

## 10. Travi curve per l'analisi degli archi

Si consideri l'elemento finito del tipo trave, ad asse curvo, di Figura 10.1, caratterizzato da un modulo di Young  $E$ , momento d'inerzia  $I$ , area  $A$  della sezione retta, e lunghezza  $L$ .

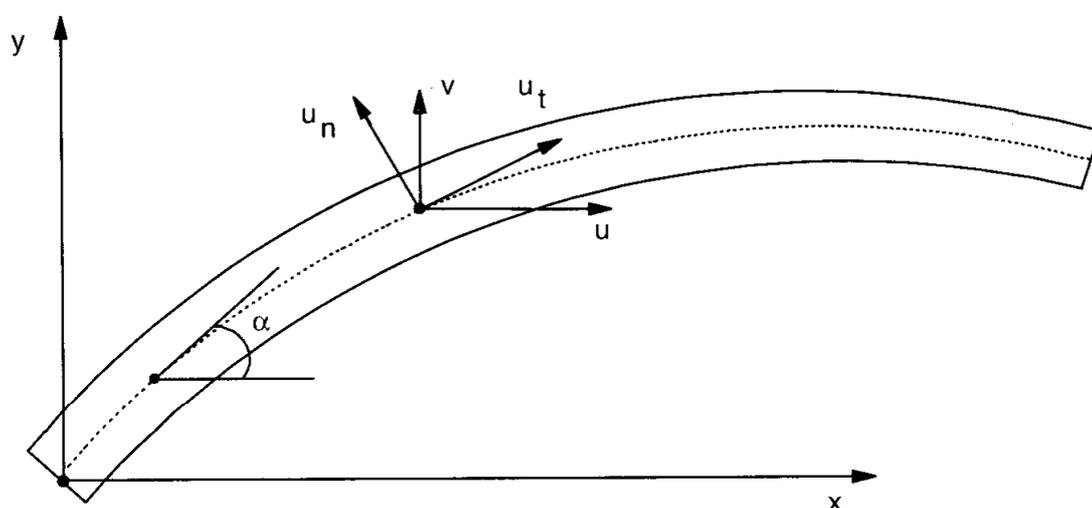


Figura 10.1- Elemento finito ad asse curvo

Si faccia l'usuale ipotesi di trascurare le deformazioni da taglio, equivalente ad ipotizzare che la trave sia sottile. In altre parole, si accetti l'ipotesi di Eulero - Bernoulli.

La geometria di un tale elemento finito può essere convenientemente descritta introducendo una coordinata curvilinea  $\alpha$ , oppure riferendosi alla usuale coppia di assi cartesiani  $(x, y)$ . Ciascun punto dell'asse della trave subirà spostamenti  $u_t(\alpha)$  in direzione tangente all'asse, e  $u_n(\alpha)$  in direzione normale, ma sarà anche possibile talvolta esprimere gli spostamenti dei punti dell'asse tramite le loro componenti cartesiane  $(u, v)$ .

La caratteristica fondamentale che distingue, e complica, l'analisi delle travi curve rispetto all'analisi delle travi rettilinee, è l'accoppiamento tra queste due componenti di spostamento. Non è quindi più possibile ottenere espressioni separate delle energie di deformazione nelle due componenti di spostamento.

### 10.1. L'energia di deformazione

L'energia di deformazione dell'elemento di figura 10.1 può ottenersi come caso particolare del più generale elemento a guscio bidimensionale [Novozhilov, 1970]:

$$L = \frac{EA}{2} \int_0^L e^2 ds + \frac{EI}{2} \int_0^L \chi^2 ds \quad (10.1)$$

dove  $e$  è la deformazione assiale della linea media, e  $\chi$  è la curvatura della linea media.

Sia  $e$  che  $\chi$  sono legate alle componenti di spostamenti, ed alle loro derivate. Più precisamente, le relazioni deformazioni – spostamenti possono esprimersi nei seguenti modi:

#### 10.1.1. Relazioni deformazioni–spostamenti per archi arbitrari

Se  $\varphi$  è la rotazione della normale alla linea media,  $R$  il raggio iniziale di curvatura, ed  $A$  un parametro tale che  $A d\alpha$  sia l'elemento di lunghezza secondo  $\alpha$ , allora le relazioni deformazioni – spostamenti sono esprimibili, in termini di coordinate curvilinee, come:

$$e = \frac{1}{A} \frac{du_t}{d\alpha} - \frac{u_n}{R} \quad (10.2)$$

$$\varphi = \frac{1}{A} \frac{du_n}{d\alpha} + \frac{u_t}{R} \quad (10.3)$$

$$\chi = \frac{1}{A} \frac{d\varphi}{d\alpha} \quad (10.4)$$

ovvero, in termini di coordinate cartesiane  $(x, y)$ :

$$e = \frac{du_t}{dx} \cos \vartheta - \frac{u_n}{R} \quad (10.5)$$

$$\varphi = \frac{du_n}{dx} \cos \vartheta + \frac{u_t}{R} \quad (10.6)$$

$$\chi = \cos \vartheta \frac{d}{dx} \left( \frac{du_n}{dx} \cos \vartheta + \frac{u_t}{R} \right) \quad (10.7)$$

con:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{dx} \cos \vartheta \quad (10.8)$$

Se infine si vogliono esprimere le relazioni tra le deformazioni e le componenti cartesiane di spostamento  $(u, v)$ , si giunge alle equazioni:

$$e = \cos^2 \vartheta \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dy}{dx} \right) \quad (10.9)$$

$$\varphi = \cos^2 \vartheta \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{dy}{dx} \right) \quad (10.10)$$

$$\chi = \cos^3 \vartheta \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dy}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \vartheta \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{dy}{dx} \right) \right] \quad (10.11)$$

### 10.1.2. Relazioni deformazioni–spostamenti per archi ribassati

Se l'arco è ribassato si può assumere che l'ascissa  $y(x)$  sia tale che:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \ll 1 \quad (10.12)$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (10.13)$$

$$\cos \vartheta \approx 1 \quad (10.14)$$

ed inoltre si suppone lecito trascurare la componente trasversale dello spostamento, rispetto alla componente normale, sia nell'espressione della rotazione che in quella della curvatura.

Le relazioni deformazioni–spostamenti divengono quindi, in coordinate cartesiane, ed in termini di spostamenti normali e tangenziali:

$$e = \frac{du_t}{dx} - u_n \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (10.15)$$

$$\varphi = \frac{du_n}{dx} \quad (10.16)$$

$$\chi = \frac{d^2 u_n}{dx^2} \quad (10.17)$$

In termini di spostamenti  $(u, v)$  le precedenti equazioni divengono:

$$e = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dy}{dx} \quad (10.18)$$

$$\varphi = \frac{dv}{dx} \quad (10.19)$$

$$\chi = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (10.20)$$

Si noti che le equazioni (10.18)–(10.20) sono la particolarizzazione monodimensionale delle equazioni di Marguerre [1938] per i gusci ribassati.

## 10.2. La soluzione esatta per l'elemento circolare

Se l'asse della trave è circolare, di raggio  $R$  costante, è possibile calcolare la matrice di rigidezza esatta [Yamada et al. 1977].

### Deduzione delle equazioni differenziali della linea elastica

Si consideri l'elemento di trave di Figura 10.2, e si imponga l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale, ed alla rotazione.

