

CAPITOLO IX
FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE

1. La sollecitazione di flessione, taglio e torsione.

Si assuma come origine del riferimento il baricentro della base $z=0$; gli assi x ed y siano qualsiasi. Si assumono le seguenti componenti dello spostamento;

$$\begin{aligned} u &= -\frac{c_1}{Em} xy && -\frac{c_2}{Em} xyz \\ v &= -\frac{c_1}{2Em} (mz^2 - x^2 + y^2) - \frac{c_2}{E} \left(\frac{z^2}{6} + \frac{y^2 - x^2}{2m} \right) z && (1) \\ w &= \frac{c_1}{E} yz && + \frac{c_2}{E} \left[\frac{yz^2}{2} + \varphi(xy) \right] \end{aligned}$$

essendo c_1 e c_2 due costanti di dimensioni fisiche $[Fl^{-3}]$ ed $[Fl^{-4}]$, e φ una funzione delle sole x ed y , di dimensioni fisiche $[l^3]$.

Le (2-6) sono verificate, e così pure le prime due delle (2-9); la terza delle (2-9) si traduce nella condizione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2y. \quad (2)$$

Le espressioni di τ_{zx} e τ_{zy} sono

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Gc_2}{E} \left(-\frac{xy}{m} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} &= \frac{Gc_2}{E} \left(-\frac{y^2 - x^2}{2m} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (a)$$

l'equazione ai limiti (2-4) conduce perciò alla condizione al contorno

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{xy}{m} \right) \frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right) \frac{dy}{dn} = 0$$

da cui

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{m} \left(xy \frac{dx}{dn} + \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dy}{dn} \right). \quad (3)$$

La funzione φ , soddisfacente in tutti i punti della sezione retta alla (9-2), e sul contorno alla (9-3), esiste ed è unica, a parte le difficoltà che si incontrano nell'effettiva determinazione.

Ponendo infatti

$$\xi = \varphi + yx^2$$

dalla (9-2) si trae

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (b)$$

e dalla (9-3)

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{2m+1}{m} xy \frac{dx}{dn} + \left(\frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \frac{dy}{dn}; \quad (b_1)$$

se $f(x, y) = 0$ è l'equazione del contorno, la (b₁) si scrive

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} = \frac{2m+1}{m} xy \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si ha inoltre, per la formula di Gauss (8-12),

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial \xi}{\partial n} ds &= \frac{2m+1}{m} \int_s xy \frac{dx}{dy} ds + \frac{2m-1}{2m} \int_s x^2 \frac{dy}{dn} ds + \\ &+ \frac{1}{2m} \int_s y^2 \frac{dy}{dn} ds = \frac{2m+1}{m} \int_A y dA + \frac{1}{m} \int_A y dA = 0. \end{aligned} \quad (b_2)$$

Si è ricondotti così, per le (b), (b₁) e (b₂), al problema di Neumann, già incontrato nella trattazione della torsione.

La necessità della (b₂) impone che l'asse sia baricentrico; è questo il motivo per cui l'origine del riferimento cartesiano è stata assunta coincidente con il baricentro della base $z = 0$.

Se la sezione è pluriconnessa, la condizione

$$\Sigma \int_{s_i} \frac{\partial \xi}{\partial n} ds = 0$$

è soddisfatta per la (b_2) , e con essa la condizione necessaria e sufficiente di esistenza della ξ . Per l'uniformità poi occorre (e basta) che su ogni contorno si verifichi

$$\int_{s_1} \frac{\partial \xi}{\partial s} ds = 0 . \quad (c)$$

La condizione (c) equivale all'altra

$$\int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = 0 , \quad (d)$$

come è ovvio per l'uniformità di φ , e come si verifica facilmente, attraverso la formula di Gauss, perchè è, per quest'ultima,

$$\int_{s_1} \frac{\partial (y x^2)}{\partial s} ds = - \int_{A_1} 2 x dA + \int_{A_1} 2 x dA = 0 .$$

Le espressioni di τ_{zx} e τ_{zy} sono fornite dalle (a); la σ_z è

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = c_1 y + c_2 yz . \quad (e)$$

Dalle (2-12) si ha perciò

$$\begin{aligned} F_x' &= T_x = - \frac{G}{Em} c_2 \int_A xy dA + \frac{G}{E} c_2 \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA \\ F_y' &= T_y = - \frac{G}{2Em} c_2 \int_A (y^2 - x^2) dA + \frac{G}{E} c_2 \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial y} dA \\ F_z' &= N = (c_1 + c_2 l) \int_A y dA = 0 \\ \mathcal{M}_x' &= (c_1 + c_2 l) \int_A y^2 dA \\ \mathcal{M}_y' &= (c_1 + c_2 l) \int_A xy dA \\ \mathcal{M}_z' &= M_t = - \frac{G}{E} c_2 \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} x \right) dA + \frac{G}{2Em} c_2 \int_A (x^3 + xy^2) dA \end{aligned} \quad (f)$$

e dalle (2-11)

$$\begin{aligned}
 F_x^o &= -T_x \\
 F_y^o &= -T_y \\
 F_z^o &= -c_1 \int_A y \, dA = 0 \\
 \mathcal{M}_x^o &= -c_1 \int_A y^2 \, dA = -c_1 I_x \\
 \mathcal{M}_y^o &= c_1 \int_A xy \, dA = -c_1 I_{xy} \\
 \mathcal{M}_z^o &= -M_t .
 \end{aligned} \tag{g}$$

E' interessante osservare che se l'asse x non è baricentrico, e $c_2 \neq 0$, le F_z^t ed F_z^o non risultano uguali e contrarie; non sarebbe così rispettata la condizione di equilibrio alla traslazione secondo z (2-14). Ciò non è incompatibile con il rispetto delle (2-9), perchè in tal caso la (b_2) non è valida, la $\varphi(xy)$ che compare nella terza delle (9-1) non è univocamente determinata, e la terna (9-1) non può essere assunta a caratterizzare un caso di sollecitazione.

Ponendo

$$c_1 + c_2 \ell = 0 \tag{h}$$

risulta

$$\mathcal{M}_x^t = \mathcal{M}_y^t = 0 \tag{i}$$

e per le (2-14)

$$\mathcal{M}_x^o = F_y^t \ell = T_y \ell \quad ; \quad \mathcal{M}_y^o = -F_x^t \ell = -T_x \ell . \tag{l}$$

Le sollecitazioni sulla base $z = \ell$ hanno perciò per risultanti (fig. 9-1) una forza T_x , una forza T_y ed un momento $\mathcal{M}_z^t = M_t$ forniti dalle (f), e quelle sulla base $z = 0$ hanno per risultanti una forza $-T_x$, una forza $-T_y$, un momento $\mathcal{M}_z^o = -M_t$ il cui vettore è diretto secondo z , e due momenti $T_y \ell$ e $-T_x \ell$ i cui vettori sono diretti secondo x ed y . Sulla base $z = \ell$ perciò le sollecitazioni forniscono in complesso una forza $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$, giacente sulla base stessa, e a distanza $d = M_t/T$ dal baricentro G (fig. 9-1 b); sulla base $z = 0$ le sollecitazioni forniscono una forza uguale e contraria a T , (agente secondo la retta intersezione del piano della base con il piano π passante per T e parallelo a z), ed un momento $M = T\ell$, il cui vettore è ortogonale al piano π .

Si giustifica così il nome di *sollecitazione di flessione, taglio e torsione* (in genere non semplice, se x ed y sono qualsiasi) con cui si definisce il caso particolare del problema di De Saint-Venant caratterizzato dalle (9-1).

Per evitare confusione con la sollecitazione composta delle tre sollecitazioni di flessione, di torsione e di flessione taglio e torsione, si preferisce chiamare quest'ultima più semplicemente, anche se impropriamente, *sollecitazione di taglio*.

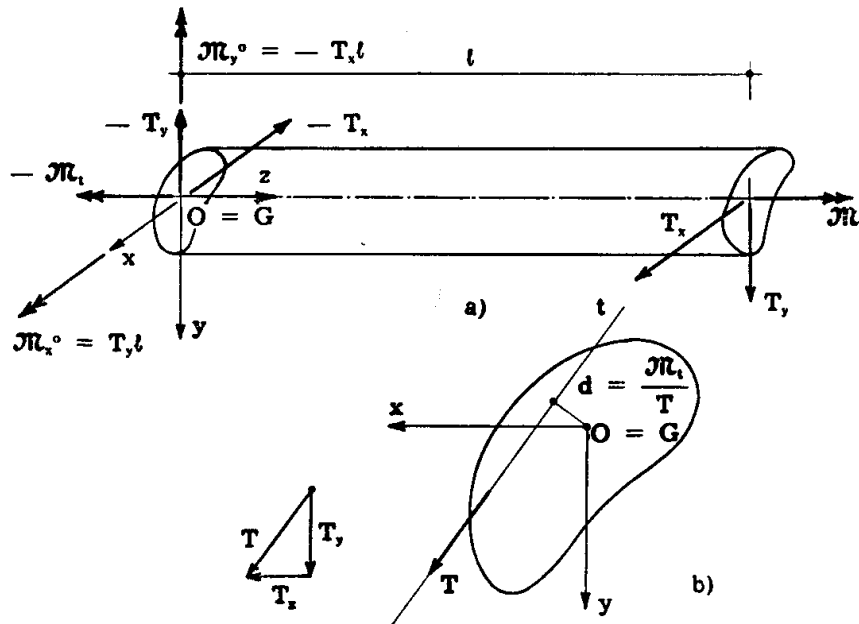


FIG. 9-1

Sulla generica sezione di ascissa z le tensioni presentano come caratteristiche (2-18) una forza T agente secondo l'intersezione di π con il piano della sezione stessa, un momento $M_x = -T_y (l - z)$, e un momento $M_y = +T_x (l - z)$; il momento M risultante ha per valore $T (l - z)$, ed il suo vettore è normale al piano π . Dal confronto fra questa espressione di M_x e quella fornita dalla quarta delle (g) si ha (ricordando che le (g) sono le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla base $z = 0$, uguali e contrarie alle caratteristiche della sollecitazione interna sulla stessa faccia)

$$c_1 I_x = -T_y l$$

da cui

$$c_1 = -\frac{T_y l}{I_x} \quad (m)$$

$$c_2 = \frac{T_y}{I_x} .$$

Si osservi che dalla relazione, valida per ogni sezione,

$$\frac{M_y}{M_x} = - \frac{T_x}{T_y}$$

e dalla 4^a e 5^a delle (g)

$$\mathcal{M}_x^o = - c_1 I_x = T_y \ell$$

$$\mathcal{M}_y^o = - c_1 I_{xy} = T_y \ell \frac{I_{xy}}{I_x}$$

si trae (fig. 9-2)

$$\widehat{\text{tg } xt} = \frac{T_y}{T_x} = - \frac{I_x}{I_{xy}} \quad (n)$$

La relazione (n) assicura che l'asse x e la retta d'azione t di T sono co-

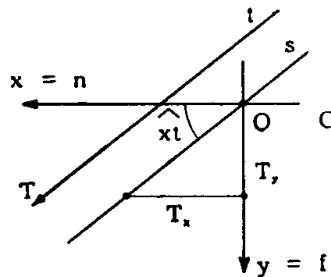


FIG. 9-2

niugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione (vedi form. (o) del Cap. VI).

Per le (m), le (9-1) si scrivono

$$\begin{aligned} u &= T_y \frac{\ell - z}{mEI_x} xy \\ v &= T_y \frac{\ell - z}{2mEI_x} (mz^2 - x^2 + y^2) + T_y \frac{z^3}{3EI_x} \\ w &= - T_y \frac{\ell - z/2}{EI_x} yz + T_y \frac{\varphi(xy)}{EI_x} \end{aligned} \quad (4)$$

Nella sollecitazione in esame il generico tronco elementare lungo dz all'ascissa z è soggetto alle estremità alle due coppie flettenti $M = -T(\ell - z)$.

Per effetto di esse il tronco si deforma come si è visto al Cap. VI, § 2: le due facce estreme si conservano piane, e ruotano l'una rispetto all'altra intorno all'asse neutro $n = x$ (fig. 9-2), baricentrico e coniugato della retta di azione t della forza T . Le componenti u_f, v_f, w_f dello spostamento coincidono con quelle (5-3) della flessione retta, purchè come momento M_x si assuma non il momento totale, ma la sua componente $-T_y (l - z)$ secondo x .

