

CAPITOLO VIII

TORSIONE

1. La sollecitazione semplice di torsione.

Nel caso in esame non è necessaria alcuna limitazione nella scelta della terna di riferimento; l'origine O e gli assi x ed y possono essere qualsiasi, purchè contenuti nel piano della base $z = 0$.

Si consideri la terna

$$\begin{aligned}u &= \frac{c}{E} yz \\v &= -\frac{c}{E} xz \\w &= \frac{c}{E} \Psi(xy)\end{aligned}\tag{1}$$

essendo c una costante di dimensioni fisiche $[F\ell^{-3}]$, e Ψ una funzione delle sole x ed y , di dimensioni fisiche $[\ell^2]$.

Le (8-1) soddisfano le (2-6). Sono soddisfatte anche le prime due delle equazioni dell'equilibrio elastico (2-9); la terza delle (2-9) si traduce nella condizione

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 ;\tag{2}$$

la funzione $\Psi(xy)$ deve quindi essere armonica.

Le espressioni di τ_{zx} e τ_{zy} sono

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G \frac{c}{E} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) \\ \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \frac{c}{E} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right).\end{aligned}\tag{a}$$

L'equazione ai limiti (2-4) sulla superficie laterale conduce perciò all'altra condizione

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y\right) \frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x\right) \frac{dy}{dn} = 0 ; \quad (b)$$

il dn giace lungo la normale al contorno nel punto generico, dx e dy sono proiezioni di dn sugli assi x ed y ; il dn è positivo se orientato verso l'esterno della sezione. La (b) si scrive pure, se $f(xy) = 0$ è l'equazione del contorno,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} = \pm \frac{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} . \quad (c)$$

La terna (8-1) è perciò una soluzione del problema di De Saint-Venant se (e solo se) sono rispettate le (8-2) e (c).

Data una funzione $F(xy)$, continua con le sue derivate prime, e su un asse r

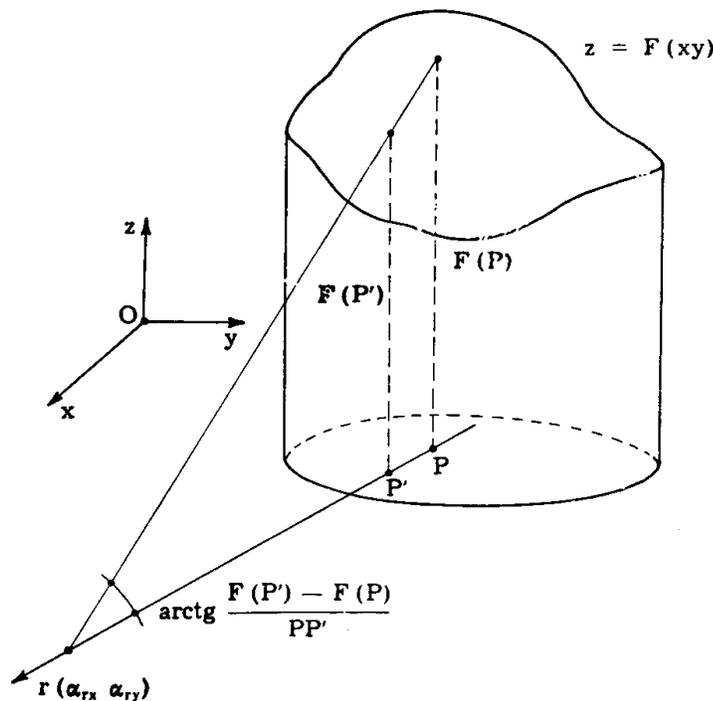


FIG. 8-1

del piano xy due punti P e P' appartenenti al campo di definizione di F (fig. 8-1),

si definisce *derivata direzionale* di F secondo r , calcolata nel punto P , il limite

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \lim_{P' \rightarrow P} \frac{F(P') - F(P)}{PP'}$$

Se α_{rx} ed α_{ry} sono i coseni direttori di r , si ha

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \alpha_{rx} \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha_{ry} \frac{\partial F}{\partial y}$$

Si consideri (fig. 8-2) il punto P su una curva s del piano xy , definita dall'equazione $f(xy) = k$; interessano in genere le derivate direzionali di F secondo la

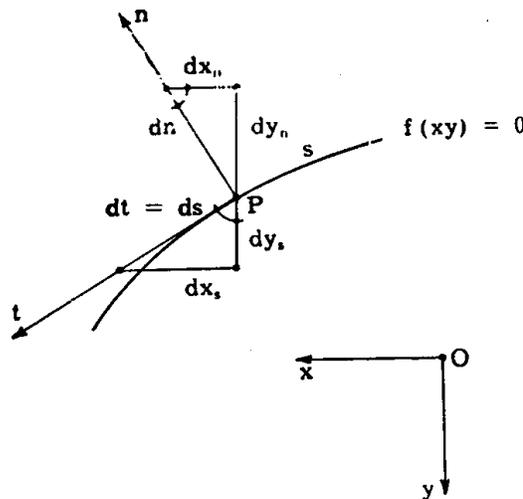


FIG. 8-2

normale n e la tangente t alla curva in P , è perciò opportuno fornire le espressioni dei coseni direttori α_{nx} α_{ny} di n ed α_{sx} α_{sy} di t . Orientando la normale n e la tangente t in modo che con rotazione rigida nel piano xy possano portarsi a coincidere rispettivamente con gli assi x ed y , si ha

$$\alpha_{nx} = \frac{dx_n}{dn} = \frac{dy_s}{ds} = \alpha_{sy}$$

$$\alpha_{ny} = \frac{dy_n}{dn} = -\frac{dx_s}{ds} = -\alpha_{sx}$$

Per quanto noto dall'analisi può perciò scriversi

$$\alpha_{nx} = \alpha_{sy} = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

(d)

$$\alpha_{ny} = -\alpha_{sx} = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Il segno è uguale per tutte e due le espressioni (d); esso è positivo se la normale n è orientata nel verso delle f crescenti, negativo in caso contrario.

Importante è anche il risultato seguente, per i casi in cui $F(xy)$ coincide con $f(xy)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= \alpha_{nx} \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_{ny} \frac{\partial f}{\partial y} = \pm \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (d')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \alpha_{sx} \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_{sy} \frac{\partial f}{\partial y} = \mp \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \pm \\ &\pm \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = 0. \end{aligned} \quad (d'')$$

Il segno della (d') è positivo se n è orientata nel verso delle f crescenti.

Si faccia il caso più generale che la sezione retta sia delimitata da un contorno esterno e da più contorni interni (sezione cava, o pluriconnessa).

Con riferimento al generico contorno s_i si ha, per le (c),

$$\begin{aligned} \int_{s_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds &= \int_{s_i} \left(x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} \right) ds = \\ &= - \int_{s_i} \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) ds = - \int_{s_i} (x dx + y dy). \end{aligned}$$

La forma differenziale $x dx + y dy$ è un differenziale esatto nel dominio rettangolare $-\infty \leq x \leq \infty$, $-\infty \leq y \leq \infty$; infatti x ed y sono ad un sol valore e continue con le loro derivate prime in tutto il suddetto dominio, e in tal caso la condizione $\partial x/\partial y = \partial y/\partial x$ è sufficiente a garantire che la forma è un differenziale esatto. Si sa che se una forma definita in un dominio monoconnesso, in particolare in un dominio rettangolare, è un differenziale esatto, è nullo il suo integrale curvilineo esteso a qualsiasi curva chiusa contenuta nel dominio stesso. Poichè s_1 soddisfa a queste condizioni, si ha

$$\int_{s_1} (x dx + y dy) = 0$$

e quindi

$$\int_{s_1} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 0. \quad (e)$$

E' noto (problema di *Neumann*) che condizione necessaria e sufficiente perchè esista — e se esiste è unica — la funzione armonica definita in un dominio piano comunque connesso, sui contorni del quale sia assegnata la $\partial \Psi/\partial n$, è la seguente

$$\Sigma_1 \int_{s_1} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 0.$$

Questa condizione è soddisfatta a fortiori, essendo per la (e) nullo ciascun termine della sommatoria. Perciò è assicurata l'esistenza e l'unicità della funzione Ψ che compare nella terza delle (8-1). Inoltre, la necessità che w sia ad un sol valore impone la uniformità della Ψ ; e cioè per ogni contorno deve aversi (*)

$$\int_{s_1} \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0, \quad (f)$$

condizione necessaria e sufficiente di uniformità.

Alla funzione armonica Ψ è coniugata un'altra funzione Φ , definita

(*) Per accettare le $u v w$ soluzioni delle equazioni dell'equilibrio elastico con annesse condizioni ai limiti occorre (e basta) che esse siano ad un sol valore (Vol. I, Cap. V. § 1); questa condizione è da verificare caso per caso.

dalle condizioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} .$$

Si verifica immediatamente che anche Φ è armonica; così pure si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} .$$

La condizione (e) importa perciò per ogni contorno

$$\int_{s_i} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0$$

e cioè la uniformità della coniugata di Ψ (si osservi che la uniformità di una funzione armonica non implica di necessità la uniformità della sua coniugata).