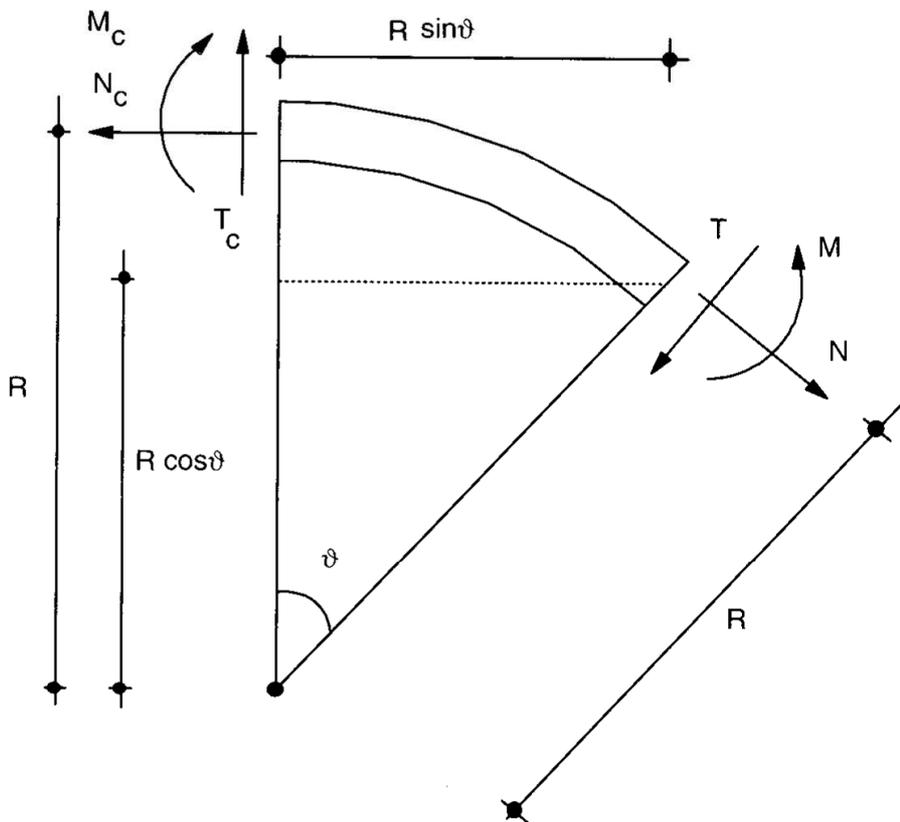


Figura 10.2- Il concio elementare

Si ottiene:

$$N - N_c \cos \vartheta - T_c \sin \vartheta = 0 \quad (10.21)$$

$$T + N_c \sin \vartheta - T_c \cos \vartheta = 0 \quad (10.22)$$

$$M - M_c + N_c R(1 - \cos \vartheta) - T_c R \sin \vartheta = 0 \quad (10.23)$$

Le equazioni (10.2)–(10.4) si scrivono, nel caso di arco circolare ( $A \equiv R$ ):

$$e = \frac{1}{R} \left( \frac{du_t}{d\vartheta} - u_n \right) \quad (10.24)$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{du_n}{d\vartheta} + u_t \right) \quad (10.25)$$

$$\chi = \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2 u_n}{d\vartheta^2} + \frac{du_t}{d\vartheta} \right) \quad (10.26)$$

Introducendo la prima e la terza di queste espressioni nelle relazioni costitutive:

$$e = \frac{N}{EA} \quad \chi = \frac{M}{EI} \quad (10.27)$$

ed usando le equazioni di equilibrio (10.21)–(10.23), si giunge a scrivere:

$$\frac{1}{R} \left( \frac{du_t}{d\vartheta} - u_n \right) = \frac{1}{EA} (N_c \cos \vartheta + T_c \sin \vartheta) \quad (10.28)$$

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2 u_n}{d\vartheta^2} + \frac{du_t}{d\vartheta} \right) = \frac{1}{EI} (M_c - N_c R(1 - \cos \vartheta) + T_c R \sin \vartheta) \quad (10.29)$$

Ricavando  $du_t/d\vartheta$  dalla (10.28), e sostituendolo nella (10.29) si ricava l'equazione differenziale del secondo ordine in  $u_n$ :

$$\frac{d^2 u_n}{d\vartheta^2} + u_n = a \cos \vartheta + b \sin \vartheta + c \quad (10.30)$$

con:

$$a = RN_c \left( -\frac{1}{EA} + \frac{R^2}{EI} \right) \quad (10.31)$$

$$b = RT_c \left( -\frac{1}{EA} + \frac{R^2}{EI} \right) \quad (10.32)$$

$$c = \frac{R^2}{EI} (M_c - RN_c) \quad (10.33)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (10.30) si ottiene facilmente come:

$$u_n(\vartheta) = a_1 \vartheta \sin \vartheta + a_2 \vartheta \cos \vartheta + a_3 \cos \vartheta + a_4 \sin \vartheta + a_5 \quad (10.34)$$

con  $a_1 = a/2$ ,  $a_2 = -b/2$  ed  $a_5 = c$ .

Sostituendo infine questa relazione nella (10.28) si ricava l'equazione differenziale in  $u_t$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_t}{d\vartheta} = \frac{R}{EA} (N_c \cos \vartheta + T_c \sin \vartheta) + a_1 \vartheta \sin \vartheta + a_2 \vartheta \cos \vartheta \\ + a_3 \cos \vartheta + a_4 \sin \vartheta + a_5 \end{aligned} \quad (10.35)$$

Anche questa equazione differenziale può agevolmente risolversi, dando luogo a:

$$\begin{aligned} u_t(\vartheta) = -a_1 \left( \vartheta \cos \vartheta - \frac{1+\xi}{1-\xi} \sin \vartheta \right) + a_2 \left( \vartheta \sin \vartheta + \frac{1+\xi}{1-\xi} \cos \vartheta \right) \\ + a_3 \sin \vartheta - a_4 \cos \vartheta + a_5 \vartheta + a_6 \end{aligned} \quad (10.36)$$

con:

$$\xi = \frac{I}{AR^2} \quad (10.37)$$

**Nota 10.1:** Come si vede, gli spostamenti tangenziali e normali sono legati tra loro dalle sei costanti di integrazione  $a_i$ .

**Nota 10.2:** Nel caso delle travi ad asse curvo gli spostamenti rigidi sono esprimibili in termini trigonometrici, e non in termini polinomiali (come nelle travi ad asse rettilineo).

### Calcolo funzioni di forma

Il vettore delle incognite nodali  $\mathbf{d}$  è fornito da (Figura 10.3):

$$\mathbf{d}^T = \{u_{n1}, u_{t1}, R\varphi_1, u_{n2}, u_{t2}, R\varphi_2\} \quad (10.38)$$

Le condizioni ai limiti si scrivono dunque:

$$u_n(\vartheta = -\beta) = u_{n1} \quad (10.39)$$

$$u_t(\vartheta = -\beta) = u_{t1} \quad (10.40)$$

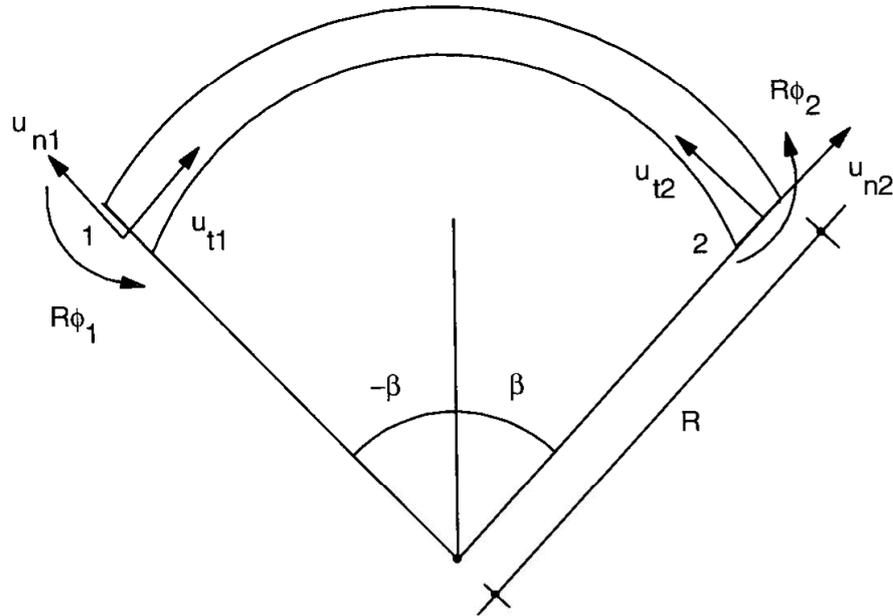


Figura 10.3- Le incognite nodali per l'elemento arco

$$\varphi(\vartheta = -\beta) = \varphi_1 \quad (10.41)$$

$$u_n(\vartheta = \beta) = u_{n2} \quad (10.42)$$

$$u_t(\vartheta = \beta) = u_{t2} \quad (10.43)$$

$$\varphi(\vartheta = \beta) = \varphi_2 \quad (10.44)$$

e si traducono nel sistema  $\mathbf{CA} = \mathbf{d}$ , con:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta \sin \beta & -\beta \cos \beta & \cos \beta & -\sin \beta & 1 & 0 \\ \beta \cos \beta - f \sin \beta & f \cos \beta + \beta \sin \beta & -\sin \beta & -\cos \beta & -\beta & 1 \\ -g \sin \beta & g \cos \beta & 0 & 0 & -\beta & 1 \\ \beta \sin \beta & \beta \cos \beta & \cos \beta & \sin \beta & 1 & 0 \\ -\beta \cos \beta + f \sin \beta & f \cos \beta + \beta \sin \beta & \sin \beta & -\cos \beta & \beta & 1 \\ g \sin \beta & g \cos \beta & 0 & 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

dove:

$$f = \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \quad g = 1 + f \quad (10.46)$$

