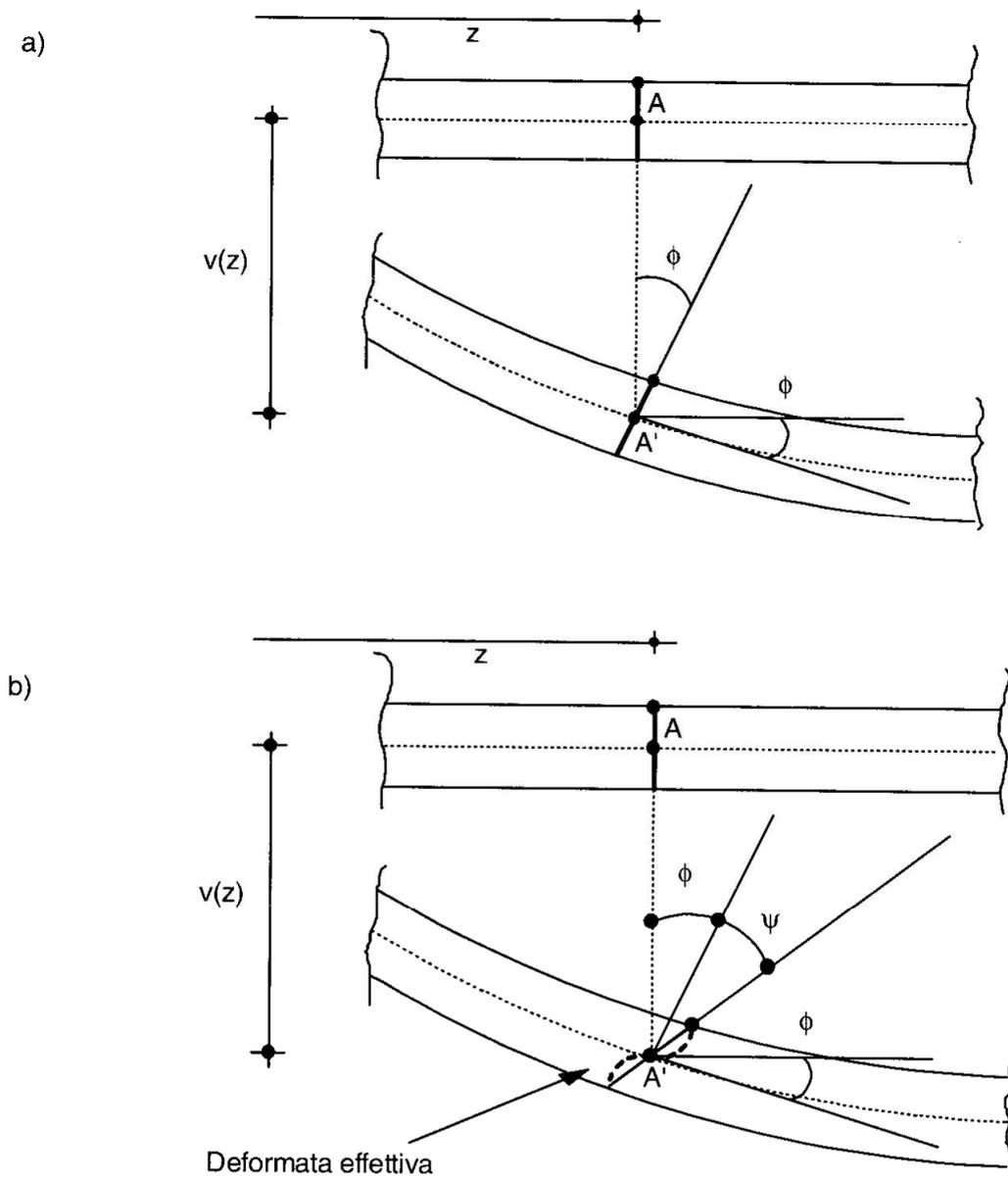


Figura 11.1 - - Ipotesi di Eulero-Bernoulli e Timoshenko

$$M = EI \frac{d\phi}{dz} \quad T = \frac{GA}{\chi} \psi = \frac{GA}{\chi} (v' + \phi) \quad (11.3)$$

e χ è il cosiddetto *fattore di taglio*. L'energia elastica di un elemento di trave di luce L è quindi fornita da:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L M \chi dz + \frac{1}{2} \int_0^L T \psi dz = \frac{1}{2} \int_0^L EI \varphi'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GA}{\chi} \psi^2 dz \quad (11.4)$$

Nota 11.1: Si osserva immediatamente che l'ordine di derivazione più elevato che compare nella (11.4) è pari ad uno, e che quindi si è in presenza di un problema di continuità di tipo C^0 .

11.2. L'elemento finito di base ed i problemi di shear locking

L'elemento finito di base ha due nodi e due gradi di libertà per nodo, lo spostamento verticale v e la rotazione totale φ :

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2\} \quad (11.5)$$

Non sarebbe invece corretto assumere come gradi di libertà lo spostamento v e la sua derivata prima v' , perchè in tal caso non sarebbe possibile imporre — in un incastro o in un bipendolo — la condizione $\varphi = 0$. [Severn 1970, Nickel et al. 1972].

I polinomi interpolanti sono lineari:

$$v = A_0 + A_1 z \quad \varphi = A_2 + A_3 z \quad (11.6)$$

e quindi le funzioni di forma sono fornite da:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{L} & 0 & \frac{z}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{z}{L} & 0 & \frac{z}{L} \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

La matrice di deformazione \mathbf{B} si ottiene dalla matrice \mathbf{N} applicando la matrice di operatori differenziali:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

ed è quindi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_1' & N_1 & N_2' & N_2 \\ 0 & N_1' & 0 & N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 1 - \frac{z}{L} & \frac{1}{L} & \frac{z}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

La matrice elementare di rigidezza si ottiene allora, trascurando per semplicità il pedice e , dall'usuale espressione:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dz \quad (11.10)$$

con:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{\chi} & 0 \\ \chi & EI \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

Integrando analiticamente si ottiene:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + \mathbf{k}_t = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA}{\chi L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

avendo, per comodità, suddiviso i due contributi flessionali e taglianti.

Si può subito notare che il rango della matrice \mathbf{k}_f è pari ad 1, mentre il rango della matrice \mathbf{k}_t è uguale a 2, e ciò potrebbe far sorgere dei dubbi sul buon comportamento dell'elemento finito proposto.

Si esaminino allora due casi particolarmente semplici, in cui può ottenersi la soluzione analitica, ossia il caso di una mensola di sezione uniforme, caricata da una forza concentrata all'estremità, ed il caso di una trave appoggiata agli estremi, con carico uniformemente distribuito (Figura 11.2).

Nel primo caso, l'abbassamento del punto di applicazione della forza sarà fornito da [Timoshenko 1947, pag.170]:

$$v_F = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (11.13)$$

dove:

$$\alpha = \frac{GAL^2}{EI\chi} \quad (11.14)$$

Nel secondo caso, invece, l'abbassamento in mezzeria può essere calcolato come [Timoshenko 1947, pag.172]:

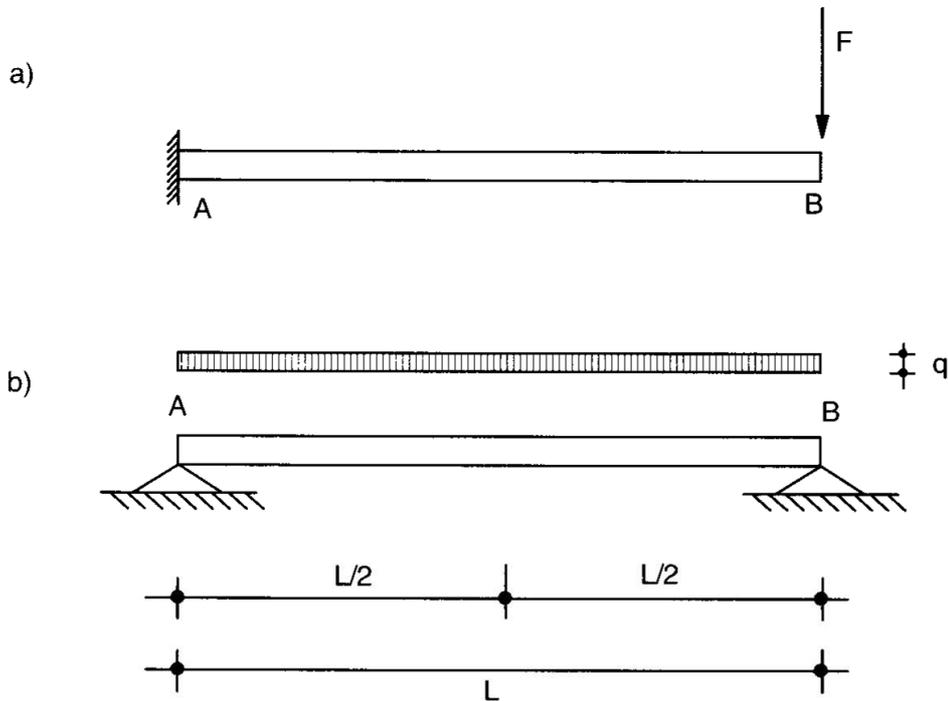


Figura 11.2- Esempi di calcolo: a) - Trave a mensola di Timoshenko con forza all'estremo;
b) Trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito

$$v_q = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \left(1 + \frac{48}{5\alpha} \right) \quad (11.15)$$

L'influenza delle deformazioni da taglio è ben illustrato dai valori assunti dal parametro adimensionale α , poichè i risultati della teoria di Eulero-Bernoulli si riottengono per $\alpha \rightarrow \infty$, mentre valori bassi di α indicano una forte influenza delle deformazioni da taglio.

Ciò può essere dovuto a valori bassi del rapporto L/ρ , dove ρ è il raggio d'inerzia della trave, o a valori bassi del rapporto G/E . Nel primo caso le deformazioni da taglio sono dovute alla geometria (trave tozza), nel secondo caso al materiale (deformabile a taglio).