Questo risultato si ritroverà, in seguito, per altra via. Dalla (f) si ha poi

$$\int_{s_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0 ;$$

su questo risultato si poggia un importante caso particolare del teorema di Stokes, che sarà studiato più innanzi.

Dalle (8-1) si ottiene

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

risulta perciò dalle (2-12)

$$F'_z = \mathcal{N}'_x = \mathcal{N}'_y = 0 .$$

Così pure dalle (2-11) si trae

$$F^o_z = \mathcal{N}^o_x = \mathcal{N}^o_y = 0 ,$$

dalle (2-14)

$$F'_x = F'_y = 0$$

e dalle (2-13)

$$F^o_x = F^o_y = 0 .$$

Le sollecitazioni sulla base $z = \ell$ hanno perciò per risultante una coppia $\mathcal{M}'_z = \mathcal{M}_z$ il cui vettore è diretto secondo z , e sulla base $z = 0$ una coppia $\mathcal{M}^o_z = -\mathcal{M}_z$, il cui vettore è diretto secondo z ed orientato in verso opposto a quello di z . Si è in presenza della *sollecitazione semplice di torsione*. Dalle (2-18) risulta che in ogni sezione retta l'unica caratteristica della sollecitazione interna è il *momento torcente* $M_t = \mathcal{M}_z$. L'espressione di M_t si ha dall'ultima delle (2-18):

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \\ &= G \frac{c}{E} \left[\int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right) x dA - \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) y dA \right] = \\ &= G \frac{c}{E} \left[\int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA - I_x - I_y \right] = \\ &= G \frac{c}{E} \left[\int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA - I_p \right] \end{aligned} \quad (g)$$

essendo I_p il momento polare della sezione retta rispetto all'origine O .

La quantità adimensionale, funzione della sola geometria della sezione,

$$q = \frac{I_p}{I_p - \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA} \quad (3)$$

prende nome di *fattore di torsione*; la (g) si scrive perciò

$$M_t = -c \frac{G}{E} \frac{I_p}{q} \quad (4)$$

Attraverso la (8-4), le (8-1) si scrivono

$$\begin{aligned} u &= -q \frac{M_t}{GI_p} yz \\ v &= q \frac{M_t}{GI_p} xz \\ w &= -q \frac{M_t}{GI_p} \Psi \end{aligned} \quad (5)$$

e le (a)

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) \\ \tau_{zy} &= -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right).\end{aligned}\tag{6}$$

2. Considerazioni relative agli spostamenti.

Si consideri la generica retta parallela all'asse z , intersezione dei due piani

$$\begin{aligned}x - x_c &= 0 \\ y - y_c &= 0;\end{aligned}$$

essa si chiama *fibra*.

Al piano $x - x_c = 0$ corrisponde, a deformazione avvenuta, la superficie

$$x' - u - x_c = 0$$

e cioè ancora

$$x' + q \frac{M_t}{GI_p} yz - x_c = 0.\tag{h}$$

La (h) non è ancora l'equazione $g(x' y' z') = 0$ della trasformata del piano $x - x_c = 0$, per la presenza di y e z .

Trascurando v nei riguardi di y , e w nei riguardi di z , la (h) si scrive

$$x' = x_c - q \frac{M_t}{GI_p} y'z'\tag{i}$$

che è l'equazione di una quadrica rigata (paraboloide iperbolico). Analogamente, l'equazione della trasformata del piano $y - y_c = 0$ è

$$y' = y_c + q \frac{M_t}{GI_p} x'z',\tag{l}$$

equazione di un altro paraboloide iperbolico. Le due quadriche non si intersecano secondo una retta. Ma se z è dello stesso ordine di grandezza di x ed y , si può porre nella (i) $y' = y_c$, e nella (l) $x' = x_c$; nella zona

di intersezione le due quadriche (i) ed (l) si assimilano così ai due piani

$$x' = x_c - q \frac{M_t}{GI_p} y_c z'$$

$$y' = y_c + q \frac{M_t}{GI_p} x_c z' ,$$

la cui intersezione è una retta. La proiezione di questa retta sul piano xz è inclinata di $-y_c q \frac{M_t}{GI_p}$ sull'asse z ; la proiezione sul piano yz è inclinata di $+x_c q \frac{M_t}{GI_p}$. La sua posizione deriva cioè da una rotazione rigida intorno all'asse z , tra le due sezioni rette distanti 1, di ampiezza $\frac{q M_t}{GI_p}$.

Questo risultato è stato tratto nello stesso ordine di approssimazione che ha permesso, nel caso della flessione, di stabilire il principio della conservazione della planeità delle sezioni e della loro convergenza sulla stessa retta; in ambedue le dimostrazioni infatti si è presupposto che xyz siano dello stesso ordine di grandezza, esse perciò cadono in difetto se la trave è molto lunga.

In tal caso però cadono, come è noto, in difetto anche le premesse delle equazioni lineari dell'equilibrio elastico, e la stessa trattazione del De Saint-Venant.

La retta $x=y=0$ si trasforma in se stessa (*fibra d'origine*).

Cambiando l'origine del riferimento, la retta che si trasforma in se stessa è un'altra, sempre però tra quelle parallele all'asse del solido; ciò corrisponde ad imprimere al solido deformato un moto rigido.

Il piano di equazione

$$z = k$$

si trasforma, nello stesso ordine di approssimazione con cui sono state ricavate le (i) ed (l), nella superficie di equazione

$$z' = k - q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x' y') . \quad (m)$$

Se $\Psi(xy)$ è una funzione lineare di x e y , la (m) rappresenta un piano. Ma, fatta eccezione per la sezione a forma di cerchio o di corona

circolare, ciò non accade; perciò nella torsione le sezioni rette non si conservano piane.

Le proiezioni A_1 dei punti A' , corrispondenti ai punti A della sezione retta $z=k$, sul piano $z=k$, hanno per coordinate $x' y' k$, dove x' ed y' sono fornite da

$$\begin{aligned} x' &= x - q \frac{M_t}{GI_p} ky \\ y' &= y + q \frac{M_t}{GI_p} kx . \end{aligned} \quad (n)$$

Si osserva dalle (n) che i punti A_1 si ottengono dai punti A mediante una rotazione rigida della sezione retta nel suo piano, di centro O , e di ampiezza (*)

$$q \frac{M_t}{GI_p} k . \quad (o)$$

Gli spostamenti dei punti della generica sezione retta $z=k$ sono perciò somma di quelli u e v relativi alla rotazione rigida (o), forniti dalle prime due delle (8-5), e di quelli w normali al piano $z=k$, forniti dalla terza delle (8-5); questi ultimi soltanto provocano spostamenti relativi tra i punti della sezione, che perciò non si trovano più, a deformazione avvenuta, nello stesso piano.

Poichè i w sono indipendenti da z , la forma della superficie a deformazione avvenuta (*ingobbimento*) è la stessa per tutte le sezioni rette.

Le due sezioni di base ruotano l'una rispetto all'altra, per effetto delle u e v , dell'angolo

$$\Delta\varphi_z = \Delta\vartheta = q \frac{M_t \ell}{GI_p} ; \quad (7)$$

il segno di $\Delta\vartheta$ è tale che per esso le due coppie $\mathcal{M}_z^t = M_t$ ed $\mathcal{M}_z^o = -M_t$ compiono lavoro positivo.

(*) Poichè il valore della rotazione è indipendente dalla scelta di O , deve esserlo anche il rapporto q/I_p . Si dimostra (I. S. Sokolnikoff - Mathematical Theory of Elasticity - Mc Graw Hill Book Company - N. Y. 1956 pag. 113) che, variando l'origine, la Ψ varia di un termine lineare, e la soluzione del problema della torsione è invariata.

Due generiche sezioni a distanza unitaria ruotano tra loro dell'angolo

$$\vartheta' = \varrho \frac{M_t}{GI_p} \quad (8)$$

detto *angolo specifico di torsione*.

Dalle (8-6) si osserva che possono esistere delle rette parallele a z cui corrisponde stato tensionale nullo; la traccia T di una di tali rette sul piano xy presenta le coordinate definite da

$$\begin{aligned} x_T &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_T \\ y_T &= - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_T \end{aligned} \quad (9)$$

A tali rette a volte si assegna il nome di *asse di torsione*; le loro trasformate risultano ortogonali in ogni punto alla superficie trasformata della sezione retta.

Di assi di torsione possono essercene più d'uno (profilati), o nessuno (sezioni pluriconnesse), nel senso che in nessun punto della sezione si verificano le (8-9).

3. Alcuni richiami di analisi.

E' necessario, per la migliore comprensione di quanto segue, richiamare qualche concetto di analisi matematica.

a) Formula di Gauss.