Se si adottano le (5-3) a rappresentare la deformazione flessionale, l'origine è il baricentro della sezione di sinistra del tronco dz , e quindi è variabile con il tronco stesso; è necessario riportarsi ad un'unica origine, coincidente con il baricentro della sezione di sinistra dell'intero solido di De Saint-Venant. Le componenti u_f, v_f, w_f fornite in presenza di momento flettente costante dalle (5-3) possono scindersi in due parti, una funzione di z , e l'altra da essa indipendente. Se il momento flettente è

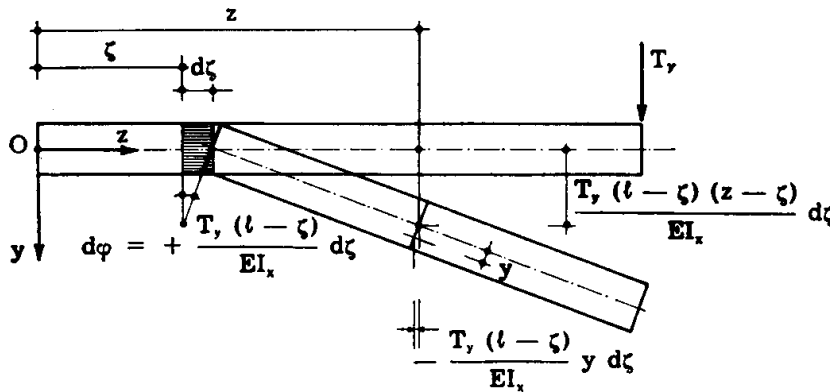


FIG. 9-3

variabile, l'espressione delle parti di u_f, v_f, w_f indipendenti da z si conserva inalterata, poichè esse dipendono soltanto dal valore del momento e dalle coordinate x ed y , e quindi per esse non si rende necessaria alcuna variazione per riportare l'origine del tronco elementare in quella del solido intero. Per le parti dipendenti da z occorre invece scrivere i contributi che alle $v_f(z)$ e $w_f(z)$ (si ricordi che u_f non contiene z) fornisce la rotazione relativa delle due facce del tronco $d\zeta$ ($\zeta \leq z$), e integrare questi contributi da 0 a z . Si ha così (fig. 9-3)

$$u_f = T_y \frac{l - z}{mEI_x} xy$$

$$v_f = T_y \frac{l - z}{2mEI_x} (-x^2 + y^2) + T_y \int_0^z \frac{(l - \zeta)(z - \zeta)}{EI_x} d\zeta$$

$$w_f = -T_y \int_0^z \frac{l - \zeta}{EI_x} y d\zeta$$

e cioè ancora

$$\begin{aligned} u_f &= T_y \frac{l-z}{mEI_x} xy \\ v_f &= T_y \frac{l-z}{2mEI_x} (mz^2 - x^2 + y^2) + T_y \frac{z^3}{3EI_x} \\ w_f &= -T_y \frac{l-z/2}{EI_x} yz . \end{aligned} \quad (5)$$

Confrontando le (9-4) e le (9-5), si osserva che le $u_f v_f w_f$ nel tipo di sollecitazione in esame sono somma delle $u_t v_t w_t$ fornite dalle (9-5), dovute alla flessione, e delle $u_t v_t w_t$ che qui appresso si trascrivono

$$\begin{aligned} u_t &= 0 \\ v_t &= 0 \\ w_t &= \frac{T_y}{EI_x} \varphi(xy) . \end{aligned} \quad (6)$$

Si dice comunemente che le (9-6) sono le componenti dello spostamento dovute al taglio. La dizione, che ha il pregio indubbio della sintesi, non è rigorosa, perchè in realtà le (9-6) non possono esistere senza le (9-5), e la separazione dei due effetti, flessionale e tagliante, è fittizia. Per

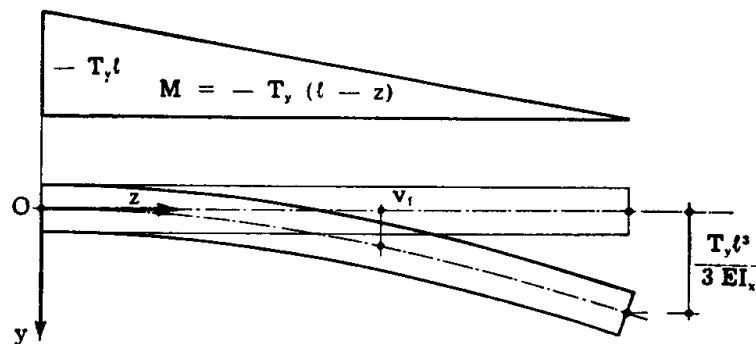


FIG. 9-4

effetto delle (9-5), il solido si deforma in modo che le sezioni rette rimangono piane; tutte le rette inizialmente parallele all'asse z si deformano in curve ortogonali alle sezioni rette deformate. In particolare (fig. 9-4) con riferimento alla terna $O x y z$, l'asse z si trasforma nella curva di equazione

$$\begin{aligned} u_f &= 0 \\ v_f &= \frac{T_y}{6EI_x} (3lz^2 - z^3) \end{aligned} \quad (7)$$

che è una parabola cubica contenuta nel piano yz , di freccia massima pari a

$$v_{\max} = \frac{T_y \ell^3}{3 EI_x} \quad (8)$$

Per effetto delle (9-6), il solido si deforma in modo che tutte le rette parallele all'asse z restano parallele a z , e ogni sezione retta presenta la

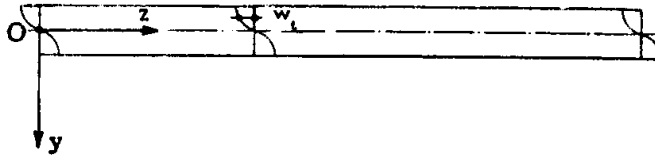


FIG. 9-5

stessa deformazione, caratterizzata dagli spostamenti w_t normali al piano cui la sezione apparteneva prima della deformazione (fig. 9-5).

Per le (m), le (a) ed (e) si scrivono, ricordando che $\frac{G}{E} = \frac{m}{2(m+1)}$,

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{I_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{xy}{m} \right) \\ \tau_{zy} &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{I_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right) \\ \sigma_z &= - T_y \frac{\ell - z}{I_x} y \end{aligned} \quad (9)$$

2. L'energia di deformazione nella sollecitazione di taglio - Il fattore di taglio.

L'energia di deformazione è somma del termine L_f dovuto alle σ_z e del termine L_t dovuto alle τ_z . Si ha perciò

$$L_f = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_z^2 dV = \frac{T_y^2}{2EI_x^2} \int_0^\ell (\ell - z)^2 \int_A y^2 dA dz = \frac{T_y^2 \ell^3}{6EI_x} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dV = \\ &= \frac{T_y^2 \ell}{2EI_x^2} \frac{G}{E} \int_A \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{xy}{m} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (11)$$

Volendo porre L_t nella forma

$$L_t = \chi \frac{T_y^2 \ell}{2 GA} \quad (12)$$

il fattore di taglio χ è espresso come segue:

$$\chi = \frac{1}{A \rho_x^4} \frac{G^2}{E^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{xy}{m} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right)^2 \right] dA \quad (13)$$

Considerando come solido del De Saint-Venant, caricato da T su una base, un tronco elementare lungo dz , il termine L_t può trascurarsi in confronto ad L_f , perchè dz^3 è trascurabile in confronto a dz .

Se il tronco è di lunghezza ℓ finita, l'energia di deformazione relativa al tronco dz all'ascissa z è somma di quella

$$\chi \frac{T_y^2 dz}{2 GA}$$

dovuta al taglio T_y e di quella

$$\frac{M_x^2 dz}{2 EI_x} = \frac{T_y^2}{2 EI_x} (\ell - z)^2 dz$$

dovuta al momento flettente $-T_y(\ell - z)$, che può reputarsi costante nel tratto dz . Integrando all'intera lunghezza si ha

$$L = \frac{T_y^2}{2 EI_x} \int_0^\ell (\ell - z)^2 dz + \chi \frac{T_y^2}{2 GA} \int_0^\ell dz = \frac{T_y^2 \ell^3}{6 EI_x} + \chi \frac{T_y^2 \ell}{2 GA}$$

ritrovando le (9-10) e (9-11).

E' giustificato perciò dire che L_f è la parte di energia di deformazione dovuta alla flessione e L_t la parte dovuta al taglio; ciò non significa però che i due termini possano esistere separatamente. Anche questa distinzione, in altre parole, è fittizia; essa assume un significato soltanto se il tronco è di lunghezza elementare, perchè, in tal caso, uno dei termini è trascurabile.

3. Il centro di taglio.

Per ogni coppia di assi ortogonali xy passanti per il baricentro G , assunto x come asse neutro si può determinare la funzione $\varphi(xy)$, e quindi

la distanza d dal baricentro della retta d'azione t della forza T , che in direzione è nota, essendo questa la coniugata di x rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione. E' sufficiente però fare questa ricerca (fig. 9-6)

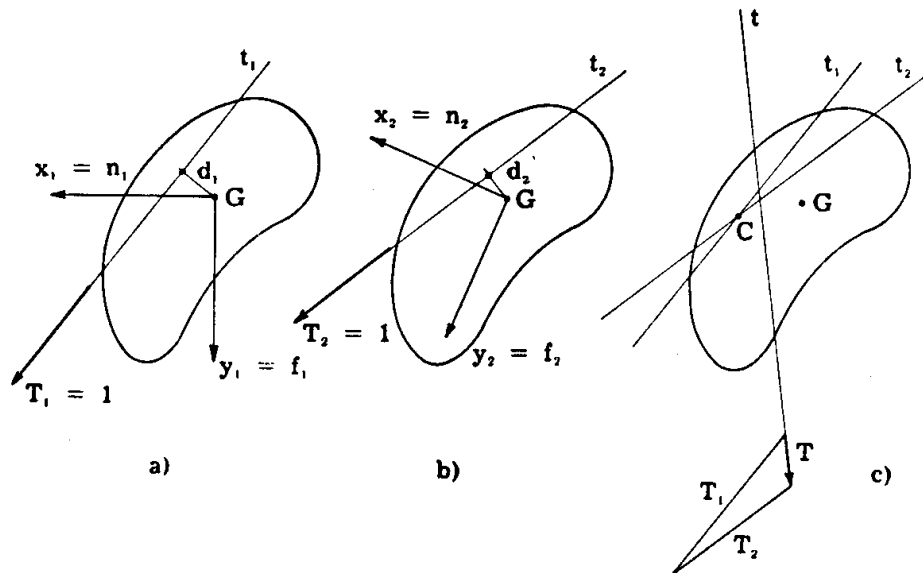


FIG. 9-6

per due sole coppie di assi $x_1 y_1$ ed $x_2 y_2$, individuando il punto C d'incontro delle rette t_1 e t_2 , e ricavare i valori $\tau_{zx}' \tau_{zy}'$ e $\tau_{zx}'' \tau_{zy}''$ per $T_1=1$ e per $T_2=1$. Le tensioni tangenziali indotte da una forza T qualsiasi passante per C sono fornite infatti, per il principio di sovrapposizione, da

$$\tau_{zx} = T_1 \tau_{zx}' + T_2 \tau_{zx}'' \quad (14)$$

$$\tau_{zy} = T_1 \tau_{zy}' + T_2 \tau_{zy}''$$

essendo T_1 e T_2 le componenti di T secondo t_1 e t_2 . Se la T passa a distanza h da C , alle τ_{zx} e τ_{zy} di cui sopra occorre aggiungere le tensioni τ_{zx} e τ_{zy} dovute al momento torcente $M_t = Th$. Queste ultime sono di natura del tutto diversa da quelle connesse con la sollecitazione di taglio; mentre infatti dalle (9-9) si ricava

$$\text{div } \bar{\tau}_z = - \frac{T_y}{I_x} y \quad (15)$$

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = \frac{T_y}{(m+1) I_x} x, \quad (16)$$

il campo vettoriale delle τ_z connesse con la torsione è caratterizzato dalle altre espressioni

$$\operatorname{div} \bar{\tau}_z = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{\tau}_z = 2q \frac{M_t}{I_p} = \text{cost.}$$

Da ciò si trae che il centro C è indipendente dalla scelta delle rette t_1 e t_2 , e cioè delle due coppie $x_1 y_1$ ed $x_2 y_2$.

Si supponga infatti che alle rette t_1 e t_2 corrisponda un centro C' , ed alle rette t_3 e t_4 un centro C'' distinto da C' . Ad una forza T passante per C' (e distante h da C'') corrisponde una rot $\bar{\tau}_z$ annullantesi nel baricentro, se calcolata attraverso le τ_z' e τ_z'' , e non annullantesi nel baricentro se calcolata attraverso le τ_z''' e τ_z'''' , e le τ_z derivanti dal momento torcente Th .

E' perciò assurdo che i due punti C' e C'' siano distinti.

Il punto C così definito è il già noto *centro di taglio* (Cap. II); è rispetto a tale punto, per quanto detto, che si valuta il momento torcente M_t da introdursi nelle formule del capitolo precedente, se le caratteristiche F_x ed F_y delle forze agenti su ciascuna delle due basi non sono nulle ambedue.

La posizione di C è indipendente dalla scelta degli assi, sempre però che le $u v w$ siano le (9-1); se a queste si affiancano altre componenti, per esempio del tipo (8-1), il punto C si sposta; è proprio, anzi, per riportare C su G che alle (9-1), a volte, si sommano delle componenti $u v w$ da torsione.

Se la coppia xy si assume coincidente con gli assi principali d'inerzia, si ottiene, con la terna (9-1),

$$n = x$$

$$t = y$$

$$T_y = T$$

$$T_x = 0.$$

La stessa terna (9-1), ponendo $x=y$ ed $y=-x$, porta a

$$n = y$$

$$t = x$$

$$T_x = T$$

$$T_y = 0.$$

I due casi suddetti possono essere quelli che fanno determinare la posizione del centro C.

Le due sollecitazioni sono in questo caso quelle *semplici di flessione, taglio secondo y e torsione, e di flessione, taglio secondo x e torsione*, di cui si è già fatto cenno al Cap. II, § 6; più semplicemente, esse si chiamano pure *sollecitazione semplice di taglio secondo y, e sollecitazione semplice di taglio secondo x*.

Le due coppie $x_1 y_1$ ed $x_2 y_2$ più convenienti per il calcolo di C non sono però sempre ξ ed η ; esse si scelgono caso per caso.

4. Espressione generale della divergenza e della rotazione delle tensioni tangenziali. Validità del teorema di Stokes per sezioni pluriconnesse e curve non riducibili.

Dalla terza delle equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

e dalla relazione di Navier (9-9)

$$\sigma_z = - T_y \frac{l - z}{I_x} y$$

si trae, come già visto,

$$\operatorname{div} \bar{\tau}_z = - \frac{T_y}{I_x} y .$$

La prima delle equazioni di congruenza si scrive

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right) ;$$

poichè è

$$\varepsilon_x = - \frac{\varepsilon_z}{m} = - \frac{\sigma_z}{Em} = T_y \frac{l - z}{mEI_x} y$$

si ha

$$- 2 T_y \frac{G}{mEI_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right) .$$

Dalla seconda delle equazioni di congruenza si ha inoltre

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right).$$

Perciò la rot $\bar{\tau}_z$ è costante secondo y , e varia linearmente con x :

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \frac{T_y}{(m+1) I_x} x + k$$

essendo k una costante arbitraria.

Si noti che le relazioni di cui sopra sono state ricavate senza aver fissato l'effettiva retta di azione di T , di cui si sa soltanto la direzione, che è la coniugata di x ; esse valgono perciò in generale, e cioè anche se la forza T non passa per il centro di taglio. Per $T_y = 0$ (sola torsione) è $\text{div } \bar{\tau}_z = 0$, $\text{rot } \bar{\tau}_z = k$, come già detto.