In Figura 11.3 si riporta il grafico dell'abbassamento all'estremo in funzione del numero di elementi usati, per il caso a), definito dai seguenti valori: [Prathap et al. 1982]:

$$L = 4; \quad \frac{L}{\rho} = 25; \quad E/G = 2.6; \quad \chi = \frac{1}{0.85} \quad (11.16)$$

$$A = 0.554256; \quad I = 0.0141889; \quad \alpha = 204.328 \quad (11.17)$$

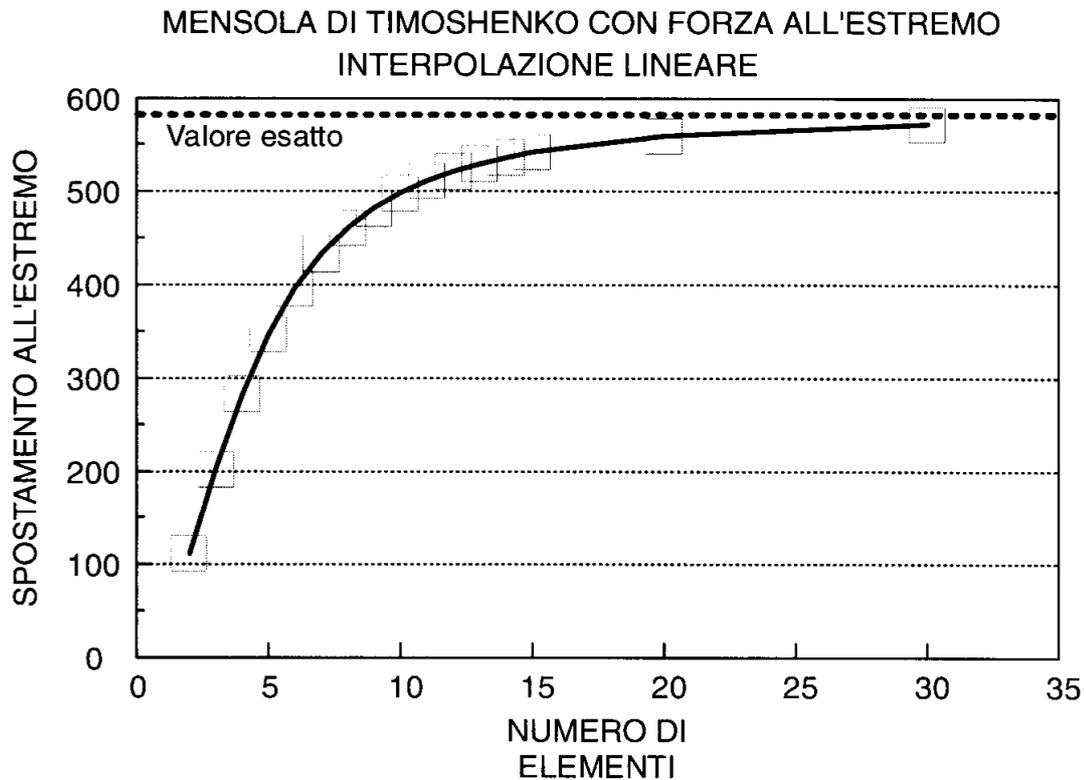


Figura 11.3- Elemento bilineare di Timoshenko. Caso a). Curva di convergenza per $\alpha \approx 204$

Lo spostamento esatto in corrispondenza della forza è quindi pari a $v_F = 586.77F$.

Può notarsi subito la lentissima convergenza dell'elemento finito usato al risultato esatto.

Per controllare se i risultati della teoria di Eulero-Bernoulli sono confermati al tendere di α ad infinito, si può diagrammare il rapporto tra spostamento calcolato e spostamento effettivo, in funzione del parametro α . Il risultato è illustrato in Figura 11.4, per $N = 10$, ed è indubbiamente sconcertante, mostrando un rapidissimo deterioramento della precisione.

Per alti valori di α , l'elemento finito usato prevede un abbassamento molto più piccolo del reale.

Per esaminare il caso *b*) occorre calcolare preventivamente le forze nodali equivalenti alla stesa di carico uniformemente distribuito.

Secondo la (8.95), sarà:

$$\mathbf{Q} = \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{p} dz \quad (11.18)$$

con \mathbf{N} fornito dalla (11.7), e $\mathbf{p}^T = \{q \ 0\}$. Si ottiene:

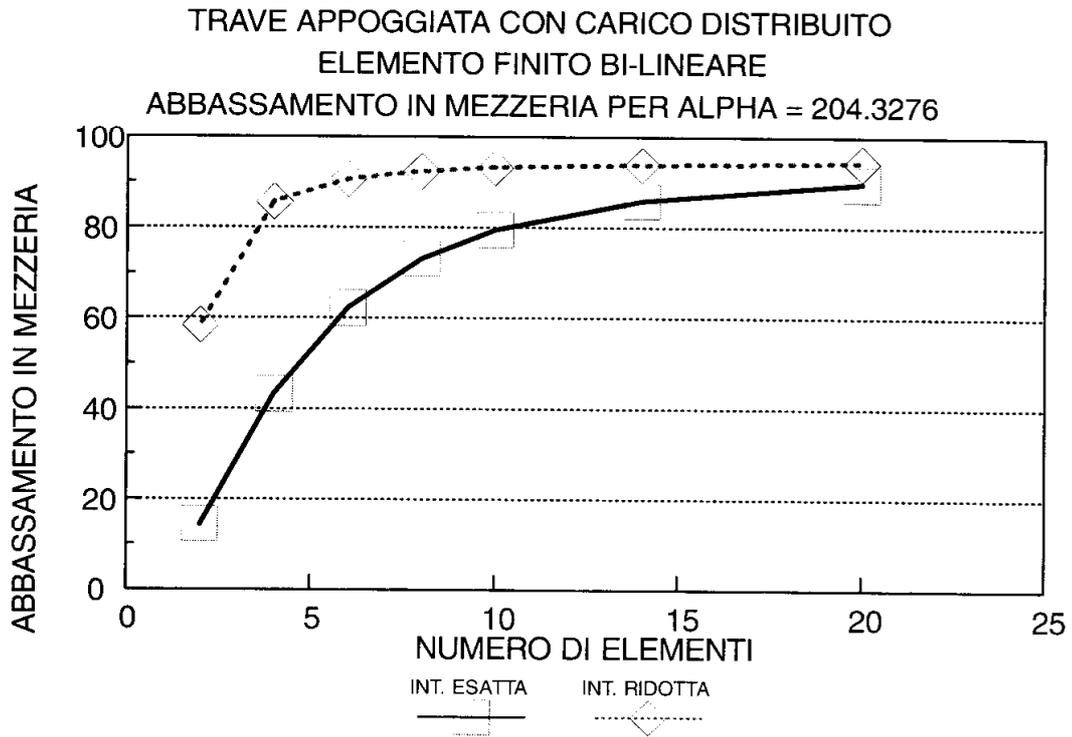


Figura 11.5- Elemento bilineare di Timoshenko Caso b). Curva di convergenza per $\alpha \approx 204$

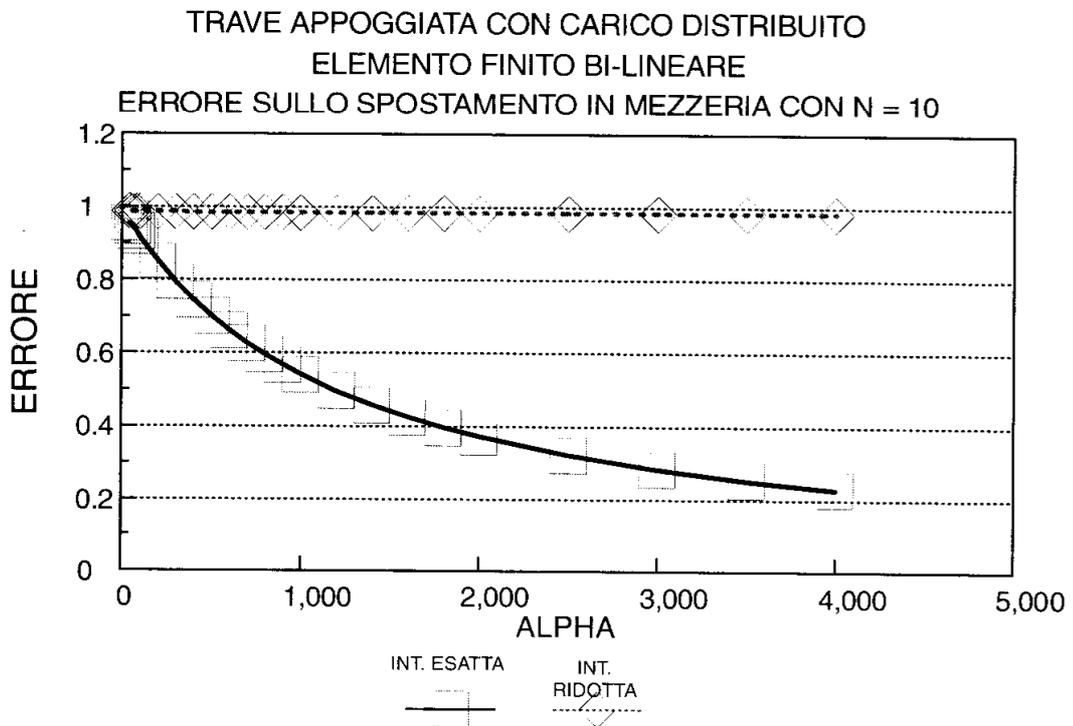


Figura 11.6- Elemento bilineare di Timoshenko. Caso b). Deterioramento della precisione per $\alpha \rightarrow \infty$

Così come operato per gli elementi ad asse curvo, nel capitolo precedente, si possono migliorare le prestazioni dell'elemento finito lineare-lineare di Timoshenko, esaminando il suo comportamento per $\alpha \rightarrow \infty$, ed eliminando eventuali vincoli spuri [Prathap et al. 1982].