L'inversione di  $\mathbf{C}$  ed il prodotto  $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$  fornisce le richieste funzioni di forma, con:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \vartheta \sin \vartheta & \vartheta \cos \vartheta & \cos \vartheta & \sin \vartheta & 1 & 0 \\ -\vartheta \cos \vartheta + f \sin \vartheta & \vartheta \sin \vartheta + f \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\cos \vartheta & \vartheta & 1 \end{Bmatrix} \quad (10.47)$$

Le funzioni di forma hanno una espressione abbastanza complessa. A titolo di esempio, si ha:

$$N_{11} = \frac{\vartheta \cos \beta \cos \vartheta - \sin \vartheta (\cos \beta - \beta \sin \beta)}{\sin 2\beta - 2\beta} + \frac{g \sin^2 \beta - \beta \cos \vartheta (\beta \cos \beta + \sin \beta) - \beta \vartheta \sin \vartheta \sin \beta}{g(1 - \cos 2\beta) - \beta \sin 2\beta - 2\beta^2} \quad (10.48)$$

$$N_{12} = \frac{\beta \cos \beta \sin \vartheta - \vartheta \sin \beta \cos \vartheta}{\sin 2\beta - 2\beta} + \frac{(\beta^2 - g) \cos \vartheta \sin \beta + g/2 \sin 2\beta - \beta \vartheta \cos \beta \sin \vartheta}{2\beta^2 - g(1 - \cos 2\beta) + \beta \sin 2\beta} \quad (10.49)$$

### Calcolo della matrice di rigidezza

Le relazioni (10.24) e (10.26) si possono scrivere, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{Bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (10.50)$$

con:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} R(-N_{11} + N'_{21}) & R(-N_{12} + N'_{22}) & \dots & -R(N_{16} + N'_{26}) \\ N''_{11} + N'_{21} & N''_{12} + N'_{22} & \dots & N''_{16} + N'_{26} \end{bmatrix} \quad (10.51)$$

Infine, la matrice di rigidezza è fornita dall'integrale:

$$\mathbf{k}_e = \int_{-\beta}^{\beta} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\vartheta \quad (10.52)$$

con:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (10.53)$$

La matrice  $\mathbf{k}_e$  è riportata per esteso in Yamada et al. [1977]

### 10.3. Le soluzioni approssimate per gli archi rialzati

Come si è visto, gli spostamenti rigidi dell'elemento finito ad asse curvo sono esprimibili in termini trigonometrici, e quindi la scelta di funzioni interpolanti polinomiali conduce comunque ad elementi non conformi. D'altro canto, le funzioni trigonometriche possono essere sviluppate in serie di Taylor, e quindi l'adozione di polinomi interpolanti di ordine abbastanza elevato dovrebbe comunque garantire una riproduzione abbastanza fedele degli spostamenti rigidi.

Nel seguito del paragrafo si illustrano alcune possibili scelte di polinomi interpolanti, in ordine di complessità crescente. La deduzione della matrice di rigidezza e dei carichi nodali equivalenti è uguale per tutti gli elementi proposti, variando solo la difficoltà computazionale, e comunque non ha mai richiesto più di alcuni secondi di calcolo con MATHEMATICA.

#### 10.3.1. L'elemento lineare in $u_t$ e cubico in $u_n$

La scelta del più semplice polinomio interpolante conduce ad assumere una variazione lineare dello spostamento tangenziale  $u_t$  ed una variazione cubica dello spostamento radiale  $u_n$  [Connor et al., 1967]. Se quindi  $s$  è l'ascissa curvilinea misurata a partire dall'estremo di sinistra, si ha:

$$u_t = a_0 + a_1 s \quad (10.54)$$

$$u_n = a_2 + a_3 s + a_4 s^2 + a_5 s^3 \quad (10.55)$$

Corrispondentemente, in ciascun nodo si assumono come gradi di libertà lo spostamento tangenziale  $u_t$ , lo spostamento normale  $u_n$  e la sua derivata prima  $\partial u_n / \partial s$ . A rigore, occorrerebbe considerare come grado di libertà la rotazione della normale:

$$\varphi = \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_t / R, \quad (10.56)$$

in modo da imporre la continuità della rotazione nei nodi. Tuttavia, l'elemento singolo è localmente ribassato, e quindi l'errore che si commette è molto piccolo.

L'imposizione delle condizioni ai limiti porta alla matrice  $\mathbf{C}$  di ordine 6:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

avendo scelto il vettore dei gradi di libertà:

$$\mathbf{d}^T = \{u_{t1}, u_{n1}, u'_{n1}, u_{t2}, u_{n2}, u'_{n2}\} \quad (10.58)$$

L'inversione di  $\mathbf{C}$  ed il prodotto  $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$ , con:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{array} \right\} \quad (10.59)$$

conduce alla matrice delle funzioni di forma:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 - \frac{s}{L} & 0 & 0 & \frac{s}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\frac{s^2}{L^2} + 2\frac{s^3}{L^3} & s - 2\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} & 0 & 3\frac{s^2}{L^2} - 2\frac{s^3}{L^3} & -2\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \end{array} \right\} \quad (10.60)$$

Si noti che queste funzioni di forma sono le stesse già ottenute per l'elemento asta e l'elemento trave rettilinea. La matrice di rigidezza elementare si ottiene nella maniera usuale, ed è riportata, sotto forma di subroutine, in Appendice 10.1.

Poichè i polinomi interpolanti sono stati troncati al livello più basso, sarà logico attendersi, per quanto detto prima, un comportamento mediocre, da parte di questo elemento finito.

Si consideri allora l'esempio classico di Figura 10.4, ossia il caso dell'arco semicircolare di raggio 17 pollici, soggetto alla forza  $P$  di 2000 libbre concentrata in sommità. Una semplice applicazione del principio delle forze virtuali consente di ricavare, sfruttando la simmetria dello schema, la reazione orizzontale e la coppia reagente all'incastro:

$$H = \frac{8R^2A(1 - \pi/4) - 2\pi I}{R^2A(\pi^2 - 8) + \pi^2 I} P \quad (10.61)$$

$$\mathcal{M} = \frac{2R}{\pi} \left[ P - \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) H \right] \quad (10.62)$$

Lo spostamento verticale del punto di applicazione della forza può calcolarsi allo stesso modo, ottenendo:

$$v_P = \frac{R^2}{EI} \left( \frac{PR\pi}{4} - \frac{HR}{2} - \mathcal{M} \right) + \frac{R}{EA} \left( \frac{P\pi}{4} + \frac{H}{2} \right) \quad (10.63)$$

Due casi sono stati esaminati in dettaglio in Dawe [1976] ed in Yang [1986], rappresentativi di un arco rialzato e spesso, e di un arco rialzato e sottile, rispettivamente. Nel primo caso la sezione è quadrata, con lato  $t = 1$  pollice, nel secondo invece il lato è 0.1 pollice. In ambedue i casi il modulo di Young è pari a  $10^8$  libbre su pollici al quadrato.