Si consideri un volume V convesso o meno, comunque connesso, limitato all'interno di una o più superfici chiuse e finite, indicate complessivamente con S . In ogni punto di V e di S sia definita una funzione $F(x, y, z)$ a un sol valore che sia, assieme alla sua derivata prima $\partial F / \partial x$, finita e continua.

Sia S_0 la proiezione normale di S sul piano yz (fig. 8-3), e dS_0 un elemento di S_0 ; si considerino il cilindro di sezione dS_0 , con generatrici parallele ad x , e le intersezioni dS_1 di questo cilindro con la superficie S . Le dS_1 sono in numero pari, e si indicano con $dS_1, dS_2, \dots, dS_{2p}$ nell'ordine in cui si incontrano percorrendo l'asse x da $-\infty$ a $+\infty$. Siano n_1, n_2, \dots, n_{2p} le normali ad S in corrispondenza di $dS_1, dS_2, \dots, dS_{2p}$, orientate verso l'esterno di S ; se i è pari (cilindro uscente da V) risulta $\cos \widehat{n_i x} > 0$, se i è dispari risulta $\cos \widehat{n_i x} < 0$ (cilindro entrante in V).

Può scriversi

$$dS_0 = \begin{cases} dS_1 \cos \widehat{n_1 x} & \text{(i pari)} \\ - dS_1 \cos \widehat{n_1 x} & \text{(i dispari)} . \end{cases}$$

Si passi adesso a calcolare l'integrale

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x} dV .$$

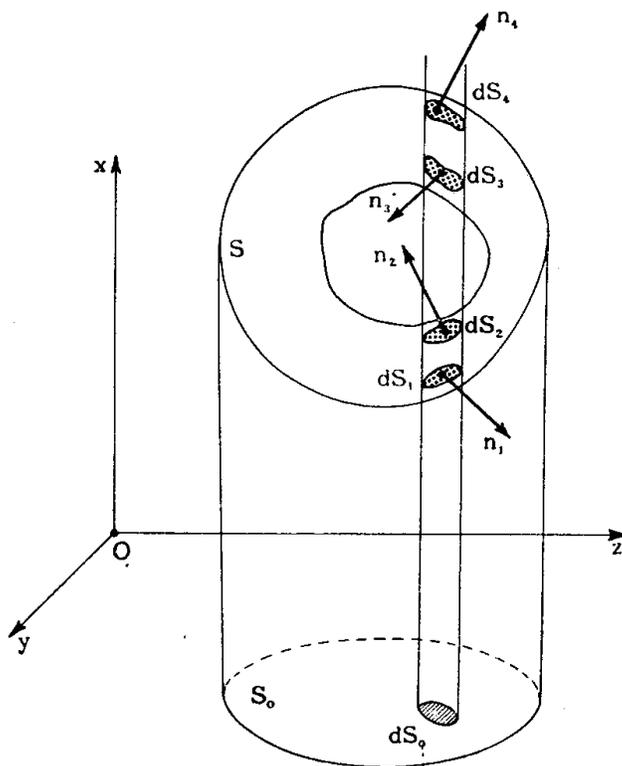


FIG. 8-3

L'elemento dV si prende pari a $dS_0 dx$; risulta perciò

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial F}{\partial x} dV &= \int_{S_0} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \dots + \int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) dS_0 = \\ &= - \int_{S_0} (F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2p-1} - F_{2p}) dS_0 = \\ &= \int_{S_1} F_1 \cos \widehat{n_1 x} dS_1 + \int_{S_2} F_2 \cos \widehat{n_2 x} dS_2 + \dots + \int_{S_{2p}} F_{2p} \cos \widehat{n_{2p} x} dS_{2p} . \end{aligned}$$

In definitiva è perciò

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x} dV = \int_S F \cos \widehat{nx} dS \quad (10)$$

o anche, sotto altra forma,

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x} dV = \int_S F \frac{dx}{dn} dS. \quad (11)$$

Le (8-10) e (8-11) trasformano un integrale di volume in un integrale di superficie, o viceversa, e prendono nome di *formula di Gauss*.

Nel piano la (8-11) si particularizza, indicando con A un'area del piano xy , con s il suo contorno (fig. 8-4), e con $f(xy)$ una funzione definita in ogni punto

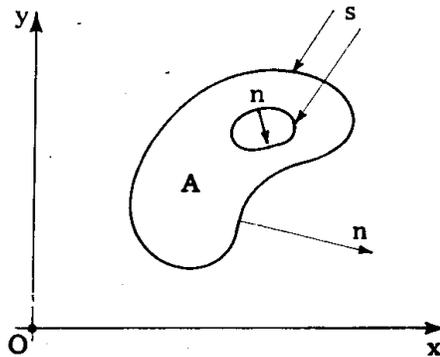


FIG. 8-4

di A e di s (le limitazioni sono le stesse precisate nel corso della precedente dimostrazione), nell'altra

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f \cos \widehat{nx} ds = \int_s f \frac{dx}{dn} ds. \quad (12)$$

In presenza di tre funzioni $F_1 F_2 F_3$ di $x y z$ definite in uno stesso volume V , per le (8-11) si ha

$$\int_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dV = \int_S F_1 \cos \widehat{nx} dS$$

$$\int_V \frac{\partial F_2}{\partial y} dV = \int_S F_2 \cos \widehat{ny} dS$$

$$\int_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \int_S F_3 \cos \widehat{nz} dS$$

da cui, sommando membro a membro, si ha la cosiddetta *formula di Gauss generalizzata*:

$$\int_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \int_S (F_1 \cos \widehat{nx} + F_2 \cos \widehat{ny} + F_3 \cos \widehat{nz}) dS . \quad (13)$$

Dalla formula di Gauss derivano alcuni importanti teoremi.

b) *Teorema della divergenza.*

Ad ogni campo vettoriale \bar{v} definito dalle tre funzioni v_x, v_y, v_z , componenti di \bar{v} sui tre assi cartesiani x, y, z , è connesso lo scalare, funzione del punto,

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} , \quad (14)$$

detto *divergenza* del vettore \bar{v} . Sia dS una superficie elementare compresa nel dominio di definizione di \bar{v} , ed n la sua normale orientata; si definisce *flusso* del vettore \bar{v} attraverso dS la quantità scalare

$$df = (v_x \cos \widehat{nx} + v_y \cos \widehat{ny} + v_z \cos \widehat{nz}) dS . \quad (15)$$

Il flusso definito dalla (8-15) è positivo o negativo secondo che la componente normale di \bar{v} secondo n (fornita dall'espressione in parentesi) è positiva o negativa, il suo segno dipende perciò dal verso di n . Se \bar{n} è il versore avente la direzione e il verso di n , la (8-15) si scrive pure, sotto forma di prodotto scalare,

$$df = (\bar{v} \times \bar{n}) dS .$$

Se si è in presenza di una superficie S finita, il flusso di \bar{v} attraverso S è fornito dallo scalare

$$f = \int_S (\bar{v} \times \bar{n}) dS ;$$

sia il valore che il segno di f dipendono dal verso della normale ad S nei singoli elementi dS .

Se la superficie S è chiusa, la normale n nel suo punto generico si orienta verso l'esterno; in tal caso il flusso positivo si chiama *uscante*, il flusso negativo *entrante*.

Sia V il volume racchiuso da S , mono o pluriconnesso, e \bar{v} sia definito uniforme in ogni punto di V e di S .

Dalle (8-13), (8-14) e (8-15) si ha

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v} \cdot dV = \int_S (\bar{v} \times \bar{n}) dS . \quad (16)$$

La (8-16) esprime il *teorema della divergenza*: l'integrale della divergenza esteso ad un certo volume è uguale al flusso attraverso la superficie che racchiude il volume stesso.

Si dimostra che lo scalare $\operatorname{div} \bar{v}$ è indipendente dalla terna di riferimento.

Un campo vettoriale a divergenza nulla si chiama *solenoidale*; in un tale campo il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Le *linee di flusso* (o *traiettorie*, o *linee di forza*) di un campo vettoriale sono le linee cui \bar{v} è tangente in ogni punto. Si chiama *tubo di flusso* lo spazio limitato da tutte le linee di flusso che si appoggiano al contorno di un'area S . Il flusso di \bar{v} attraverso la superficie laterale di un tubo siffatto è nullo; se il campo è solenoidale, il flusso attraverso la superficie chiusa costituita dalla superficie laterale del tubo di flusso e da due sezioni S_1 e S_2 del tubo stesso è zero, e perciò il flusso attraverso una qualsiasi sezione del tubo è costante (fig. 8-5). Questo flusso

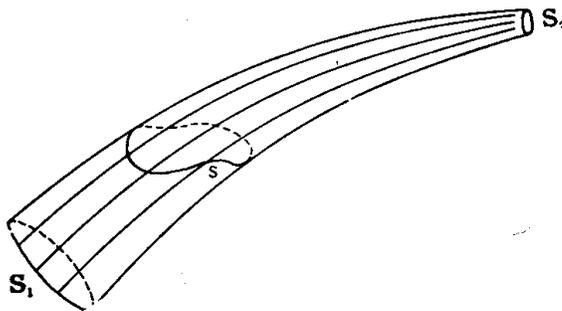


FIG. 8-5

si chiama *flusso concatenato* con una qualsiasi curva s giacente sulla superficie del tubo e tale da non potersi ridurre ad un punto per deformazione continua senza uscir fuori dalla superficie del tubo.

