

11. Espressione dell'angolo specifico di torsione.

Dalla uguaglianza del lavoro della caratteristica e dell'energia di deformazione si ha, con riferimento ad una lunghezza unitaria,

$$\frac{M_t \vartheta'}{2} = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA$$

$$M_t \vartheta' = \frac{1}{G} \int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dA .$$

Poichè è, per sezioni semplicemente connesse,

$$\int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 dA = \iint \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \int_{x_1}^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} dx =$$

$$= \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \left[\left(F \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx \right] =$$

$$= - \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \int_{x_1}^{x_2} F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dA ,$$

$$\int_A \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 dA = - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA ,$$

si ha, per la (8-41),

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dA = r \int_A F dA = rV .$$

Si riottiene quindi, per la (8-45), la (8-27)

$$\vartheta' = \frac{r}{2G} \quad (46)$$

da cui (8-8)

$$q = \frac{r I_p}{2 M_t} . \quad (47)$$

Il momento I_p può essere preso rispetto a qualsiasi punto; varia così q , ma non ϑ' .

12. La sezione circolare.

Si pone

$$F = h (x^2 + y^2 - R^2) . \quad (c')$$

Sul contorno è $F=0$; inoltre la (8-41) è soddisfatta:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4 h = - r$$

Il volume V del solido $z=F$ è fornito da

$$V = \int_A F \, dx \, dy = h (I_p - R^2 A) = - \frac{h A R^2}{2} = - h I_p ;$$

si ha perciò (8-45)

$$M_t = - 2 h I_p$$

$$\tau_{zx} = 2 y h = - \frac{M_t}{I_p} y$$

$$\tau_{zy} = - 2 x h = \frac{M_t}{I_p} x$$

La (8-46) fornisce poi

$$\vartheta' = - \frac{4 h}{2 G} = \frac{M_t}{G I_p} .$$

13. La sezione ellittica.

Si pone

$$F = h \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) . \quad (d')$$

Sul contorno è $F=0$; la (8-41) è soddisfatta:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 h \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = - r .$$

Il volume V è (*)

$$V = \int_A F \, dx \, dy = -h \frac{\pi ab}{2};$$

si ha perciò

$$M_t = -hA$$

$$\tau_{zx} = \frac{2yh}{b^2} = -\frac{2M_t}{Ab^2} y$$

$$\tau_{zy} = -\frac{2xh}{a^2} = \frac{2M_t}{Aa^2} x.$$

Dalle (8-46) e ((8-47) si ha poi

$$\vartheta' = -\frac{2h \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}}{2G} = \frac{M_t}{G} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}$$

$$q = \frac{1}{4} \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2.$$

14. L'analogia idrodinamica.

Si consideri un recipiente cilindrico, la cui base abbia la stessa forma della sezione retta del solido di De Saint-Venant; si imprima al recipiente, pieno di un liquido qualsiasi, un moto di rotazione intorno ad un asse pa-

(*)

$$\int_A x^2 \, dx \, dy = I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$\int_A y^2 \, dx \, dy = I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$$

$$\int_A dx \, dy = A = \pi ab$$

$$\int_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx \, dy = -\frac{\pi ab}{2}.$$

parallelo all'asse geometrico z del recipiente stesso. Se si arresta il moto del recipiente, il liquido in esso contenuto continua a circolare finchè, per effetto delle resistenze viscosse, si arresta anche esso; considerando il moto del liquido nei primi momenti dopo l'arresto del recipiente, si può prescindere dalle resistenze viscosse, il moto è perciò stazionario.

Poichè, se la velocità impressa non è eccessiva, il moto è anche piano, esso è definito dalle componenti v_x e v_y della velocità in uno qualsiasi dei piani paralleli a quello di base. Essendo il liquido incomprimibile, vale l'equazione di continuità, esprime che la quantità complessiva di liquido uscente nel tempo unitario da una qualsiasi superficie chiusa, differenza fra tutto il liquido uscente e tutto quello entrante, dev'essere nullo.

Come superficie chiusa si prende quella totale di un cilindro retto la cui direttrice è una qualsiasi curva chiusa s contenuta tutta nel piano della sezione retta (fig. 8-21), e di altezza unitaria. Poichè attraverso le due

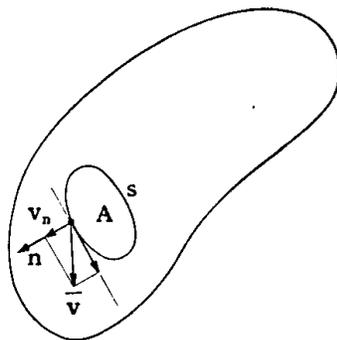


FIG. 8-21

basi non si ha passaggio di liquido, la quantità di liquido uscente nel tempo unitario da questa superficie è fornita, orientando la normale n verso l'esterno, da

$$Q = \int_s v_n ds .$$

L'equazione di continuità porge quindi

$$\int_s v_n ds = 0 . \quad (e')$$

La (e') è anche il flusso del vettore \bar{v} uscente dalla curva s ; per il teorema della divergenza si può scrivere

$$\int_A \operatorname{div} \bar{v} \cdot dA = 0 . \quad (f')$$

La (f') deve valere per qualsiasi area contenuta nella sezione retta; se ne trae che in ogni punto è (*)

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 . \quad (g')$$

Si osservi che la (e') vale non solo per ogni curva chiusa riducibile, ma anche per curve chiuse irriducibili (fig. 8-22). Infatti lungo un con-

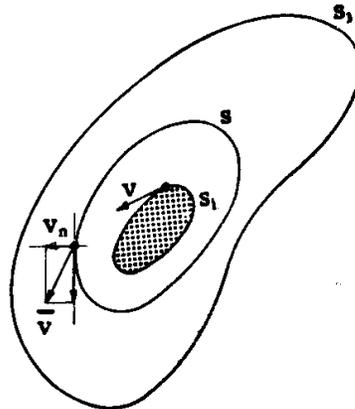


FIG. 8-22

torno (esterno o interno che sia) la \bar{v} è tangente al contorno stesso, e perciò la quantità di liquido uscente da un contorno è nulla; se ne trae

$$\int_{s_1} v_n ds_1 = 0$$

e quindi

$$\int_s v_n ds = 0 .$$

Si deduce dalla (e') che il flusso di \bar{v} attraverso qualsiasi linea congiungente due punti P e Q dipende solo dalle coordinate dei due punti, anche in sezioni pluriconnesse.

Poichè il moto può considerarsi stazionario, le componenti della velocità angolare della rotazione della generica particella elementare possono considerarsi costanti nel tempo; inoltre di esse è diversa da zero solo la componente ω secondo z, poichè la rotazione impressa avviene intorno ad un asse parallelo a z. La ω è la stessa in ogni punto, e pari

(*) Se in un punto fosse $\operatorname{div} \bar{v} > 0$, lo sarebbe per continuità in tutta un'area elementare, e per essa la (f') non sarebbe verificata.

alla velocità della rotazione impressa.

Poichè è $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$ (*), si trae

$$\text{rot } \bar{v} = \text{cost.} \quad (\text{h}')$$

Le (g') ed (h'), unitamente alla condizione che su ogni contorno il vettore \bar{v} è diretto secondo la tangente al contorno stesso, garantiscono che il campo vettoriale \bar{v} coincide, a meno di una costante, con il campo vettoriale $\bar{\tau}_z$ (Greenhill).

L'analogia idrodinamica conduce ad alcune suggestive deduzioni di carattere qualitativo:

a) il valore della $\bar{\tau}_z$ aumenta ove le linee di flusso si infittiscono. Perciò con riferimento alla stessa linea di flusso il valore della tensione è più elevato nei punti più vicini al punto T di tensione nulla (fig. 8-24);

(*) Si consideri (fig. 8-23) un elemento lineare rigido, lungo dy e parallelo a y ; nel tempo unitario esso ruota di $-\partial v_x/\partial y$; un elemento lineare rigido, lungo dx e parallelo ad x , ruota di $+\partial v_y/\partial x$.

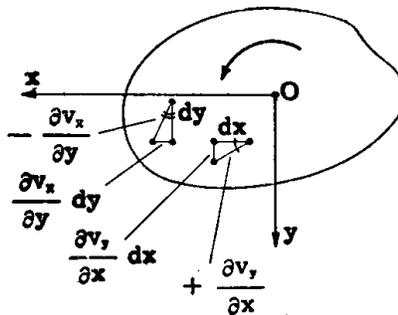


FIG. 8-23

Se i due elementi sono rigidamente collegati (se si considera cioè invece di un elemento lineare un elemento di area) la loro velocità angolare è la media delle due prima specificate,

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Alla stessa espressione può arriversi considerando (nota del § 8-3 c) la rotazione del vettore velocità connesso con un moto rigido di rotazione intorno a z , di velocità angolare ω ; si pensi infatti che, fino a che non intervengono le resistenze viscosi, il moto del liquido dopo l'arresto del recipiente è quello di tanti elementi rigidi di cui ognuno ruota intorno ad un asse parallelo a z con la stessa velocità ω (oltre a traslare).

b) un intaglio sulla superficie esterna, o un vuoto all'interno (ad esempio una soffiatura di fusione) producono (fig. 8-25) un avvicinamento delle linee di forza delle $\bar{\tau}_z$, e perciò un aumento di sollecitazione. Pre-

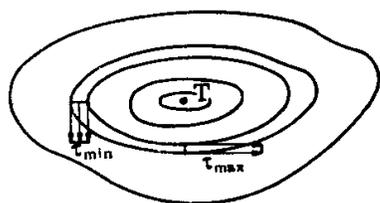


FIG. 8-24

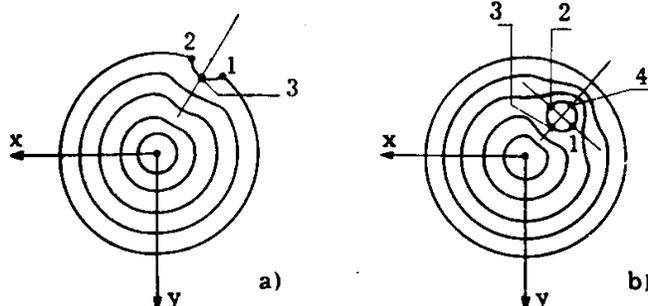


FIG. 8-25

cisamente, poichè è noto che un ostacolo cilindrico a base circolare provoca l'annullarsi della velocità in 1 e 2 e il raddoppiarsi di essa in 3 e 4, lo stesso accade per la $\bar{\tau}_z$ se l'intacco sulla superficie esterna è semicircolare, o se la soffiatura interna è circolare.