E' molto importante osservare che, dalla condizione di uniformità, discende la validità del teorema di Stokes in domini pluriconnessi con riferimento a curve non riducibili.

Si calcoli a ciò fare la circuitazione lungo un contorno interno; si ha

$$\begin{aligned} c_i &= \int_{s_i} \left(-\tau_{zx} \frac{dy}{dn} + \tau_{zy} \frac{dx}{dn} \right) ds = \\ &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{I_y}{I_x} \int_{s_i} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dx}{dn} \right) ds + \\ &+ \frac{T_y}{2(m+1) I_x} \int_{s_i} \left(xy \frac{dy}{dn} - \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dx}{dn} \right) ds = \\ &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{I_y}{I_x} \int_{s_i} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + \\ &+ \frac{T_y}{2(m+1) I_x} \int_{s_i} \left(xy \frac{dy}{dn} - \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dx}{dn} \right) ds. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo, per la (d); il secondo può calcolarsi con la formula di Gauss, dato che le funzioni xy e $y^2 - x^2$ sono definite, con-

tinue etc. in tutto il piano. Si ha così

$$\int_{s_1} xy \frac{dy}{dn} ds = \int_{A_1} x dA$$

$$- \int_{s_1} \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dx}{dn} ds = \int_{A_1} x dA ,$$

e quindi, per la (9-16)

$$c_1 = \frac{T_y}{(m+1) I_x} \int_{A_1} x dA = \int_{A_1} \text{rot } \bar{\tau}_z \cdot dA . \quad (17)$$

Poichè, data una curva s che circonda una cavità s_1 , è

$$c - c_1 = \int_{A - A_1} \text{rot } \bar{\tau}_z dA$$

si ha

$$c = \int_{A - A_1} \text{rot } \bar{\tau}_z dA + c_1 =$$

$$= \int_{A - A_1} \text{rot } \bar{\tau}_z dA + \int_{A_1} \text{rot } \bar{\tau}_z dA ;$$

quindi è

$$c = \int_A \text{rot } \bar{\tau}_z dA , \quad (18)$$

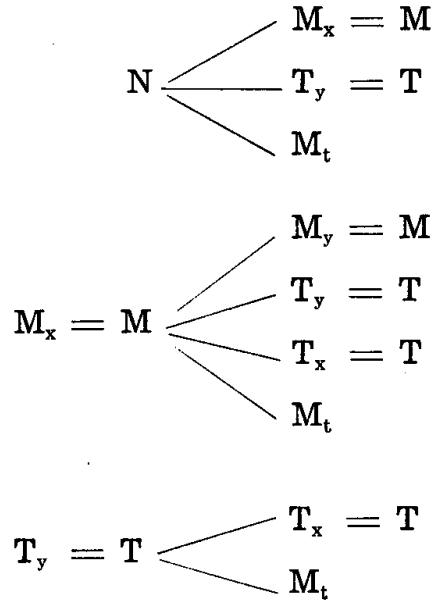
dove A è l'area totale compresa nella curva s . Cioè, il teorema di Stokes è valido per curve non riducibili, come se il vettore rotazione fosse definito, con la stessa legge (9-16), anche nella cavità.

5. Espressione dell'energia di deformazione nel tronco di De Saint-Venant soggetto alle sei caratteristiche.

Si è già detto (§ 2-6) che scegliendo gli assi x ed y coincidenti con gli assi principali di inerzia (e l'origine quindi nel baricentro) le sei sol-

lecitazioni del De Saint-Venant godono della proprietà di ortogonalità, e cioè il loro lavoro mutuo è nullo. Tutto ciò con riferimento al solido di lunghezza piccola dz , in cui la variazione di momento dovuta al taglio possa trascurarsi.

Basta studiare i nove accoppiamenti seguenti:



a) *Accoppiamento* $N M_x$.

L'energia mutua è fornita da

$$L_{12} = \int_V \sigma_1 \varepsilon_2 dV = \int_V \sigma_2 \varepsilon_1 dV$$

dove le σ_1 ed ε_1 sono dovute ad N e le σ_2 ed ε_2 ad M_x . Si ha così

$$L_{12} = \frac{N}{A} \frac{M_x dz}{I_x E} \int_A y dA = 0,$$

perchè l'asse x è baricentrico.

b) *Accoppiamento* $N T_y$.

Si ha, per le (9-9),

$$L_{12} = \int_V \sigma_1 \varepsilon_2 dV = - \frac{N}{A} \frac{T_y dz^2}{2 EI_x} \int_A y dA = 0.$$

Calcolando L_{12} come lavoro delle forze esterne si ha (9-5 e 9-8)

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_A p_{1z}(z=0) w_2(z=0) dA + \int_A p_{1z}(z=l) w_2(z=l) dA = \\ &= -\frac{N}{A} \frac{T_y}{EI_x} \int_A \varphi dA + \frac{N}{A} \frac{T_y}{EI_x} \left[-\frac{dz^2}{2} \int_A y dA + \int_A \varphi dA \right] = \\ &= -\frac{N}{A} \frac{T_y dz^2}{2 EI_x} \int_A y dA = 0 . \end{aligned}$$

c) *Accoppiamento* $N M_t$.

Poichè nella torsione è $\sigma_z = 0$, $\varepsilon_z = 0$, si ha

$$L_{12} = \int_V \sigma_1 \varepsilon_2 dV = \int_V \sigma_2 \varepsilon_1 dV = 0 .$$

d) *Accoppiamento* $M_x M_y$.

Risulta

$$L_{12} = -\frac{M_x M_y dz}{EI_x I_y} \int_A xy dA = 0$$

perchè gli assi x ed y sono coniugati.

e) *Accoppiamento* $M_x T_y$.

Si ha

$$L_{12} = -\frac{M_x T_y dz^2}{I_x 2 EI_x} \int_A y^2 dA = -\frac{M_x T_y}{2 EI_x} dz^2 \quad (o)$$

che può porsi uguale a zero perchè le espressioni dell'energia diretta sono in dz .

Calcolando L_{12} come lavoro delle forze esterne si ha (9-5 e 9-6)

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_A p_{1z}(z=0) w_2(z=0) dA + \int_A p_{1z}(z=l) w_2(z=l) dA = \\ &= -\frac{M_x}{I_x} \frac{T_y}{EI_x} \int_A \varphi y dA + \frac{M_x}{I_x} \frac{T_y}{EI_x} \left[-\frac{dz^2}{2} \int_A y^2 dA + \int_A \varphi y dA \right] = \\ &= -\frac{M_x T_y}{2 EI_x} dz^2 . \end{aligned}$$

f) *Accoppiamento* $M_x T_x$.

Si ha dalle (9-9)

$$\sigma_z = - T_x \frac{l - z}{I_y} x$$

da cui

$$L_{12} = - \frac{M_x}{I_x} \frac{T_x}{2 EI_y} \int_A yx \, dA = 0$$

g) *Accoppiamento* $M_x M_t$.

Risulta, come in c),

$$L_{12} = \int_V \sigma_1 \varepsilon_2 \, dV = 0.$$

h) *Accoppiamento* $T_x T_y$.

Poichè si considera un tronco di lunghezza dz molto piccola, nel calcolo del lavoro dovuto al taglio i termini (9-5), che contengono z , vanno trascurati rispetto ai termini (9-6), indipendenti da z .

Nello stesso spirito si trascura il termine (o).

Per T_y si ha

$$w = \frac{T_y}{EI_x} \varphi_y;$$

per T_x le p_z corrispondenti si hanno solo sulla faccia $z=0$, e sono pari a

$$p_z = - \sigma_z = \frac{T_x dz}{I_y} x.$$

E' quindi

$$L_{12} = \frac{T_x T_y dz}{EI_x I_y} \int_A \varphi_y x \, dA. \quad (p)$$

Se l'asse y , oltre che principale, è di simmetria, la w e quindi la φ_y sono simmetrici anch'essi rispetto ad y , e quindi

$$\int_A \varphi_y x \, dA = 0$$

$$L_{12} = 0.$$

Se y è solo principale, ma non di simmetria, è (*)

$$L_{12} \neq 0 .$$

Dalla (p) si trae

$$\int_A \varphi_y x \, dA = \int_A \varphi_x y \, dA \quad (q)$$

e quindi, se x è asse di simmetria, è ancora $L_{12} = 0$.

i) *Accoppiamento* $T_y M_t$.

Agli effetti del lavoro mutuo fra taglio e torsione, si osservi che per effetto delle (9-6) la sezione retta si ingobba, ma la sua proiezione sul piano xy non si deforma. Essa quindi, nel calcolo del lavoro compiuto da forze agenti nel piano xy , può considerarsi come rigida. Dalle (9-4) si trae

$$r_{02} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 ; \quad (r)$$

ciò significa (Vol. I, 7-13) che la proiezione della sezione retta non ruota. Poichè, essendo la proiezione rigida, il lavoro delle τ_z è pari a quello della risultante, è pure

$$L_{12} = M_t r_{02} = 0 . \quad (s)$$

Analogo ragionamento può farsi assumendo come forze il taglio e come spostamenti quelli della torsione; infatti anche per la torsione (8-1) la proiezione della sezione non si deforma. Si ha in tal caso dalle (8-5)

$$r_{01} = \frac{q M_t}{GI_p} z \quad (t)$$

e cioè ogni sezione ruota rigidamente intorno al punto O di un angolo proporzionale a z . E' perciò, per la (s), e tenuto conto che le σ sulla base $z = 0$ associate al momento $-T_y dz$ (fig. 9-7) lavorano per effetto delle w della torsione,

$$L_{12} = [-T_x (OC)_y + T_y (OC)_x] \frac{q M_t}{GI_p} dz - \frac{T_y dz}{I_x} \frac{q M_t}{GI_p} \int_A y \Psi \, dA = 0 ;$$

gli assi x ed y sono baricentrici.

(*) Il termine L_{12} è comunque molto piccolo; si veda su ciò C. L. Ricci - *Mecchanica applicata alle costruzioni*, pagg. 369 e 371.

Se $O = C$, risulta

$$\int_A y \Psi dA = 0. \quad (19)$$

Poichè la suddetta relazione è valida per qualsiasi asse x , può dirsi che le Ψ calcolate assumendo la retta dei centri di taglio come fibra di origine, e le w , ad esse proporzionali, sono a momento baricentrico nullo (si ricordi che Ψ è definita a meno di una costante).

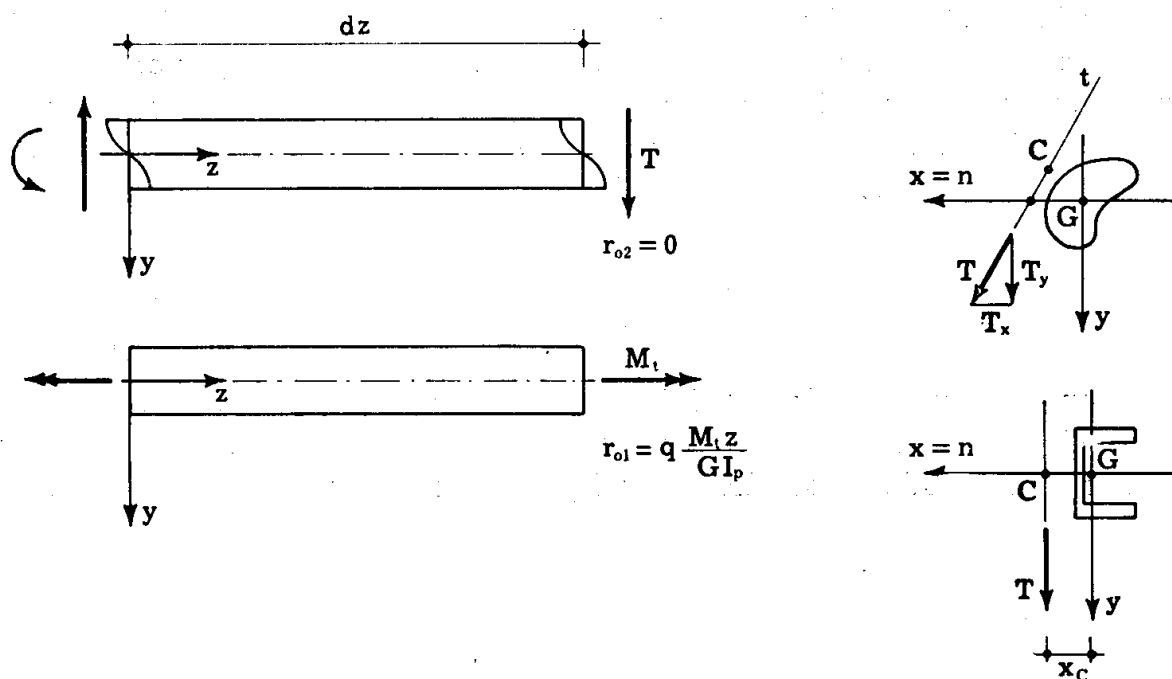


FIG. 9-7

Se O è diverso da C , le Ψ variano di una quantità lineare in x ed y , e presentano momenti baricentrici diversi da zero. Se $O = G$, ed x e y sono principali di inerzia, è $T = T_y$, $(OC)_y = y_C$, $(OC)_x = x_C$, e si ha

$$T x_C \frac{q M_t}{GI_p} dz - \frac{T dz}{I_x} \frac{q M_t}{GI_p} \int_A y \Psi dA = 0$$

da cui

$$x_C = \frac{1}{I_x} \int_A y \Psi dA = \frac{S_{\psi x}}{I_x}. \quad (20)$$

Vale l'analogia

$$y_C = -\frac{1}{I_y} \int_A x \Psi dA = \frac{S_{\psi y}}{I_y}.$$

Per quanto detto, se x ed y coincidono con gli assi principali d'inerzia ξ ed η , le energie di deformazione sono sovrapponibili, e per il tronco

elementare lungo dz si ha

$$dL = \frac{N^2 dz}{2 EA} + \frac{M_x^2 dz}{2 EI_x} + \frac{M_y^2 dz}{2 EI_y} + \quad (21)$$

$$+ q \frac{M_t^2 dz}{2 GI_p} + \chi_y \frac{T_y^2 dz}{2 GA} + \chi_x \frac{T_x^2 dz}{2 GA} .$$

Nella (9-21) M_t deve essere valutato rispetto al centro di taglio C.