A tal fine, si calcoli l'energia di deformazione di un elemento di luce L :

$$L = \frac{EI}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \right)^2 L + \frac{GA}{\chi L} \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 L + \frac{GAL^2}{24\chi} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \right)^2 \quad (11.20)$$

e si consideri che al tendere di α all'infinito, occorrerà che si ritrovi il classico risultato di Eulero-Bernoulli. Dovrà quindi essere:

$$\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{L} \right) = 0 \quad (11.21)$$

$$\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \right) = 0 \quad (11.22)$$

equivalenti ad imporre:

$$\varphi + \frac{dv}{dz} = 0 \quad (11.23)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad (11.24)$$

La prima di queste condizioni è la ben nota relazione di Eulero-Bernoulli, che lega spostamenti e rotazioni. La seconda rappresenta invece un vincolo spurio, che causa il rallentamento della convergenza mostrato in figura 11.2.

Per eliminare il vincolo (11.24) si può ricorrere ad una integrazione gaussiana di ordine ridotto. Se all'uopo si adotta una integrazione gaussiana di ordine 1, allora si avrà:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \varphi'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{EI}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \right)^2 L + \frac{GA}{2\chi} \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 L \end{aligned} \quad (11.25)$$

e quindi, al limite per $N \rightarrow \infty$, si riottiene la (11.4).

Nota 11.3: Adottare una integrazione gaussiana di ordine 1 equivale ad usare la funzione di forma costante:

$$\varphi(z) = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \quad (11.26)$$

nell'integrazione dei termini taglianti, conservando invece la funzione di forma lineare:

$$\varphi(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) \varphi_1 + \frac{z}{L} \varphi_2 \quad (11.27)$$

nell'integrazione dei termini flessionali.

La matrice di rigidezza flessionale, pertanto, non muta, mentre la matrice di rigidezza tagliante diviene:

$$\mathbf{k}_{tm} = \frac{GA}{\chi L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

Nota 11.4: La matrice di rigidezza tagliante ha ora anch'essa rango 1.

Si esamini ora la stessa trave a mensola dell'esempio precedente, e si riporti, in Figura 11.7, lo spostamento all'estremo libero in funzione del numero di elementi. Nella medesima figura è riportato anche, a scopo di paragone, il risultato già ottenuto con l'elemento non modificato. La migliore convergenza dell'elemento sotto-integrato è evidente.

In Figura 11.8 è poi riportato il grafico dell'abbassamento all'estremo, per $N = 10$, insieme agli analoghi risultati dell'elemento non modificato. Anche in questo caso è chiaro che ora l'elemento usato non soffre di problemi di locking, e che ben può simulare la trave snella di Eulero-Bernoulli.

11.4. Gli elementi di ordine superiore

Dall'esame dell'energia elastica (11.4) e dall'esperienza guadagnata dallo studio dell'elemento lineare, si può dedurre che i campi di spostamenti (v, φ) consistenti sono i campi di spostamenti per cui φ e v' hanno lo stesso grado.

11.4.1. L'elemento lineare in φ e quadratico in v .

Il primo elemento finito consistente è rappresentato in Figura 11.9, la rotazione è interpolata linearmente, e di conseguenza, l'abbassamento è interpolato quadraticamente.

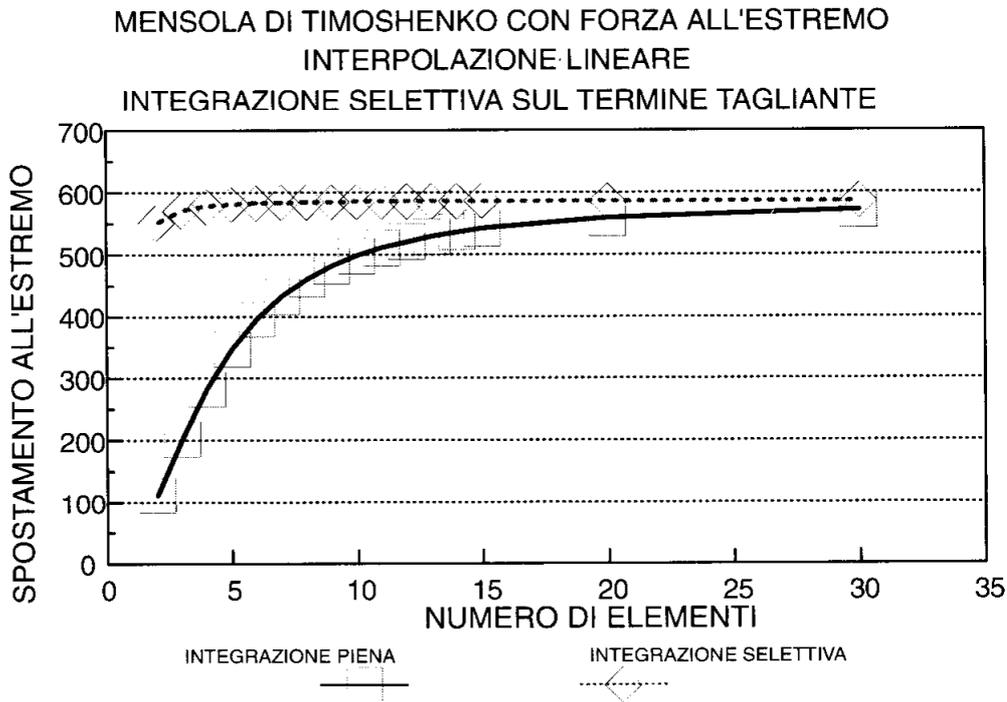


Figura 11.7- Elemento di Timoshenko bilineare.
Caso a) Curva di convergenza per integrazione esatta e selettiva

Come è stato dimostrato in Prathap et al. [1982], e come era da attendersi, l'elemento è consistente, e quindi libero da locking. Inoltre può verificarsi che, condensando staticamente il grado di libertà v_2 , si riottiene la matrice di rigidezza dell'elemento lineare modificato.

11.4.2. L'elemento di Mindlin, biquadratico (Rakowski [1990],[1991])

In questo caso, sia l'abbassamento che la rotazione vengono interpolati con un polinomio quadratico:

$$v = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \quad (11.29)$$

$$\varphi = A_3 + A_4 z + A_5 z^2 \quad (11.30)$$

e quindi l'elemento finito avrà tre nodi, con due gradi di libertà per nodo (Figura 11.10). Se il nodo centrale è situato in mezzeria, allora la matrice delle funzioni di forma sarà (cfr.9.23-9.25):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

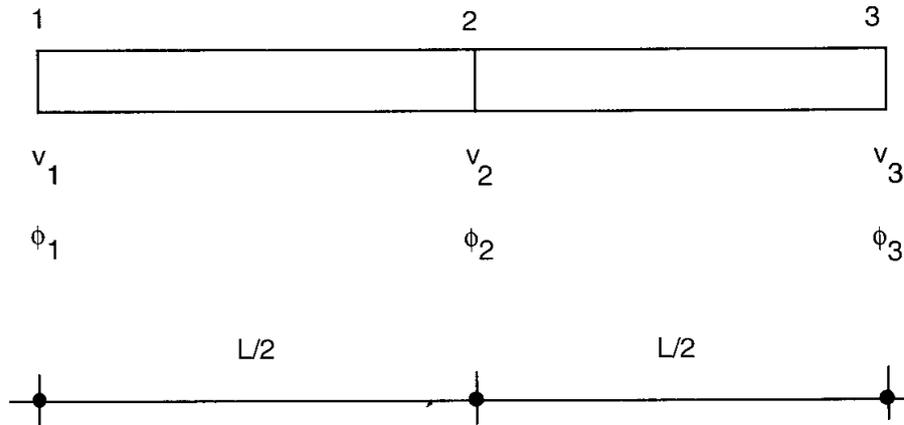


Figura 11.10- Elemento di Timoshenko quadratico - quadratico

$$N_3 = -\frac{z}{L} + 2\frac{z^2}{L^2} \quad (11.34)$$

in corrispondenza ad un vettore delle incognite nodali pari a:

$$\mathbf{d}^T \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3\} \quad (11.35)$$

Integrando analiticamente si ottiene la matrice di rigidezza flessionale:

$$\mathbf{k}_f = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 & -8/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 0 & 16/3 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -8/3 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

e la matrice di rigidezza tagliante:

$$\mathbf{k}_t = \frac{GA}{\chi L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{L}{2} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3}L & \frac{1}{3} & \frac{L}{6} \\ -\frac{L}{2} & \frac{2}{15}L^2 & \frac{2}{3}L & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{6} & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3}L & \frac{16}{3} & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3}L \\ -\frac{2}{3}L & \frac{L^2}{15} & 0 & \frac{8}{15}L^2 & \frac{2}{3}L & \frac{L^2}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{L}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3}L & \frac{7}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{6} & -\frac{L^2}{30} & -\frac{2}{3}L & \frac{L^2}{15} & \frac{L}{2} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (11.37)$$

Poichè v e φ sono interpolati con polinomi dello stesso grado, ci si dovrà aspettare una tendenza al locking. Può allora adoperarsi il metodo penalty [Prathap, 1982], per accertare se non esistano eventuali vincoli spuri.

Inserendo le (11.29–11.30) nell'espressione dell'energia elastica tagliante, dopo alcuni passaggi si giunge a:

$$L_t = \int_0^L \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 dz = L \left[\left(\frac{\varphi_1 + 4\varphi_2 + \varphi_3}{6} + \frac{v_3 - v_1}{L} \right)^2 + \frac{L^2}{12} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{L} + \frac{4v_1 - 8v_2 + 4v_3}{L^2} \right)^2 + \frac{1}{180} (2\varphi_1 - 4\varphi_2 + 2\varphi_3)^2 \right] \quad (11.38)$$

equivalente, al finito, a:

$$L_t = \int_0^L \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 dz = L \left[\left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 + \frac{L^2}{12} \frac{d}{dz} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 + \frac{L^4}{180} \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2} \right)^2 \right] \quad (11.39)$$

Per $\alpha \rightarrow \infty$, l'energia tagliante dovrà tendere a zero, e quindi dovrà aversi:

$$\varphi + \frac{dv}{dz} = 0 \quad (11.40)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) = 0 \quad (11.41)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \quad (11.42)$$

Le prime due condizioni sono le condizioni di Eulero–Bernoulli, mentre la terza rappresenta un vincolo aggiuntivo. L'elemento sarà quindi soggetto a shear locking. Si noti, tuttavia, che il termine spurio è moltiplicato per L^4 , e che quindi, infittendo la discretizzazione ($L \rightarrow 0$), il risultato esatto verrà comunque raggiunto.