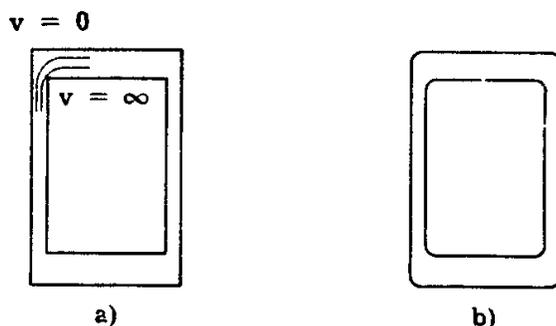


FIG. 8-26

c) in un punto angoloso esterno la $\bar{\tau}_z$ è nulla, in un punto angoloso interno è ∞ (fig. 8-26 a); si ovvia a ciò arrondando gli spigoli interni, e a volte smussando anche gli esterni (fig. 8-26 b), che non contribuiscono alla resistenza;

d) a parità di momento torcente M_t , una sezione cava continua è soggetta a tensioni di gran lunga più basse che non la stessa sezione in cui sia effettuato un taglio lungo tutto un lato; osservando infatti l'andamento delle $\bar{\tau}_z$ si deduce che, per ottenere dalle $\bar{\tau}_z dA$ lo stesso momento M_t rispetto ad un qualsiasi punto P, nel caso della fig. 8-27 b, le $\bar{\tau}_z$ devono essere molto più elevate che nel caso della fig. 8-27 a.

L'analogia idrodinamica si presta poi a risolvere, con approssimazione, il problema della torsione, in quanto permette di tracciare, con approssimazione, le linee di flusso, sia a maniera, sia sfruttando in molti casi

l'intuizione fisica del fenomeno idraulico, sia ancora attraverso modelli.

Conosciute infatti le linee di flusso delle $\bar{\tau}_z$, si considerino due linee vicinissime; la zona in esse compresa si chiama *canale di flusso elementare*.

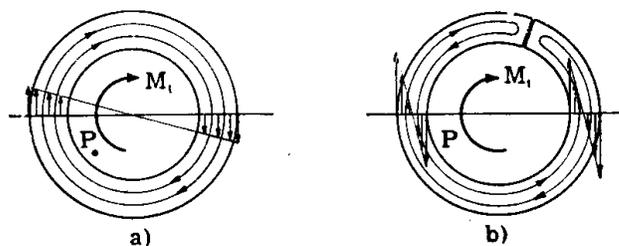


FIG. 8-27

Si può ammettere che la normale ad una linea in qualsiasi suo punto risulti normale anche all'altra linea; il segmento dn di normale compreso fra le due linee è lo spessore del canale in quel punto, e il luogo dei punti

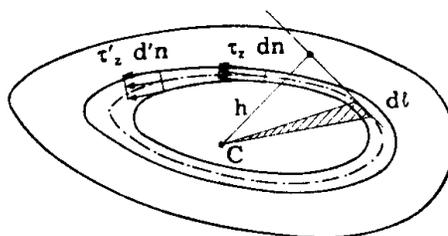


FIG. 8-28

medi dei dn è l'asse o *linea media* del canale. Si può anche ammettere che lungo ogni spessore dn la $\bar{\tau}_z$ sia costante. Per la costanza della portata, si può scrivere perciò (fig. 8-28) (*).

$$\tau_z dn = \tau'_z d'n \quad (i')$$

essendo dn e $d'n$ due spessori generici, e τ_z e τ'_z i valori delle corrispondenti tensioni. Per il teorema di Stokes si ha (si fa riferimento per ora a domini monoconnessi)

$$c = \int_s \tau_z dl = \tau'_z \int_s dl \frac{d'n}{dn} = \tau'_z \Sigma' = r \cdot A'_m \quad (l')$$

(*) Poichè $\text{div } \tau_z = 0$, è il campo delle τ_z è solenoidale. Le linee di flusso sono chiuse su se stesse o sul contorno; quest'ultimo caso è escluso perchè, se un canale taglia il contorno, per la (i') è τ_z sul contorno nè tangente nè nulla, e questo è impossibile.

essendo l'integrale esteso a tutto l'asse del canale, $d\ell$ l'elemento di asse, Σ' la cosiddetta *circuitazione geometrica*

$$\Sigma' = \int_s d\ell \frac{d'n}{dn} = d'n \int_s \frac{d\ell}{dn}$$

ed A'_m l'area racchiusa dall'asse del canale.

Poichè è (8-47)

$$r = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2q \frac{M_t}{I_p} \quad (m')$$

la (l') si scrive

$$\tau'_z = 2q \frac{M_t A'_m}{I_p \Sigma'} \quad (n')$$

Le forze elementari $\bar{\tau}_z d\ell dn$ del canale in esame hanno risultante nulla; infatti essendo il prodotto $\tau_z dn$ costante, tali forze sono proporzionali a $d\ell$, e il poligono dei vettori $d\ell$ è lo stesso asse del canale, che è chiuso. Il momento dM delle forze $\bar{\tau}_z d\ell dn$ può essere perciò valutato rispetto ad un qualsiasi punto C, ed è fornito (fig. 8-28) da

$$dM = \int_s \tau_z dn d\ell \cdot h = \tau'_z d'n \int_s h d\ell = 2 A'_m \tau'_z d'n \quad (o')$$

Si consideri una semiretta a con origine nel punto T racchiuso dalle linee di forza delle $\bar{\tau}_z$ (*), e per ogni canale elementare si valuti il $d'n$ in corrispondenza della semiretta a ; se è α l'angolo che la tangente t all'asse del canale nel punto d'incontro con la a forma con la a stessa (fig. 8-29) risulta

$$d'n = da \operatorname{sen} \alpha$$

$$dM = 2 A'_m \tau'_z \operatorname{sen} \alpha da = 2 A'_m 2q \frac{M_t A'_m}{I_p \Sigma'} \operatorname{sen} \alpha da$$

$$M_t = \int_0^{a^*} dM = 4q \frac{M_t}{I_p} \int_0^{a^*} \frac{A'^2_m}{\Sigma'} \operatorname{sen} \alpha da$$

(*) Il procedimento vale anche se il punto T non è unico (come per es. in alcuni profilati); l'essenziale è considerare tutti gli esistenti canali di flusso, e sommarne i contributi.

da cui

$$q = \frac{I_p}{4 \int_0^{a^*} \frac{A_m'^2}{\Sigma'} \operatorname{sen} \alpha \, da} \quad (48)$$

Se si conosce la legge di variazione di τ'_z lungo a

$$\tau'_z = \tau^* f(a) \quad (49)$$

si può ottenere τ^* :

$$M_t = 2 \tau^* \int_0^{a^*} A'_m f(a) \operatorname{sen} \alpha \, da$$

$$\tau^* = \frac{M_t}{2 \int_0^{a^*} A'_m f(a) \operatorname{sen} \alpha \, da} \quad (50)$$

Una maniera più facile per conoscere in via approssimata ϑ' e il valore di τ_z in ogni punto, una volta conosciute le linee di corrente, è la se-

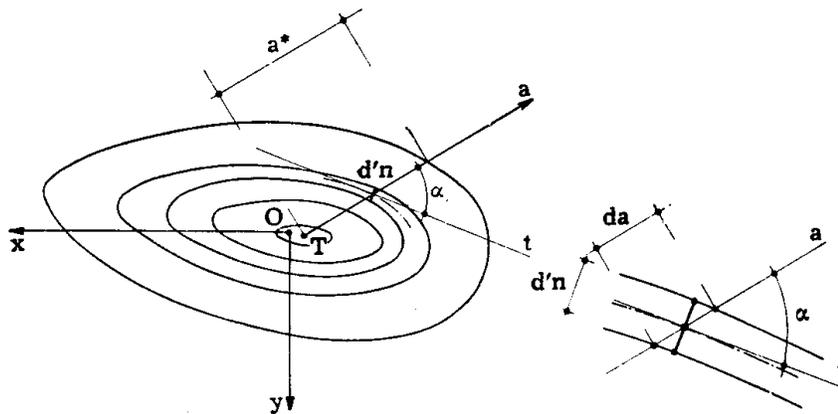


FIG. 8-29

guente. Si divide il solido in tanti cilindri separati, aventi ciascuno come base un canale elementare. Il generico solido assorbe il momento M_i , e

$$\Sigma_i M_i = M_t .$$

Il teorema di Stokes fornisce la rotazione ϑ' del cilindro i -esimo:

$$c_i = \int_s \tau_i \, dl_i = r A_{mi}$$

dove A_{mi} è l'area compresa entro l'asse.

La ϑ' è pari a quella del solido originario, e per la (8-46)

$$r = 2 G \vartheta' ;$$

d'altro canto dalla (o') si ha

$$\tau_i = \frac{M_i}{2 A_{mi} dn_i} .$$

E' perciò

$$\frac{M_i}{2 A_{mi}} \int_s \frac{dl_i}{dn_i} = 2 G \vartheta' A_{mi}$$

da cui

$$\vartheta' = \frac{M_i \int_s \frac{dl_i}{dn_i}}{4 G A_{mi}^2} = \frac{M_i}{C_{ti}}$$

avendo posto (rigidità a torsione $C_{ti} = M_i/\vartheta'$)

$$C_{ti} = \frac{4 G A_{mi}^2}{\int_s \frac{dl_i}{dn_i}} .$$

Dalla relazione di congruenza

$$\vartheta' = \frac{M_1}{C_{t1}} = \frac{M_2}{C_{t2}} = \dots = \frac{M_i}{C_{ti}}$$

si ha

$$\frac{M_i}{C_{ti}} = \frac{\Sigma M_i}{\Sigma C_{ti}} = \frac{M_t}{\Sigma C_{ti}}$$

da cui

$$M_i = M_t \frac{C_{ti}}{\Sigma C_{ti}}$$

e quindi

$$\tau_i = M_t \frac{C_{ti}}{\Sigma C_{ti}} \frac{1}{2 A_{mi} dn_i}$$

$$\vartheta' = \frac{M_t}{\Sigma C_{ti}} .$$

15. La sezione rettangolare allungata.

Si consideri, in applicazione di quanto sopra, una sezione rettangolare allungata, di lati $2a$ e $2b$ (fig. 8-30) con $a \gg b$. Nella figura sono riportate due linee di flusso molto vicine.