Si dimostra che in un campo solenoidale le linee di flusso si chiudono su se stesse, o sul contorno.

c) Rotazione, potenziale, gradiente.

Ad un campo vettoriale \bar{v} è connesso un altro campo vettoriale; il vettore generico di questo campo si chiama $\operatorname{rot} \bar{v}$ (*rotazione*), ed è definito dalle tre componenti

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \bar{v})_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
 (\text{rot } \bar{v})_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\
 (\text{rot } \bar{v})_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (*)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Si dimostra che il vettore $\text{rot } \bar{v}$ è indipendente dalla terna di riferimento. Un campo vettoriale \bar{v} ammette un *potenziale* Φ se esiste una funzione Φ , ad uno o più valori, tale che:

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
 v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
 v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} ;
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

ossia se la forma

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

è il differenziale esatto $d\Phi$ di una funzione $\Phi(x, y, z)$; il vettore \bar{v} in questo caso si chiama *gradiente* della funzione Φ , e si scrive

$$\bar{v} = \text{grad } \Phi . \tag{19}$$

Condizione necessaria perchè un campo vettoriale ammetta un potenziale funzione uniforme del punto è che la rotazione del vettore sia nulla in ogni punto del campo; ciò si esprime scrivendo

$$\text{rot grad } \Phi = 0 . \tag{20}$$

(*) Le (8-17) si possono anche ottenere attraverso la relazione simbolica

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

E' interessante notare che, dato il campo vettoriale degli spostamenti \bar{s} dovuti ad una rotazione rigida (Vol. I, form. 1-2), è $(\text{rot } \bar{s})_x = 2p$, $(\text{rot } \bar{s})_y = 2q$, $(\text{rot } \bar{s})_z = 2r$.

Ciò deriva dalle proprietà dei differenziali esatti; infatti condizioni necessarie perchè la forma

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

sia un differenziale esatto sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (p)$$

che coincidono con la condizione $\text{rot } \bar{v} = 0$.

Le (p) sono anche sufficienti per l'esistenza di Φ ; se il campo di definizione di \bar{v} è semplicemente connesso, Φ è anche uniforme; in caso contrario Φ in genere è a più valori.

d) *Teorema del gradiente.*

Se \bar{v} è un gradiente, la (8-10) permette di scrivere

$$\begin{aligned} \int_V v_x dV &= \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial x} dV = \int_S \Phi \cos \hat{nx} dS \\ \int_V v_y dV &= \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial y} dV = \int_S \Phi \cos \hat{ny} dS \\ \int_V v_z dV &= \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial z} dV = \int_S \Phi \cos \hat{nz} dS \end{aligned} \quad (21)$$

da cui sommando vettorialmente, e chiamando \bar{n} il versore disposto secondo n , si ha

$$\int_V \text{grad } \Phi \cdot dV = \int_S \Phi \bar{n} dS. \quad (22)$$

La (8-22) è l'espressione simbolica del *teorema del gradiente*; proiettata sui tre assi, essa porta alle tre relazioni (8-21).

e) *Teorema di Stokes.*

Assegnato un generico campo vettoriale \bar{v} , definito in ogni punto di un volume V e del suo contorno, si definisce *circuitazione* di \bar{v} lungo una linea chiusa s

tutta contenuta in V , e su cui sia fissato un verso positivo, l'espressione

$$c = \int_s \bar{v}_s ds, \quad (23)$$

dove \bar{v}_s indica la proiezione di \bar{v} sulla tangente ad s (fig. 8-6).

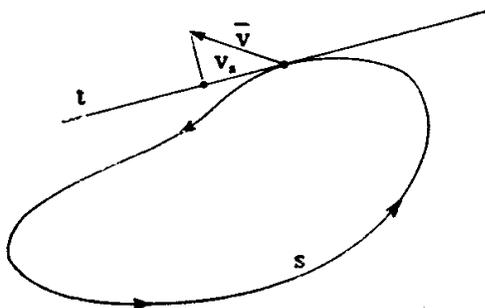


FIG. 8-6

Se il vettore \bar{v} è a rotazione nulla, ossia se sono verificate le (p), la circuitazione estesa a qualsiasi linea chiusa riducibile contenuta in V è nulla; vale anche la proposizione inversa.

Questo risultato, deducibile dalla teoria dei differenziali esatti, è contenuto nel più generale *teorema di Stokes*: se S è una superficie qualsiasi tutta contenuta in V ed avente per contorno s , e se il verso della normale n' a S è legato al verso positivo di s dalla regola del cavatappi (*), il flusso del vettore $\text{rot } \bar{v}$ attraverso S è uguale alla circuitazione del vettore \bar{v} lungo s . Le componenti di \bar{v} siano ad un sol va-

(*) Si consideri un'area dS dell'intorno del punto generico P di S , di contorno s' ; su s' il verso positivo sia tale da coincidere con quello di s ove s' fosse portato su s senza mai intrecciarsi, e senza mai uscire fuori di S (fig. 8-7). La nor-

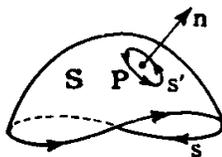


FIG. 8-7

male n in P va orientata in modo che un cavatappi avanzi nel verso positivo di n quando il manico si faccia girare secondo il verso positivo di s' . Il flusso di \bar{v} attraverso S è così definito in valore e segno; la sua espressione è quella, già scritta in generale nel paragrafo (b),

$$f = \int_S (v_x \alpha_{nx} + v_y \alpha_{ny} + v_z \alpha_{nz}) dS.$$

lore, e continue con le loro derivate prime, in ogni punto del dominio V , che peraltro può essere mono o pluriconnesso; s , in relazione al volume V , è riducibile, perchè S è tutta contenuta in V .

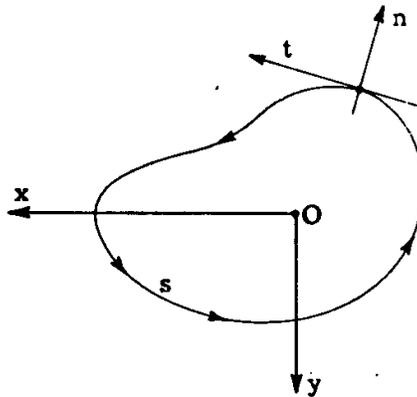


FIG. 8-8

Si cominci a prendere in esame una linea s contenuta in un piano; si assumano (fig. 8-8) gli assi x ed y in questo piano. Il vettore \bar{v} sia ad un sol valore e definito in tutti i punti del piano xy giacenti su s , o interni ad s . Per quanto detto, n' è orientato come z , e quindi t come nella fig. 8-8.

Si ha così:

$$c = \int_s v_s ds = \int_s (v_x \alpha_{sx} + v_y \alpha_{sy}) ds$$

essendo α_{sx} ed α_{sy} i coseni direttori della tangente t . Orientando la normale n alla curva in modo che, con rotazione rigida nel piano, n e t possano portarsi a coincidere con x e y , si ha, come già osservato, $\alpha_{sx} = -\alpha_{ny}$, $\alpha_{sy} = +\alpha_{nx}$; si può scrivere perciò

$$c = \int_s (-v_x \alpha_{ny} + v_y \alpha_{nx}) ds .$$

Per la formula di Gauss si ottiene, essendo \bar{v} definito ad un sol valore in tutta l'area A racchiusa da s ,

$$c = \int_A \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dA . \quad (24)$$

L'integrale a secondo membro della (8-24) è il flusso, attraverso l'area piana A racchiusa da s , del vettore $\text{rot } \bar{v}$; infatti delle tre componenti di $\text{rot } \bar{v}$ le prime due non danno contributo al flusso, essendo parallele al piano xy in cui A è contenuta, e la terza offre un contributo pari all'integrale della (8-24).

Si consideri adesso una curva chiusa s sghemba, e una qualsiasi superficie S che ha per orlo s ; la S ovviamente non è piana. Si scomponga S in elementi dS (fig. 8-7), aventi ciascuno il contorno s' in comune con i contorni degli elementi dS adiacenti. Per ciascuno di questi elementi vale la (8-24), potendosi

essi considerare piani. Sommando i flussi elementari del vettore $\text{rot } \bar{v}$ attraverso i dS , si ottiene il flusso di $\text{rot } \bar{v}$ attraverso S , e sommando le circuitazioni di \bar{v} lungo i contorni s' dei dS , si ottiene la circuitazione lungo la linea s ; infatti i contorni comuni a due elementi dS danno contributi uguali e contrari alla sommatoria delle circuitazioni, essendo percorsi in un verso se considerati appartenenti ad un elemento, in verso contrario se appartenenti all'altro. E' così dimostrato in generale il teorema di Stokes.