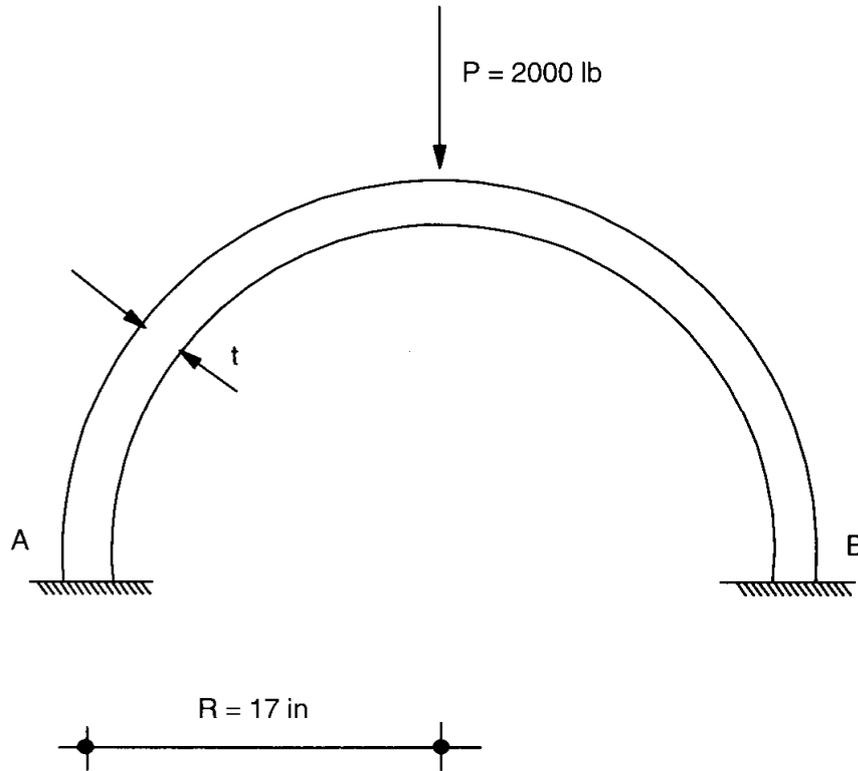


Figura 10.4- Arco semicircolare con forza in sommità

I risultati esatti sono:

Arco spesso:  $H = 915.9137lb.$ ,  $\mathcal{M} = 5164.5122lb. \times in.$ ,  $v_c = 0.01415238126in.$

Arco sottile:  $H = 918.2533lb.$ ,  $\mathcal{M} = 5150.0594lb \times in.$ ,  $v_c = 137.546827in.$

Nella Tabella 10.1 sono riportati i valori dello spostamento in sommità e della reazione orizzontale per diversi livelli di discretizzazione; tra parentesi, è anche indicata la banda della matrice di rigidezza.

Elemento lineare - cubico			
Elementi	d.o.f.	Spostamento	Reazione
2	4(3)	0.0010061	594.314
10	28(5)	0.00908531	780.150
20	58(5)	0.0123729	868.988
30	88(5)	0.0132971	893.429
60	178(5)	0.0139276	910.014
90	268(5)	0.0140516	913.266
180	538(5)	0.0141271	915.246
360	1078(5)	0.0141460	915.743
10	28(5)	3.01958	537.097
30	88(5)	20.2220	604.988
60	178(5)	53.8416	700.620
90	268(5)	80.5557	770.743
180	538(5)	116.556	863.986
360	1078(5)	131.591	902.853

Tabella 10.1- Arco semicircolare rialzato, sottile e spesso

In Figura 10.5 e Figura 10.6 sono riportate le curve di convergenza dello spostamento in sommità per ambedue i casi descritti.

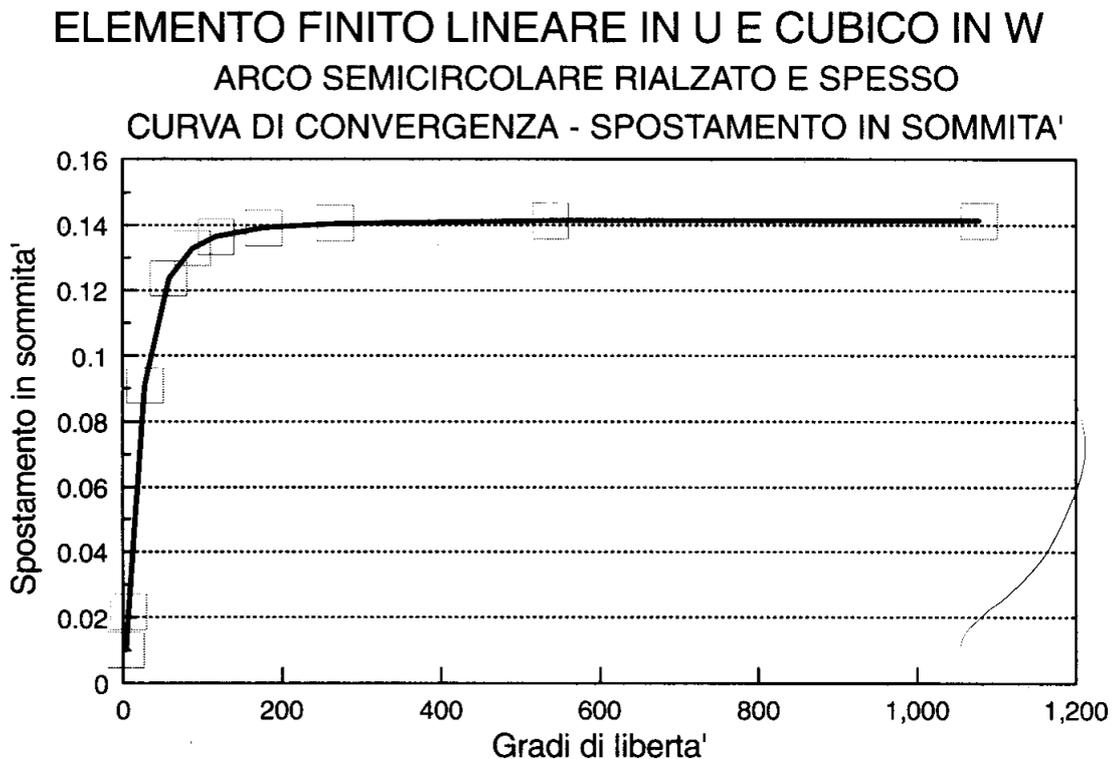


Figura 10.5- Curva di convergenza per arco rialzato spesso

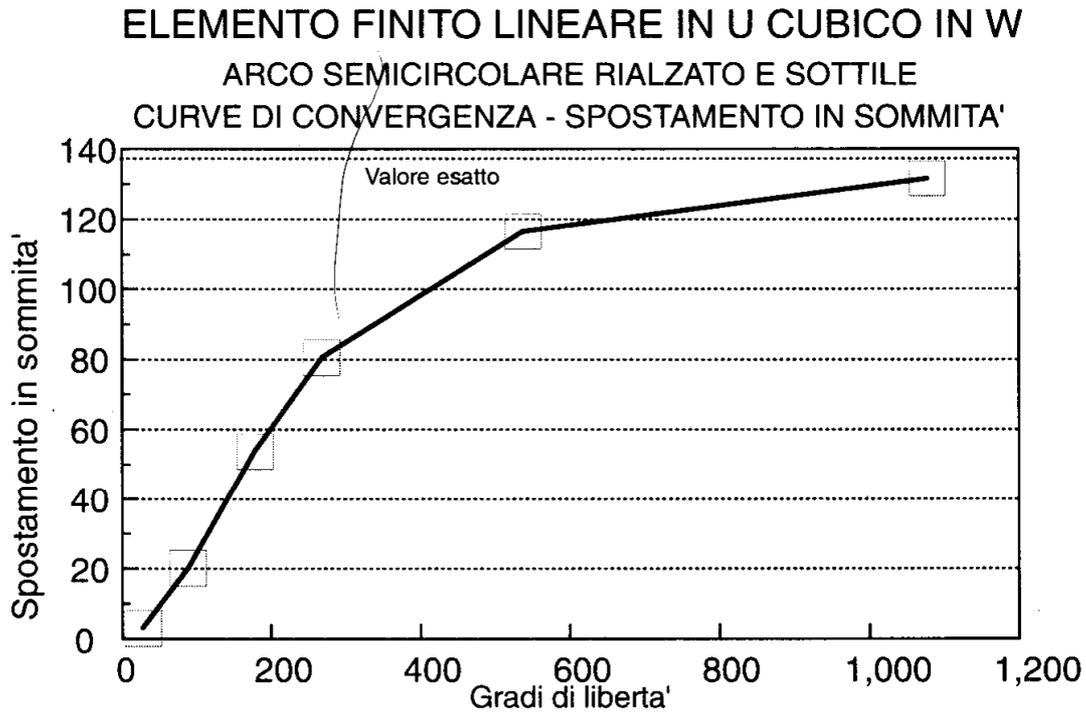


Figura 10.6- Curva di convergenza per arco rialzato sottile

**Nota 10.3:** Si può osservare subito che:

1. il comportamento dell'elemento finito in esame non è soddisfacente, sia per arco spesso che per arco sottile,
2. il comportamento è comunque migliore per arco spesso che non per arco sottile.