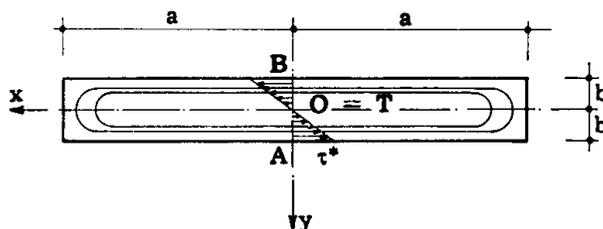


FIG. 8-30

L'analogia idrodinamica assicura che lungo il canale di flusso elementare definito dalle due linee di flusso vicinissime la $\bar{\tau}_z$ assume il suo massimo valore dove lo spessore del canale è minimo, e cioè in corrispondenza della mediana minore AB. E' lungo AB che occorre perciò ricercare il più elevato valore di $\bar{\tau}_z$ nella sezione; si assume quindi l'asse y come retta a . Nei punti della mediana AB la $\bar{\tau}_z$ è diretta secondo x ; se ne trae $\tau_{zy} = 0$. Poichè il rettangolo è molto allungato, può supporre che anche nei punti vicini a quelli della mediana AB sia $\tau_{zy} = 0$; lungo AB si può quindi porre

$$\tau_{zx} = \tau_z$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = 0 .$$

Dalla condizione $\text{rot } \bar{\tau}_z = \text{cost}$ si trae

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \text{cost} .$$

Lungo AB la τ_z varia, per quanto sopra, con legge lineare; poichè in O è $\tau_z = 0$, la massima tensione lungo AB, e quindi nella sezione, si verifica negli estremi A e B. La legge di variazione di τ_z lungo y è perciò

$$\tau_z = \tau_{\max} \frac{y}{b} \quad (p')$$

da cui si trae, assumendo la tensione τ^* di riferimento lungo y coincidente con τ_{\max} (8-49)

$$f(a) = \frac{y}{b} . \quad (q')$$

Confondendo la generica linea di forza con i due segmenti $2a$, a distanza $\pm y$ dall'asse x (ipotesi tanto meno lontana dal vero quanto più il rettangolo è allungato) si ha

$$A'_m = 4 ay .$$

Dalla (8-50) si trae perciò ($\text{sen } \alpha = 1$)

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \int_0^b 4 ay \cdot \frac{y}{b} dy} = \frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^2} . \quad (51)$$

Nella stessa ipotesi di cui prima si può porre

$$\Sigma' = 4 a ;$$

inoltre, sempre se il rettangolo è molto allungato, si può scrivere

$$I_p = I_y = \frac{4}{3} ba^3 .$$

Dalla (8-48) si trae perciò

$$q = \frac{\frac{4}{3} ba^3}{4 \int_0^b \frac{16 a^2 y^2}{4 a} dy} = \frac{a^2}{4 b^2}$$

$$\vartheta' = q \frac{M_t}{GI_p} = \frac{3}{16} \frac{M_t}{Gab^3} \quad (*) . \quad (52)$$

16. L'analogia della membrana.

Si pratici, in una lastra piana rigida, un foro avente la stessa forma della sezione retta del solido di De Saint-Venant, e si distenda su questo foro una membrana sottilissima, e perciò perfettamente flessibile, di spessore t costante. Se tra le due facce della lastra si genera una piccola differenza p di pressione, la membrana si incurva presentando (fig. 8-31) dei piccoli spostamenti, le cui componenti ortogonali al piano xy , in cui la membrana era in origine contenuta, si indicano con w .

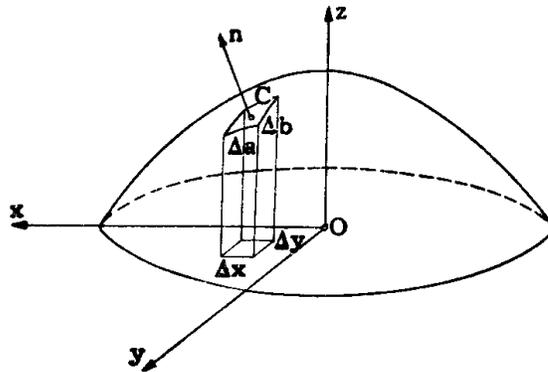


FIG. 8-31

Si consideri un elemento $\Delta x \Delta y$ nel piano xy , e la sua proiezione $\Delta a \Delta b$ sulla superficie deformata della membrana, effettuata normalmente al piano xy ; essendo gli spostamenti piccoli, si può supporre che i lati opposti siano a due a due uguali. Si consideri la normale nel centro C , e le intersezioni c_a e c_b dell'elemento con i due piani passanti per n e per i punti medi $A_1 A_2$ dei lati Δa , e $B_1 B_2$ dei lati Δb (fig. 8-32). Lo stato tensionale in corrispondenza di ogni punto C della membrana può considerarsi piano, e il piano delle tensioni è il piano tangente alla membrana in C . Infatti le

(*) Poichè (8-46) è $r = 2 G \vartheta'$, dal teorema di Stokes si ha

$$\tau_{\max} 4 a = 4 a b \cdot 2 G \vartheta' ,$$

da cui

$$\frac{\tau_{\max}}{\vartheta'} = 2 b G$$

e quindi la (8-52) dalla (8-51).

tensioni τ_{na} e τ_{nb} sono nulle sulle due facce, e possono perciò considerarsi nulle anche lungo lo spessore, che è piccolissimo. La tensione σ_n è nulla su una faccia, pari a p sull'altra; d'altro canto p risulta trascurabile ri-

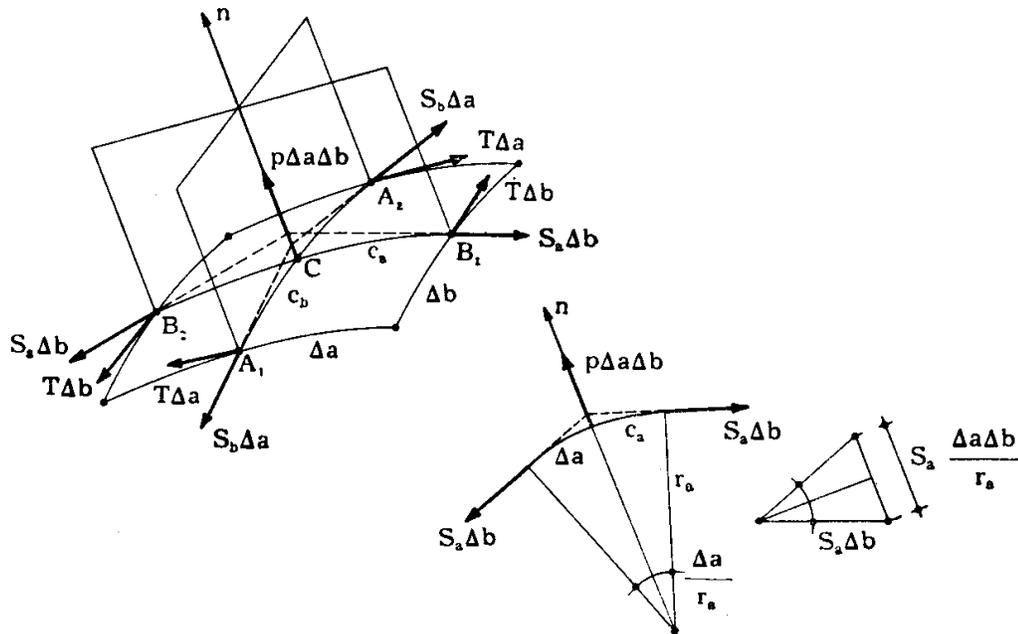


FIG. 8-32

spetto alle σ_a e σ_b , poichè $p \Delta a \Delta b$ è piccolo in rapporto a $\sigma_b t \Delta a$ e $\sigma_a t \Delta b$, e inoltre t è molto più piccolo di Δa e Δb .

Anche la σ_n può ritenersi perciò nulla su ambedue le facce, e così pure lungo lo spessore.

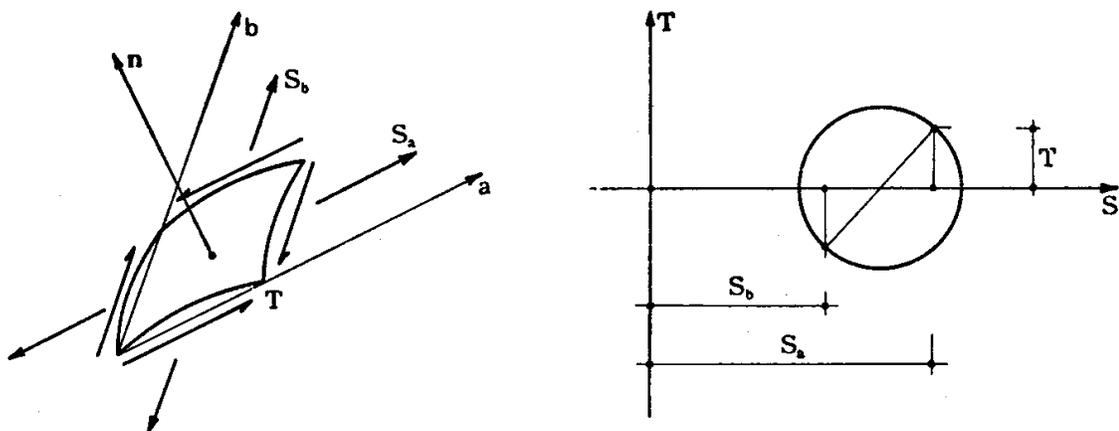


FIG. 8-33

Sia S_a la componente secondo a della forza interna agente sull'unità di lunghezza di una sezione ortogonale ad a (fig. 8-33), S_b la componente secondo b della forza interna agente sull'unità di lunghezza di una sezione

ortogonale a b , T la componente secondo b (a) della forza interna agente sull'unità di lunghezza di una sezione ortogonale ad a (b). S_a , S_b e T , al ruotare della coppia ortogonale di riferimento ab nel piano tangente alla membrana, descrivono un cerchio (di Mohr) del tutto identico a quello delle tensioni.