Non sempre i termini della (9-21) hanno la stessa importanza; nelle travature reticolari ad elementi sottili spesso predomina il primo, nelle travi lunghe rispetto alle dimensioni della sezione retta il secondo e il terzo, nelle travi corte il quinto e il sesto.

6. Trattazione approssimata del problema del taglio.

Con riferimento alla fig. 9-8, si osserva che rispetto ad una qualsiasi corda $B_1 B_2$ la componente τ_{zm} della tensione tangenziale secondo la normale m alla corda stessa ha un valore medio $\bar{\tau}_{zm}$ indipendente dalla di-

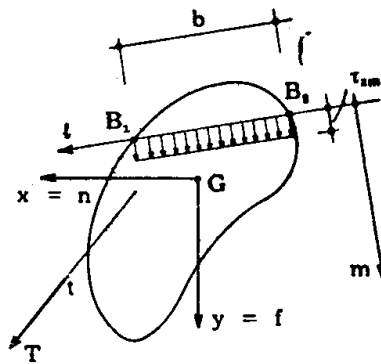


FIG. 9-8

stanza della forza tagliante T dal baricentro G . Infatti spostando T parallelamente a se stessa si introduce un momento torcente; chiamando τ^* le tensioni tangenziali dovute a questo momento, si ha

$$\int_{B_1}^{B_2} \tau_{zm}^* dt = 0$$

(teorema della divergenza).

La trattazione approssimata consiste nel ritenere che le componenti τ_{zm} delle tensioni dovute al taglio lungo una qualsiasi corda $B_1 B_2$, prese normalmente alla corda stessa, si possano confondere con il loro valore medio.

Questa ipotesi è molto vicina al vero se la corda $B_1 B_2$ è di piccola lunghezza rispetto alle dimensioni globali della sezione, ed ortogonale al contorno nei due estremi B_1 e B_2 ; ciò si verifica nei profilati e, in genere, nelle sezioni sottili. Infatti in tal caso la τ_{zt} è nulla ai due estremi, e la si può supporre tale lungo tutta la corda, mentre la τ_{zm} può supporre variabile con legge lineare lungo la corda stessa; poichè nel taglio la rot $\bar{\tau}_z$ è molto piccola (9-16), si può trascurare la variazione di τ_z lungo lo spessore δ .

Si precisa fin d'ora che il procedimento che si segue è analogo a quello classico del De Saint-Venant, nel senso che si perviene alla forza T sollecitante dopo aver determinato le tensioni τ_z : si verifica infatti che, fissato un asse neutro n , e calcolate le τ_z secondo la trattazione appross-

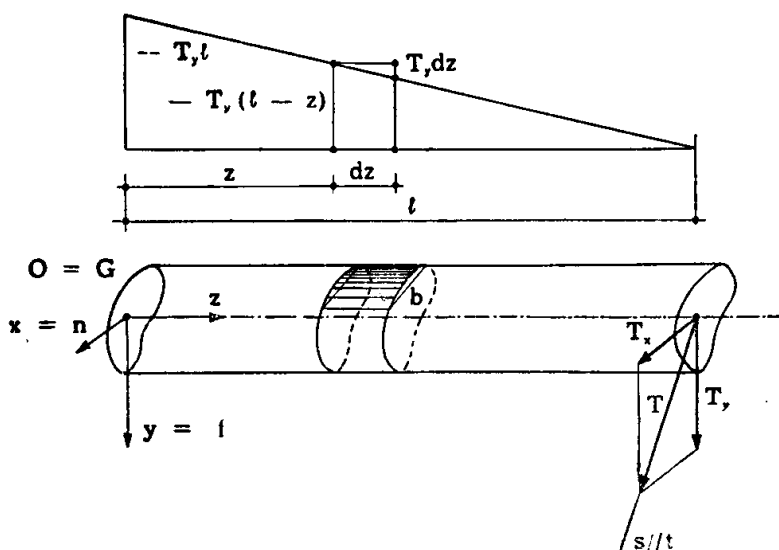


FIG. 9-9

simata, le forze elementari $\tau_z dA$ hanno per risultante una forza T la cui retta d'azione t ha la direzione coniugata di n , e passa a distanza d dal baricentro G ; per l'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, può dirsi che inversamente la forza T agente secondo la direzione t ed a distanza d da G provoca le τ_z da cui si è partiti. Se la forza T agisce secondo la direzione t , ma a distanza $d' \neq d$, alle τ_z di cui sopra vanno sommate quelle dovute al momento $T(d' - d)$, che non alterano, come già osservato, il valore medio τ_{zm} .

Il valore di τ_{zm} sulla generica corda $B_1 B_2$ di lunghezza b è fornito dalla condizione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse z della porzione del solido delimitata (figg. 9-9 e 9-10) da due sezioni rette qualsiasi

a distanza piccolissima dz , dalla superficie laterale del solido, e dal piano passante per $B_1 B_2$ e parallelo a z (*). Su questo piano (cap. 9-2) esistono solo le τ_{mz} .

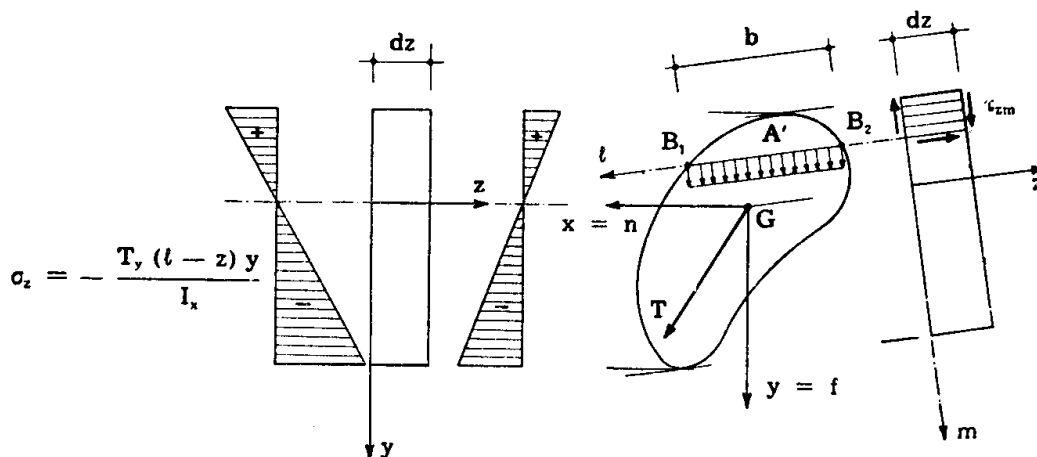


FIG. 9-10

Si ha così

$$\tau_{zm} b dz + \int_{A'} d\sigma_z dA = 0 \quad (u)$$

essendo A' la parte di sezione retta che interessa la parte di solido di cui si studia l'equilibrio (**).

Poichè è

$$\sigma_z = - \frac{T_y (l - z)}{I_x} y$$

$$d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \frac{T_y}{I_x} y dz$$

(*) Si noti che, non potendosi fissare a priori l'effettiva retta di azione di T , si è fatto passare T per il baricentro; una volta determinati τ_{zm} e τ_{zt} , le condizioni di equilibrio alla rotazione forniscono l'effettiva retta d'azione di T .

(**) Si osservi che delle due parti di solido delimitate dalle due sezioni rette distanti dz , dalla superficie laterale e dal piano passante per $B_1 B_2$ e parallelo a z , si è presa in esame quella al di sopra di $B_1 B_2$ e cioè quella situata dalla parte delle m negative. Perciò sulla base $b dz$ la τ_{zm} positiva è quella riportata nella fig. 9-10, e cioè avente il verso di z , e una $d\sigma_z$ positiva significa un aumento della trazione passando, da z , a $z + dz$, e quindi una forza complessiva avente anch'essa il verso di z .

dalla (u) si trae

$$\tau_{zm} b = - \frac{T_y}{I_x} \int_{A'} y dA = - \frac{T_y}{I_x} S_x$$

essendo S_x il momento statico, rispetto all'asse neutro x , dell'area A' interessata dalla semiretta m negativa. Si ottiene così in definitiva (*)

$$\tau_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b} . \quad (22)$$

Occorre adesso calcolare, sempre nei punti della corda b , le componenti τ_{zt} parallele a b .

Dalla terza delle equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{zt}}{\partial l} + \frac{\partial \tau_{zm}}{\partial m} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (v)$$

derivando due volte rispetto a l si ottiene

$$\frac{\partial^3 \tau_{zt}}{\partial l^3} + \frac{\partial^3 \tau_{zm}}{\partial l^2 \partial m} + \frac{\partial^3 \sigma_z}{\partial l^2 \partial z} = 0 .$$

La seconda derivata è nulla perchè τ_{zm} si è supposta costante lungo la corda b ; la terza è anche nulla, perchè σ_z varia linearmente lungo la stessa corda; è quindi

$$\frac{\partial^3 \tau_{zt}}{\partial l^3} = 0$$

da cui

$$\tau_{zt} = k_1 l^2 + k_2 l + k_3 \quad (z)$$

e cioè la τ_{zt} varia con legge parabolica lungo b (fig. 9-11).

I valori delle tre costanti k_1 k_2 k_3 possono ricavarsi dalla conoscenza dei valori di τ_{zt} alle estremità della corda (ove la τ_z totale ha direzione

(*) Se l'asse neutro è y (fig. 9-10) la (10-22) si scrive

$$\tau_{zm} = \frac{T_x S_y}{I_y b} . \quad (22')$$

nota) e del valore dell'inclinazione $\partial\tau_{zt}/\partial l$, che è fornito per la (v) da

$$\frac{\partial\tau_{zt}}{\partial l} = -\frac{\partial\tau_{zm}}{\partial m} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{I_x} \left(\frac{1}{b} \frac{dS_x}{dm} - \frac{S_x}{b^2} \frac{db}{dm} \right) - \frac{T_y y}{I_x} \quad (a')$$

Si osservi che la relazione (9-22) si può ricavare immediatamente sfruttando il teorema della divergenza e l'espressione (9-15); poichè in-

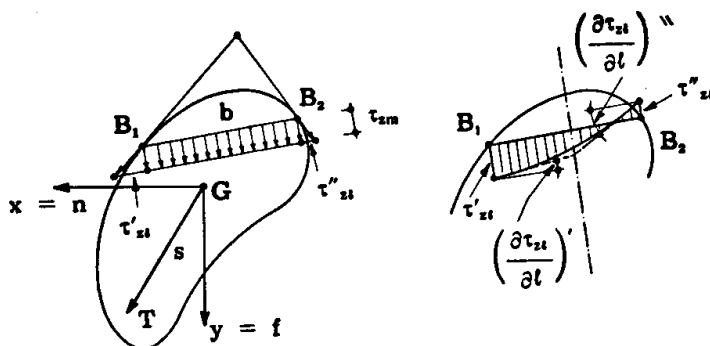


FIG. 9-11

fatti il flusso del vettore τ_z uscente dall'area A' deve essere uguale all'integrale della divergenza esteso alla stessa area, si ha

$$\tau_{zm} b = -\frac{T_y}{I_x} \int_{A'} y dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x,$$

da cui la (9-22).

Si osservi infine che la (9-22) esprime anche il valore medio della componente di τ_z normale ad una qualsiasi linea curva che unisca due punti B_1 e B_2 del contorno, purchè b sia la lunghezza della curva, ed S_x il momento statico rispetto all'asse neutro di tutta l'area compresa tra la curva $B_1 B_2$ e il contorno. Ciò è di molto interesse nel calcolo delle chiodature o saldature delle travi metalliche composte; la suddetta componente infatti è l'unica azione che si esercita lungo la superficie cilindrica che abbia per direttrice la curva $B_1 B_2$, e generatrici parallele all'asse z .

7. Il caso della corda parallela all'asse neutro.

Spesso, quando particolari ragioni non consigliano diversamente, si sceglie la corda z parallela all'asse neutro x . In tal caso la τ_{zy} è fornita

torno negli estremi della corda (*); perciò il punto O dove le τ_{zx} si annullano è la proiezione secondo l'asse y del punto P sulla corda b, e la τ_{zx} è fornita da

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \operatorname{ctg} \alpha \quad (24)$$

essendo α l'angolo che SP forma con b.

Il prodotto $\tau_{zy} b = -\frac{T_y}{I_x} S_x$ è positivo (**), e proporzionale ad S_x , e

(*) Se le componenti t e k di un vettore (fig. 9-13) sono legate dalla relazione

$$t = \frac{k}{a} x$$

(k costante, e t variabile linearmente con x), il vettore generico incontra la nor-

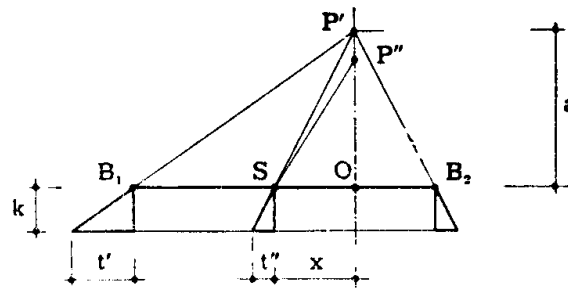


FIG. 9-13

male a $B_1 B_2$ di ascissa $x = O$ nel punto fisso P' alla distanza a da $B_1 B_2$. Si ha infatti

$$\frac{t'}{k} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OP'}} \quad \frac{t''}{k} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP''}}$$

da cui

$$\frac{t'}{t''} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OS}} \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP'}}$$

Poichè è pure $\frac{t'}{t''} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OS}}$, risulta $\overline{OP'} = \overline{OP''}$.