Modifiche all'elemento di Mindlin

Può dimostrarsi che una integrazione gaussiana a 2 punti porta a valutare l'energia elastica tagliante come:

$$L_t = \int_0^L \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 dz = L \left[\left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 + \frac{L^2}{12} \frac{d}{dz} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] \quad (11.43)$$

e che quindi l'elemento in esame va modificato in questo senso, per avere risultati soddisfacenti.

La matrice di rigidezza flessionale non muta, mentre la matrice di rigidezza tagliante diviene:

$$\mathbf{k}_t = \frac{GA}{\chi L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{L}{2} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3}L & \frac{1}{3} & \frac{L}{6} \\ -\frac{L}{2} & \frac{1}{9}L^2 & \frac{2}{3}L & \frac{L^2}{9} & -\frac{L}{6} & -\frac{L^2}{18} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3}L & \frac{16}{3} & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3}L \\ -\frac{2}{3}L & \frac{L^2}{9} & 0 & \frac{4}{9}L^2 & \frac{2}{3}L & \frac{L^2}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{L}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3}L & \frac{7}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{6} & -\frac{L^2}{18} & -\frac{2}{3}L & \frac{L^2}{9} & \frac{L}{2} & \frac{1}{9}L^2 \end{bmatrix} \quad (11.44)$$

Nota 11.5: Se si adoperasse una integrazione gaussiana ancora più rozza, ad un solo termine, si avrebbe:

$$L_t = \int_0^L \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 dz = L \left[\left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] \quad (11.45)$$

che equivale ad imporre l'uguaglianza $\varphi = -v'$ in un solo punto della luce. Di conseguenza l'elemento non sarà particolarmente efficiente.

Simulazioni numeriche per l'elemento di Mindlin

Si considerano ancora i due esempi di figura 11.2, e si studiano l'elemento 'esatto' e l'elemento ad integrazione ridotta a 2 due punti sul termine tagliante.

In Figura 11.11 e Figura 11.12 sono riportate le curve di convergenza per $\alpha = 204.3276$, per il caso a) e per il caso b), rispettivamente, mentre in Figura 11.13 e

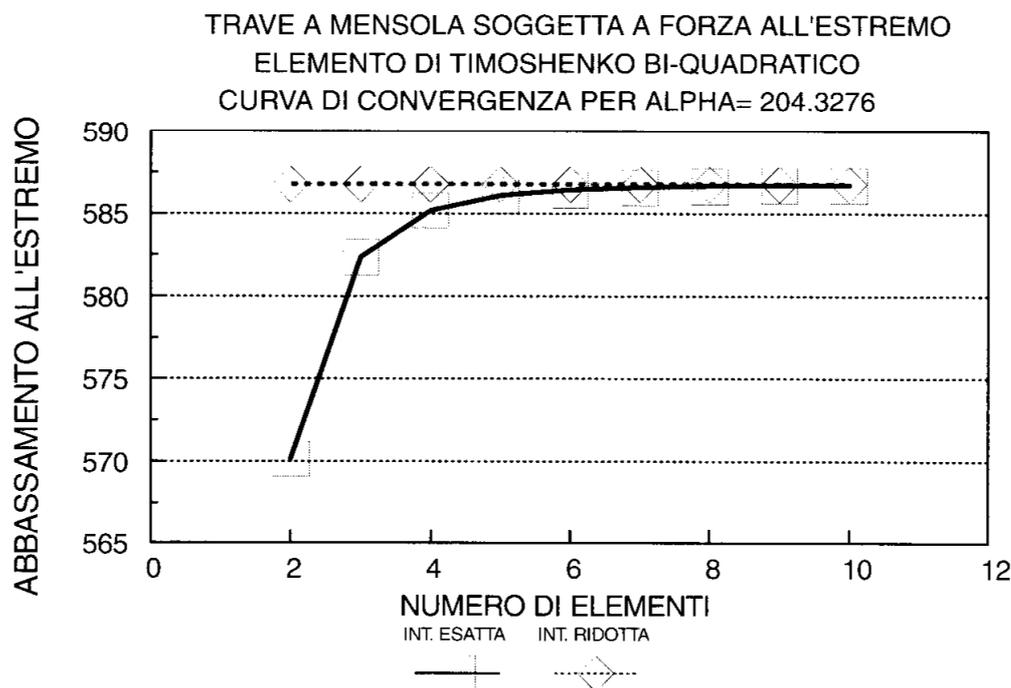


Figura 11.11- Elemento di Mindlin. Caso a). Curva di convergenza per $\alpha \approx 204$

Figura 11.14 si mostra il comportamento della struttura per α che va all'infinito, ossia al tendere verso il caso limite di Eulero-Bernoulli.

In ambedue i casi il comportamento qualitativo delle curve è simile a quello dell'elemento bilineare, ma vale la pena di evidenziare un netto miglioramento qualitativo: sia pure soggetto a locking, l'elemento bi-quadratico 'esatto' si comporta molto meglio del suo corrispondente bi-lineare. Ciò era da attendersi, e comportamenti ancora migliori sono prevedibili per l'elemento cubico-cubico, quintico-quintico, e così via.

Infine, si noti che un carico uniformemente distribuito si ripartisce per $1/6$ ai due estremi e per $2/3$ al nodo centrale.

11.4.3. L'elemento cubico-quadratico TIM7 (Nickel et al. [1972])

Il secondo elemento consistente e libero da locking è quello per cui la rotazione è interpolata con legge quadratica, e, di conseguenza, l'abbassamento è interpolato con legge cubica:

$$v = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 \quad (11.46)$$

$$\varphi = A_4 + A_5 z + A_6 z^2 \quad (11.47)$$

Il numero dei gradi di libertà è pari a 7, e secondo Nickel et al. [1972] può scegliersi il modello a tre nodi di Figura 11.15.

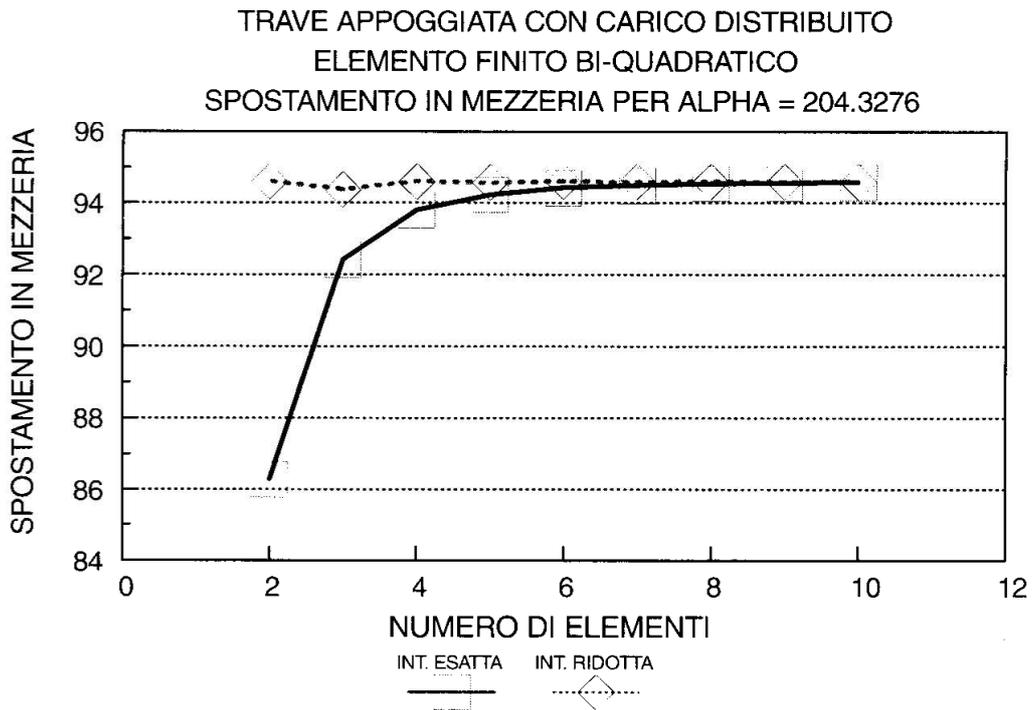


Figura 11.12- Elemento di Mindlin. Caso b). Curva di convergenza per $\alpha \approx 204$