L'elemento $\Delta a \Delta b$ (fig. 8-32) è sollecitato dalla forza $p \Delta a \Delta b$ agente in C secondo la normale n , dalle forze $S_a \Delta b$ e $T \Delta b$ agenti in B_1 e B_2 secondo le tangenti a c_a e secondo le normali a queste ultime contenute nei piani tangenti alla membrana in B_1 e B_2 , e infine dalle forze $S_b \Delta a$ e $T \Delta a$ agenti in A_1 e A_2 secondo le tangenti a c_b e secondo le normali a queste ultime contenute nei piani tangenti alla membrana in A_1 e A_2 .

Chiamando (fig. 8-32) r_a ed r_b i raggi di curvatura di c_a e c_b in C , la proiezione delle due forze $S_a \Delta b$ su n è

$$S_a \frac{\Delta a \Delta b}{r_a}$$

e la proiezione delle due forze $S_b \Delta a$ è

$$S_b \frac{\Delta a \Delta b}{r_b} .$$

Le proiezioni di $T \Delta a$ e $T \Delta b$ su n sono nulle.

Per l'equilibrio alla traslazione lungo n si ha perciò (*)

$$p \Delta a \Delta b + \frac{S_a}{r_a} \Delta a \Delta b + \frac{S_b}{r_b} \Delta a \Delta b = 0$$

da cui

$$p + \frac{S_a}{r_a} + \frac{S_b}{r_b} = 0 . \quad (53)$$

La (8-53) è una delle tre equazioni di equilibrio degli involucri sottili. Le altre due equazioni sono quelle di equilibrio alla traslazione secondo le rette a e b , e in esse appare T . Nel caso in esame, attesa l'estrema sottigliezza della membrana, si deve porre $T=0$; e infatti l'elemento $\Delta a \Delta b$ si svergolerebbe per effetto di T . Questo fenomeno si comprenderà più facilmente dopo aver studiato la stabilità dell'equilibrio elastico.

(*) La p è considerata positiva se $p_z > 0$, S_a ed S_b se di trazione; si osserva che se p è positiva risultano r_a ed r_b negativi, e viceversa (vedi nota 2, § 1 del Cap. V).

Dalla condizione $T = 0$ deriva (fig. 8-33) $S_a = S_b = S$; la (8-53) si scrive perciò

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = - \frac{p}{S}. \quad (54)$$

La (8-54) è l'unica equazione di equilibrio degli involucri sottilissimi.

Se le ordinate w sono molto piccole, n si può considerare parallela a z , e i due piani nA_1A_2 ed nB_1B_2 (figg. 8-31 e 8-32) si confondono con i piani paralleli ad yz ed xz passanti per n . E' perciò

$$\frac{1}{r_a} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}};$$

trascurando, nello stesso ordine di approssimazione, $\partial w / \partial x$ in rapporto all'unità, si ottiene

$$\frac{1}{r_a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

La (8-54) si scrive perciò, in definitiva,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p}{S}. \quad (55)$$

Sul contorno è

$$w = 0. \quad (r')$$

Le (8-55) e (r'), rapportate alle (8-41) e (8-42), mostrano che la funzione F e la deformata w della membrana sono rette dalle stesse equazioni (*) (analogia di *Prandtl*, 1903), almeno per quanto riguarda le sezioni semplicemente connesse.

(*) Nella (8-55) la p è costante per tutti i punti della membrana, perchè è pari alla differenza di pressione tra le due facce; S è anche costante, come si trae per $T = 0$ dalle altre due equazioni indefinite dell'equilibrio. Fissata p , la (8-55) non definisce le w ed S , ma soltanto il prodotto tra la generica w ed S . In realtà ad una determinata p corrisponde una sola S ed una sola deformata w , ed esse possono ottenersi con considerazioni di congruenza, introducendo il modulo elastico del materiale.

17. La sezione rettangolare allungata.

Se il rettangolo è molto allungato (fig. 8-34) può porsi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 ;$$

La (8-55) si scrive perciò

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p}{S}$$

da cui

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{p}{S} y + C_1$$

$$w = - \frac{p}{2S} y^2 + C_1 y + C_2 .$$

La deformata della membrana si riproduce perciò identicamente lungo x , e la sua sezione secondo un piano qualsiasi parallelo ad yz è una

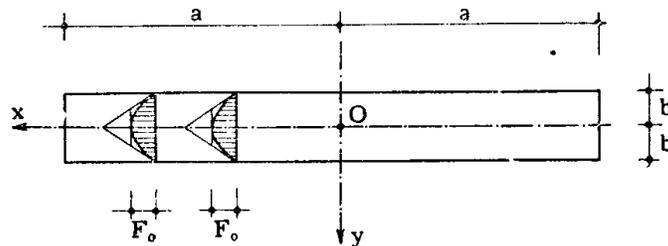


FIG. 8-34

parabola quadratica, simmetrica rispetto a z ; lo stesso aspetto ha la funzione F .

Chiamando F_0 il valore di F in corrispondenza di x , si ha

$$F = F_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) .$$

Il volume del solido $z = F$ è

$$V = \frac{2}{3} F_0 \cdot 2b \cdot 2a = \frac{8}{3} F_0 \cdot ba .$$

Dalla

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -r$$

si trae

$$F_0 = \frac{rb^2}{2}$$

$$V = \frac{4}{3} rab^3 . \quad (s')$$

Dalle (8-45) e (8-46) si ha quindi

$$M_t = \frac{8}{3} rab^3$$

$$\vartheta' = \frac{3}{16} \frac{M_t}{Gab^3}$$

e dalle (8-40)

$$\tau_{zx} = -\frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^3} y$$

$$\tau_{zy} = 0 .$$

E' perciò

$$\tau_{\max} = \frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^2} .$$

18. La modifica di Griffith e Taylor.

L'analogia della membrana si presta in molti casi ad applicazioni di carattere sperimentale, potendosi rilevare direttamente su una membrana flessibile — costituita in genere da oleato di sodio o di potassio, e soggetta ad una certa differenza di pressione tra le due facce — le linee di livello; sono state ideate a ciò svariate attrezzature, di carattere ottico o elettromagnetico, per le quali si rimanda alle trattazioni originali. La maggiore difficoltà consiste nel conservare costante la differenza di pressione per

tutta la durata dei rilievi; essa è stata brillantemente superata da *Griffith* e *Taylor* nel modo che si passa ad esporre. Si ponga

$$F = \Phi - \frac{r}{4} (x^2 + y^2) . \quad (56)$$

Dalla

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -r$$

si trae

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 . \quad (57)$$

Dalla condizione al contorno

$$F = 0$$

si deduce l'altra, valevole anch'essa al contorno,

$$\Phi = \frac{r}{4} (x^2 + y^2) . \quad (58)$$

Il problema della determinazione di F è così ridotto a quello della ricerca di una funzione armonica Φ di cui siano noti i valori al contorno. Si sa che tale funzione esiste ed è unica (problema di *Dirichlet*). La funzione Φ , a meno del fattore $r/2$, è la *coniugata* della Ψ introdotta nella trattazione della torsione alla De Saint-Venant; si ha infatti dalle (8-6) e (8-56)

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{zy} &= -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right) = -\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

da cui, per la (8-47),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y &= -\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x &= \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \end{aligned}$$

ed ancora

$$\frac{r}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{r}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} .$$
(59)

Griffith e Taylor hanno sfruttato la posizione (8-56), determinando sperimentalmente la funzione Φ attraverso le ordinate di una membrana flessibile non sottoposta ad alcuna differenza di pressione, ma fornita solo di retrattilità, come un qualsiasi velo di acqua saponata, adagiata su un orlo le cui ordinate siano affini a quelle fornite dalla (8-58). Infatti, chiamando w le ordinate della membrana valutate ortogonalmente allo stesso piano rispetto al quale sono state misurate le ordinate (8-58) dell'orlo, l'equazione di equilibrio è ancora la (8-55), in cui però il secondo membro è zero:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 .$$
(t')

Al contorno le w sono fornite da

$$w = \frac{c}{4} (x^2 + y^2) .$$
(u')

Le (t') ed (u'), raffrontate con le (8-57) e (8-58), mostrano che la w è affine alla Φ .