Nell'ultimo paragrafo, dedicato ai problemi di locking, si spiegherà il motivo di tale comportamento, e si proporranno alcune modifiche in grado di migliorare le caratteristiche di questo elemento.

### 10.3.2. Elemento bi-cubico [Bogner et al. 1967, Yang 1986]

Se si assume che entrambe le componenti di spostamento varino con la stessa legge (in questo caso, cubica), allora è possibile semplificare il calcolo delle funzioni di forma, tenendo conto che esse si ripeteranno sia per  $u_n$  che per  $u_t$ . Nel caso in esame, si avrà:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{array} \right\} \quad (10.64)$$

e le  $N_i$  sono le usuali funzioni di forma cubiche della trave rettilinea. La procedura standard porta alla matrice di rigidezza di Appendice 10.2.

In Tabella 10.2 sono riprodotti lo spostamento in sommità e la reazione orizzontale per i due archi semicircolari già descritti in precedenza.

Elemento cubico – cubico			
Elementi	d.o.f.	Spostamento	Reazione
2	7(5)	0.0114635	925.623
3	11(7)	0.0137155	917.509
10	39(7)	0.0141507	915.922
20	79(7)	0.0141523	915.913
30	119(7)	0.0141524	915.913
60	239(7)	0.0141524	915.913
90	359(7)	0.0141524	915.913
2	7(5)	7.19410	993.097
3	11(7)	80.1146	944.448
10	39(7)	137.1157	918.416
20	79(7)	137.5380	918.257
30	119(7)	131.5468	918.253
60	239(7)	131.5468	918.253
90	359(7)	131.5468	918.253

Tabella 10.2- Arco semicircolare rialzato, sottile e spesso

**Nota 10.4:** Come può osservarsi, il comportamento di questo elemento è migliore dell'elemento lineare-cubico, ma ancora non può definirsi soddisfacente.

### 10.3.3 Elemento finito cubico in $u_t$ e quintico in $u_n$ [Cowper et al. 1970]

I polinomi interpolanti sono:

$$u_t = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (10.65)$$

$$u_n = a_4 + a_5s + a_6s^2 + a_7s^3 + a_8s^4 + a_9s^5 \quad (10.66)$$

L'elemento finito ha 10 gradi di libertà, ed in ogni nodo possono assumersi come incognite  $u_t$ ,  $\partial u_t/\partial s$ ,  $u_n$ ,  $\partial u_n/\partial s$ ,  $\partial^2 u_n/\partial s^2$ . Anche in questo caso sarebbe più corretto assumere come incognite nodali lo spostamento, la rotazione  $\varphi$  e la curvatura  $\chi$ , ma il carattere locale di arco ribassato rende piccola la incongruenza nodale che si introduce.

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 & 0 & N_{16} & N_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{23} & N_{24} & N_{25} & 0 & 0 & N_{28} & N_{29} & N_{210} \end{array} \right\} \quad (10.67)$$

dove le componenti  $N_{1i}$  sono le usuali funzioni cubiche, e le componenti  $N_{2i}$  sono fornite dalle (9.67)–(9.72).

La matrice di rigidezza risultante è riportata in Figura 10.7, mentre l'usuale quadro riassuntivo per l'arco semicircolare spesso e sottile, riportato in Tabella 10.3, evidenzia un comportamento peggiore di quello dell'elemento bi – cubico.

Elemento cubico - quintico			
Elementi	d.o.f.	Spostamento	Reazione
2	10(7)	0.0046858	357.949
3	15(9)	0.0129690	982.619
10	50(9)	0.0140966	915.944
20	100(9)	0.0141486	915.907
30	150(9)	0.0141516	915.912
60	300(9)	0.0141523	915.913
90	450(9)	0.0141523	915.913
2	10(7)	15.6009	746.300
3	15(9)	12.8398	420.105
10	50(9)	197.4713	1232.21
20	100(9)	135.2327	921.270
30	150(9)	136.9146	918.420
60	300(9)	137.5007	918.246
90	450(9)	137.5375	918.251

Tabella 10.3- Arco semicircolare rialzato, sottile e spesso

Come si vedrà, ciò dipende dal fatto che la componente  $u_t$  è stata interpolata con un polinomio di ordine inferiore del polinomio interpolante di  $u_n$ .

#### 10.3.4. Elemento quintico in $u_t$ e cubico in $u_n$ . [Argyris 1968, Dupuis 1970]

In questo caso i polinomi interpolanti sono:

$$u_t = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \quad (10.68)$$

$$u_n = a_6 + a_7s + a_8s^2 + a_9s^3 \quad (10.69)$$

l'elemento finito ha 10 gradi di libertà, ed in ogni nodo possono assumersi come incognite  $u_t$ ,  $\partial u_t/\partial s$ ,  $\partial^2 u_t/\partial s^2$ ,  $u_n$ ,  $\partial u_n/\partial s$ .

La matrice di rigidezza è riportata in Appendice 10.3, mentre dalla Tabella 10.4 può osservarsi che questo elemento è nettamente migliore dei precedenti.

Elemento quintico – cubico			
Elementi	d.o.f.	Spostamento	Reazione
2	10(7)	0.0133968	920.220
3	15(9)	0.0140030	916.758
10	50(9)	0.0141511	915.920
20	100(9)	0.0141523	915.914
30	150(9)	0.0141524	915.913
60	300(9)	0.0141524	915.913
2	10(7)	129.975	922.576
3	15(9)	136.050	919.101
10	50(9)	137.535	918.260
20	100(9)	137.546	918.254
30	150(9)	137.547	918.253
60	300(9)	137.547	918.253

Tabella 10.4- Arco semicircolare rialzato, sottile e spesso

### 10.3.5. Elemento bi-quintico [Dawe 1974a, 1974b, 1976]

I polinomi interpolanti sono:

$$u_t = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \quad (10.70)$$

$$u_n = a_6 + a_7s + a_8s^2 + a_9s^3 + a_{10}s^4 + a_{11}s^5 \quad (10.71)$$

l'elemento finito ha 12 gradi di libertà, ed in ogni nodo possono assumersi come incognite  $u_t$ ,  $\partial u_t/\partial s$ ,  $\partial^2 u_n/\partial s^2$ ,  $u_n$ ,  $\partial u_n/\partial s$ ,  $\partial^2 u_n/\partial s^2$ .

Poichè i polinomi interpolanti sono gli stessi per ambedue le componenti di spostamento, è conveniente organizzare il vettore dei gradi di libertà nodali come:

$$\mathbf{d}^T = \{u_{t1}, u'_{t1}, u''_{t1}, u_{t2}, u'_{t2}, u''_{t2}, u_{n1}, u'_{n1}, u''_{n1}, u_{n2}, u'_{n2}, u''_{n2}\} \quad (10.72)$$

Con tale scelta, la matrice  $\mathbf{C}$  si viene a partizionare in due sottomatrici di ordine 6:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \quad (10.73)$$

con:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6L & 12L^2 & 20L^3 \end{bmatrix} \quad (10.74)$$

e quindi l'inversione è notevolmente facilitata.

La matrice delle funzioni di forma è:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{Bmatrix} \quad (10.75)$$

e le  $N_i$  sono fornite dalle (9.67)–(9.72).