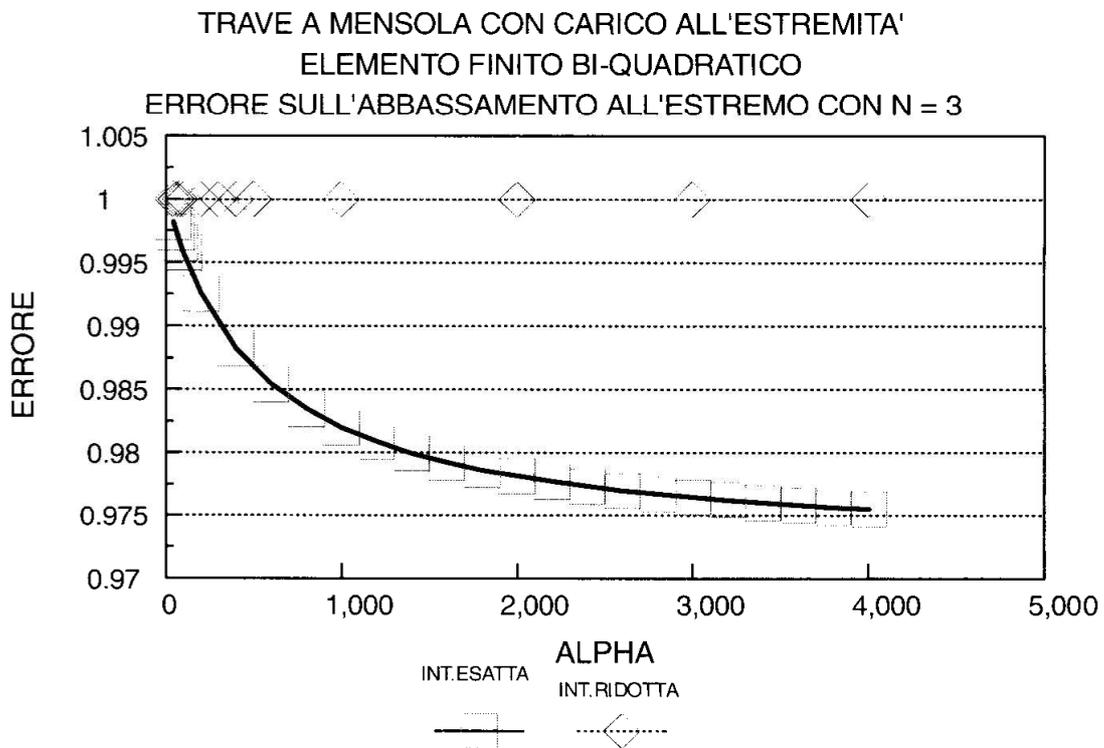


Figura 11.13- Elemento di Mindlin. Caso a) Deterioramento dell'elemento per $\alpha \rightarrow \infty$

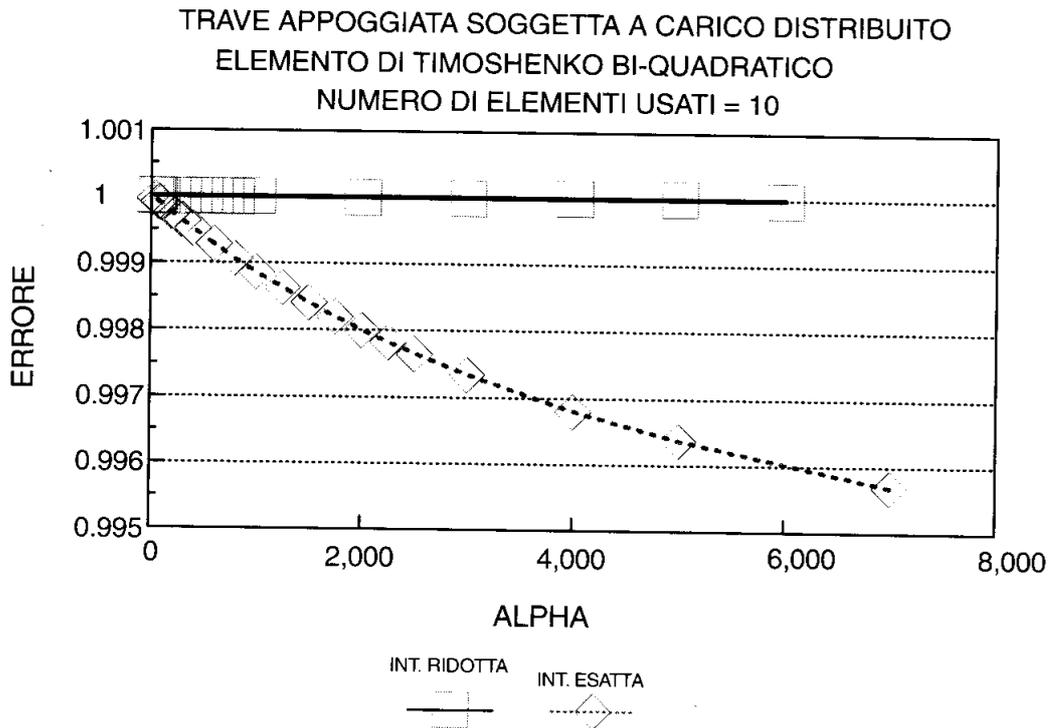


Figura 11.14- Elemento di Mindlin. Caso b) Deterioramento dell'elemento per $\alpha \rightarrow \infty$

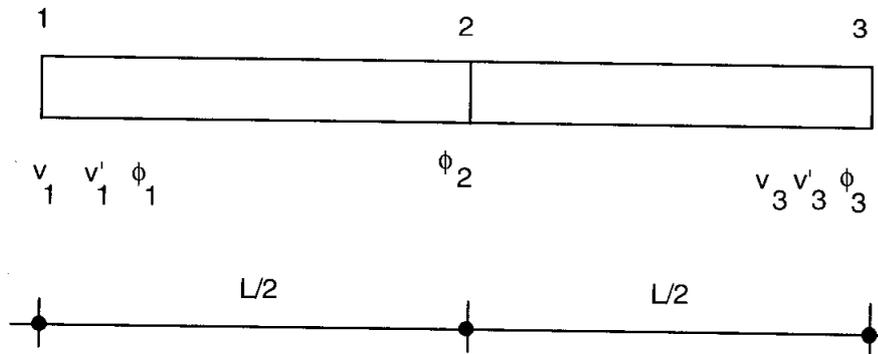


Figura 11.15- L'elemento TIM7

Il vettore dei gradi di libertà nodali sarà allora:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, v_1', \varphi_1, \varphi_2, v_3, v_3', \varphi_3\} \quad (11.48)$$

Le funzioni di forma si ottengono, dall'inversione della matrice \mathbf{C} , come:

$$N_{21} = N_{11} = 1 - 3\frac{z^2}{L^2} + 2\frac{z^3}{L^3}; \quad N_{12} = z - 2\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2}; \quad N_{13} = N_{14} = 0 \quad (11.49)$$

$$N_{15} = 3\frac{z^2}{L^2} - 2\frac{z^3}{L^3}; \quad N_{16} = -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2}; \quad N_{17} = 0 \quad (11.50)$$

$$N_{21} = N_{22} = 0; \quad N_{23} = 1 - 3\frac{z}{L} + 2\frac{z^2}{L^2} \quad (11.51)$$

$$N_{24} = 4\frac{z}{L} - 4\frac{z^2}{L^2}; \quad N_{25} = N_{26} = 0; \quad N_{27} = -\frac{z}{L} + 2\frac{z^2}{L^2} \quad (11.52)$$

e le matrici di rigidezza flessionale e tagliante sono fornite da:

$$\mathbf{k}_f = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -8/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -8/3 & 16/3 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -8/3 & 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

e:

$$\mathbf{k}_t = \frac{GA}{\chi L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{L}{10} & -\frac{4}{5}L & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & \frac{7}{60}L^2 & -\frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & -\frac{L^2}{20} \\ -\frac{L}{10} & \frac{7}{60}L^2 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{L^2}{15} & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{20} & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{4}{5}L & -\frac{L^2}{15} & \frac{L^2}{15} & \frac{8}{15}L^2 & \frac{4}{5}L & -\frac{L^2}{15} & \frac{L^2}{15} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{L}{10} & \frac{4}{5}L & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & -\frac{L^2}{20} & -\frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & \frac{7}{60}L^2 \\ -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{20} & -\frac{L^2}{30} & \frac{L^2}{15} & \frac{L}{10} & \frac{7}{60}L^2 & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (11.54)$$

Sembra anche opportuno condensare il grado di libertà centrale, riducendo a 6 le variabili. Si ottiene, infine, la matrice riportata sotto forma di subroutine in Appendice 11.1.

Per poter analizzare la trave semplicemente appoggiata di figura 11.2, occorre calcolare il vettore dei carichi nodali equivalenti al carico uniformemente distribuito. Applicando la (8.95) si ottiene il vettore:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \right\} \quad (11.55)$$

Come già detto, l'elemento è libero da locking, e per ambedue i casi di figura 11.2 prevede un abbassamento esatto fino alla quinta cifra decimale, già con una discretizzazione in due elementi.

11.4.4. Gli elementi bicubici (Carnegie et al. [1969], Thomas et al. [1975])

Si consideri ora il caso in cui sia lo spostamento che la rotazione vengono interpolati con un polinomio cubico:

$$v = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (11.56)$$

$$\varphi = A_4 + A_5z + A_6z^2 + A_7z^3 \quad (11.57)$$

Si ha un totale di 8 gradi di libertà, e possibilità di una leggera tendenza al locking. I due modelli più comunemente usati sono riportati in Figura 11.16. Il primo (d'ora in poi identificato con CC1) ha quattro nodi equidistanziati, ed in ciascun nodo si assume come libertà nodali l'abbassamento v e la rotazione φ :

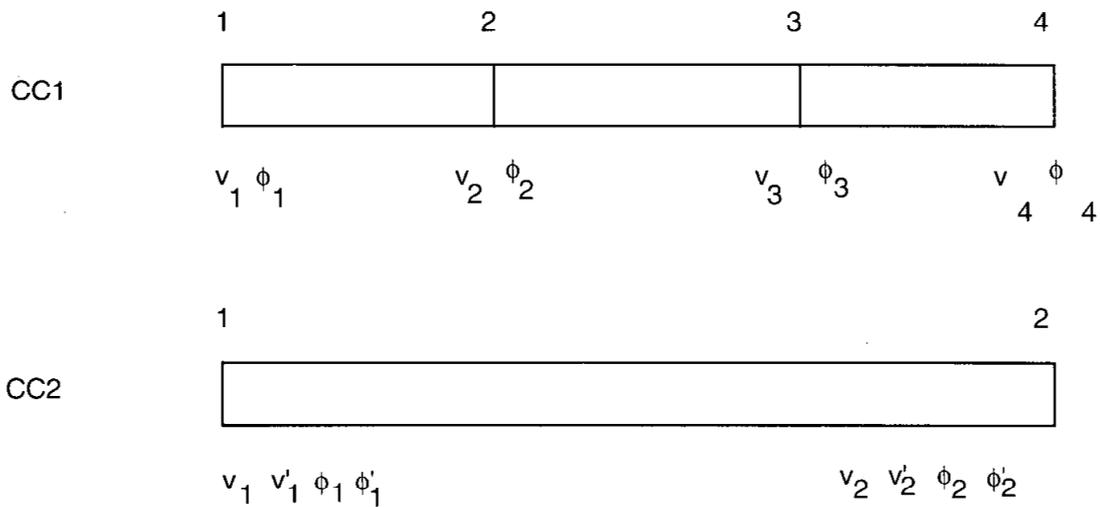


Figura 11.16- I due modelli di elemento di Timoshenko bicubico

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3, v_4, \varphi_4\} \quad (11.58)$$