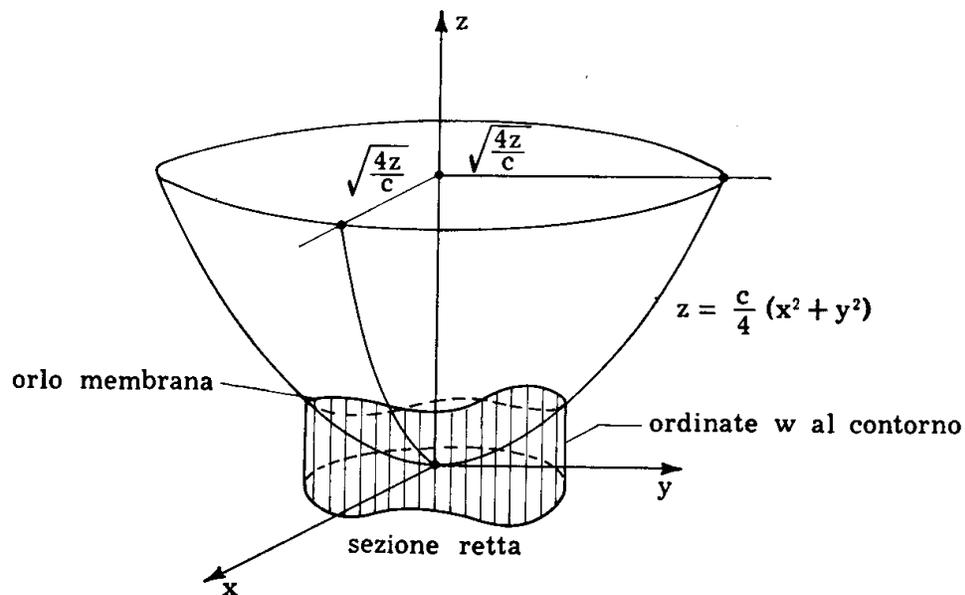


FIG. 8-35

Si osservi (fig. 8-35) che le ordinate (u') dell'orlo, generalmente sghem-

bo, si ottengono sezionando il paraboloido di rotazione di equazione

$$z = \frac{c}{4} (x^2 + y^2)$$

con il cilindro retto avente per direttrice il contorno della sezione.

19. Le sezioni pluriconnesse.

Il caso delle sezioni pluriconnesse, la cui area è compresa (fig. 8-36) tra una curva chiusa esterna s_1 ed $i-1$ curve chiuse interne s_2, s_3, \dots, s_i (i è il grado di connessione), ha bisogno di qualche accenno particolare. Si è già visto al § 8-1 che la funzione Ψ deve essere uniforme, come nelle sezioni monoconnesse, e perciò deve essere rispettata la (f).

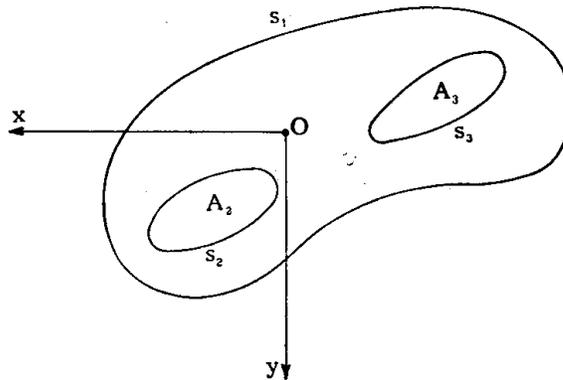


FIG. 8-36

I valori della derivata normale $\partial\Psi/\partial n$ sono forniti su ogni contorno, esterno od interno, dalla (c), ove $f(xy) = 0$ è l'equazione del contorno che si considera; su ciascun contorno l'integrale curvilineo della $\partial\Psi/\partial n$ esteso a tutto il contorno è nullo.

Se si studia il problema della torsione attraverso la funzione F , occorre determinare quest'ultima sotto la condizione $\Delta_2 F = -r$, ed imponendo che F sia nulla sul contorno esterno e presenti un valore costante k_i su ciascuno dei contorni interni (§ 8-10). Si è osservato (§ 8-18) che tale ricerca coincide con quella di una funzione armonica Φ , che presenti su ciascun contorno i valori forniti per $F = k_i$ dalla (8-56); una tale Φ , e con essa la F , esiste ed è unica. La uniformità della F risulta dal suo significato di funzione di flusso, oppure anche dalla (e), attraverso le (8-59).

Si prenda in esame una sezione con una sola cavità.

Se A è l'area della sezione (esclusa quindi la cavità) si può scrivere, in analogia a quanto fatto nel § 8-10,

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = - \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y \right) dA .$$

Si ottiene (fig. 8-37 a)

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial F}{\partial x} x dA &= \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial x} x dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial F}{\partial x} x dx \right] = \\ &= \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \left[(Fx)_{x_1}^{x_2} + (Fx)_{x_3}^{x_4} - \int_{x_1}^{x_2} F dx - \int_{x_3}^{x_4} F dx \right] = \\ &= - k_i \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} (x_3 - x_2) dy - \int_A F dx dy = - V_t . \end{aligned}$$

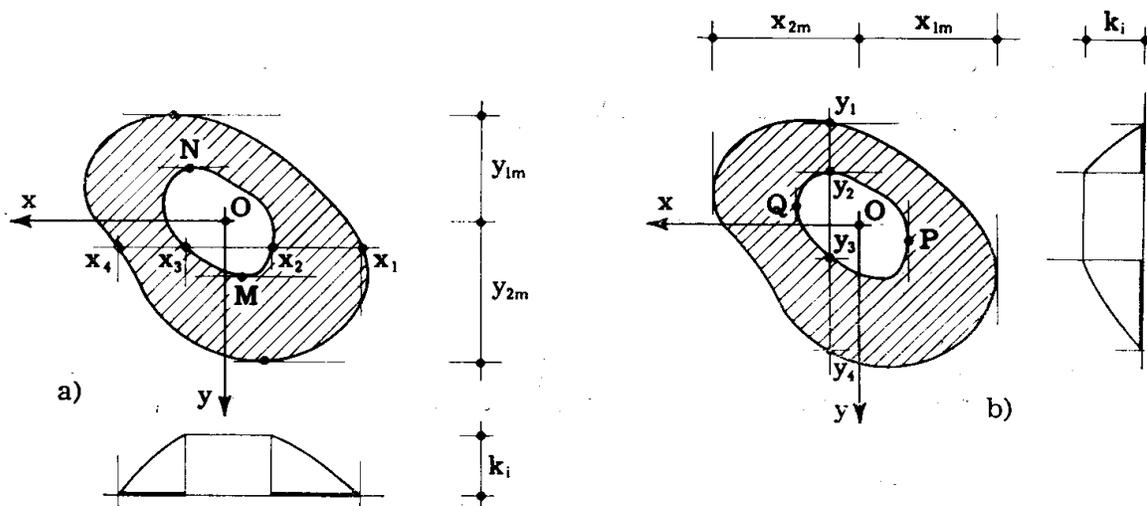


FIG. 8-37

Analogamente è (fig. 8-37 b)

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial y} y dA = - V_t ,$$

da cui

$$M_t = 2 V_t , \quad (60)$$

dove V_t comprende anche il volume del cilindro di altezza k_i in corrispondenza della cavità.

In analogia poi a quanto detto nel § 8-11, si ha

$$M_t \vartheta' = \frac{1}{G} \int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dA$$

e ancora

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 dA &= \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \left[\left(F \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_1}^{x_4} - \int_{x_1}^{x_4} F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx \right] = \\ &= k_1 \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_3 \right] dy - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dA = \\ &= -k_1 \int_M^N \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_2 \frac{dy}{ds} ds - k_1 \int_N^M \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_3 \frac{dy}{ds} ds - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dA = \\ &= -k_1 \int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dA \quad (*) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 dA &= \int_{x_{1m}}^{x_{2m}} dx \left[\left(F \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{y_1}^{y_4} - \int_{y_1}^{y_4} F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy \right] = \\ &= k_1 \int_{x_{1m}}^{x_{2m}} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_3 \right] dx - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA = \\ &= k_1 \int_P^Q \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_2 \frac{dx}{ds} ds + k_1 \int_Q^P \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_3 \frac{dx}{ds} ds - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA = \\ &= -k_1 \int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dn} ds - \int_A F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dA . \end{aligned}$$

Si ha perciò

$$\begin{aligned} M_t \vartheta' G &= -k_1 \int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds + r \int_A F dA = \\ &= -k_1 \int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds + r V \end{aligned}$$

dove V è il volume del solido F relativo alla sola area reale A .

(*) Nel primo integrale il verso positivo di s sul contorno interno è quello antiorario.

Si ha ancora, per la (8-44),

$$-k_i \int_{s_i} \frac{\partial F}{\partial n} ds = k_i \int_{s_i} \tau_z ds ,$$

dove la τ_z è positiva se diretta nel verso di t , e cioè antioraria rispetto all'interno di s_i .

Si dimostrerà subito appresso che, dalla necessità che la soluzione sia ad un sol valore, deriva che il teorema di Stokes è applicabile anche per curve non riducibili.

Quindi, se A_i è l'area della cavità, e considerato che per n' diretto nel verso di z la circuitazione positiva è quella antioraria, si ha

$$\int_{s_i} \tau_z ds = r A_i$$

e ancora

$$M_t \vartheta' G = r V_t$$

da cui si conferma la (8-46):

$$\vartheta' = \frac{r}{2G} . \quad (v')$$

Il ragionamento è valido anche se le cavità sono più d'una. Alla stessa espressione si perviene (§ 8-4) attraverso la funzione Ψ , con ragionamento valido per sezioni comunque connesse.

Perchè il problema sia determinato, occorre conoscere i valori k_i che la F assume in corrispondenza dei contorni interni s_i .

Soccorre a ciò il teorema di Stokes, che assume nel caso in esame un'espressione particolare. Si è già osservato (n. 8-3 e) che nelle sezioni pluriconnesse la differenza tra le circuitazioni c' e c'' lungo due curve chiuse s' ed s'' racchiudenti un contorno interno s_i è pari al flusso del vettore rotazione attraverso l'area compresa tra le due curve; in particolare s'' può coincidere con il contorno s_i . Si può scrivere, se la rotazione è costante e pari a r ,

$$\begin{aligned} c' - c'' &= r (A' - A'') \\ c' - c_i &= r (A' - A_i) \\ c'' - c_i &= r (A'' - A_i) , \end{aligned} \quad (z')$$

ove con A' A'' A_1 si sono indicate le aree comprese rispettivamente all'interno di s' , s'' , s_1 (fig. 8-38).