(**) Poichè nel trarre la (9-22) si è presa in esame la parte di sezione retta che rispetto a b è situata dalla parte delle m decrescenti (nel nostro caso delle y decrescenti) il momento statico S_x risulta sempre negativo.

quindi (fig. 9-14) raggiunge il massimo in corrispondenza dell'asse neutro. Non altrettanto può dirsi per la τ_{zy} , poichè b in genere non è costante. In corrispondenza dei bordi estremi della sezione, b si riduce, salvo casi particolari, a zero, e così pure S_x ; l'espressione di τ_{zy} diviene così indeterminata.

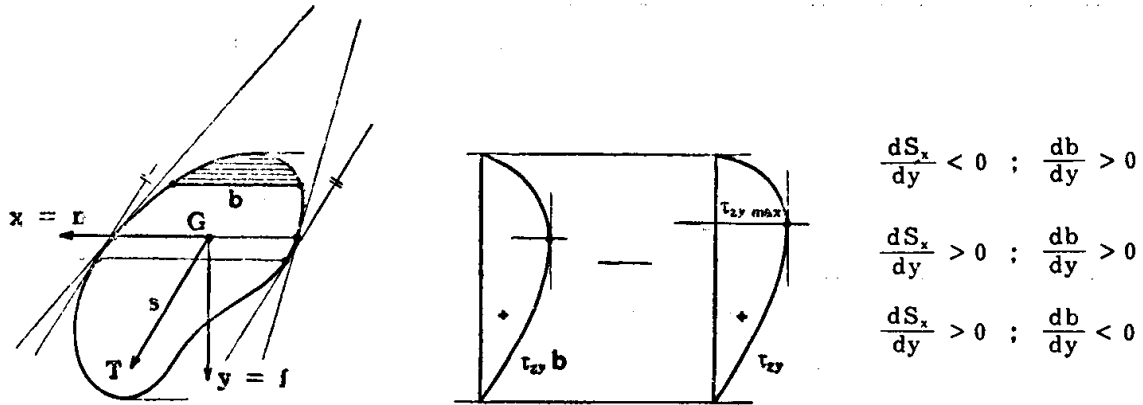


FIG. 9-14

Si consideri però che, avvicinandosi indefinitamente la corda b all'estremo, b è un infinitesimo, ma S_x è un infinitesimo di ordine superiore, perciò il rapporto S_x/b , e quindi τ_{zy} , tende a zero.

La condizione di stazionarietà della τ_{zy} è fornita da

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

e cioè ancora da

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{S_x}{b} \right) = \frac{1}{b} \frac{dS_x}{dy} - \frac{S_x}{b^2} \frac{db}{dy} = 0$$

da cui

$$b \frac{dS_x}{dy} = S_x \frac{db}{dy} \quad (25)$$

Si osserva che poichè S_x è negativo, la y soddisfacente la (9-25) deve essere ubicata (fig. 9-14) nelle due zone in cui dS_x/dy e db/dy sono di segno opposto.

La (9-25) si verifica in genere in corrispondenza di una sola corda, e poichè la τ_{zy} è nulla alle estremità, ed ovunque positiva, essa è massima sulla corda stessa.

Sull'asse neutro S_x è massimo, e perciò $dS_x/dy = 0$; se in corrispondenza dell'asse neutro, come spesso accade, la corda b è costante lungo y , o attinge un valore estremo, è pure $db/dy = 0$, e quindi la (9-25) è verificata. Nel caso suddetto, che è poi il più frequente in pratica, sull'asse neutro si verifica la τ_{zy} massima. E' perciò importante fornire l'espressione del-

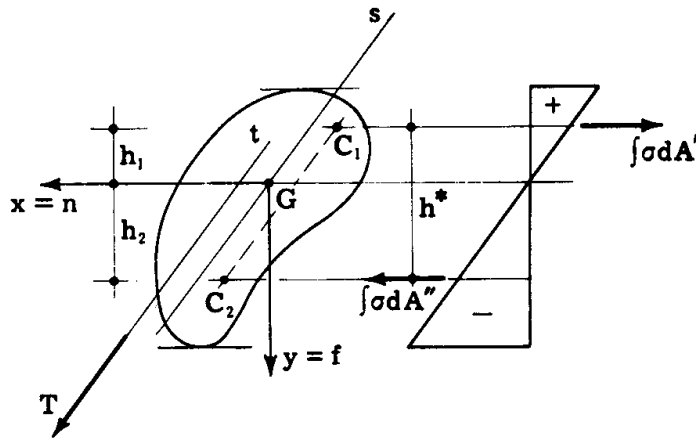


FIG. 9-15

la τ_{zy} sull'asse neutro. Siano C_1 e C_2 i centri relativi all'asse x rispetto all'area della sezione retta ubicata al disopra e al disotto dell'asse neutro (fig. 9-15), ed h_1 e h_2 le loro distanze dall'asse neutro misurate secondo y ; è $h_1 < 0$, $h_2 > 0$. Sia inoltre S_x il momento statico dell'area al disopra dell'asse neutro; può porsi

$$I_x = S_x h_1 - S_x h_2 = - S_x (h_2 - h_1) = - S_x h^*$$

essendo h^* il valore assoluto della distanza tra C_1 e C_2 proiettata su y . Si ha perciò, chiamando τ_{zyn} la τ_{zy} sull'asse neutro,

$$\tau_{zyn} = - \frac{T_y S_x}{I_x b_n}$$

e ancora

$$\tau_{zyn} = \frac{T_y}{b_n h^*} \quad (26)$$

E' interessante notare che C_1 e C_2 sono i punti di applicazione delle risultanti delle forze elementari $\sigma dA'$ di trazione e $\sigma dA''$ di compressione do-

vute alla flessione provocata da T ; essi giacciono su un asse parallelo alla direzione di T . La distanza h^* prende a volte il nome di *braccio della coppia interna*; quindi la τ_{zy} sull'asse neutro coincide con quella che la T provocherebbe ove fosse uniformemente distribuita su un rettangolo avente per dimensioni la corda baricentrica e il braccio della coppia interna.

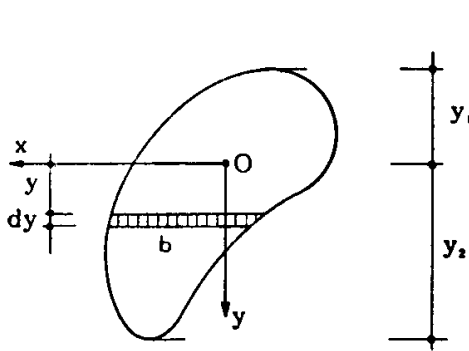


FIG. 9-16

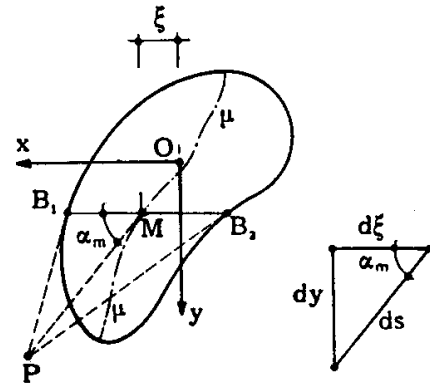


FIG. 9-17

Si vuole adesso verificare che la distribuzione (9-23) e (9-24) soddisfa le condizioni di equilibrio alla traslazione secondo gli assi x ed y . Si ha (fig. 9-16)

$$I = \int_{y_1}^{y_2} by^2 dy = \int_{y_1}^{y_2} y b y dy = \int_{y_1}^{y_2} y dS_x$$

e integrando per parti

$$I_x = \left(y S_x \right)_1^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} S_x dy .$$

Si può scrivere perciò

$$\int_A \tau_{zy} dA = - \frac{T_y}{I_x} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S_x}{b} b dy = - \frac{T_y}{I_x} \int_{y_1}^{y_2} S_x dy = T_y .$$

Inoltre si ha, chiamando τ_{zxm} il valore medio di τ_{zx} lungo la corda b ,

$$\tau_{zxm} = \tau_{zy} \operatorname{ctg} \alpha_m$$

essendo α_m (fig. 9-17) l'angolo che la congiungente il punto medio M della

corda b , con il punto P d'incontro delle due tangenti al contorno negli estremi della corda, forma con la corda stessa.

Sia μ la curva luogo dei punti M , e ξ la distanza dei punti M dall'asse y ; si può porre, indicando con ds il differenziale di arco della linea μ corrispondente all'incremento dy

$$\operatorname{ctg} \alpha_m dy = d\xi = \cos \alpha_m ds .$$

Il contributo alla T_x della striscia $b dy$ è fornito perciò da

$$\tau_{zxm} b dy = \tau_{zy} b \operatorname{ctg} \alpha_m dy = \tau_{zy} b \cos \alpha_m ds$$

da cui

$$T_x = - \frac{T_y}{I_x} \int_{\mu} S_x \cos \alpha_m ds . \quad (b')$$

Il momento centrifugo I_{xy} della sezione rispetto agli assi x ed y è

$$I_{xy} = - \int_A xy dA = - \int_{y_1}^{y_2} by \xi dy = - \int_{y_1}^{y_2} \xi dS_x$$

e integrando per parti

$$I_{xy} = - \left(\xi S_x \right)_{y_1}^{y_2} + \int_{y_2}^{y_1} S_x \frac{d\xi}{dy} dy = \int_{\mu} S_x \cos \alpha_m ds ;$$

perciò si ha, dalla (b'),

$$\frac{T_y}{T_x} = - \frac{I_x}{I_{xy}}$$

relazione identica alla (n), che esprime essere T orientata secondo la direzione coniugata dell'asse neutro $n = x$.

Il momento delle forze elementari $\tau_z dA$ rispetto al baricentro G è fornito dalla nota espressione

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA .$$

Con riferimento alla striscia elementare $b dy$ (fig. 9-16) le forze $\tau_{zy} dA$

presentano la risultante $\tau_{zy} b dy$, applicata nel punto medio M, e perciò esse offrono al momento M_t un contributo pari a

$$\tau_{zy} b \xi dy .$$

Le forze elementari $\tau_{zx} dA$ sono tutte a distanza y da G, e il loro momento rispetto a G è perciò

$$- \tau_{zxm} b y dy = - \tau_{zy} b y \operatorname{ctg} \alpha_m dy .$$

Si può scrivere quindi

$$M_t = \frac{T_y}{I_x} \int_{y_1}^{y_2} S_x (\xi - y \operatorname{ctg} \alpha_m) dy . \quad (27)$$

L'integrale (9-27) si può calcolare agevolmente come sommatoria, e dipende dalla forma della sezione. Il rapporto

$$e_x = \frac{M_t}{T_y} \quad (28)$$

rappresenta l'ascissa del punto in cui l'asse x è tagliato dalla forza T che

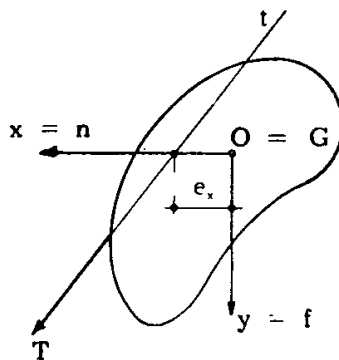


FIG. 9-18

provoca la distribuzione (9-23) (9-24); resta così fissata la retta di azione della forza tagliante, che finora era rimasta imprecisata (fig. 9-18).

8. Le linee di flusso delle tensioni tangenziali.

Si consideri la generica linea di flusso, che taglia in C' e C'' le corde parallele all'asse neutro ed ubicate a distanza rispettivamente y' e y'' da quest'ultimo (fig. 9-19).

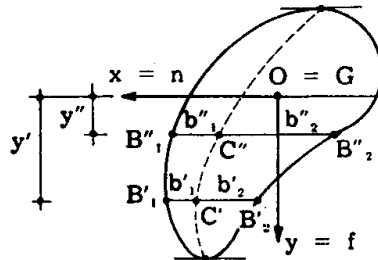


FIG. 9-19

I flussi delle tensioni τ_z attraverso i segmenti $B'_1 C' = b'_1$, $C' B'_2 = b'_2$, $B''_1 C'' = b''_1$, $C'' B''_2 = b''_2$, sono

$$\begin{aligned} f'_1 &= \tau'_{zy} b'_1 & ; & & f'_2 &= \tau'_{zy} b'_2 \\ f''_1 &= \tau''_{zy} b''_1 & ; & & f''_2 &= \tau''_{zy} b''_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{f'_1}{f'_2} &= \frac{b'_1}{b'_2} \\ \frac{f''_1}{f''_2} &= \frac{b''_1}{b''_2} \end{aligned}$$

Ma è pure, come si deduce da quanto detto nel § 9-6 in relazione al teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} \frac{f'_1}{f'_2} &= \frac{S'_{1x}}{S'_{2x}} \\ \frac{f''_1}{f''_2} &= \frac{S''_{1x}}{S''_{2x}} \end{aligned}$$

essendo S i momenti rispetto all'asse x delle aree comprese tra il contorno, la linea di flusso, e le due corde b' e b'' . Si ha perciò

$$\begin{aligned} \frac{S'_{1x}}{S'_{2x}} &= \frac{b'_1}{b'_2} \\ \frac{S''_{1x}}{S''_{2x}} &= \frac{b''_1}{b''_2} \end{aligned}$$

E cioè, qualsiasi corda si scelga, il rapporto tra i momenti statici delle due parti comprese tra la corda, il contorno e la linea di flusso è uguale al rapporto tra le due parti in cui la corda è divisa dalla linea stessa. Ciò significa che la linea di flusso taglia tutte le corde parallele all'asse neutro secondo un rapporto costante (*). Dopo ciò è immediato il tracciamento delle linee di flusso, che possono ottenersi dividendo tutte le corde parallele all'asse neutro in parti uguali, e congiungendo i punti di divisione. Tutte le linee di flusso convergono nei due punti più distanti dall'asse neutro.