Il secondo (d'ora in poi identificato con CC2) ha solo i due nodi estremi, ed in ciascun nodo vengono assunti come incognite nodali l'abbassamento e la rotazione, più la derivata di entrambi:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, v'_1, \varphi_1, \varphi'_1, v_2, v'_2, \varphi_2, \varphi'_2\} \quad (11.59)$$

La matrice di rigidezza per l'elemento CC1 è riportata, sotto forma di subroutine, in Appendice 11.2, mentre in Appendice 11.3 è fornita la matrice di rigidezza dell'elemento CC2. Per l'elemento CC1, il vettore dei carichi nodali equivalenti ad un carico uniformemente distribuito è calcolabile come:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{L}{18} \quad 0 \quad \frac{4}{9}L \quad 0 \quad \frac{4}{9}L \quad 0 \quad \frac{L}{18} \right\} \quad (11.60)$$

mentre per l'elemento CC2 si ha:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{L}{2} \quad 0 \quad \frac{L^2}{12} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \quad 0 \right\} \quad (11.61)$$

In ambedue i casi di figura 11.2, per $\alpha \approx 200$, i risultati forniti da CC1 e CC2 sono precisi alla quinta cifra decimale, già con discretizzazioni in due elementi. Inoltre, non si nota tendenza al deterioramento per $\alpha \rightarrow \infty$, e quindi da questo punto di vista gli elementi possono considerarsi affidabili.

Nota 11.6: Si noti che CC1, come del resto il precedente elemento TIM7, presenta nei nodi estremi le due sole incognite nodali v e φ , e che quindi può combinarsi facilmente con altri elementi finiti dello stesso tipo. Al contrario, l'elemento CC2 non è facilmente combinabile in un contesto generale.

Nota 11.7: A favore dell'elemento CC2, infine, può segnalarsi la sua capacità a rappresentare tutte le possibili condizioni ai limiti, sia le geometriche che le naturali.

11.4.5. Gli elementi biquintici

In alcuni casi può aversi necessità di usare un elemento finito particolarmente elaborato, capace di fornire risultati affidabili anche in situazioni a geometria complessa. Un caso classico potrebbe ad esempio essere l'analisi di strutture reticolari a trave, come in Figura 11.17, in cui si considera un modello ridotto al continuo, in cui la necessità di usare elementi finiti sofisticati è imprescindibile (Necib et al. [1989]).

In quest'ottica può proseguirsi sulla via fin qui illustrata, ed ipotizzare un campo di spostamenti polinomiale di quinto grado sia per l'abbassamento che per la rotazione:

$$v = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + A_5z^5 \quad (11.62)$$

$$\varphi = A_6 + A_7z + A_8z^2 + A_9z^3 + A_{10}z^4 + A_{11}z^5 \quad (11.63)$$

a somiglianza di quanto fatto per l'elemento ad asse curvo bi-quintico (Dawe 1974). Due possibili elementi a 12 gradi di libertà sono riportati in Figura 11.18.

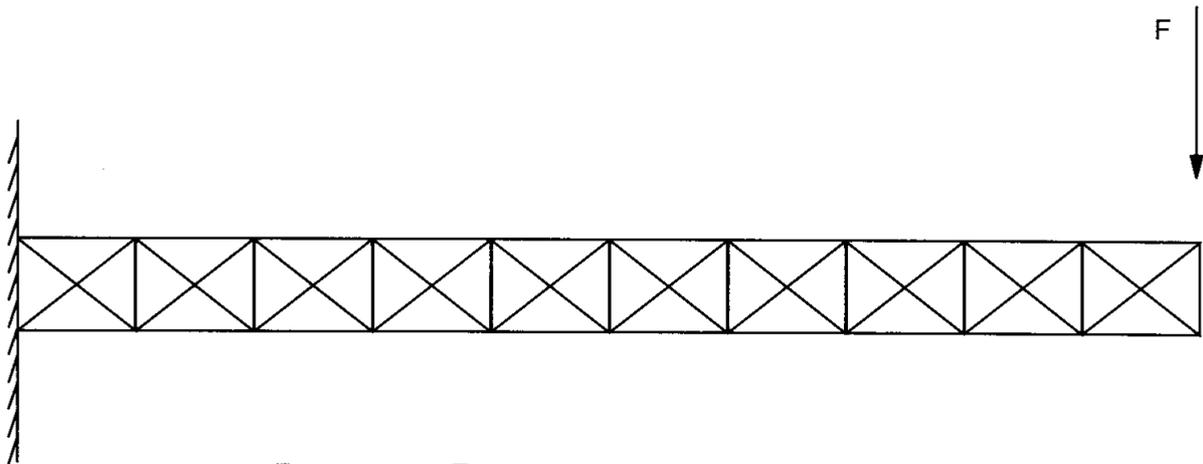


Figura 11.17- Trave reticolare da analizzare al continuo

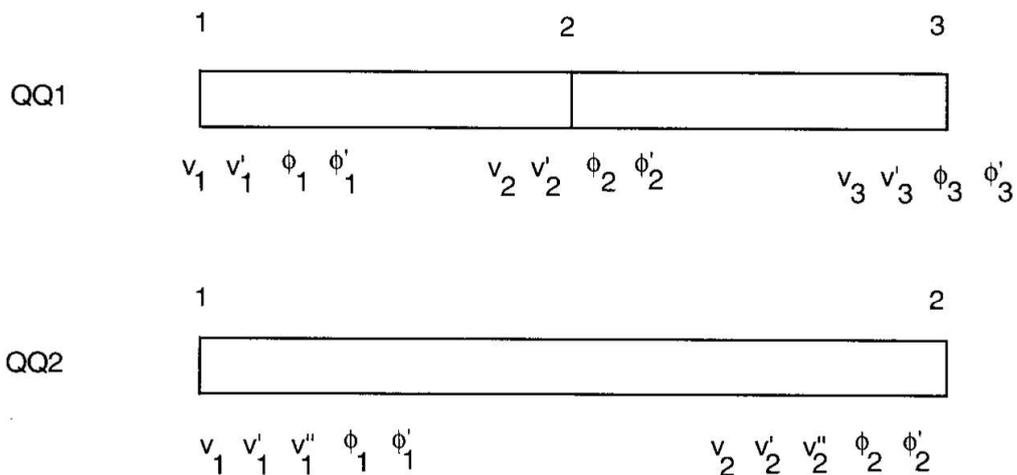


Figura 11.18- Due possibili elementi bi - quintici

Il primo, d'ora in poi identificato con QQ1, ha 3 nodi, ed in ciascun nodo sono definiti l'abbassamento e la rotazione, insieme alle loro derivate prime:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, v'_1, \varphi_1, \varphi'_1, v_2, v'_2, \varphi_2, \varphi'_2, v_3, v'_3, \varphi_3, \varphi'_3\} \quad (11.64)$$

Il secondo elemento, d'ora in poi identificato con QQ2, ha solo 2 nodi, ed in ciascuno di essi sono definiti l'abbassamento e la rotazione, insieme alle loro derivate prime e seconde:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, v'_1, v''_1, \varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, v_2, v'_2, v''_2, \varphi_2, \varphi'_2, \varphi''_2\} \quad (11.65)$$

I carichi nodali equivalenti ad un carico uniformemente distribuito sono forniti da:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{7}{30}L \quad \frac{L^2}{60} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{8}{15}L \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{7}{30}L \quad -\frac{L^2}{60} \quad 0 \right\} \quad (11.66)$$

per l'elemento QQ1, e da:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{10} \quad \frac{L^3}{120} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{L}{2} \quad -\frac{L^2}{10} \quad \frac{L^3}{120} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (11.67)$$

per l'elemento QQ2. Le matrici di rigidezza sono riportate in Appendice 11.4 e Appendice 11.5, rispettivamente.

Ambedue gli elementi illustrati superano brillantemente i test di figura 11.2, e possono essere utilmente impiegati in situazioni 'difficili'.

11.5. Gli elementi vincolati

In quanto detto finora, l'abbassamento $v(z)$ e la rotazione $\varphi(z)$ sono sempre stati interpolati indipendentemente l'uno dall'altro. Tuttavia queste due quantità possono legarsi tramite considerazioni di equilibrio, in modo da ridurre notevolmente il numero dei gradi di libertà dell'elemento.

Si consideri all'uopo la condizione di equilibrio (11.2), che può essere riscritta, usando le (11.3), come:

$$EI\varphi'' = \frac{GA}{\chi} (v' + \varphi) \quad (11.68)$$

avendo usato anche la (11.1). Questa relazione tra $v(z)$ e $\varphi(z)$ può essere soddisfatta a priori, esprimendo i coefficienti dell'espansione polinomiale di $\varphi(z)$ in funzione dei coefficienti di $v(z)$. In altre parole, il solo campo di spostamenti indipendente resta l'abbassamento $v(z)$, così come per le travi di Eulero-Bernoulli.

A far ciò, si parta da una qualsiasi coppia di polinomi interpolanti *consistente*:

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_mz^m \quad (11.69)$$

$$\varphi(z) = D_0 + D_1z + D_2z^2 + \dots + D_{m-1}z^{m-1} \quad (11.70)$$

e si introducano questi polinomi nella (11.68).