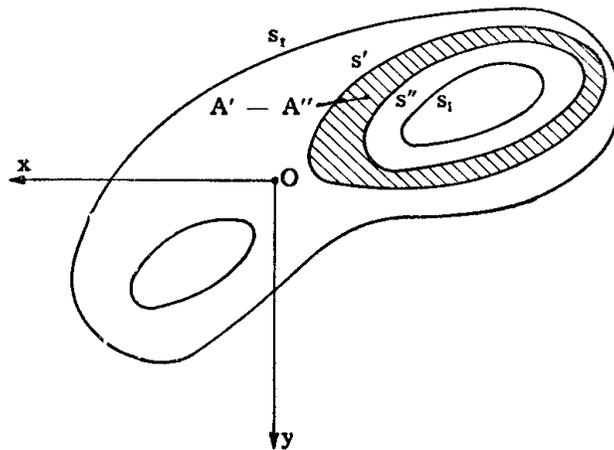


FIG. 8-38

Nel caso in esame le (z') si particolarizzano ulteriormente. Poichè infatti la funzione

$$\Phi = F + \frac{r}{4} (x^2 + y^2) \quad (a'')$$

è coniugata della Ψ , dalle (f) si trae, lungo ogni contorno interno s_1 ,

$$\int_{s_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0. \quad (b'')$$

Dalle (a'') e (b'') si trae

$$\int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds + \frac{r}{4} \int_{s_1} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial n} ds = 0. \quad (c'')$$

Il secondo integrale della (c'') si scrive

$$\int_{s_1} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial n} ds = \int_{s_1} \left(2x \frac{dx}{dn} + 2y \frac{dy}{dn} \right) ds ;$$

poichè le funzioni $2x$ e $2y$ soddisfano le condizioni di Gauss in tutta l'area compresa in s_1 , per la formula di Gauss (8-12) si ha

$$\int_{s_1} 2x \frac{dx}{dn} ds = 2 \int_{A_1} dA = 2 A_1$$

$$\int_{s_1} 2y \frac{dy}{dn} ds = 2 \int_{A_1} dA = 2 A_1. \quad (d'')$$

La (c'') si traduce perciò nella seguente

$$-\int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds = rA_1 .$$

Dalla (8-44) si trae che $\partial F/\partial n$ rappresenta la $\bar{\tau}_z$ sul contorno s_1 ; poichè per la convenzione di Stokes la t è diretta come nella fig. 8-39, la

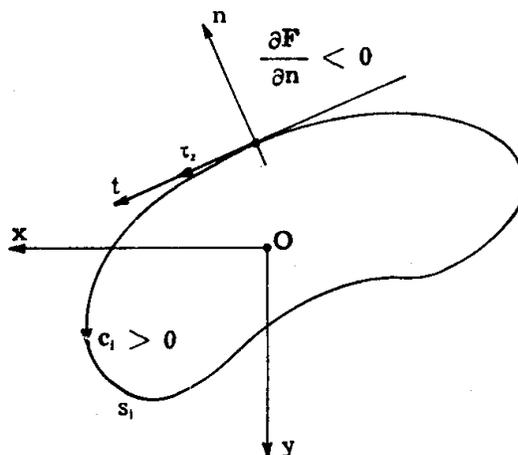


FIG. 8-39

normale n è orientata verso l'esterno di s_1 ; se $\partial F/\partial n$ è negativo $\bar{\tau}_z$ è diretta secondo t , e quindi nel verso positivo della circuitazione, e viceversa (fig. 8-39). Perciò è

$$c_1 = - \int_{s_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds$$

e

$$c_1 = rA_1 . \quad (61)$$

La (8-61) assicura che la circuitazione lungo ogni contorno interno è uguale al prodotto della rotazione di $\bar{\tau}_z$ per l'area compresa nel contorno stesso. Le (z') si scrivono perciò

$$\begin{aligned} c' &= rA' \\ c'' &= rA'' ; \end{aligned} \quad (62)$$

e cioè la circuitazione lungo ogni linea chiusa è uguale al prodotto della rotazione di $\bar{\tau}_z$ per l'area in essa compresa. In altre parole, il teorema di Stokes è valido per qualsiasi linea chiusa, anche se racchiudente una ca-

vità interna, come se il vettore rotazione fosse definito in tutti i punti compresi entro il contorno esterno, e di valore costante r .

Alla (8-61) si può pervenire anche attraverso la funzione Ψ . Dalla

$$c_i = \int_{s_i} \left(\tau_{zx} \frac{dx}{ds} + \tau_{zy} \frac{dy}{ds} \right) ds$$

per le (8-6) si ha

$$c_i = -q \frac{M_t}{I_p} \left[\int_{s_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) ds + \int_{s_i} \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) ds \right].$$

Il primo integrale è nullo; Ψ infatti è uniforme, e quindi (f)

$$\int_{s_i} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0.$$

Il secondo integrale si scrive, per la formula di Gauss (le funzioni y ed x sono definite, continue etc. in tutto il piano)

$$- \int_{s_i} \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{s_i} \left(x \frac{dx}{dn} + y \frac{dy}{dn} \right) ds = 2 A_1.$$

Si ha perciò

$$c_i = 2q \frac{M_t}{I_p} A_1. \quad (e'')$$

Dalle (8-6) si trae

$$r = \text{rot } \bar{\tau}_z = 2q \frac{M_t}{I_p};$$

la (e'') si traduce quindi nella (8-61).

Ciò premesso, la funzione F si ottiene determinando innanzi tutto la funzione F_0 che soddisfa in tutti i punti dell'area A della sezione retta ($A = A_1 - A_2 - A_3 - \dots - A_i$) la condizione

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = -r,$$

e che sia nulla su tutti i contorni esterni ed interni.

Si determinano poi le funzioni F_i tali che la generica F_i soddisfi la condizione

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = 0,$$

e sia nulla su tutti i contorni salvo l' i -esimo, lungo il quale $F_i = 1$. La funzione

$$F = F_0 + \sum k_h F_h \quad (f'')$$

soddisfa la (8-41) e le note condizioni ai limiti.

Le k_i si determinano per il teorema di Stokes attraverso le i condizioni

$$\int_{s_i} \left(\tau_{zx} \frac{dx}{ds} + \tau_{zy} \frac{dy}{ds} \right) ds = rA_i \quad (g'')$$

che si traducono nelle altre

$$\int_{s_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds = rA_i \quad (h'')$$

e, in definitiva, nelle

$$\int_{s_i} \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} dx - \frac{\partial F_0}{\partial x} dy \right) + \sum_h k_h \int_{s_i} \left(\frac{\partial F_h}{\partial y} dx - \frac{\partial F_h}{\partial x} dy \right) = rA_i. \quad (i'')$$

Per quanto riguarda l'analogia idrodinamica, basta avvertire che nella (l') l'area A'_m è tutta l'area interna all'asse del canale di forza, ivi comprese le eventuali cavità. Per quanto riguarda invece l'analogia della membrana flessibile, si tiene conto della cavità A_i disponendo in corrispon-

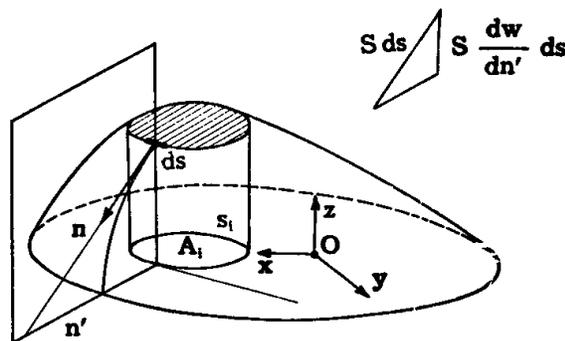


FIG. 8-40

denza di ogni cavità una laminetta rigida e senza peso, della stessa forma di A_i , che possa liberamente traslare secondo l'asse z ; sotto la differenza di pressione p ogni laminetta rigida si dispone su un piano parallelo ad xy (fig. 8-40).

Su un elemento ds del bordo della laminetta si esercita la forza Sds diretta secondo la normale n al bordo stesso contenuta nel piano tangente alla membrana; la proiezione n' di n sul piano xy è normale al contorno s_1 .

La proiezione di Sds secondo z è

$$S \frac{dw}{dn'} ds$$

pari a

$$S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn'} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn'} \right) ds .$$

Poichè è

$$\frac{dx}{dn'} = \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dy}{dn'} = - \frac{dx}{ds}$$

la proiezione di Sds secondo z è fornita da

$$S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) ds ,$$

e per l'equilibrio della laminetta alla traslazione secondo z si ha (p è positiva se $p_z > 0$, S se di trazione)

$$\int_{s_1} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds = \frac{p}{S} A_1 . \quad (l'')$$

Confrontando la (8-55) e la (l'') con la (8-41) e la (h'') si osserva come le coordinate w siano affini alle ordinate $z = F$ anche nel caso delle sezioni pluriconnesse.

20. La ricerca della funzione F attraverso l'energia potenziale totale.

La ricerca della funzione F può essere perseguita attraverso l'energia potenziale totale. L'energia di deformazione è fornita, con riferimento

al tronco di lunghezza unitaria, da

$$L = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dx dy = \frac{1}{2G} \int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (m'')$$

L'energia potenziale dei carichi è, assumendo pari a zero tale energia in corrispondenza della posizione indeformata,

$$P = - M_t \vartheta'$$

e, per la (8-45),

$$P = - 2 \vartheta' \int_A F dx dy. \quad (n'')$$

L'energia potenziale totale E è la somma di P ed L :

$$E = \frac{1}{2G} \int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 4G \vartheta' F \right] dx dy. \quad (o'')$$

Il principio dei lavori virtuali (Vol. III, Cap. II) stabilisce che, se ϑ' e $\gamma_{zx} \gamma_{zy}$ sono congruenti, e $d\tau_{zx} d\tau_{zy}$ sono un qualsiasi insieme di tensioni equilibrate con dM_t , risulta,

$$\begin{aligned} dM_t \vartheta' &= \int_A (d\tau_{zx} \gamma_{zx} + d\tau_{zy} \gamma_{zy}) dA = \\ &= \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} d\tau_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zy}} d\tau_{zy} \right) dA, \end{aligned}$$

dove φ è il potenziale elastico.