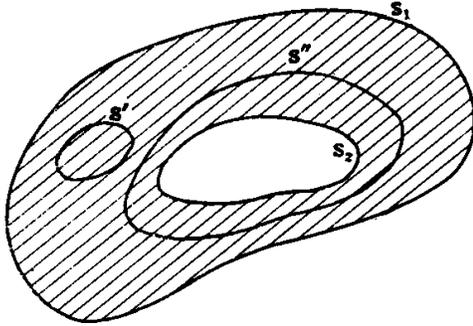


FIG. 8-9

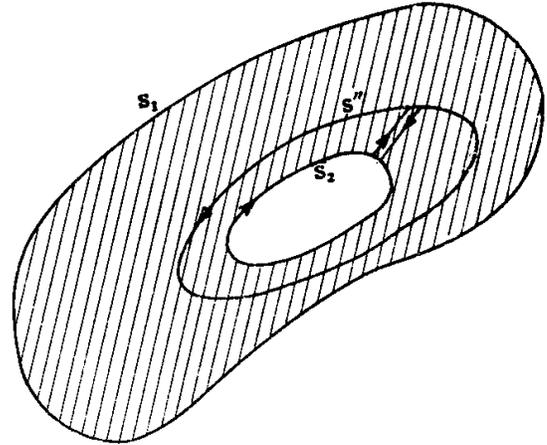


FIG. 8-10

Il teorema di Stokes vale anche per domini V pluriconnessi; poichè però S deve essere contenuta tutta in V , la linea s deve essere riducibile; con riferimento ad un dominio piano, e cioè all'area A delimitata dalle due curve chiuse s_1 ed s_2 (fig. 8-9), il teorema è valido per la linea riducibile s' , perchè l'area contenuta in essa è tutta contenuta in A , ma non per la linea s'' irriducibile, perchè l'area contenuta in essa comprende la cavità, che non fa parte di A . In tal caso si può considerare la curva chiusa costituita da s'' , s_2 , e da due segmenti vicinissimi che le uniscono (fig. 8-10); questa curva è tutta contenuta in A , ed è riducibile, per essa quindi è valido il teorema di Stokes. Si può perciò dire che la circuitazione estesa a tale linea è pari al flusso del vettore rotazione attraverso l'area compresa tra s'' ed s_2 . La circuitazione va calcolata, se la normale ad A viene verso il lettore, adottando i versi che risultano dalla fig. 8-10; essa non comprende i termini relativi ai due segmenti di unione, che sono uguali e contrari.

Chiamando c'' e c_2 le circuitazioni lungo s'' ed s_2 , valutate prendendo come verso positivo su s_2 lo stesso che su s'' , si ha

$$c'' - c_2 = \int_{A''} \text{rot } \bar{v} \cdot dA . \quad (q)$$

avendo chiamato A'' l'area racchiusa tra le curve s'' ed s_2 . La (q) assicura che se la rotazione è nulla la circuitazione lungo qualsiasi curva chiusa che comprende una cavità non è in genere nulla, perchè la curva non è riducibile, ma è la stessa per tutte le curve. Per una curva che circonda n volte la cavità è $c'' = nc_2$; il valore di c'' non dipende dalla curva, ma solo dal numero di volte che questa curva gira intorno alla cavità.

Dal teorema di Stokes si trae che, assegnata una curva chiusa s , il flusso di $\text{rot } \bar{v}$ attraverso qualsiasi superficie S avente per orlo s è lo stesso.

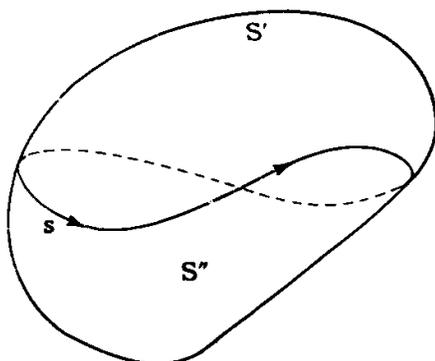


FIG. 8-11

Assegnate due superfici S' ed S'' con orlo s (fig. 8-11) si ha

$$\begin{aligned} & \int_{S'} \left[(\text{rot } \bar{v})_x \alpha_{nx} + (\text{rot } \bar{v})_y \alpha_{ny} + (\text{rot } \bar{v})_z \alpha_{nz} \right] dS = \\ & = \int_{S''} \left[(\text{rot } \bar{v})_x \alpha_{nx} + (\text{rot } \bar{v})_y \alpha_{ny} + (\text{rot } \bar{v})_z \alpha_{nz} \right] dS . \end{aligned} \quad (r)$$

Considerando come interno lo spazio racchiuso dalla superficie chiusa $S' + S''$, il primo integrale della (r) rappresenta flusso di $\text{rot } \bar{v}$ uscente da questo spazio, il secondo integrale flusso entrante in esso; quindi il flusso totale di $\text{rot } \bar{v}$ uscente da una superficie chiusa (o entrante in essa) è nullo.

Questa circostanza consegue anche dal teorema della divergenza. Infatti il vettore $\text{rot } \bar{v}$ è a divergenza nulla, come si verifica immediatamente, e perciò è nullo anche il flusso di $\text{rot } \bar{v}$ attraverso qualsiasi superficie chiusa. Il campo del vettore $\text{rot } \bar{v}$ è solenoidale; sinteticamente si scrive

$$\text{div rot } \bar{v} = 0 . \quad (25)$$

f) *Lemma di Green.*

Si considerino due funzioni $f(xy)$ e $g(xy)$ definite in ogni punto di un'area piana A e del suo contorno s ; quest'ultimo sia continuo, e in ogni suo punto sia determinata univocamente la tangente. In A e su s siano finite e continue le funzioni f e g , e le loro derivate prime e seconde.

Dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

e dalla (8-12) si trae

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} dA + \int_A f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dA = \int_s f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds .$$

Analogamente si ottiene, rispetto ad y ,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} dA + \int_A f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dA = \int_s f \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dn} ds .$$

Sommando membro a membro si ha

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA + \int_A f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dA = \int_s f \frac{\partial g}{\partial n} ds . \quad (26)$$

La (8-26) esprime il cosiddetto *lemma di Green*. Vale anche l'analogo

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA + \int_A g \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dA = \int_s g \frac{\partial f}{\partial n} ds . \quad (26')$$

Se f e g sono armoniche, dalle (8-26) e (8-26') si trae

$$\int_s f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \int_s g \frac{\partial f}{\partial n} ds . \quad (26'')$$

4. Rotazione e divergenza del vettore $\bar{\tau}_z$. Potenziale elastico ed energia di deformazione.

Dalle (8-6) ed (8-17) si ricava, per il campo vettoriale piano delle $\bar{\tau}_z$,

$$(\text{rot } \bar{\tau}_z)_x = 0$$

$$(\text{rot } \bar{\tau}_z)_y = 0$$

$$(\text{rot } \bar{\tau}_z)_z = 2q \frac{M_t}{I_p} = \text{cost} .$$

Dalla (8-8) si trae poi

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = 2G \vartheta' . \quad (27)$$

Sempre dalle (8-6), e dalla (8-14), si ha poi

$$\text{div } \bar{\tau}_z = 0 . \quad (28)$$

Il potenziale elastico è fornito (2-23) da

$$\varphi = \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{2G};$$

l'energia di deformazione è perciò

$$L = \int_V \varphi dV = q^2 \frac{M_t^2 \ell}{2GI_p^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 \right] dA.$$

L'integrale si trasforma come segue:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 \right] dA = \\ & = \int_A (x^2 + y^2) dA + \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - 2 \int_A \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA. \end{aligned} \quad (s)$$

Il primo integrale è il momento polare I_p rispetto al punto O . Inoltre, per la (8-26), il secondo integrale si trasforma, ponendo $f=g=\Psi$, e ricordando la (c), in

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = \int_s \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \\ & = \int_s \Psi x \frac{dy}{dn} ds - \int_s \Psi y \frac{dx}{dn} ds. \end{aligned}$$

Per la formula di Gauss (8-12) si ha:

$$\begin{aligned} \int_s \Psi x \frac{dy}{dn} ds &= \int_A \frac{\partial (\Psi x)}{\partial y} dA = \int_A x \frac{\partial \Psi}{\partial y} dA \\ \int_s \Psi y \frac{dx}{dn} ds &= \int_A \frac{\partial (\Psi y)}{\partial x} dA = \int_A y \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA \end{aligned}$$

e perciò

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = \int_A \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA.$$

Dalla (s) si ha quindi, per la (8-3),

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 \right] dA = I_p - \int_A \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{I_p}{q}$$

e l'energia di deformazione è fornita da

$$L = q \frac{M_t^2 \ell}{2 GI_p} . \quad (29)$$

Alla (8-29) può pervenirsi anche applicando il teorema di Clapeyron. Le forze elementari agenti sulle due basi del solido compiono lavoro per effetto delle sole u e v , che sono le componenti di un moto rigido; perciò il lavoro di dette forze è uguale a quello compiuto dalle coppie \mathcal{M}_t e $-\mathcal{M}_t$, per effetto della rotazione relativa delle due basi, che è fornita dalla (8-7). Si ha perciò:

$$L_e = \frac{1}{2} \mathcal{M}_t \Delta\varphi_t = q \frac{M_t^2 \ell}{2 GI_p} .$$

5. La rappresentazione di Mohr.

Il cerchio di Mohr è quello della fig. 8-12; le tensioni principali σ_ξ e σ_ζ sono uguali e contrarie, e il loro valore coincide con quello della tensione tangenziale τ_z .