Si ha:

$$\begin{aligned}
C(2D_2 + 6D_3z + 12D_4z^2 + \dots + (m-1)(m-2)D_{m-1}z^{m-3}) \\
= D_0 + D_1z + \dots + D_{m-1}z^{m-1} + A_1 + 2A_2z + 3A_3z^2 + \dots + mA_mz^{m-1}
\end{aligned} \quad (11.71)$$

con:

$$C = \frac{\chi EI}{GA} \quad (11.72)$$

Uguagliando i coefficienti dei termini costanti, lineari, quadratici, etc., si giunge ad $m-1$ equazioni:

$$2CD_2 = D_0 + A_1 \quad (11.73)$$

$$6CD_3 = D_1 + 2A_2 \quad (11.74)$$

...

$$D_{m-2} + (m-1)A_{m-1} = 0 \quad (11.75)$$

$$D_{m-1} + mA_m = 0 \quad (11.76)$$

che possono essere risolte in funzione delle $m-1$ incognite D_i .
Matricialmente, può scriversi:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (11.77)$$

dove \mathbf{R} è una *matrice di correlazione*, rettangolare, di dimensioni $(m-1, m)$. Di conseguenza, la rotazione $\varphi(z)$ potrà esprimersi in termini di \mathbf{A} , come:

$$\varphi = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{R}\mathbf{A} \quad (11.78)$$

ed

$$\boldsymbol{\alpha}' = [1, z, z^2, \dots, z^{m-1}] \quad (11.79)$$

Si esaminano ora alcuni casi particolari.

11.5.1. L'elemento di base (Davis et al. [1972], Narayanaswami et al. [1974])

Il più semplice esempio di elemento finito vincolato si ottiene per $m = 3$, ossia approssimando l'abbassamento con un polinomio cubico:

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (11.80)$$

Le incognite nodali sono, banalmente, spostamenti e rotazioni agli estremi:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2\} \quad (11.81)$$

La rotazione φ verrà interpolata quadraticamente:

$$\varphi(z) = D_0 + D_1z + D_2z^2 \quad (11.82)$$

e le costanti D_i saranno fornite da:

$$D_0 = -A_1 - 6CA_3 \quad D_1 = -2A_2 \quad D_2 = -3A_3 \quad (11.83)$$

Ne segue che le condizioni ai limiti:

$$v(0) = v_1 \quad \varphi(0) = \varphi_1 \quad (11.84)$$

$$v(L) = v_2 \quad \varphi(L) = \varphi_2 \quad (11.85)$$

possono scriversi, matricialmente, come:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6C \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 - 6C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (11.86)$$

L'inversione della matrice \mathbf{C} ed il prodotto $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$, con $\boldsymbol{\alpha} = [1, z, z^2, z^3]$, porta alle funzioni di forma dell'abbassamento:

$$v(z) = N_1v_1 + N_2\varphi_1 + N_3v_2 + N_4\varphi_2 \quad (11.87)$$

con:

$$N_1 = 1 - \frac{12CL}{S}z - \frac{3L^2}{S}z^2 + \frac{2L}{S}z^3 \quad (11.88)$$

$$N_2 = -\frac{6CL^2 + L^4}{S}z + \frac{6CL + 2L^3}{S}z^2 - \frac{L^2}{S}z^3 \quad (11.89)$$

$$N_3 = \frac{12CL}{S}z + \frac{3L^2}{S}z^2 - \frac{2L}{S}z^3 \quad (11.90)$$

$$N_4 = \frac{6CL^2}{S}z + \frac{L^3 - 6CL}{S}z^2 - \frac{L^2}{S}z^3 \quad (11.91)$$

ed:

$$S = 12CL^2 + L^4 \quad (11.92)$$

Nota 11.8: Per $C = 0$ si ritrovano le funzioni di forma usuali di Eulero–Bernoulli. Le funzioni di forma \mathbf{N}_φ della rotazione si ottengono tramite triplo prodotto matriciale:

$$\mathbf{N}_\varphi = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{R} \mathbf{C}^{-1} \quad (11.93)$$

dove \mathbf{R} , matrice di correlazione, è fornita da (cfr.11.73–11.76):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -6C \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (11.94)$$

ed $\boldsymbol{\alpha}' = [1, z, z^2]$. Si ha:

$$N_{\varphi 1} = \frac{6L^2}{S}z - \frac{6L}{S}z^2 \quad (11.95)$$

$$N_{\varphi 2} = \frac{L^4}{S} + \frac{12CL^2}{S} - \frac{12CL + 4L^3}{S}z + \frac{3L^2}{S}z^2 \quad (11.96)$$

$$N_{\varphi 3} = -\frac{6L^2}{S}z + \frac{6L}{S}z^2 \quad (11.97)$$

$$N_{\varphi 4} = \frac{12CL - 2L^3}{S}z + \frac{3L^2}{S}z^2 \quad (11.98)$$

L'usuale procedimento porta poi alla matrice di rigidezza:

$$\mathbf{k} = \Phi \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & -6 & -\frac{12}{L} & -6 \\ -6 & 4L(1 + \frac{3}{\alpha}) & 6 & 2L(1 - \frac{6}{\alpha}) \\ -\frac{12}{L} & 6 & \frac{12}{L} & 6 \\ -6 & 2L(1 - \frac{6}{\alpha}) & 6 & 4L(1 + \frac{3}{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (11.99)$$

con

$$\Phi = \frac{EIGA'}{12EI + GA'L^2} \quad (11.100)$$

e, per convenienza, $A' = A/\chi$. I carichi nodali equivalenti ad una stesa di carico uniformemente distribuita sono forniti dal vettore:

$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{L}{2} \quad -\frac{L^2}{12} \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \right\} \quad (11.101)$$

qualunque sia il valore di α .

Nota 11.9: L'utilità dell'elemento finito appena descritto è evidente. Da un lato infatti è immediata la sua utilizzazione in un contesto generale, in cui siano presenti anche elementi di Eulero-Bernoulli, e dall'altro le sue capacità di convergenza e precisione saranno senz'altro notevoli, attesa la mancanza di locking ed il grado di interpolazione usato.

11.5.2. Un elemento di ordine superiore (Dawe [1978])

Procedendo sulla scia della formulazione generale degli elementi vincolati, si incontra il caso in cui lo spostamento è approssimato con un polinomio quintico:

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + A_5z^5 \quad (11.102)$$

e, di conseguenza, la rotazione è approssimata con un polinomio quartico:

$$\varphi(z) = D_0 + D_1z + D_2z^2 + D_3z^3 + D_4z^4 \quad (11.103)$$

L'elemento avrà sei gradi di libertà, che potranno convenientemente essere scelti come l'abbassamento e la rotazione nei due nodi estremi ed in mezzzeria (Dawe [1978]). Si ha così il vettore dei gradi di libertà nodali:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3\} \quad (11.104)$$

L'imposizione delle condizioni ai limiti porta a definire la matrice:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6C & 0 & -120C^2 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & \frac{L^4}{16} & \frac{L^5}{32} \\ 0 & -1 & -L & -\frac{3}{4}L^2 - 6C & -\frac{L^3}{2} - 12CL & -\frac{5}{16}L^4 - 15CL^2 - 120C^2 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 - 6C & -4L^3 - 24CL & -5L^4 - 60CL^2 - 120C^2 \end{bmatrix} \quad (11.105)$$

mentre la matrice di correlazione è:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -6C & 0 & -120C^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -24C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -60C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (11.106)$$

Le funzioni di forma \mathbf{N}_v dell'abbassamento sono fornite dal prodotto matriciale $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$, con $\boldsymbol{\alpha} = [1, z, z^2, z^3, z^4, z^5]$. Si ha:

$$N_{v1} = 1 - \frac{36C(560C + 11L^2)}{R} \frac{z}{L} + \frac{40320C^2 - 384CL^2 - 23L^4}{R} \frac{z^2}{L^2} + \frac{6(-3840C^2 + 480CL^2 + 11L^4)}{R} \frac{z^3}{L^3} - \frac{4(840C + 17L^2)}{R} \frac{z^4}{L^2} + \frac{24}{R_1} \frac{z^5}{L^3} \quad (11.107)$$

$$N_{v2} = -\frac{46080C^3 - 192C^2L^2 + 30CL^4 + L^6}{R} \frac{z}{L^2} + \frac{6(23040C^3 - 480C^2L^2 + 33CL^4 + L^6)}{R} \frac{z^2}{L^3} + \frac{-92160C^3 + 9600C^2L^2 - 432CL^4 - 13L^6}{R} \frac{z^3}{L^4} - \frac{12(960C^2 - 30CL^2 - L^4)}{R} \frac{z^4}{L^3} + \frac{4(24C - L^2)}{R_1} \frac{z^5}{L^4} \quad (11.108)$$

$$N_{v3} = \frac{192C}{48C + L^2} \frac{z}{L} + \frac{16(-12C + L^2)}{48C + L^2} \frac{z^2}{L^2} - \frac{32}{48C + L^2} \frac{z^3}{L} + \frac{16}{48C + L^2} \frac{z^4}{L^2} \quad (11.109)$$

$$N_{v4} = \frac{192C(10C + L^2)}{R_1} \frac{z}{L^2} + \frac{8(-720C^2 - 60CL^2 + L^4)}{R_1} \frac{z^2}{L^3} + \frac{32(120C^2 - L^4)}{R_1} \frac{z^3}{L^4} + \frac{40(12C + L^2)}{R_1} \frac{z^4}{L^3} - \frac{16(12C + L^2)}{R_1} \frac{z^5}{L^4} \quad (11.110)$$

$$N_{v5} = \frac{12C(720C + 17L^2)}{R} \frac{z}{L} - \frac{28880C^2 + 384CL^2 - 7L^4}{R} \frac{z^2}{L^2} + \frac{2(11520C^2 - 480CL^2 - 17L^4)}{R} \frac{z^3}{L^3} + \frac{4(600C + 13L^2)}{R} \frac{z^4}{L^2} - \frac{24}{R_1} \frac{z^5}{L^3} \quad (11.111)$$

$$N_{v6} = -\frac{6C(7680C^2 - 32CL^2 - 5L^4)}{R} \frac{z}{L^2} + \frac{(-92160C^3 + 9600C^2L^2 + 48CL^4 - 5L^6)}{R} \frac{z^3}{L^4} - \frac{8(1440C^2 - 15CL^2 - L^4)}{R} \frac{z^4}{L^3} + \frac{138240C^3 - 2880C^2L^2 - 102CL^4 + L^6}{R} \frac{z^2}{L^3} + \frac{4(24C - L^2)}{R_1} \frac{z^5}{L^4} \quad (11.112)$$