Poichè è

$$E = - M_t \vartheta' + \int_A \varphi dA, \quad (p'')$$

si trae che, se fissato ϑ' si esprime la E in funzione di M_t e di un qualsiasi insieme di $\tau_{zx} \tau_{zy}$ con questo equilibrati, all'unico complesso di M_t e τ anche congruente corrisponde stazionarietà della E . Vale la reciproca.

Non si pensi di far discendere la suddetta proposizione dal classico principio di stazionarietà della E (Vol. III, Cap. III), che ne è addirittura il duale. La proposizione si estende in modo ovvio ad un teorema generale (valido sotto l'ipotesi

di elasticità lineare e piccoli spostamenti), di scarse applicazioni pratiche; di esso è caso particolare il teorema di Menabrea (Vol. III, §, 5-6), di più ampia portata.

Nelle pratiche applicazioni, si sviluppa F in serie di funzioni

$$F = \sum_n a_i F_i \quad (q'')$$

ove a_i sono coefficienti incogniti, ed F_i funzioni note, che soddisfano la condizione (di equilibrio) al contorno (8-42); la (q'') così è espressa come funzione quadratica delle costanti a_i . Qualunque combinazione come la (q'') soddisfa le equazioni di equilibrio: quelle indefinite, poichè le τ_{zx} e τ_{zy} che si ricavano dalla F sono a divergenza nulla, e quelle al contorno. Una qualsiasi delle (q'') però, presa sola, non soddisfa la condizione di congruenza. Questa condizione, che come è noto si traduce nell'altra $\text{rot } \bar{\tau}_z = \text{cost}$, e quindi $\Delta_2 F = -r$, è anche espressa dalla $\delta_1 E = 0$. Questa si traduce nelle n equazioni (ove n è il numero di termini della serie)

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (r'')$$

algebriche, lineari, non omogenee, nelle incognite a_i , atte a fornire univocamente i valori di a_i , e quindi la funzione F .

Per un solido a sezione retta rettangolare $2a \times 2b$ (fig. 8-41) poichè

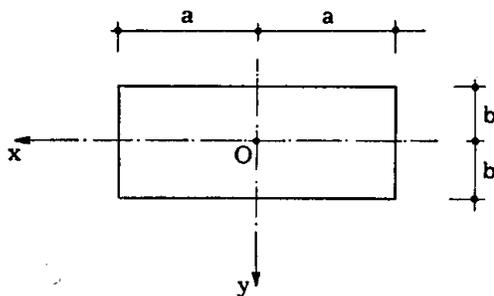


FIG. 8-41

la funzione $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ è nulla sul contorno si può porre

$$F = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n ; \quad (s'')$$

la (s'') soddisfa la condizione $F=0$ sul contorno.

Per simmetria, m ed n devono essere pari.

Se $a = b$ (sezione quadrata), fermandosi al primo termine della serie si ha

$$F = a_0 (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) . \quad (t'')$$

La (o'') fornisce perciò

$$E = \frac{l}{2G} \int_A \{4 a_0^2 [x^2 (y^2 - a^2)^2 + y^2 (x^2 - a^2)^2] - \\ - 4 G \vartheta' a_0 (x^2 - a^2) (y^2 - a^2)\} dx dy$$

e dalle (r'') si trae

$$2 a_0 \int_A [x^2 (y^2 - a^2)^2 + y^2 (x^2 - a^2)^2] dx dy - \\ - G \vartheta' \int_A (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) dx dy = 0$$

da cui

$$2 a_0 \frac{64}{45} a^8 - G \vartheta' \frac{16}{9} a^6 = 0 \\ a_0 = \frac{5}{8} \frac{G}{a^2} \vartheta' .$$

Dalla (8-45) si trae

$$M_t = 2 \int_A F dx dy = 2 a_0 \int_A (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) dx dy$$

da cui

$$M_t = \frac{20}{9} G \vartheta' a^4 = 0,1388 (2a)^4 G \vartheta'$$

che differisce dell'1,33 % dal valore esatto

$$M_t = 0,1406 (2a)^4 G \vartheta' .$$

Considerando due termini dello sviluppo (s'') l'approssimazione sarebbe dello 0,15 %.

Le τ_{zx} e τ_{zy} vanno calcolate attraverso le (8-40), per esse però l'approssimazione che si consegue è molto più bassa, ed arriva con uno sviluppo in due termini al 4 %. E' circostanza generale nell'applicazione dei teoremi energetici che gli spostamenti siano calcolati con approssimazione molto migliore delle tensioni.

Invece della (s'') può essere assunto lo sviluppo, per m ed n dispari,

$$F = \sum_m \sum_n a_{mn} \cos \frac{m \pi x}{2a} \cos \frac{n \pi y}{2b}; \quad (u'')$$

si ha così, effettuate le integrazioni,

$$\begin{aligned} E = \frac{l}{2G} & \left[\frac{\pi^2 ab}{4} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \right. \\ & \left. - 4G \vartheta' \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{16 ab}{mn \pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \right]. \end{aligned}$$

La generica condizione

$$\frac{\partial E}{\partial a_{mn}} = 0$$

fornisce

$$a_{mn} = \frac{128 G \vartheta' b^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\pi^4 mn (m^2 \alpha^2 + n^2)} \quad (v'')$$

avendo posto $\alpha = \frac{b}{a}$.

Si ha così

$$M_t = 2 \int_A F dx dy = \sum_m \sum_n \frac{128 G \vartheta' b^2}{\pi^4 mn (m^2 \alpha^2 + n^2)} \frac{32 ab}{mn \pi^2}$$

Ponendo ϑ' e τ_{\max} nella forma ($a \leq b$)

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \frac{M_t}{K_1 G (2a)^3 2b} \\ \tau_{\max} &= \frac{M_t}{K_2 (2a)^2 2b} \end{aligned} \quad (63)$$

i valori di K_1 e K_2 sono forniti dalla tabella che segue, in funzione di $\alpha = \frac{b}{a}$ (Timoshenko):

α	K_1	K_2	α	K_1	K_2
1	0.140	0.208	3	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4	0.281	0.282
1.5	0.196	0.231	5	0.291	0.291
2	0.229	0.246	10	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	∞	0.333	0.333

Si osserva che per $\alpha = \infty$ si ritrovano le espressioni valide per la sezione rettangolare allungata.

21. Le tensioni secondarie nel problema della torsione.

I risultati cui si è pervenuti, come in genere tutti i risultati del De Saint-Venant, sono condizionati dalle ipotesi di validità del principio di sovrapposizione; in particolare, essi esigono che le componenti u v w degli spostamenti, rapportati a qualsiasi dimensione della struttura, siano trascurabili.

Questa ipotesi può non verificarsi; in tal caso le (8-1) non rappresentano più una soluzione del problema, e accanto alle tensioni tangenziali τ_{zx} e τ_{zy} possono presentarsi tensioni normali σ_z , dette *secondarie*. La trattazione di questi casi in rigore è molto ardua; si preferisce sul piano tecnico affrontarli seguendo vie non canoniche, accettando cioè per le tensioni tangenziali i valori che si traggono dalla trattazione alla De Saint-Venant, e studiando separatamente il sorgere delle tensioni normali, per le quali si perviene a espressioni di larga approssimazione. In genere le componenti u e v assumono valori molto elevati in dipendenza di sensibili angoli di torsione (materiali di modesto modulo elastico) o di particolari forme della sezione retta, nella quale delle dimensioni predominino sulle altre.

Le w da ingobbimento (8-1) non generano, perchè invariabili con z , tensioni normali; queste possono studiarsi perciò considerando le sole u e v . Ciò, naturalmente, se le basi sono libere e sollecitate alla De Saint-Venant. E' ovvio che le σ_z , a loro volta, turbano il quadro del De Saint-Venant, e quindi le (8-1); questi effetti sono da considerare in una approssimazione più spinta dello studio.

Se le sezioni rette fossero a distanza reciproca invariabile, la generica

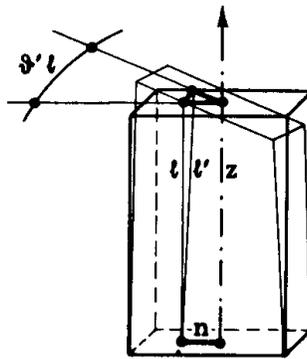


FIG. 8-42

fibra parallela all'asse z e a distanza n da quest'ultimo si allungherebbe (fig. 8-42) di

$$d\ell = \sqrt{\ell^2 + \vartheta'^2 \ell^2 n^2} - \ell = \ell (\sqrt{1 + \vartheta'^2 n^2} - 1) .$$

Dallo sviluppo

$$\sqrt{1 + \vartheta'^2 n^2} = 1 + \frac{\vartheta'^2 n^2}{2} - \frac{\vartheta'^4 n^4}{8} + \dots$$

trascurando i termini dal terzo in poi si ha

$$d\ell = \frac{\vartheta'^2 n^2}{2} \ell . \quad (z'')$$

Dalla (z'') si riconosce che il caso di cui si sta trattando è quello nel quale le tensioni normali sorgono perchè $\vartheta'^2 n^2$ non è trascurabile rispetto all'unità, e ciò appunto si verifica se ϑ' è abbastanza elevato, o se, a parità di ϑ' , è molto elevato n (sezioni in cui una dimensione è predominante sulle altre).