9. Energia di deformazione e fattore di taglio.

L'energia di deformazione derivante dalle tensioni tangenziali è fornita, per le (9-23) e (9-24), da

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{l}{2G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{l}{2G} \frac{T_y^2}{I_x^2} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) dA = \\ &= \frac{l}{2G} \frac{T_y^2}{A^2 \rho_x^4} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) dA . \end{aligned}$$

Ponendo L_t nella nota forma (9-12)

$$L_t = \chi \frac{T_y^2 l}{2GA}$$

si ottiene l'espressione del fattore di taglio, dipendente solo dalla geometria della sezione

$$\chi = \frac{1}{A \rho_x^4} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) dA . \quad (29)$$

L'integrale della (9-29) può calcolarsi, nei casi meno semplici, come sommatoria. E' evidente, per quanto sopra detto, che la (9-29) vale se le corde b sono parallele all'asse neutro.

(*) Date due corde vicine, distanti dy , si ha

$$\frac{b'_1}{b'_2} = \frac{S_1 + b''_1 hy}{S_2 + b''_2 hy} = \frac{S_1 (1 + chy)}{S_2 (1 + chy)} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{b''_1}{b''_2} .$$

Si osservi che, se le τ_z fossero distribuite uniformemente sulla sezione, si avrebbe

$$L_t = \frac{l}{2G} \int_A \tau_z^2 dA = \frac{T_y^2 l}{2GA}$$

e sarebbe $\chi = 1$. Perciò il fattore χ tiene conto della non uniforme ripartizione delle tensioni dovute al taglio.

10. Influenza del modulo di Poisson sulle componenti di tensione dovute al taglio.

Si osserva che nella distribuzione esatta delle τ_z dovute al taglio (9-9) interviene il valore del modulo di Poisson $1/m$, il quale gioca un ruolo non trascurabile. Per $1/m = -1$, τ_{zx} e τ_{zy} risulterebbero addirittura ∞ . E' questo l'unico caso del problema di De Saint-Venant in cui il modulo $1/m$ compare nelle espressioni delle componenti di tensione; nella trattazione approssimata invece $1/m$ non appare, ed è questa una diretta conseguenza dell'ipotesi a base della teoria, e cioè del supporre τ_{zy} costante lungo la corda. Il fatto che per $1/m = -1$ la τ_z esatta diviene infinita non è però che una singolarità analitica, perchè, pur essendo teoricamente possibile che $1/m$ attinga il valore -1 , in realtà in nessun materiale ciò si verifica.

11. La sezione rettangolare.

Si prenda in esame la sezione rettangolare $b \times h$, sollecitata dalla

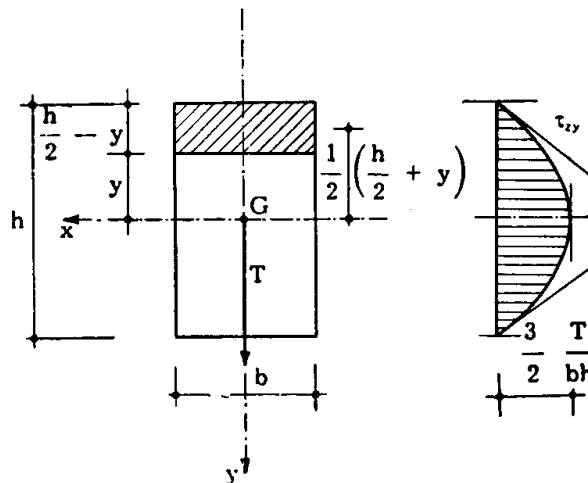


FIG. 9-20

forza tagliante T secondo una direzione principale (fig. 9-20); in questo caso $y = s$, $x = n$, $T_y = T$.

Poichè è

$$S_x = -\frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = -\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

risulta

$$\tau_{zy} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (c')$$

La τ_{zy} varia perciò con legge parabolica, annullandosi ai due lembi, e attingendo il massimo valore

$$\tau_{zy \text{ max}} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \quad (30)$$

in corrispondenza della mezzeria.

La τ_{zx} è nulla, essendo in ogni punto $\alpha = 90^\circ$; la forza T risultante delle $\tau_z dA$ passa per il baricentro della sezione.

Le linee di forza delle τ_z sono le rette parallele ad y . Dalla (9-29) si trae

$$\chi = \frac{1}{bh} \frac{1}{h^4} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{b^2}{4b} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{36}{h^5} \frac{h^5}{30}$$

e cioè in definitiva

$$\chi = \frac{6}{5}. \quad (31)$$

Si osserva che la massima τ_z è pari ai $3/2$ del valore medio T/bh ; sia essa che il fattore di taglio sono gli stessi, per sezione sollecitata secondo il lato lungo, e secondo il lato corto.

12. La sezione circolare.

Per la sezione circolare si ha, qualsiasi direzione abbia t , $T_y = T$, poichè l'ellisse d'inerzia è un cerchio.

Inoltre (fig. 9-21) si può scrivere

$$x = R \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad y = R \operatorname{cos} \alpha \quad ; \quad dy = -R \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

$$dS_x = 2xy \, dy = -2R^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} \alpha \, d\alpha$$

$$S_x = -2R^3 \int_{180^\circ}^{\varphi} \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} \alpha \, d\alpha = -2R^3 \left(\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{3} \right)_{180^\circ}^{\varphi} = -\frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \operatorname{sen}^2 \varphi . \quad (d')$$

La τ_{zy} è nulla in corrispondenza dei due estremi inferiore e superiore,

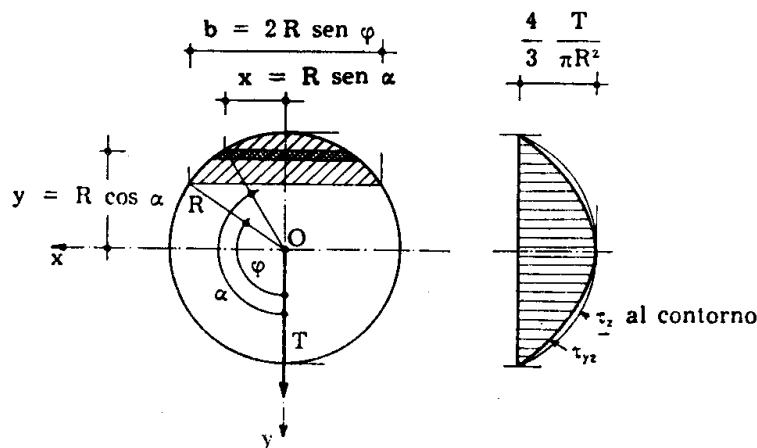


FIG. 9-21

e attinge il massimo valore

$$\tau_{zy \max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \quad (32)$$

in corrispondenza dell'asse neutro.

Lungo la generica corda, la τ_{zx} , e con essa la τ_z , assume il valore massimo ai due estremi; questo valore massimo di τ_{zx} è fornito (fig. 9-22) da

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \operatorname{ctg} (180^\circ - \varphi) = -\tau_{zy} \operatorname{ctg} \varphi$$

e per la (d')

$$\tau_{zx} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi . \quad (e')$$

Dalle (d') ed (e') risulta che sul contorno si ha

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \sqrt{\sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}$$

e ancora

$$\tau_z = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \sin \varphi . \quad (f')$$

Il massimo di τ_{zy} (9-32) è perciò anche il massimo che la τ_z assume nella sezione circolare; la $\tau_{z \max}$ è pari quindi ai 4/3 della tensione media $T/\pi R^2$.

Anche nel caso in esame la forza T passa per il baricentro G .

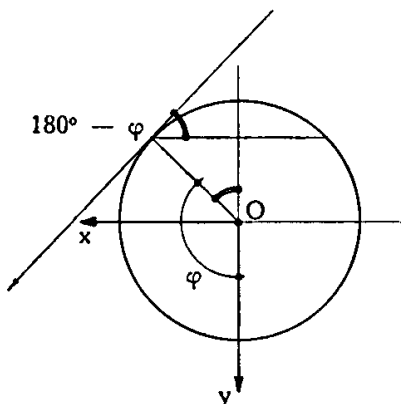


FIG. 9-22

Si calcoli il fattore di taglio χ attraverso la (9-29), trascurando il termine $\text{ctg}^2 \alpha$ in confronto all'unità (questo equivale a tener conto delle sole τ_{zy}); si ottiene così

$$\chi = \frac{16}{\pi R^6} \int_0^\pi \frac{4}{9} \frac{R^6 \sin^6 \varphi}{2 R \sin \varphi} R \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{9 \pi} \int_0^\pi \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{32}{9 \pi} \frac{5}{16} \pi = \frac{10}{9}$$

Tenendo conto anche di $\text{ctg}^2 \alpha$, dalla stessa (9-29) si ha invece

$$\chi = \frac{32}{27} \quad (33)$$

Le linee di forza delle τ_z sono ellissi aventi per asse maggiore il diametro del cerchio disteso sull'asse y .

13. La sezione a \square .

Si consideri una sezione sottile a \square (fig. 9-23) sollecitata da un taglio T parallelo all'asse y ; la sezione si assimila ad un insieme di rettangoli. Con-

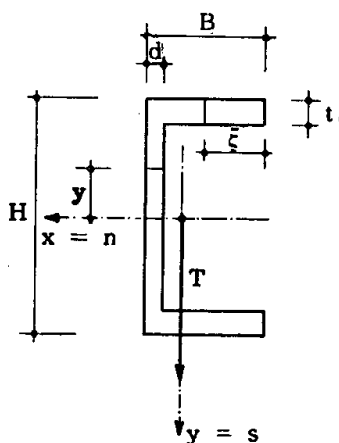


FIG. 9-23

viene scegliere la corda parallela all'asse y nelle due ali, ed all'asse x nell'anima; in tal modo la corda ha la minima lunghezza, e perciò si consegue una migliore approssimazione.

Poichè T è parallelo ad y , è $y = s$, $x = n$, $T_y = T$.

In corrispondenza della corda t alla distanza ξ dall'estremo dell'ala si ha

$$S_x = - \frac{t \xi}{2} (H - t)$$

e perciò (9-22)

$$\tau_{zx} = \frac{T}{2 I_x} (H - t) \xi ; \quad (g')$$

la τ_{zx} varia perciò linearmente lungo l'ala (fig. 9-23). La τ_{zy} lungo la generica corda t varia parabolicamente, e i due valori estremi sono nulli (fig. 9-

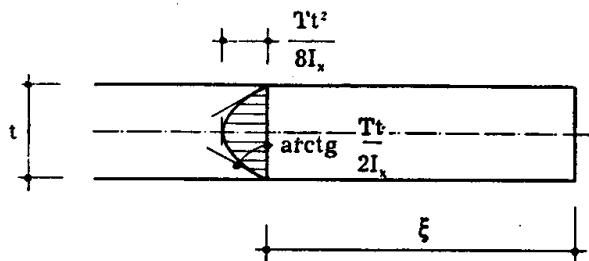


FIG. 9-24

24); ciò vuol dire che il diagramma delle τ_{zy} deve essere simmetrico rispetto all'asse dell'ala.

L'inclinazione del diagramma delle τ_{zy} è (a')

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{T}{t I_x} \frac{\partial S_x}{\partial x} - \frac{T}{I_x} y = - \frac{T}{2 I_x} (H - t) - \frac{T}{I_x} y ;$$

essa è nulla per $y = \frac{H - t}{2}$ (asse dell'ala), ed assume ai due bordi dell'ala i valori $\pm \frac{T t}{2 I_x}$. La τ_{zy} attinge perciò un massimo

$$\tau_{zy \max} = \frac{T t^2}{8 I_x} \quad (h')$$

indipendente da ξ . Il valore (h') è molto piccolo rispetto a quello di τ_{zx} , e in genere si trascura. In corrispondenza della generica corda d nell'anima la τ_{zy} coincide, nello spirito della trattazione approssimata, con la τ_z totale, perchè la τ_{zx} varia con legge lineare lungo la corda stessa, che è parallela all'asse neutro, ed essendo nulla ai due estremi non può che essere nulla in tutti i punti della corda. Nel caso in esame è

$$S_x = - \frac{B t}{2} (H - t) - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} - t - y \right) d \left(\frac{H}{2} - t + y \right)$$

da cui

$$\tau_{zy} = \frac{T}{2 I_x} \left[(H - t) B \frac{t}{d} + \left(\frac{H}{2} - t \right)^2 - y^2 \right]. \quad (i')$$

Dalla (i') si trae che τ_{zy} varia parabolicamente con y (fig. 9-25), raggiungendo il suo massimo per $y = 0$.

Si osserva dalle (i') e (g') che per $y = \frac{H}{2} - t$, è

$$\tau_{zy} = \frac{T}{2 I_x} (H - t) B \frac{t}{d}$$

e, per $\xi = B - d$, è

$$\tau_{zx} = \frac{T}{2 I_x} (H - t) (B - d).$$

I due valori $\tau_{zy} d$ e $\tau_{zx} t$ sono poco dissimili tra loro; la differenza

è data, a meno di T/I_x , dal momento statico del rettangolo $d \times t$ secondo cui si sovrappongono l'ala e l'anima (rettangolo 1 della fig. 9-25).

Dalla (i') si osserva che la τ_{zy} è somma di una quantità costante, proporzionale al momento statico del rettangolo $t \times B$ rispetto all'asse x , e di una quantità variante con legge parabolica secondo y , proporzionale al momento statico rispetto ad x del rettangolo $d \times (H/2 - t - y)$ (rettangolo 2 della fig. 9-25); la prima è preponderante rispetto alla seconda, per

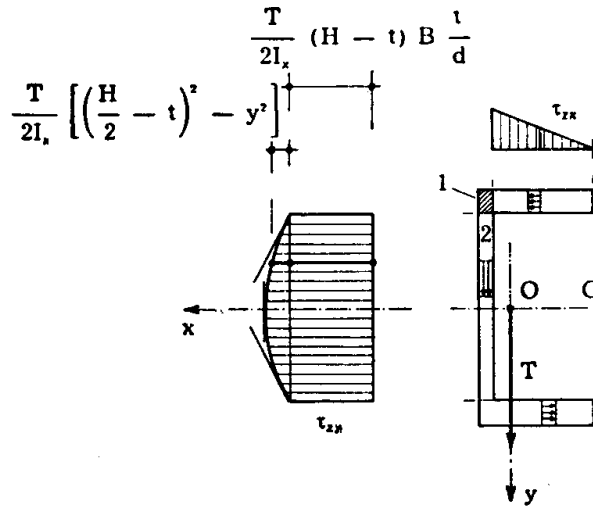


FIG. 9-25

cui il diagramma delle τ_{zy} si può assimilare ad un rettangolo, e la τ_{zy} è fornita in tal caso da

$$\tau_{zy} = \tau_{z \max} = \frac{T}{(H - 2t)d}; \quad (34)$$

e cioè si calcola la $\tau_{z \max}$ come se tutto il taglio T fosse assorbito dalla sola anima, con distribuzione uniforme di tensioni tangenziali.