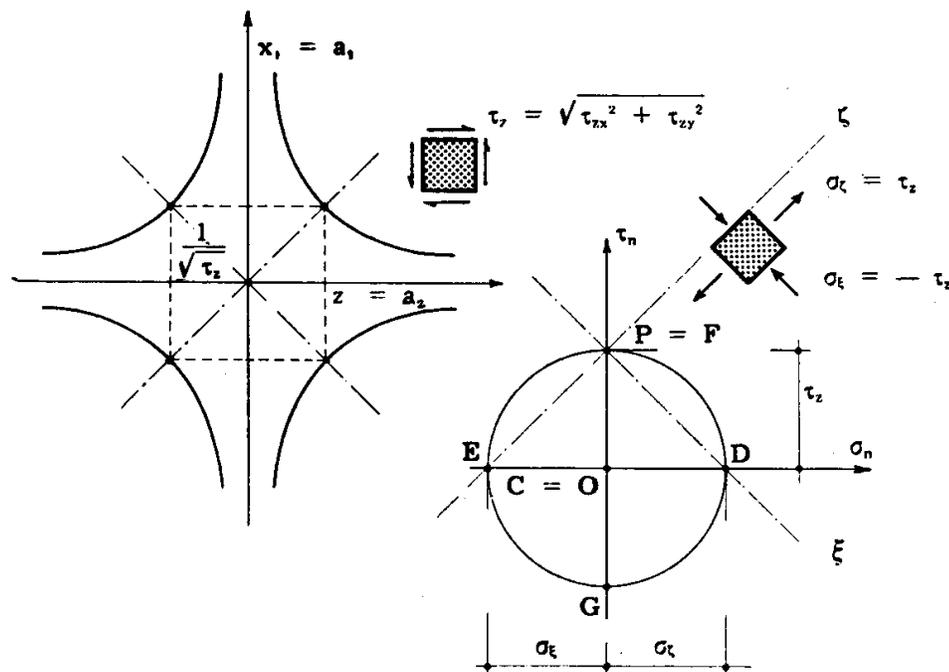


FIG. 8-12

Le direzioni principali sono inclinate di 45° sull'asse; le linee isostatiche corrispondenti alle tensioni principali diverse da zero giacciono, come

in generale, sui cilindri retti aventi per direttrici le linee di forza delle τ_z , e sono ovunque inclinate di 45° sulle generatrici di tali cilindri.

Gli asintoti delle coniche, tracce sul piano $x_1 z$ dei cilindri quadrici di tensione, sono gli assi z ed x_1 ; le coniche sono iperboli equilatera di semiassi $1/\sqrt{\tau_z}$.

Nel caso della torsione, è $\varepsilon_\eta = 0$, e perciò anche lo stato di deformazione è piano, secondo $x_1 z$.

Le coniche tracce dei cilindri quadrici di deformazione sono anch'esse iperboli equilatera, con asintoti x_1 e z .

Per le verifiche di resistenza, la tensione equivalente è fornita (Vol. I, Cap. IX) dall'asse $T=0$ nel riferimento $\sigma_\xi \sigma_\zeta$. In particolare, adottando il criterio delle tensioni ideali si ha

$$s \frac{m+1}{m} \tau_z = \sigma'_0 \quad (30)$$

6. La sezione circolare.

L'equazione del contorno della sezione circolare di raggio R è, con riferimento ad una coppia di assi aventi origine nel centro G ,

$$f(xy) = x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

la (c) porge perciò:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad (t)$$

La (t) è soddisfatta da $\Psi = \text{cost}$; la sezione retta si mantiene piana, il fattore q di torsione (8-3) è pari all'unità, e le tensioni sono fornite da (8-6)

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= - \frac{M_t}{I_p} y \\ \tau_{zy} &= \frac{M_t}{I_p} x \end{aligned} \quad (u)$$

da cui

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = - \frac{y}{x}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{M_t}{I_p} r$$

$$\tau_{z \max} = \frac{M_t}{I_p} R = \frac{2 M_t}{\pi R^3} . \quad (31)$$

Si ha perciò (fig. 8-13) che nel punto generico P la τ_z risultante è diretta secondo la tangente al cerchio di centro G e raggio GP; essa è costante lungo ogni circonferenza di centro G, e proporzionale alla distanza

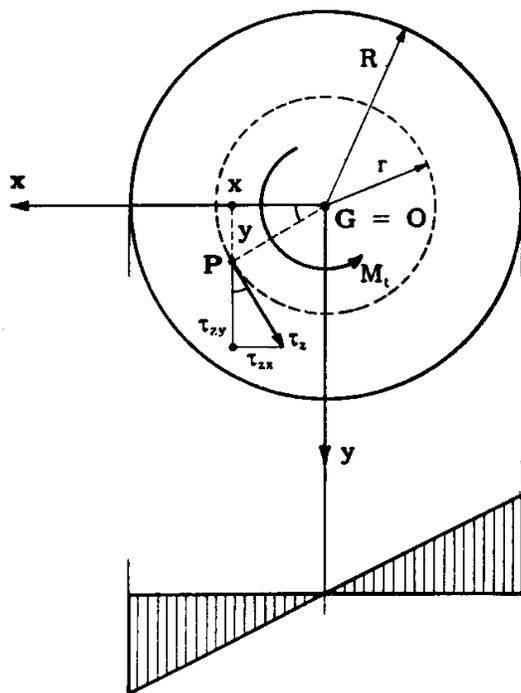


FIG. 8-13

da G, raggiungendo il suo massimo sulla superficie laterale. Le linee di forza del campo vettoriale delle τ_z sulla sezione retta sono le circonferenze di centro G. Introducendo il modulo di resistenza a torsione W_t la (8-31) si scrive

$$\tau_{z \max} = \frac{M_t}{W_t}$$

essendo

$$W_t = \frac{\pi R^3}{2} . \quad (32)$$

La condizione di resistenza espressa attraverso le tensioni ideali si

scrive, per la (8-30), e per materiali resistenti ugualmente a trazione e compressione,

$$\frac{m+1}{m} \frac{M_t}{W_t} \leq \sigma_a. \quad (33)$$

L'angolo specifico di torsione è (8-8)

$$\vartheta' = 2 \frac{M_t}{G \pi R^4}. \quad (34)$$

7. La sezione ellittica.

L'equazione del contorno della sezione ellittica di semiassi a e b è, con riferimento agli assi stessi,

$$f(xy) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

la (b) si scrive perciò:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dn} &= x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{x}{a^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{y}{b^2} &= \frac{xy}{b^2} - \frac{yx}{a^2} = xy \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

che è soddisfatta da

$$\Psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \text{cost}$$

funzione armonica. Si calcoli il fattore di torsione, attraverso la (8-3). Nel caso in esame è

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int_A (x^2 - y^2) dA = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (I_x - I_y) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

e perciò, in definitiva, ricordando che

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi}{4} ab (a^2 + b^2)$$

risulta:

$$q = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2$$

$$\vartheta' = \frac{M_t}{G} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \quad (35)$$

Dalle (8-6) si trae

$$\tau_{zx} = -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + 1 \right) y = -q \frac{M_t}{I_p} \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y = -2 \frac{M_t}{Ab^2} y \quad (v)$$

$$\tau_{zy} = -q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) x = q \frac{M_t}{I_p} \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x = 2 \frac{M_t}{Aa^2} x$$

essendo $A = \pi ab$ l'area dell'ellisse.