Se quindi alle sezioni rette fosse impedito di avvicinarsi, si avrebbe lungo la fibra considerata l'allungamento unitario (*)

$$\varepsilon_n = \frac{d\ell}{\ell} = \frac{\vartheta'^2 n^2}{2} . \quad (a''')$$

(*) Alla stessa espressione si giunge dalla (8-1), calcolando la componente del secondo ordine ε_z :

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

Poichè in realtà nessun vincolo obbliga le sezioni a distanza reciproca invariabile, si ha, oltre alle ε_n della (a'''), variabili con la distanza n dal

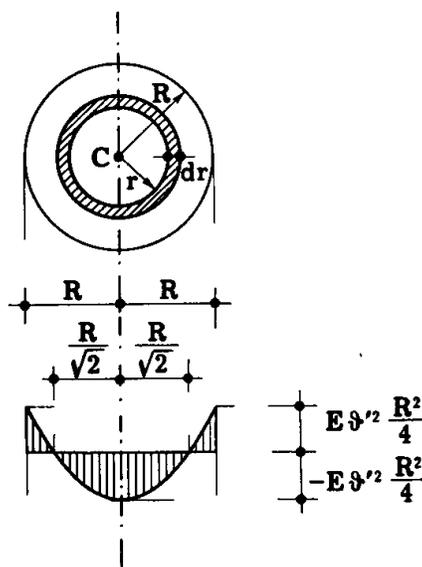


FIG. 8-43

baricentro, una ε_0 costante; la condizione che fornisce ε_0 è quella di equilibrio alla traslazione lungo l'asse del solido

$$N = \int_A E (\varepsilon_n - \varepsilon_0) dA = 0$$

che si traduce nell'altra

$$\int_A \left(\frac{\vartheta''^2 n^2}{2} - \varepsilon_0 \right) dA = 0. \quad (b''')$$

Per la sezione circolare la (b''') si scrive (fig. 8-43)

$$\frac{\vartheta''^2}{2} \int_0^R 2\pi r^3 dr - \varepsilon_0 \pi R^2 = 0$$

da cui

$$\varepsilon_0 = \frac{\vartheta''^2 R^2}{4}$$

$$\sigma_z = E (\varepsilon_n - \varepsilon_0) = \frac{E \vartheta''^2}{4} (2r^2 - R^2). \quad (64)$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{c^2}{2E^2} (x^2 + y^2) = \frac{\vartheta''^2}{2} n^2.$$

Il valore di $\varepsilon_z^{(2)}$ è ricavato, così, nell'ipotesi che w sia fornito dalla terza delle (8-1), e che quindi ogni sezione retta non si sposti assialmente rispetto alle altre.

La σ_z è perciò variabile con legge parabolica lungo il raggio, si annulla alla distanza $\frac{R}{\sqrt{2}}$ dal centro, e attinge i valori massimi e minimi

$$\sigma_m = \pm E \vartheta'^2 \frac{R^2}{4} \quad (65)$$

al contorno e al centro. Poichè per la sezione circolare è

$$\tau_{\max} = 2 \frac{M_t}{\pi R^3}$$

$$\vartheta' = 2 \frac{M_t}{\pi G R^4} = \frac{\tau_{\max}}{G R},$$

la (8-65) si scrive pure

$$\frac{\sigma_m}{\tau_{\max}} = \pm \frac{E}{4 G^2} \tau_{\max} \cdot \quad (66)$$

La σ_m fornita dalla (8-66) può avere un certo rilievo soltanto per materiali di basso modulo, come la gomma, in cui τ_{\max} può essere dello stesso ordine di grandezza di G , e σ_m quindi può raggiungere l'ordine di grandezza di E ; in genere perciò per la sezione circolare la tensione σ_m si tra-

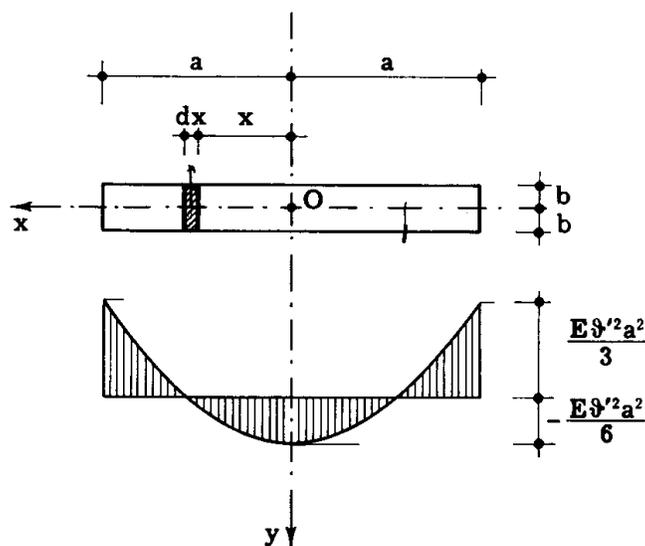


FIG. 8-44

scura. Non altrettanto accade per le sezioni aventi una dimensione preponderante, come quella rettangolare allungata, in cui la tensione normale può raggiungere anche per i comuni materiali da costruzione valori non trascurabili. Si consideri (fig. 8-44) il solido a sezione rettangolare

allungata $2a \times 2b$; la (b''') si scrive

$$\frac{\vartheta'^2}{2} \int_{-a}^{+a} 2bx^2 dx = 4\varepsilon_0 ab$$

da cui

$$\varepsilon_0 = \frac{\vartheta'^2 a^2}{6}$$

$$\sigma_z = E (\varepsilon_n - \varepsilon_0) = E \frac{\vartheta'^2}{6} (3x^2 - a^2). \quad (67)$$

La σ_z è variabile con legge parabolica lungo x , e raggiunge il valore massimo

$$\sigma_{\max} = \frac{E \vartheta'^2 a^2}{3} \quad (68)$$

ai due estremi, e il valore minimo

$$\sigma_{\min} = - \frac{E \vartheta'^2 a^2}{6} \quad (68')$$

in corrispondenza del centro.

Dalle (8-51) e (8-52) si ha ϑ' in funzione di τ_{\max}

$$\vartheta' = \frac{\tau_{\max}}{2Gb}$$

da cui si trae

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{E}{12G^2} \frac{a^2}{b^2} \tau_{\max} \quad (69)$$

$$\frac{\sigma_{\min}}{\tau_{\max}} = - \frac{E}{24G^2} \frac{a^2}{b^2} \tau_{\max}. \quad (70)$$

Per valori elevati di $\frac{a}{b}$, la σ non è più trascurabile rispetto alla τ ; delle σ bisogna tener conto anche per il fatto che le loro componenti normali all'asse z offrono un notevole contributo all'assorbimento del momento torcente. La proiezione della σ_z sul piano normale a z è fornita

(fig. 8-42) da

$$\sigma_z \frac{\vartheta' l n}{l} = \sigma_z \vartheta' n = \sigma_z \vartheta' x$$

e l'equazione di equilibrio alla rotazione si scrive, chiamando M'_t ed M''_t le parti di M_t equilibrate rispettivamente dalle forze elementari $\tau_z dA$ e $\sigma_z \vartheta' x dA$

$$\begin{aligned} M_t &= M'_t + M''_t = \frac{16}{3} ab^3 \vartheta' G + \int_{-a}^{+a} \sigma_z \vartheta' x^2 2b dx = \\ &= \frac{16}{3} ab^3 \vartheta' G + \frac{8}{45} a^5 b \vartheta'^3 E . \end{aligned} \quad (c''')$$

Dalla (c''') si può ricavare ϑ' in funzione di M_t , e si osserva che ϑ' diminuisce (e cioè la rigidità torsionale aumenta) per effetto delle tensioni secondarie.

Si osserva esplicitamente che le (8-66) ed (8-69) non dipendono dalla lunghezza del solido; esse sono funzioni invece della natura del materiale attraverso i valori dei moduli E e G .

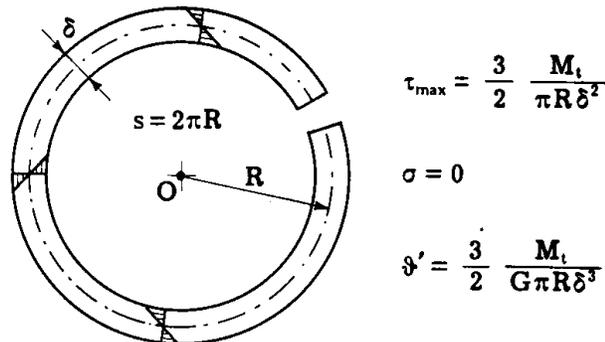


FIG. 8-45

Una sezione sottile *aperta* (intendendo come tale quella *monococonnessa*) di forma qualunque si vedrà che non differisce, dal punto di vista delle τ torsionali, dal rettangolo allungato; invece variano di molto le σ secondarie. Poichè infatti queste dipendono dalla differenza di distanza delle aree elementari dall'asse di rotazione, se tali distanze non variano di molto tra loro le σ risultano piccole; in particolare, se la linea media (*) ha forma circolare (fig. 8-45) le σ risultano nulle. Si può quindi asserire che le

(*) Nelle sezioni sottili si fa l'ipotesi che la normale alla superficie esterna in un punto lo sia anche nell'altro punto, molto vicino al primo, in cui essa normale incontra la superficie esterna; il segmento di normale compreso tra i due punti suddetti si chiama *spessore* δ della sezione retta, e l'insieme dei punti medi degli spessori si chiama *linea media* della sezione retta.

dimensioni della sezione retta, che debbono essere dello stesso ordine di grandezza perchè i risultati del De Saint-Venant siano attendibili in relazione all'ipotesi di piccoli spostamenti, sono quelle del rettangolo circoscritto alla sezione stessa (fig. 8-46).

I risultati del De Saint-Venant, o quelli modificati come sopra, sono validi in tutta la trave se sulle due basi la sollecitazione esterna è data

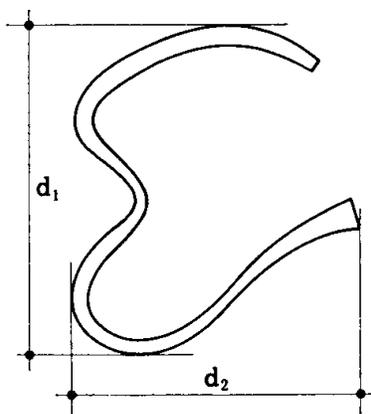


FIG. 8-46

da $p_z = \pm \sigma_z$, $p_x = \pm \tau_{zx}$, $p_y = \pm \tau_{zy}$ dove le τ_{zx} e τ_{zy} sono quelle del De Saint-Venant, e le σ_z quelle determinate in questo paragrafo.

In caso contrario sorge in corrispondenza delle zone di base una perturbazione locale, che tende a spegnersi con la distanza dalle basi stesse. Altra causa di perturbazione è la presenza di coppie torcenti sulla superficie laterale. Queste cause di tensioni secondarie si studieranno nel seguito.