con:

$$R = 2880C^2 + 108CL^2 + L^4 \quad (11.113)$$

ed:

$$R_1 = 60C + L^2 \quad (11.114)$$

Le funzioni di forma \mathbf{N}_φ della rotazione si possono invece dedurre dal triplo prodotto $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{R}\mathbf{C}^{-1}$, con $\boldsymbol{\alpha}' = [1, z, z^2, z^3, z^4]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\varphi 1} = & \frac{36C(560C + 11L^2)}{RL} - \frac{2(40320C^2 - 384CL^2 - 23L^4)}{R} \frac{z}{L^2} \\ & + \frac{18(3840C^2 - 480CL^2 - 11L^4)}{R} \frac{2C + z^2}{L^3} \\ & + \frac{16(840C + 17L^2)}{R} \frac{6Cz + z^3}{L^2} - \frac{120(24C^2 + 12Cz^2 + z^4)}{R_1L^3} \end{aligned} \quad (11.115)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\varphi 2} = & \frac{46080C^3 - 192C^2L^2 + 30CL^4 + L^6}{RL^2} \\
& + \frac{12(-23040C^3 + 480C^2L^2 - 33CL^4 - L^6)}{R} \frac{z}{L^3} \\
& + \frac{3(92160C^3 - 9600C^2L^2 + 432CL^4 + 13L^6)}{R} \frac{2C + z^2}{L^4} \\
& + \frac{48(960C^2 - 30CL^2 - L^4)}{R} \frac{6Cz + z^3}{L^3} \\
& + \frac{20(-24C + L^2)(24C^2 + 12Cz^2 + z^4)}{R_1L^4}
\end{aligned} \tag{11.116}$$

$$\mathbf{N}_{\varphi 3} = -\frac{192C}{48CL + L^3} + \frac{32(12C - L^2)}{48C + L^2} \frac{z}{L^2} + \frac{96(2C + z^2)}{48CL + L^3} - \frac{64z(6C + z^2)}{48CL^2 + L^4} \tag{11.117}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\varphi 4} = & -\frac{192C(10C + L^2)}{R_1L^2} + \frac{16(720C^2 + 60CL^2 - L^4)}{R_1} \frac{z}{L^3} \\
& + \frac{96(-120C^2 + L^4)(2C + z^2)}{R_1L^4} - \frac{160(12C + L^2)(6Cz + z^3)}{R_1L^3} \\
& + \frac{80(12C + L^2)(24C^2 + 12Cz^2 + z^4)}{R_1L^4}
\end{aligned} \tag{11.118}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\varphi 5} = & -\frac{12C(720C + 17L^2)}{RL} + \frac{2(28800C^2 + 384CL^2 - 7L^4)}{R} \frac{z}{L^2} \\
& + \frac{6(-11520C^2 + 480CL^2 + 17L^4)}{R} \frac{2C + z^2}{L^3} \\
& - \frac{16(600C + 13L^2)}{R} \frac{6Cz + z^3}{L^2} + \frac{120(24C^2 + 12Cz^2 + z^4)}{R_1L^3}
\end{aligned} \tag{11.119}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\varphi 6} = & \frac{6C(7680C^2 - 32CL^2 - 5L^4)}{RL^2} \\
& + \frac{2(-138240C^3 + 2880C^2L^2 + 102CL^4 - L^6)}{R} \frac{z}{L^3} \\
& + \frac{3(92160C^3 - 9600C^2L^2 - 48CL^4 + 5L^6)}{R} \frac{2C + z^2}{L^4} \\
& + \frac{32(1440C^2 - 15CL^2 - L^4)}{R} \frac{Cz + z^3}{L^3} \\
& + \frac{20(-24C + L^2)(24C^2 + 12Cz^2 + z^4)}{R_1L^4}
\end{aligned} \tag{11.120}$$

La matrice di rigidezza è riportata, sotto forma di subroutine, in Appendice 11.6.

Si osservi che i carichi nodali equivalenti ad una stesa di carico uniformemente distribuita sono in questo caso forniti da:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(7 + 240\eta)L}{30(1 + 48\eta)} \\ \frac{L^2}{60(1 + 48\eta)} \\ \frac{8(1 + 60\eta)L}{15(1 + 48\eta)} \\ 0 \\ \frac{(7 + 240\eta)L}{30(1 + 48\eta)} \\ \frac{L^2}{60(1 + 48\eta)} \end{array} \right\} \quad (11.121)$$

con $\eta = 1/\alpha$ e quindi variano, sia pure di poco, al variare di α .

Nota 11.10: Trascurando il contributo di η , ossia ponendo $\eta = 0$, si ottiene il vettore (9.59) dell'equivalente elemento di Eulero-Bernoulli.

Per controllare l'errore che si commette, introducendo i carichi nodali forniti dalla (9.59), si consideri la solita trave appoggiata di figura 11.2, e si calcoli l'abbassamento in mezzeria per vari valori di α . I risultati sono riportati in Tabella 11.1, per una discretizzazione in tre elementi finiti, e sette nodi; in seconda colonna è riportato l'abbassamento esatto, calcolato a partire dalla (11.15), in terza colonna si ha l'abbassamento ottenuto con il vettore 'esatto' di carichi nodali, ed in quarta colonna l'abbassamento ricavato utilizzando i carichi nodali approssimati (9.59).

Elemento quintico vincolato			
α	$v_C^{(1)}$	$v_C^{(2)}$	$v_C^{(3)}$
20	133.72678	133.72678	132.75438
30	119.26983	119.26983	118.61884
50	107.70427	107.70427	107.31058
100	99.030101	99.030101	98.829812
200	94.693017	94.693016	94.590125
500	92.090766	92.090766	92.047580
1000	91.223349	91.223349	91.200944

Tabella 11.1- Abbassamento in mezzeria per una trave appoggiata

Si osservi come l'abbassamento calcolato a partire dai carichi nodali esatti sia ottenuto con una precisione estrema (anche per alti valori di α), mentre l'uso dei carichi

nodali approssimati porta a sottostimare il carico, e di conseguenza l'abbassamento. Ovviamente, tale fenomeno tende a sparire per α che tende ad infinito.

11.6. Note bibliografiche

Il primo elemento finito del tipo trave, capace di tener conto degli effetti delle deformazioni da taglio, è stato presentato da McCalley [1963a, 1963b], e generalizzato da Archer [1965] al caso di trave a sezione variabile. Si trattava dell'elemento cubico, vincolato, come dedotto in seguito da Davis et al. [1972] e da Nickel et al. [1972]. Si noti tuttavia che in quest'ultimo lavoro l'elemento finito studiato (TIM4), aveva come incognite nodali l'abbassamento $v(z)$ e la sua derivata $v'(z)$, e che quindi non è possibile imporre correttamente la condizione ai limiti $\varphi = 0$.

In seguito, non avendo ancora la possibilità di adoperare gli elementi finiti bilineari (soggetti a locking), sono stati proposti vari elementi di ordine superiore. Ad esempio, $v(z)$ può decomporre in due aliquote:

$$v(z) = v_b(z) + v_s(z) \quad (11.122)$$

la prima dovuta alla flessione (bending) e la seconda dovuta al taglio (shear). Poichè si supponeva che ambedue queste aliquote variassero con legge cubica lungo l'elemento, il numero di gradi di libertà era pari ad otto. Corrispondentemente, l'elemento proposto ha due nodi, ed in ciascun nodo le incognite nodali sono v_b , v_s , e le loro derivate prime.

Contemporaneamente al già citato TIM4, Nickel et al. [1972] proposero un elemento finito non vincolato, di ordine superiore, in cui v variava con legge cubica, e φ con legge quadratica. Il numero di gradi di libertà è quindi pari a 7, da cui il nome TIM7. Ancora su questa strada, D.L. Thomas et al. [1973] studiarono un elemento a sezione variabile, in cui l'abbassamento varia con legge cubica, e la rotazione addizionale dovuta al taglio ψ varia con legge lineare:

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (11.123)$$

$$\psi(z) = A_4 + A_5z \quad (11.124)$$

Come libertà nodali, venivano assunte l'abbassamento v , la rotazione totale φ , e la rotazione tagliante ψ nei due nodi estremi. Lo stesso elemento è stato poi generalizzato da To [1981] per una legge generica di variabilità della sezione retta, dando luogo all'elemento TB31.

I due elementi finiti bi-cubici, ad 8 gradi di libertà, furono proposti rispettivamente da Carnegie et al. [1969], e da Thomas et al. [1975]. Il primo di essi ha 4 nodi

equidistanziati, ed in ognuno di essi sono definiti l'abbassamento e la rotazione totale. Il secondo invece ha due nodi, ed in ciascuno di essi sono definiti l'abbassamento, la rotazione, e le loro derivate prime. Si noti comunque (Thomas [1976]) che i due elementi sono indistinguibili, a meno di una trasformazione opportuna degli spostamenti nodali. Un elemento bi-cubico modificato è stato anche utilizzato, in Necib et al. [1989], per lo studio delle travi reticolari.

Infine, un primo esempio di elemento di ordine superiore, vincolato, è dovuto a Dawe [1978], che suppone una legge di variazione quintica per l'abbassamento, legando ad essa la legge di variazione quartica della rotazione φ .

Discorso a parte merita la rivalutazione degli elementi finiti semplici, che, soggetti a locking nella loro formulazione 'ingenua', si possono rendere altamente efficienti tramite opportune correzioni. A partire dal lavoro di T.J.R. Hughes et al. [1977], che utilizza allo scopo tecniche di integrazione ridotta, si possono citare vari altri approcci:

- metodo delle matrici di stabilizzazione (Belytschko et al. [1981], Carpenter et al. [1986])
- metodo dei vincoli di Kirchhoff (Crisfield [1984], Stolarski et al. [1988])
- metodo dell'equilibrio globale (Rakowski [1990,1991])
- metodo dei campi consistenti (Prathap et al. [1982], Prathap et al. [1986], Prathap et al. [1992])