La matrice di rigidezza è consegnata in Appendice 10.4, mentre l'usuale riassunto di risultati per l'arco semicircolare è riportato in Tabella 10.5. Il comportamento di questo elemento è indubbiamente eccellente, e giustifica il suo utilizzo massiccio nell'ambito della teoria degli archi

Elemento quintico – quintico			
Elementi	d.o.f.	Spostamento	Reazione
2	13(9)	0.01415225	915.914
3	19(11)	0.01415238	915.914
4	25(11)	0.01415238	915.914
5	31(11)	0.01415238	915.914
2	13(9)	137.5267	918.261
3	19(11)	137.5458	918.261
4	25(11)	137.5468	918.261
5	31(11)	137.5468	918.261

Tabella 10.5- Arco semicircolare rialzato, sottile e spesso

### 10.3.6. Elemento bi-septico

Avendo a disposizione un programma di calcolo simbolico altamente efficiente, si può facilmente elevare il grado dei polinomi interpolanti. Occorre però sempre tenere ben presente i problemi che possono derivare dall'eccesso di continuità nei nodi. Ad esempio, nel caso precedente si è imposta la continuità degli spostamenti e delle prime due derivate, e di conseguenza l'elemento finito non sarà in grado di fornire buoni risultati in tutti i casi in cui vi è discontinuità in qualcuna di queste quantità.

Nel caso in esame occorre aggiungere anche la derivata terza, tra le incognite nodali, e la matrice di rigidezza, riportata in Appendice 10.5, avrà dimensioni  $(16 \times 16)$ . Per i due esempi già studiati in precedenza, i risultati forniti da questo elemento sono precisi anche se si usa una discretizzazione in due soli elementi finiti.

## 10.4. Le integrazioni numeriche

Nel processo di deduzione delle matrici di rigidezza e dei carichi nodali equivalenti, la difficoltà maggiore risiede indubbiamente nei processi di integrazione. Anche

se questa difficoltà è attualmente superabile adoperando un programma di calcolo simbolico, esistono comunque casi in cui l'integrando è tale da non poterlo trattare analiticamente. È questo il caso degli elementi a sezione non costante, o più in generale, degli elementi parametrici, che si introdurranno nel seguito. Inoltre, si vedrà che talvolta è preferibile usare una tecnica di integrazione numerica imprecisa, invece di ricercare l'integrale esatto.

È quindi necessario ricorrere a tecniche di integrazione numerica, e poichè il processo di integrazione rappresenta il punto centrale dell'intera deduzione della matrice di rigidezza e del vettore dei carichi nodali equivalenti, sembra opportuno usare i metodi più raffinati del calcolo numerico.

Si voglia allora calcolare numericamente l'integrale:

$$I = \int_a^b f(z) dz \quad (10.76)$$

con  $f(z)$  funzione integrabile di classe  $C^\infty$ .

Qualunque sia il metodo adoperato, si sostituisce l'integrale con una sommatoria estesa ad  $N$  termini:

$$I = \sum_{i=1}^N C_{ni} f_{ni} \quad (10.77)$$

dove i coefficienti  $C_{ni}$  sono definiti *pesi*, ed i valori  $f_{ni}$  si ottengono valutando la funzione  $f(z)$  in punti opportuni. Se questi punti di campionamento sono predeterminati (usualmente equidistanziati), allora il metodo di quadratura appartiene alla classe dei *metodi alla Newton-Cotes*. Se invece i punti di campionamento sono incogniti, si è in presenza di un *metodo alla Gauss*.

Il metodo di Newton-Cotes determina i pesi in modo da integrare esattamente un polinomio di ordine  $N - 1$ , o minore, mentre il metodo di Gauss determina i pesi ed i punti di campionamento in modo da integrare esattamente un qualsiasi polinomio di ordine  $2N - 1$ .

#### 10.4.1. Metodo di Newton-Cotes

Come detto, secondo questo metodo l'intervallo  $[a, b]$  è partizionato uniformemente in intervalli di ampiezza  $h = (b - a)/N$ . Per ottenere i pesi  $C_{ni}$  si sostituisce la funzione  $f(z)$  con un polinomio interpolante  $P(z)$ , e l'integrale:

$$I' = \int_a^b P(z) dz \quad (10.78)$$

è considerato l'approssimazione dell'integrale  $I$ . Se  $N$  sono i punti di campionamento, sia  $P_N$  il rispettivo polinomio interpolante gli  $N$  punti di ascissa:

$$z_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (10.79)$$

La formula di interpolazione di Lagrange fornisce:

$$P_N(z) = \sum_{i=1}^N f_{Ni} L_{Ni}(z) \quad (10.80)$$

con:

$$L_{Ni}(z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{z - z_k}{z_i - z_k} \quad (10.81)$$

Introducendo la nuova variabile  $t$ , tale che  $z = a + th$ , i polinomi di Lagrange divengono:

$$M_{Ni}(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{t - k}{i - k} \quad (10.82)$$

L'integrazione di  $P$  fornisce allora la *formula di Newton-Cotes*:

$$\begin{aligned} \int_a^b P(z) dz &= \sum_{i=0}^N f_{Ni} \int_a^b L_{Ni}(z) dz = h \sum_{i=0}^N f_{Ni} \int_0^N M_{Ni}(t) dt \\ &= h \sum_{i=0}^N f_{Ni} C_{Ni} \end{aligned} \quad (10.83)$$

avendo definito il *peso*:

$$C_{Ni} = \int_0^N M_{Ni}(t) dt \quad (10.84)$$

**Nota 10.5:** Per  $N = 1$  si ottiene la *regola trapezoidale*, esatta solo per funzioni lineari, ed i due pesi  $C_1$  e  $C_2$  hanno valore 0.5.

**Nota 10.6:** Per  $N = 2$  si ottiene la *regola di Simpson*, esatta per polinomi lineari e quadratici, ed i pesi sono calcolabili come:

$$C_{20} = \int_0^2 \frac{t-1}{-1} \frac{t-2}{-2} dt = \frac{1}{3} \quad (10.85)$$

$$C_{21} = \int_0^2 \frac{t-0}{1-0} \frac{t-2}{1-2} dt = \frac{4}{3} \quad (10.86)$$

$$C_{22} = \int_0^2 \frac{t-0}{2-0} \frac{t-1}{2-1} dt = \frac{1}{3} \quad (10.87)$$

**Nota 10.7:** Le regole di ordine superiore, per  $N = 3$  (*regola dei 3/8*),  $N = 4$  (*regola di Milne*),  $N = 5$  (*regola di Stoer*) ed  $N = 6$  (*regola di Weddle*) forniscono risultati via via più precisi, a prezzo di un incremento nel numero di punti di campionamento e di una complessità crescente dell'espressione dei pesi.

#### 10.4.2. Metodo di Gauss

Per introdurre coerentemente le tecniche di integrazione gaussiana, occorre fornire preventivamente alcune nozioni circa i *polinomi ortogonali* [Bulirsch et al. 1980].

Sia  $P'$  l'insieme dei polinomi reali di ordine  $i$ , normalizzati in modo da rendere unitario il coefficiente del primo termine:

$$\Pi'_i = \{p | p(z) = z^i + a_1 z^{i-1} + \dots + a_i\} \quad (10.88)$$

e sia:

$$(f, g) = \int_a^b f(z)g(z)dz \quad (10.89)$$

il prodotto scalare tra i due polinomi  $f$  e  $g$ . Se tale prodotto scalare è nullo, i due polinomi si dicono *ortogonali*.

Secondo la tecnica gaussiana, si considerano regole di integrazione del tipo:

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=1}^N f(z_{Ni})W_{Ni} \quad (10.90)$$

dove sono incogniti sia i pesi  $W_{Ni}$  che le ascisse di campionamento  $z_{Ni}$ . In analogia a quanto fatto per le regole alla Newton-Cotes, si usa un polinomio interpolante del tipo:

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i p_i(z) \quad (10.91)$$

con  $p_i(z)$  polinomi ortogonali.

È possibile dimostrare il:

**Teorema 10.1:** - Siano  $z_{N1}, \dots, z_{NN}$  le radici dell'  $N$ -mo polinomio ortogonale  $p_N(z)$ , e sia  $W_{N1}, W_{N2}, \dots, W_{NN}$  la soluzione del sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^N p_k(z_{Ni})W_{Ni} = \begin{cases} (p_0, p_0) & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k=1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (10.92)$$

Allora i pesi  $W_{Ni}$  sono positivi, ed è:

$$\int_a^b p(z)dz = \sum_{i=1}^N p(z_{Ni})W_{Ni} \quad (10.93)$$

per qualsiasi polinomio di ordine  $2N - 1$ . I numeri  $W_{Ni}$  si chiamano *pesi*.