Con riferimento al generico diametro OP (fig. 8-14) si osserva che i

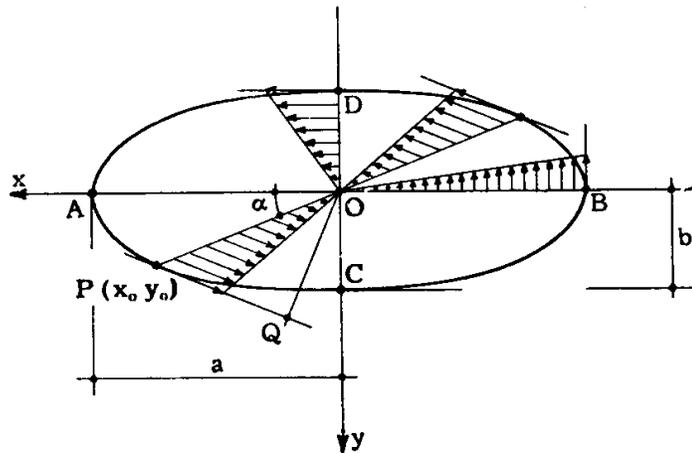


FIG. 8-14

vettori τ_z nei punti di detto diametro sono tutti diretti nella stessa direzione; infatti

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x} = -\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cost}.$$

La comune direzione delle τ_z è quella della tangente in P all'ellisse, poichè sul contorno le τ_z sono dirette secondo il contorno stesso.

Dalle (v) si trae che le τ_z variano lungo OP linearmente con la distanza dal centro; il valore massimo di τ_z si verifica in P (x_0, y_0), ed è pari a

$$\tau_z = 2 \frac{M_t}{A} \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = 2 \frac{M_t}{A \cdot OQ} \quad (z)$$

essendo OQ la distanza normale di O dalla tangente in P all'ellisse (*). Il massimo assoluto di τ_z si verifica perciò sul contorno, ed ove \overline{OQ} è minimo, e cioè nei punti C e D del contorno più vicini al centro; esso vale

$$\tau_{z \max} = 2 \frac{M_t}{Ab} \quad (36)$$

(*) L'equazione della tangente all'ellisse in P (x_0, y_0) è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P (y - y_0) = 0$$

e cioè

$$\frac{2x_0}{a^2} (x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2} (y - y_0) = 0 .$$

L'espressione della distanza di un punto di coordinate x', y' dalla retta di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ è

$$d = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} ;$$

nel caso in esame è $x' = y' = 0$, e perciò:

$$d = \frac{2 \frac{x_0^2}{a^2} + 2 \frac{y_0^2}{b^2}}{2 \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} ;$$

essendo poi

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

poichè P giace sull'ellisse, si può scrivere:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} .$$

Le linee di forza delle τ_z sulla generica sezione retta sono, per quanto sopra detto, ellissi omotetiche al contorno, di centro O; la legge di variazione delle τ_z lungo una di queste ellissi è la stessa che sul contorno.

La sezione retta $z=k$ si trasforma nella superficie di equazione (m)

$$z' = k - q \frac{M_t}{GI_p} \Psi = k - c M_t x' y' \quad (a')$$

ove c è una costante, positiva se $a > b$.

La (a') è l'equazione di un paraboloido iperbolico, quindi rigato (Vol. I, Cap. IX, § 4: $I=A_{44}=0$, $J < 0$, $A > 0$).

Per M_t positivo (e cioè agente nel verso \vec{xy} sulla faccia di normale $+z$) e per $a > b$, essendo a il semidiametro disteso sull'asse x , le w sono positive nei due quadranti ove x ed y sono di segno contrario; un osservatore disposto secondo l'asse z , con la testa dalla parte delle z positive, e con i piedi sulla sezione, vede innalzarsi i due quadranti che nel senso del momento torcente M_t seguono i due semiassi minori.

Nella fig. 8-15 sono rappresentate con curve intere le linee di livello delle w nei quadranti ove si verificano innalzamenti (si è soppressa la parte del solido al disopra del foglio, e perciò il momento segnato in fi-

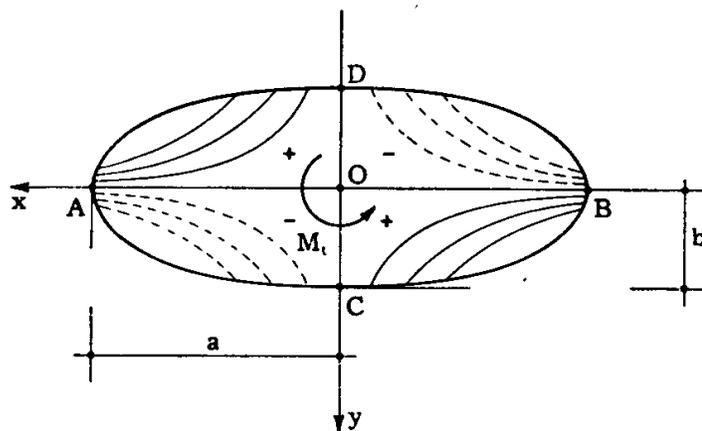


FIG. 8-15

gura è quello che agisce sulla faccia di normale $+z$) e con curve tratteggiate le linee di livello delle w nei quadranti ove si verificano abbassamenti; le suddette linee sono delle iperboli equilateri, aventi per asintoti gli assi x ed y .

8. La sezione a forma di corona circolare.

Si considerino i due solidi che si ottengono sezionando un solido di De Saint-Venant con un cilindro avente generatrici parallele all'asse z , e direttrice coincidente con una qualsiasi linea di forza delle τ_z (fig. 8-16).

La funzione Ψ per ciascuno di questi due solidi coincide con la funzione Ψ del solido somma. Infatti la (b) è verificata dalla Ψ non solo sul contorno del solido somma, ma anche lungo qualsiasi linea di forza delle τ_z , e quindi la Ψ , in ciascuno dei solidi parziali, verifica la (b) sul contorno. La (e) è pur essa soddisfatta sui contorni dei solidi parziali perchè è valida lungo qualsiasi linea chiusa contenuta nella sezione del solido somma.

Per il teorema di unicità, la Ψ del solido somma è quindi valida anche per i solidi parziali.

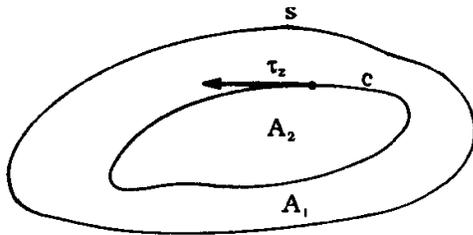


FIG. 8-16

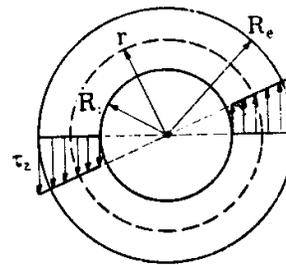


FIG. 8-17

Se ne trae che la distribuzione delle τ_z non varia se si operano sezioni del tipo sopra descritto. Dalla (8-3) si ottiene, indicando con gli indici 1 e 2 le quantità relative ai due solidi parziali,

$$\frac{I_p}{q} = \frac{I_{p1}}{q_1} + \frac{I_{p2}}{q_2} \quad (b')$$

Se è $q_2 = q$, dalla (b') si ha

$$\frac{I_{p1}}{q_1} = \frac{I_p}{q} - \frac{I_{p2}}{q} = \frac{I_{p1}}{q}$$

da cui si trae $q_1 = q$.

In un solido con sezione a forma di corona circolare la Ψ è perciò costante, e poichè per il solido interno è $q_2 = q = 1$, si ottiene $q_1 = 1$. Se R_e ed R_i sono i raggi, si ha (fig. 8-17)

$$\tau_z = \frac{M_t r}{I_p} = 2 \frac{M_t r}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} ;$$

la tensione tangenziale massima si verifica sul contorno e vale

$$\tau_{z \max} = 2 \frac{M_t R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} . \quad (37)$$

L'angolo specifico di torsione è (8-8)

$$\vartheta' = 2 \frac{M_t}{G \pi (R_e^4 - R_i^4)} .$$

9. Derivazione diretta della divergenza e rotazione del vettore $\bar{\tau}_z$.

Si vuole affrontare il problema della torsione per una via un po' diversa da quella classica del De Saint-Venant, e precisamente assegnando le componenti della tensione. Imponendo ovunque

$$\tau_{zx} \neq 0$$

$$\tau_{zy} \neq 0$$

$$\sigma_z = 0$$

sono identicamente annullate le caratteristiche $N M_x M_y$; l'assenza di M_x ed M_y importa che siano nulle anche T_x e T_y ; non rimane che $M_t = \mathfrak{M}_t$, momento torcente.

Dalle prime due equazioni indefinite dell'equilibrio (Vol. I, 2-8) si ricavano ($X=Y=Z=0$) le due relazioni già note dalla trattazione generale del problema di De Saint-Venant

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 .$$

Dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio si ha

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

e perciò

$$\operatorname{div} \bar{\tau}_z = 0 . \quad (38)$$

Il campo delle $\bar{\tau}_z$ è quindi solenoidale; il flusso attraverso un generico canale di flusso (il tubo di flusso si specializza in canale perchè il campo vettoriale è piano) è costante.