Trascurando la τ_z delle ali, dalla relazione

$$L_t = \frac{t}{2G} \int_A \tau_z^2 dA = \frac{T^2 t}{2G(H - 2t)d} + \chi \frac{T^2 t}{2GA}$$

si trae

$$\chi = \frac{A}{(H - 2t)d} \quad (35)$$

e cioè il fattore di taglio, quando T agisce parallelamente all'asse dell'anima, è fornito con buona approssimazione dal rapporto fra l'area totale e quella dell'anima.

La risultante delle $\tau_{zx} dA$ dell'ala è

$$T' = -T''' = \frac{T t}{4 I_x} (H - t) (B - d)^2 ;$$

la risultante delle $\tau_{zy} dA$ dell'anima è $T'' = T$; il momento della coppia costituita dalle due forze T' e T''' (fig. 9-26) è perciò

$$M = \frac{T t}{4 I_x} (H - t)^2 (B - d)^2 .$$

Ne segue che la risultante delle $\tau_{zx} dA$ e $\tau_{zy} dA$ è una forza T parallela ad y , situata rispetto alla mezzzeria dell'anima dalla parte delle x positive, a distanza

$$\frac{M}{T} = \frac{(H - t)^2 (B - d)^2 t}{4 I_x} ;$$

chiamando e_G la distanza del baricentro dalla mezzzeria dell'anima, la di-

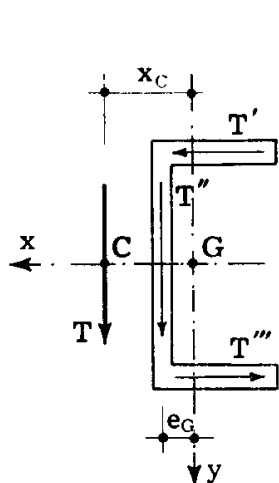


FIG. 9-26

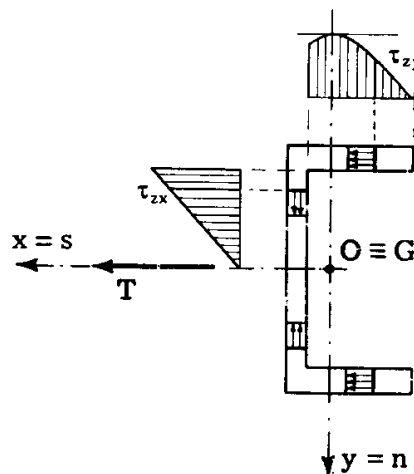


FIG. 9-27

stanza x_G di T dal baricentro è fornita (fig. 9-26) da

$$x_G = e_G + \frac{(H - t)^2 (B - d)^2 t}{4 I_x} . \quad (l')$$

Solo se la forza T è a tale distanza da G , la distribuzione delle τ_z da essa generate è fornita dalle (g') e (i'); in caso contrario occorre aggiungere a queste ultime le τ_z di carattere torsionale.

Lo stesso profilato della fig. 9-23 sia sollecitato da una forza T parallela all'asse di simmetria (fig. 9-27); in tal caso è $T_x = T$, e l'asse neu-

tro $y = n$ è ortogonale ad s ; va usata la (9-22'). Le tensioni τ_{zy} nelle ali variano con legge parabolica, raggiungendo il loro massimo valore in corrispondenza dell'asse neutro, le tensioni τ_{zx} nell'anima variano invece con legge lineare, annullandosi in corrispondenza della mezzeria, ove $S_x = 0$. La risultante delle $\tau_z dA$ deve passare per il baricentro G , per ragioni di simmetria.

14. La sezione a Γ .

In maniera perfettamente analoga si tratta il caso del profilato a Γ (fig. 9-28). Se la forza T agisce secondo l'asse dell'anima, la τ_{zx} varia linearmente lungo l'ala, la τ_{zy} parabolicamente lungo l'anima.

Si osservi che nella fig. 9-28 si è direttamente riportato il verso delle τ_{zx} , e non il segno, dipendendo questo dall'orientamento della normale m alla corda. Per esempio, con riferimento alla corda 1-1, se m è diretta verso destra, il momento statico S_x della (9-22) è quello dell'area a sinistra della 1-1, e perciò è ne-

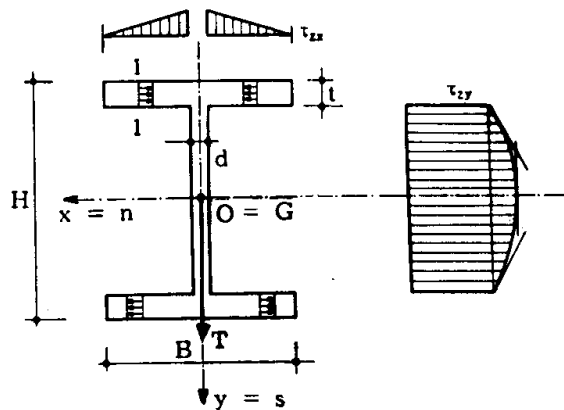


FIG. 9-28

gativo; quindi τ_{zm} è positiva, e cioè diretta secondo m (verso destra). Se invece m è diretta verso sinistra, S_x è il momento statico della parte a destra della 1-1, e quindi è positivo; se ne trae che τ_{zm} è negativa, e diretta perciò contro m (verso destra, anche in questo caso).

Valgono, in relazione all'espressione approssimata della $\tau_{z \max}$, le stesse considerazioni fatte per la sezione a \square ; può pertanto scriversi, anche per il profilato a Γ sollecitato secondo l'asse dell'anima,

$$\tau_{z \max} = \frac{T}{(H - 2t)d} \quad (36)$$

Il fattore di taglio χ è con buona approssimazione fornito da

$$\chi = \frac{2 Bt + (H - 2 t) d}{(H - 2 t) d} . \quad (37)$$

La risultante delle $\tau_z dA$ passa per il baricentro G. Si osservi come la tensione tangenziale all'attacco dell'ala con l'anima non differisca di molto da quella massima; poichè lo stesso può dirsi per la tensione normale dovuta alla flessione (fig. 9-29), in alcuni casi di particolare interesse

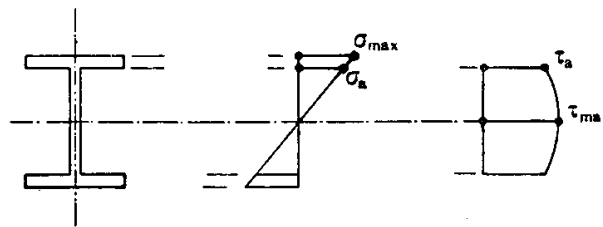


FIG. 9-29

si effettua una verifica di resistenza nella zona suddetta, tenendo conto della contemporanea presenza di σ e τ .

Se la forza T agisce normalmente all'asse dell'anima (fig. 9-30) le tensioni tangenziali si destano praticamente solo nelle due ali, ove va-

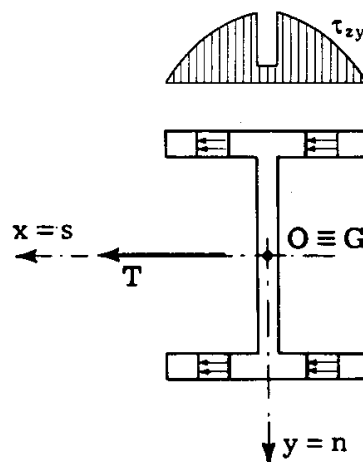


FIG. 9-30

riano con legge parabolica; nell'anima infatti se la corda si prende parallela ad y il momento statico S_x è sempre nullo, se si assume parallela ad x l'ampiezza b è tanto forte che τ_{zy} è trascurabile rispetto a quella che si verifica nell'ala. Può porsi perciò, con buona approssimazione,

$$\tau_{z \max} = \frac{3}{2} \frac{T}{2 Bt} ; \quad (38)$$

il fattore di taglio coincide (*) con quello della sezione rettangolare amplificato nel rapporto $(1 + \text{area dell'anima}/\text{area delle ali})$:

$$\tau_{z \max} = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{A''}{A'} \right). \quad (39)$$

15. La scomposizione della forza tagliante secondo due direzioni preferenziali.

Si può eseguire la ricerca delle tensioni tangenziali dovute a due forze taglianti $T_1 = 1$ e $T_2 = 1$ agenti secondo due direzioni qualsiasi t_1 e t_2 , ricavando nel punto generico P le relative componenti della tensione tangenziale secondo due assi l ed m

$$\begin{array}{ll} \tau'_{zt} & \tau''_{zt} \\ \tau'_{zm} & \tau''_{zm} \end{array} \quad (m')$$

In presenza di una forza tagliante qualsiasi T, le componenti della tensione tangenziale nello stesso punto P sono allora fornite, per il principio di sovrapposizione degli effetti, da

$$\begin{array}{l} \tau_{zt} = T_1 \tau'_{zt} + T_2 \tau''_{zt} \\ \tau_{zm} = T_1 \tau'_{zm} + T_2 \tau''_{zm} \end{array} \quad (n')$$

essendo T_1 e T_2 le componenti di T secondo le direzioni t_1 e t_2 (fig. 9-31). Si osservi che perchè la (n') sia applicabile è necessario che la forza T passi per il punto C di incontro delle due rette d'azione t_1 e t_2 delle ri-

(*) L'energia di deformazione è

$$L_t = \frac{l}{2G} \int_{A'} \tau_z^2 dA + \frac{l}{2G} \int_{A''} \tau_z^2 dA \approx \frac{l}{2G} \int_{A'} \tau_z^2 dA ;$$

ponendo al solito

$$L_t = \chi \frac{T^2 l}{2G (A' + A'')}$$

si ha

$$\chi = \int_{A'} \tau_z^2 dA \cdot \frac{A' + A''}{T^2} = \frac{A'}{T^2} \int_{A'} \tau_z^2 dA \cdot \left(1 + \frac{A''}{A'} \right) = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{A''}{A'} \right).$$

sultanti delle forze $\tau' dA$ e $\tau'' dA$; in caso contrario la T non può essere sostituita da due forze T_1 e T_2 aventi per rette d'azione t_1 e t_2 , condizione necessaria perchè le componenti τ_{zt} e τ_{zm} siano fornite, per ciascuna delle due forze $T_1=1$ e $T_2=1$, dalle (m'). Se la T non passa per C , si trasla parallelamente a se stessa di una quantità h , fino a portarla su C ; in tal modo si viene ad aggiungere alla T un momento di trasporto Th , che è un momento torcente; alle τ_z dettate dalla (n') vanno aggiunte quelle dovute al momento $M_t = Th$. Il punto C ha perciò lo stesso carattere del *centro di taglio* determinato al n. 3 di questo capitolo; esso però non coincide con quello, essendo stato ricavato attraverso una trattazione approssimata, anzi varia al variare delle due direzioni t_1 e t_2 .

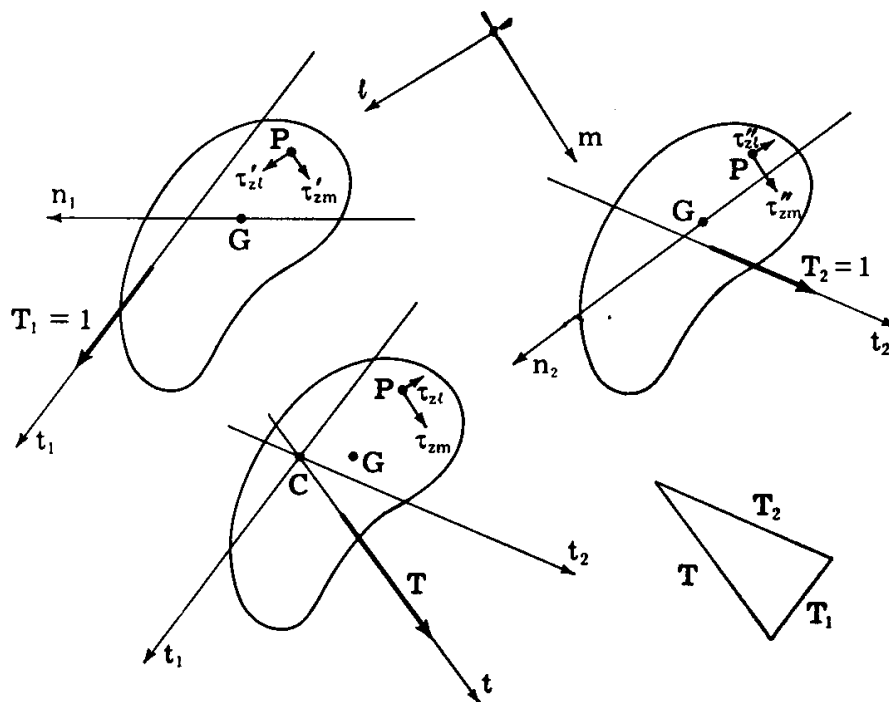


FIG. 9-31

La scelta delle direzioni t_1 e t_2 va fatta con criteri preferenziali, adottando quelle che, per la particolare natura della sezione, offrono garanzia di maggiore approssimazione e sono connesse con calcoli più semplici; ciò si valuta in relazione agli assi neutri connessi con t_1 e t_2 , per semplificare la ricerca dei momenti statici.

Nel caso della sezione a \square il punto C è fornito dall'intersezione con l'asse x della retta parallela all'asse y ed all'ascissa x_C da questo (fig. 9-26); nella sezione a Γ , il punto C coincide con il baricentro; nei cantonali, con la intersezione degli assi delle due ali.