Stabilita teoricamente la soluzione del problema, occorre determinare praticamente i pesi e le ascisse di campionamento, in un modo che sia di interesse generale. Si consideri allora l'intervallo naturale  $[-1, 1]$ , e si vogliano dedurre i pesi e le ascisse di campionamento per questo intervallo campione. Una volta ottenute queste quantità per l'intervallo  $[-1, 1]$ , sarà possibile dedurre da esse le quantità omologhe per un generico intervallo  $[a, b]$ , come

$$\frac{b-a}{2}W_{Ni} \quad (10.94)$$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z_{Ni} \quad (10.95)$$

rispettivamente.

Nel caso dell'intervallo  $[-1, 1]$  il problema è stato risolto da Gauss, i polinomi ortogonali  $p_k(z)$  sono noti come *polinomi di Legendre*:

$$p_k(z) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dz^k} (z^2 - 1)^k \quad k=0,1 \dots \quad (10.96)$$

e quindi occorre calcolare gli zeri dei polinomi di Legendre, per ottenere le ascisse di campionamento. Per ottenere poi i pesi, bisogna risolvere il sistema (10.92).

**Esempio 10.1:** - Nel caso  $N = 1$  la radice del polinomio di Legendre di ordine 1,  $p_1(z) = z$  è immediatamente calcolabile:

$$z_{11} = 0 \quad (10.97)$$

mentre il sistema (10.92) si specializza nell'unica equazione:

$$p_0(z_{11})W_{11} = (p_0, p_0) \quad (10.98)$$

Ora  $p_0(z) = 1$ , e quindi  $(p_0, p_0) = 2$ , ed infine il peso è pari a 2.

**Esempio 10.2:** - Nel caso  $N = 2$  si devono anzitutto calcolare le radici del polinomio di Legendre di ordine 2:

$$p_2(z) = z^2 - \frac{1}{3} = 0 \quad (10.99)$$

ottenendo i due punti di campionamento:

$$z_{21} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad z_{22} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (10.100)$$

e poi risolvere il sistema (10.92), che diviene:

$$p_0(z_{21})W_{21} + p_0(z_{22})W_{22} = (p_0, p_0) \quad (10.101)$$

$$p_1(z_{21})W_{21} + p_1(z_{22})W_{22} = 0 \quad (10.102)$$

ossia:

$$W_{21} + W_{22} = 2 \quad (10.103)$$

$$-\sqrt{\frac{1}{3}}W_{21} + \sqrt{\frac{1}{3}}W_{22} = 0 \quad (10.104)$$

ed i pesi dell'integrazione gaussiana di ordine due sono ambedue unitari.

**Esempio 10.3:** - Nel caso  $N = 3$  occorre le radici del polinomio di Legendre di ordine 3:

$$p_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) = 0 \quad (10.105)$$

ottenendo i tre punti di campionamento:

$$z_{31} = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad z_{32} = 0 \quad z_{33} = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (10.106)$$

e poi risolvere il sistema (10.92), che diviene:

$$p_0(z_{31})W_{31} + p_0(z_{32})W_{32} + p_0(z_{33})W_{33} = (p_0, p_0) \quad (10.107)$$

$$p_1(z_{31})W_{31} + p_1(z_{32})W_{32} + p_1(z_{33})W_{33} = 0 \quad (10.108)$$

$$p_2(z_{31})W_{31} + p_2(z_{32})W_{32} + p_2(z_{33})W_{33} = 0 \quad (10.109)$$

Ora:

$$p_0(z) = 1 \quad p_1(z) = z \quad p_2(z) = z^2 - \frac{1}{3} \quad (p_0, p_0) = \int_{-1}^1 dz = 2 \quad (10.110)$$

e quindi il sistema diviene:

$$W_{31} + W_{32} + W_{33} = 2 \quad (10.111)$$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}W_{31} + \sqrt{\frac{3}{5}}W_{33} = 0 \quad (10.112)$$

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)W_{31} - \frac{1}{3}W_{32} + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)W_{33} = 0 \quad (10.113)$$

I pesi sono quindi, in una regola gaussiana di ordine 3:

$$W_{31} = W_{33} = \frac{5}{9} \quad W_{32} = \frac{8}{9} \quad (10.114)$$

Come si vede, la difficoltà maggiore consiste nel calcolare gli zeri del polinomio di Legendre di ordine  $n$ .

**Nota 10.8:** Un problema importante, nell'uso delle tecniche di integrazione alla Gauss, è la scelta del numero di punti di campionamento. Scegliendo una regola di ordine elevato, le matrici saranno calcolate con esattezza, ma l'impegno computazionale crescerà sensibilmente, mentre una scelta di una regola gaussiana di ordine troppo basso può portare a grosse inesattezze, ed anche a matrici di rigidità singolari. Tutto ciò ha una importanza molto maggiore nello studio degli elementi bi - dimensionali o tri - dimensionali; d'altro canto, è noto che il metodo di discretizzazione agli elementi finiti rende la struttura più rigida del vero, e quindi una tecnica di integrazione imprecisa potrebbe addirittura fornire risultati più soddisfacenti di una integrazione perfetta.

## 10.5. Il problema del membrane locking ed i campi consistenti

Come si è visto, esiste una netta differenza di comportamento tra gli elementi finiti LC (lineare in  $u_t$ , cubico in  $u_n$ ), CC e CQ, da un lato, e gli elementi QC, QQ ed SS dall'altro. La convergenza dei risultati è, per gli elementi del primo gruppo, molto più lenta della convergenza degli elementi del secondo gruppo.

Come già accennato, si è pensato che ciò fosse dovuto al fatto che gli spostamenti rigidi (esprimibili in termini di funzioni sinusoidali) fossero mal riprodotti da elementi i cui polinomi interpolanti sono di ordine basso. In tale ottica sono stati proposti alcuni elementi in cui i termini di spostamento rigido erano esplicitamente inclusi nei polinomi interpolanti. Ad esempio si può avere [Cantin et al. 1968, Sabir et al. 1972]:

$$u_t = c_1 \cos \frac{s}{R} - c_2 \sin \frac{s}{R} + c_3 \cos \frac{L}{R} \cos \frac{s}{R} + a_1 + a_2 s \quad (10.115)$$

$$u_n = c_1 \sin \frac{s}{R} + c_2 \cos \frac{s}{R} + c_3 \cos \frac{L}{R} \sin \frac{s}{R} + a_3 s_2 + a_4 s_3 \quad (10.116)$$

oppure [Ashwell et al. 1976]:

$$u_t = -c_1 \sin \frac{s}{R} + c_2 \sin \frac{s}{R} + a_1 + a_2 s + \frac{1}{2} a_3 s^2 \quad (10.117)$$

$$u_n = c_1 \cos \frac{s}{R} + c_2 \sin \frac{s}{R} + a_4 - a_3 R s \quad (10.118)$$

Come provato da Prathap [1985], l'elemento basato sulle equazioni (10.115)–(10.116) appartiene nettamente al primo gruppo, mentre il secondo ha proprietà che lo pongono nella seconda fascia di elementi (a più veloce convergenza).

Per comprendere meglio questa differenza di comportamento, si calcoli la dilatazione assiale  $e$  per un elemento LC. Si ha:

$$e = \frac{du_t}{ds} - \frac{u_n}{R} = (a_1 - \frac{a_2}{R}) - \frac{a_3}{R} s - \frac{a_4}{R} s^2 - \frac{a_5}{R} s^3 \quad (10.119)$$

e quindi, nel caso limite di arco molto sottile, si dovrà avere:

$$a_1 - \frac{a_2}{R} = 0 \quad a_3 = a_4 = a_5 = 0 \quad (10.120)$$

La prima condizione implica la condizione di inestensibilità assiale:

$$\left( \frac{du_t}{ds} \right) (s^*) - \frac{u_n(s^*)}{R} = 0 \quad (10.121)$$

dove  $s^*$  è una ascissa opportuna dell'arco.

Le altre tre condizioni impongono che sia:

$$\frac{du_n}{ds}(0) = \frac{d^2 u_n}{ds^2}(0) = \frac{d^3 u_n}{ds^3}(0) = 0 \quad (10.122)$$

e questo ovviamente vincola la struttura in modo indesiderato.

Analogamente, se si calcola la dilatazione assiale dell'elemento CC, si ottiene:

$$e = \left( a_1 - \frac{a_4}{R} \right) + \left( 2a_2 - \frac{a_5}{R} \right) s + \left( 3a_3 - \frac{a_6}{R} \right) s^2 - \frac{a_6}{R} s^3 \quad (10.123)$$

Nel caso limite di arco molto sottile l'ultimo termine detterà una condizione di vincolo spuria:

$$a_6 = 0 \Rightarrow \frac{d^3 u_n}{ds^3}(0) = 0 \quad (10.124)$$

Tuttavia è facilmente intuibile che la sola condizione sulla derivata terza influenzerà la convergenza meno di quanto non la influenzino le condizioni sulla derivata

prima e seconda, e si spiega quindi il miglior comportamento dell'elemento CC rispetto all'elemento LC. Risultati ancora migliori fornirà l'elemento QQ, che avrà un vincolo spurio sulla derivata quinta, mentre l'elemento CQ si comporta, da questo punto di vista, come l'elemento CC.

È anche immediato riconoscere che condizioni di vincolo spurie sorgeranno ogni qualvolta il polinomio interpolante della funzione  $u_t$  sia di grado minore o uguale al grado del polinomio interpolante scelto per  $u_n$ . Pertanto si diranno *campi di spostamento consistenti* i campi di spostamento del tipo:

$$u_t = a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m \quad (10.125)$$

$$u_n = b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n \quad (10.126)$$

con  $m > n$ , ed *inconsistenti* i campi per cui  $m \leq n$ . Inoltre, il fenomeno dell'insorgenza di condizioni di vincolo spurie, dovuto all'adozione di campi di spostamento inconsistenti, si chiamerà *locking di membrana* [Stolarski et al. 1971, Prathap 1985].

Una volta compresa l'importanza della scelta di un campo di spostamenti consistente, si può senza dubbio abbandonare gli elementi 'spuri'; si può anche però cercare di rimuovere i vincoli indesiderati, come si illustrerà — seguendo Prathap [1985] — per l'elemento LC.

### Modifiche all'elemento lineare-cubico

L'energia elastica immagazzinata in un elemento di raggio  $R$  e luce  $L$ , è pari a:

$$L = L_e + L_f = EA \int_0^L e^2 ds + EI \int_0^L \chi^2 ds \quad (10.127)$$

Sostituendo le (10.54)–(10.55) nelle (10.2) e (10.4) si ha:

$$e = a_1 - \frac{a_2}{R} - \frac{a_3}{R}s - \frac{a_4}{R}s^2 - \frac{a_5}{R}s^3 \quad (10.128)$$

$$\chi = \frac{a_1}{R} + 2a_4 + 6a_5s \quad (10.129)$$

e quindi le energie elastiche flessionali ed estensionali divengono, rispettivamente:

$$L_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{a_1}{R} + 2a_4 + 6a_5s \right)^2 ds \quad (10.130)$$

$$L_e = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( a_1 - \frac{a_2}{R} - \frac{a_3}{R}s - \frac{a_4}{R}s^2 - \frac{a_5}{R}s^3 \right)^2 ds \quad (10.131)$$

Integrando analiticamente si ottiene l'energia elastica flessionale:

$$L_f = \frac{EI}{2} \left[ \left( \frac{a_1}{R} + 2a_4 \right)^2 L + 12a_5^2 L^3 + 6 \left( \frac{a_1}{R} - 2a_4 \right) a_5 L^2 \right] \quad (10.132)$$

e l'energia elastica estensionale:

$$\begin{aligned} L_e = \frac{EA}{2} & \left[ \left( a_1 - \frac{a_2}{R} \right)^2 L - \left( a_1 - \frac{a_2}{R} \right) \frac{a_3}{R} L^2 \right. \\ & + \left( \frac{a_3^2}{R^2} - 2 \left( a_1 + \frac{a_2}{R} \right) \frac{a_4}{R} \right) \frac{L^3}{3} + \left( \frac{a_3 a_4}{R^2} - \left( a_1 - \frac{a_2}{R} \right) \frac{a_5}{R} \right) \frac{L^4}{2} \\ & \left. + \left( \frac{a_4^2}{R^2} + \frac{2a_3 a_5}{R^2} \right) \frac{L^5}{5} + \frac{a_4 a_5}{R^2} \frac{L^6}{3} + \frac{a_5^2}{R^2} \frac{L^7}{7} \right] \quad (10.133) \end{aligned}$$

Nel caso limite di arco molto sottile, l'energia elastica estensionale dovrà tendere a zero, e quindi si ritrovano le condizioni (10.120). È ora tuttavia possibile eliminare le tre condizioni spurie, osservando che integrando l'energia elastica estensionale numericamente, alla Gauss, ed usando una regola di integrazione di ordine 1, si ottiene:

$$L_e = \frac{EA}{2} 2 \left( a_1 - \frac{a_2}{R} \right)^2 \quad (10.134)$$

poichè l'ascissa di campionamento è  $s = 0$ , ed il peso relativo è 2. Ogni altra regola gaussiana introdurrà invece un vincolo spurio. Questo risultato giustifica l'uso delle tecniche cosiddette di *integrazione selettive*, in cui alcuni termini energetici (in questo caso l'energia elastica estensionale) vengono integrati numericamente con regole gaussiane di ordine ridotto.

## 10.6. Note bibliografiche

L'insieme di elementi finiti descritti nel capitolo rappresenta solo una parte degli elementi finiti sviluppati per il calcolo delle travi ad asse curvo. Per ulteriori esempi si può consultare Sabir e Lock [1972], Ashwell e Sabir [1971, 1974], Ashwell et al. [1971], oppure, per lo studio più specifico degli archi da ponte, Sabir [1976] e Sabir ed Ashwell [1971]. Per un elemento finito ad asse non circolare di ordine quintico, si veda Papangelis e Trahair [1986], mentre le note di Dawe [1971a, 1971b, 1972, 1974a, 1974b] sono fondamentali, anche a scopo di paragone. Altri elementi di ordine superiore sono descritti in Davis et al. [1972b] ed Ahmed [1971].

Il problema dei moti rigidi e della loro rappresentazione è sviscerato in Dawe [1972], Mebane e Stricklin [1971], Haisler e Stricklin [1967], Kikucki [1975, 1982] e Fried [1973].

Ulteriori informazioni sulla consistenza/inconsistenza dei campi possono reperirsi in Prathap [1984, 1985], Prathap e Ramesh Babu [1986a, 1986b, 1987], Ramesh Babu e Prathap [1986], Balasubramanian e Prathap [1989], Balasubramanian e Subramanian [1985], mentre l'alleviamento del locking tramite integrazione ridotta è descritto in Kikuchi e Tanizawa [1984], Satish Chandra et al. [1986], Pandian et al. [1989], Stolarski e Belytschko [1982a, 1982b].

Infine, approcci di tipo ibrido/misto possono consultarsi in Gellert e Laursen [1976], Loula et al. [1987], Benedetti e Tralli [1987], Noor e Peters [1981], Karamanlidis e Jasti [1987].

Infine, un elemento di tipo non lineare è proposto in Calhoun e DaDeppo [1983].

Per quanto attiene all'integrazione numerica, si segnala che i metodi di Newton-Cotes fino ad un ordine  $N = 21$  possono ritrovarsi in Kopal [1961], e che ascisse di campionamento e pesi per una integrazione alla Gauss fino ad un ordine  $N = 16$  possono consultarsi in Loxan et al. [1942]. D'altro canto, una singola linea di comando di MATHEMATICA può fornire le stesse indicazioni con una precisione arbitraria. Una lettura di approfondimento sul metodo di Gauss può essere il libro di Stroud e Secrest [1966], mentre una piacevolissima trattazione sull'argomento è rappresentata dal sesto capitolo di Irons e Shrive [1987].