Sovente accade che, scomponendo la forza T secondo due direzioni preferenziali, i risultati siano molto più vicini al vero che non applicando direttamente la (9-22); è molto indicativo, a questo titolo, il caso della se-

zione rettangolare sollecitata secondo un asse s qualsiasi (fig. 9-32). Conducendo dai vertici B e C le parallele $B B'$ e $C C'$ all'asse neutro n , la generica linea di flusso delle τ_z appare come una spezzata, composta di un segmento $E F$ parallelo ad y nel tratto compreso tra le rette $B B'$ e $C C'$,

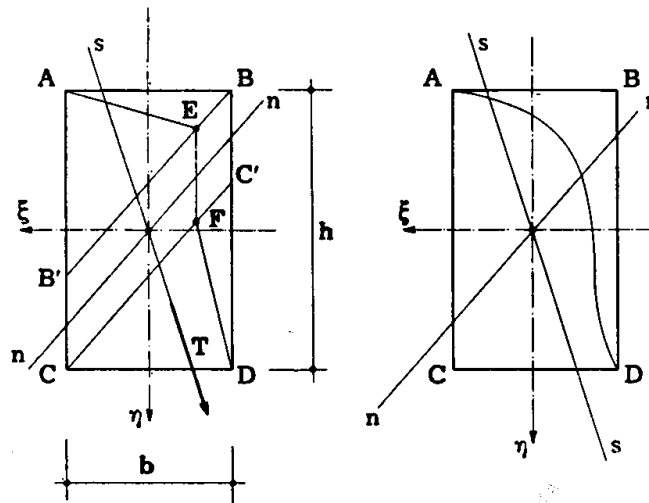


FIG. 9-32

e dai segmenti $A E$ ed $F D$; essa presenta perciò due punti angolosi in E ed F , e questo è fisicamente inammissibile. Scomponendo invece la T nelle due forze T_ξ e T_η , e calcolando la $\tau_{z\xi}$ e la $\tau_{z\eta}$ nei due casi attraverso la (c'), l'equazione della generica linea di flusso è fornita da

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\tau_{z\eta}}{\tau_{z\xi}} = \frac{T_\eta}{T_\xi} \frac{1 - 4\eta^2/h^2}{1 - 4\xi^2/b^2}$$

e separando le variabili

$$\frac{d\eta}{T_\eta \left(1 - 4\frac{\eta^2}{h^2}\right)} = \frac{d\xi}{T_\xi \left(1 - 4\frac{\xi^2}{b^2}\right)} \quad (o')$$

Per la relazione

$$\int \frac{dx}{1 - a^2 x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{1 + ax}{1 - ax} + \text{cost}$$

si ha, integrando la (o'),

$$\frac{h}{T_\eta} \ln \frac{h + 2\eta}{h - 2\eta} - \frac{b}{T_\xi} \ln \frac{b + 2\xi}{b - 2\xi} = c.$$

La linea passante per il punto $\xi_0 \eta_0$ ha perciò l'equazione

$$\frac{h}{T_\eta} \ln \frac{(h - 2\eta_0)(h + 2\eta)}{(h + 2\eta_0)(h - 2\eta)} = \frac{b}{T_\xi} \ln \frac{(b - 2\xi_0)(b + 2\xi)}{(b + 2\xi_0)(b - 2\xi)}$$

o ancora

$$\frac{h - 2\eta_0}{h + 2\eta_0} \frac{h + 2\eta}{h - 2\eta} = \left(\frac{b - 2\xi_0}{b + 2\xi_0} \frac{b + 2\xi}{b - 2\xi} \right)^{\frac{b}{h} \frac{T_\eta}{T_\xi}} \quad (p')$$

Le linee di forza passano tutte per i vertici A e D più vicini all'asse di sollecitazione, poichè la (p') è soddisfatta, quali che siano x_0 ed y_0 , da

$$\xi = \frac{b}{2}, \quad \eta = \frac{h}{2}$$

e da

$$\xi = -\frac{b}{2}, \quad \eta = -\frac{h}{2}.$$

Per $\eta = \eta_0 = \pm h/2$ il primo membro della (p') assume la forma indeterminata 0/0, e perciò la (p') è soddisfatta da qualsiasi valore di ξ ; se ne trae che i due lati AB e CD del rettangolo costituiscono una linea di flusso. Analogamente per $\xi = \xi_0 = \pm b/2$, il secondo membro della (p') prende l'aspetto indeterminato 0/0, e perciò la (p') è soddisfatta per qualsiasi valore di η ; anche i lati AC e BD sono quindi delle linee di flusso. Le linee di flusso (p') sono delle curve continue (fig. 9-32), e sono perciò più vicine alla realtà delle spezzate cui esse si riducono nel primo caso.

16. Ellisse dei fattori di taglio.

Sia \widehat{s}_η l'angolo che l'asse di sollecitazione forma con l'asse principale d'inerzia η (fig. 9-33); le componenti di T secondo gli assi ξ ed η sono fornite da

$$\begin{aligned} T_\xi &= T \sin \widehat{s}_\eta \\ T_\eta &= T \cos \widehat{s}_\eta. \end{aligned}$$

Si ponga l'energia di deformazione dovuta alle tensioni tangenziali da

taglio, invece che sotto l'aspetto (9-12), sotto l'altro

$$L_t = \chi_x \frac{T^2 \ell}{2 GA}, \quad (q')$$

introducendo cioè il taglio totale T al posto della componente

$$T_y = T \cos \widehat{sy};$$

vale la relazione

$$\chi_x = \chi \cos^2 \widehat{sy}. \quad (r')$$

L'energia L_t è somma delle due energie L_ξ ed L_η relative a T_ξ e T_η , e dell'energia mutua $L_{\xi\eta}$.

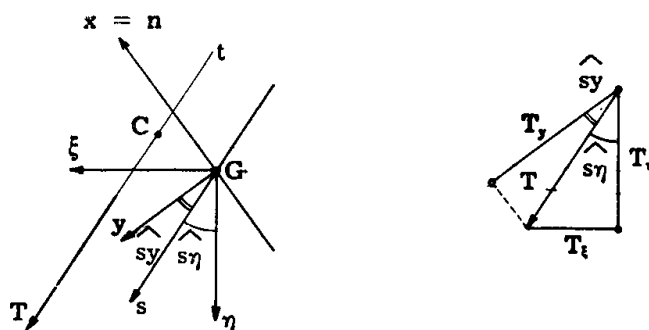


FIG. 9-33

Se ξ (od η) è asse di simmetria, $L_{\xi\eta}$ è nullo (§ 9-54); se non c'è simmetria, può lo stesso, con buona approssimazione, suppersi $L_{\xi\eta}$ nullo.

E' perciò

$$L_t = \chi_x \frac{T^2 \ell}{2 GA} = \chi_\xi \frac{T_\eta^2 \ell}{2 GA} + \chi_\eta \frac{T_\xi^2 \ell}{2 GA},$$

avendo indicato con χ_ξ e χ_η i fattori di taglio relativi all'asse neutro ξ ed all'asse neutro η .

Si ricava così, sostituendo a T_η e T_ξ le loro espressioni in funzione di T ,

$$\chi_x = \chi_\xi \cos^2 \widehat{s\eta} + \chi_\eta \sin^2 \widehat{s\eta}.$$

Portando (fig. 9-34) a partire da G sull'asse s e in una certa scala il segmento $GM = \lambda_x = \frac{1}{\sqrt{\chi_x}}$, il luogo dei punti M è retto dall'equazione

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{\cos^2 \widehat{s\eta}}{\lambda_\xi^2} + \frac{\sin^2 \widehat{s\eta}}{\lambda_\eta^2}, \quad (s')$$

è cioè un'ellisse di semiassi $\lambda_\xi = \frac{1}{\sqrt{\chi_\xi}}$, $\lambda_\eta = \frac{1}{\sqrt{\chi_\eta}}$, che prende il nome di *ellisse dei fattori di taglio*.

Una volta conosciuta l'ellisse, con riferimento al generico asse di sollecitazione s il fattore di taglio χ_x è fornito dall'inverso del quadrato del

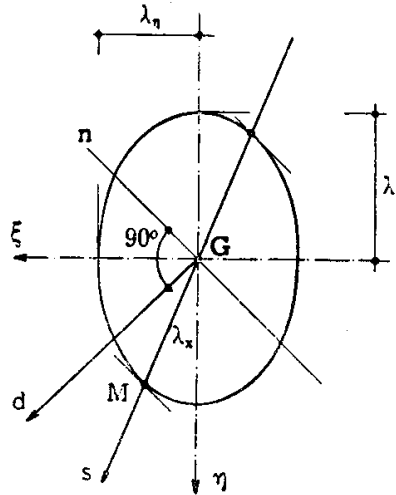


FIG. 9-34

semidiametro λ_x disteso su s . Si osservi che per il rettangolo l'ellisse dei fattori di taglio è un cerchio, essendo $\chi_\xi = \chi_\eta$.

17. Ellisse degli spostamenti medi.

Poichè nel problema del taglio le sezioni non si conservano piane, non si può a rigore parlare di spostamento relativo delle due basi del solido di De Saint-Venant. La definizione di *spostamento relativo medio* f_t dovuto al taglio come quello che, attribuito alle due basi considerate piane e rigide, farebbe compiere alle forze applicate sulle due basi, e quindi alle loro risultanti T e $-T$, un lavoro pari all'energia di deformazione, non è perciò che un artificio analitico (*).

Si ha perciò, se d è la retta secondo cui ha luogo lo spostamento f_t ,

$$\frac{1}{2} T f_t \cos \hat{ds} = \chi_x \frac{T^2 l}{2 GA} \quad (t')$$

(*) Le forze T possono essere quelle stesse che provocano f_t , o altre; nel primo caso l'energia di deformazione è quella diretta, nel secondo caso è quella mutua.

da cui

$$f_t = \chi_x \frac{T \ell}{GA \cos \hat{d}s} \quad (40)$$

Si può supporre che un taglio T_ξ dia luogo ad uno spostamento $f_{t\xi}$ diretto secondo ξ , ed un taglio T_η ad uno spostamento $f_{t\eta}$ diretto secondo η ; se ξ ed η sono assi di simmetria, quanto sopra si verifica in rigore, perchè è nulla l'energia mutua $L_{\xi\eta}$, se ξ ed η non sono assi di simmetria, l'assunto può accettarsi con buona approssimazione, nello stesso spirito in cui, al n. precedente, si è posto anche in tal caso, $L_{\xi\eta} = 0$. E' perciò

$$f_{t\xi} = \frac{T_\xi \ell}{GA \lambda_\eta^2}, \quad f_{t\eta} = \frac{T_\eta \ell}{GA \lambda_\xi^2} \quad (u')$$

Se è presente una forza T di componenti T_ξ e T_η , agente secondo s (fig. 9-34), lo spostamento f_t ha per componenti le (u'), e si effettua secondo una direzione d che forma con l'asse η un angolo $\hat{d}\eta$ fornito da

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \hat{d}\eta &= \frac{f_{t\xi}}{f_{t\eta}} = \frac{T_\xi}{T_\eta} \frac{\lambda_\xi^2}{\lambda_\eta^2} = \frac{\lambda_\xi^2}{\lambda_\eta^2} \operatorname{tg} \hat{s}\eta \\ \operatorname{tg} (\hat{d}\eta \pm 90^\circ) \cdot \operatorname{tg} \hat{s}\eta &= - \frac{\lambda_\eta^2}{\lambda_\xi^2} \end{aligned} \quad (v')$$

Confrontando la (v') con la (6-e) si deduce che la direzione d dello spostamento f_t dovuto ad una forza T agente secondo un asse s è normale alla direzione coniugata di s rispetto all'ellisse dei fattori di taglio (fig. 9-34).

La grandezza di f_t è

$$f_t = \frac{T\ell}{GA} \sqrt{\frac{\cos^2 \hat{s}\eta}{\lambda_\xi^4} + \frac{\operatorname{sen}^2 \hat{s}\eta}{\lambda_\eta^4}}$$

Le coordinate dell'estremo P dello spostamento f_t riportato, secondo la sua direzione d , a partire da G , sono

$$\xi_P = \frac{T\ell}{GA} \frac{\operatorname{sen} \hat{s}\eta}{\lambda_\eta^2}, \quad \eta_P = \frac{T\ell}{GA} \frac{\cos \hat{s}\eta}{\lambda_\xi^2};$$

poichè vale l'identità

$$\lambda_{\eta}^4 \left(\frac{\widehat{\text{sen } s\eta}}{\lambda_{\eta}^2} \right)^2 + \lambda_{\xi}^4 \left(\frac{\widehat{\text{cos } s\eta}}{\lambda_{\xi}^2} \right)^2 = 1$$

da cui

$$\lambda_{\eta}^4 \left(\frac{GA}{Tl} \right)^2 \xi_P^2 + \lambda_{\xi}^4 \left(\frac{GA}{Tl} \right)^2 \eta_P^2 = 1$$

si trae che, a parità di sforzo tagliante T , il luogo degli estremi P dei vet-

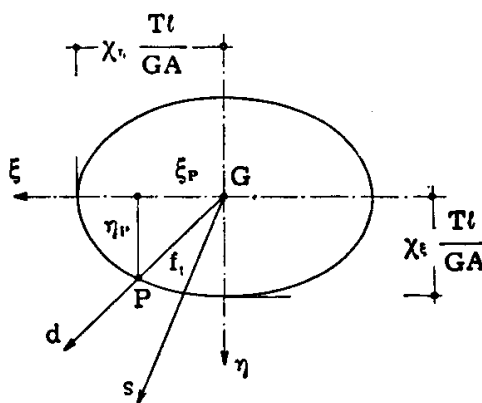


FIG. 9-35

tori $GP = f_t$ è l'ellisse di centro G , i cui semiassi distesi su ξ ed η sono forniti da (fig. 9-35)

$$\begin{aligned} a &= \frac{Tl}{GA \lambda_{\eta}^2} = \chi_{\eta} \frac{Tl}{GA} \\ b &= \frac{Tl}{GA \lambda_{\xi}^2} = \chi_{\xi} \frac{Tl}{GA} \end{aligned} \quad (z')$$