Le prime tre equazioni di congruenza (Vol. I, 1-33) e l'ultima sono identicamente soddisfatte; le altre due porgono:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 0$$

ed essendo γ_{zx} e γ_{zy} indipendenti da z , si ha:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} = \text{cost.}$$

Si può scrivere perciò

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \text{cost} = r. \quad (39)$$

10. La funzione di flusso.

Si ponga

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{zy} &= - \frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \quad (40)$$

La (8-38) è soddisfatta; la (8-39) impone che sia

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - r. \quad (41)$$

Inoltre, perchè le (8-40) siano soluzione del problema della torsione, occorre, e con la (8-41) basta, che sia verificata la condizione sul contorno (2-4)

$$\tau_{zx} \alpha_{nx} + \tau_{zy} \alpha_{ny} = 0.$$

La sestupla di componenti di tensione $0, 0, 0, 0, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ che soddisfa le (8-38) e (8-39), e la condizione (2-4), è equilibrata e congruente, poi-

chè soddisfa le equazioni complete di equilibrio e congruenza (Vol. I, 1-33 e 2-8). Lo stesso può dirsi se sono soddisfatte la (8-41) e la (2-4). La condizione sul contorno si scrive pure

$$\tau_{zx} \alpha_{sy} - \tau_{zy} \alpha_{sx} = 0 ,$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy_s}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx_s}{ds} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 . \quad (42)$$

La funzione F è cioè costante lungo il contorno; se i contorni sono più d'uno (sezione con cavità) F è costante su ciascun contorno, anche se il valore della costante è in genere diverso per ogni contorno. Si conviene assumere $F=0$ sul contorno esterno. Il problema della torsione è così ricondotto a quello della ricerca di una funzione $F(x, y)$ definita in ogni punto della sezione retta, soddisfacente alle (8-41) e (8-42).

La funzione F ha un particolare significato fisico. Si considerino due punti P e Q interni alla sezione retta (fig. 8-18),

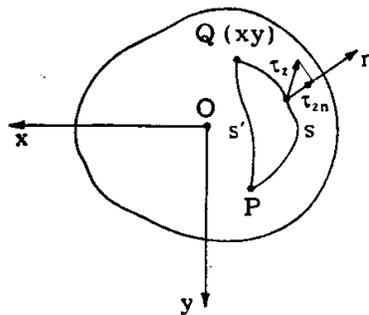


FIG. 8-18

ed una qualsiasi linea s , tutta contenuta nella sezione, che li unisca. Il flusso di $\bar{\tau}_z$ attraverso s è fornito da

$$f_s = \int_s \tau_{zn} ds = \int_s (\tau_{zx} \alpha_{nx} + \tau_{zy} \alpha_{ny}) ds . \quad (43)$$

Il segno della (8-43) dipende dal verso della normale n alla curva s ; se si conviene che la n sia orientata costantemente verso la destra di un viaggiatore che percorra la curva da P a Q , f_s è positivo se in complesso il flusso verso la destra del viaggiatore supera quello verso la sinistra.

La (8-43) si scrive

$$\begin{aligned} f_s &= \int_s \left(\tau_{zx} \frac{dx}{dn} + \tau_{zy} \frac{dy}{dn} \right) ds = \int_s \left(\tau_{zx} \frac{dy}{ds} - \tau_{zy} \frac{dx}{ds} \right) ds = \\ &= \int_s (-\tau_{zy} dx + \tau_{zx} dy) . \end{aligned}$$

Dalle (8-40) si ha

$$-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} ;$$

quindi sono rispettate le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma differenziale sotto integrale sia un differenziale esatto. Si ha che l'integrale curvilineo della forma tra P fisso e Q (xy) mobile è una funzione S (xy) uniforme e tale che $\partial S / \partial x = -\tau_{zy}$, e $\partial S / \partial y = \tau_{zx}$; quindi $S(xy) = F(xy)$. Ciò accade anche nelle sezioni pluriconnesse; infatti l'integrale curvilineo della forma esteso a ciascuna linea chiusa interna di contorno risulta zero, essendo per tali linee $\bar{\tau}_z$ tangente, ed $f_s = 0$.

In ogni caso perciò il flusso f_s attraverso una linea s dipende solo dagli estremi P e Q di s, e tenendo fisso P, risulta funzione a un sol valore delle coordinate xy di Q; esso fornisce, a meno di una costante, il valore di F in xy. La F prende nome perciò di *funzione di flusso*. Attraverso una qualsiasi curva chiusa riducibile o meno, il flusso f_s è nullo, come può trarsi pure dal teorema della divergenza. Si osserva che F ha pure il significato di potenziale (§ 3 c) del presente capitolo) del campo vettoriale $\bar{\tau}_z$, e cioè del campo il cui vettore generico è pari in ogni punto a $\bar{\tau}_z$, e ruotato rispetto ad esso di $+90^\circ$.

E' interessante anche osservare che la condizione $\text{div } \bar{\tau}_z = 0$ è una relazione di equilibrio, e la condizione $\text{rot } \bar{\tau}_z = \text{cost}$ è una relazione di congruenza. Dalla sola prima deriva la possibilità di porre le τ_{zx} e τ_{zy} nella forma (8-40); e da essa soltanto deriva che il flusso f_s esteso ad una qualsiasi curva chiusa riducibile è zero.

La condizione di equilibrio ai limiti permette poi di dire che il flusso f_s esteso a qualsiasi curva chiusa, anche non riducibile, è nullo.

Su una qualsiasi linea di flusso delle $\bar{\tau}_z$ la F ha un valore costante; infatti, assumendo come linea s congiungente due punti P e Q che giacciono su una linea di forza della $\bar{\tau}_z$ la linea stessa, è $f_s = 0$, e perciò $F_P = F_Q$; le linee di flusso delle $\bar{\tau}_z$ coincidono perciò con le linee di livello del solido F (xy) (fig. 8-19). I punti T (x_T, y_T) ove F è massima o minima presentano stato tensionale nullo; se è unico, esso è il punto interno a tutte le linee di forza delle $\bar{\tau}_z$.

Si ha (form. d' del § 8-1)

$$|\tau_z| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = \pm \frac{\partial F}{\partial n}.$$

Per la convenzione circa il verso di n e t (sovrapponibili ad x ed y), nel punto R , dove n è parallelo ed equiverso ad x , è pure t parallelo ed equiverso ad y . Per la (8-40) deve essere, in R ,

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= 0 \\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial n}.\end{aligned}$$

Poichè, dato un generico punto P , e quindi le rette n e t , gli assi x ed y possono scegliersi paralleli ed equiversi ad n e t , deve scriversi

$$\tau_z = -\frac{\partial F}{\partial n}. \quad (44)$$

La (8-44) assicura che il valore di $\bar{\tau}_z$ in un punto P coincide con la derivata direzionale di F effettuata secondo la normale n in P alla traiettoria di $\bar{\tau}_z$ passante per P (fig. 8-19), e cioè con l'inclinazione in P_F della

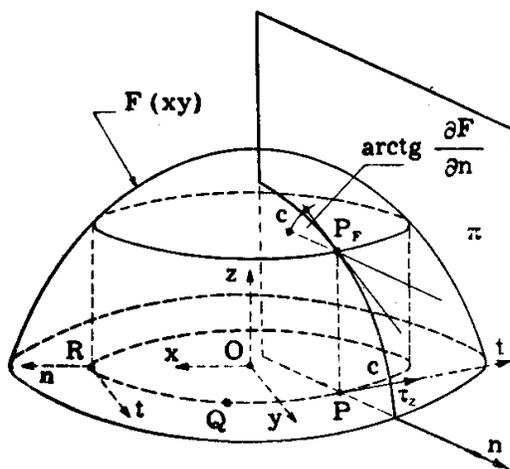


FIG. 8-19

curva c che si ottiene sezionando il solido $z = F$ con il piano π definito dalla parallela a z per P e dalla normale n in P alla linea di forza passante per P stesso.

La (8-44) definisce $\bar{\tau}_z$ anche in segno; infatti, attesa l'orientazione degli assi n e t , si può dire: un osservatore che cammini sul piano xy dalla

parte delle z positive, e proceda lungo n nel verso in cui F decresce, vede il vettore $\bar{\tau}_z$ orientato come il suo braccio sinistro. Con minor numero di parole, l'osservatore che discende lungo il solido F vede il vettore $\bar{\tau}_z$ alla sua sinistra.

Dalla relazione

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

si trae

$$M_t = - \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y \right) dA .$$

Per sezioni semplicemente connesse si può porre (fig. 8-20)

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial F}{\partial x} x dA &= \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial x} x dx = \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \left[(Fx)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} F dx \right] = \\ &= - \int_{y_{1m}}^{y_{2m}} dy \int_{x_1}^{x_2} F dx = - \int_A F dy dx = - V , \\ \int_A \frac{\partial F}{\partial y} y dA &= - \int_A F dx dy = - V ; \end{aligned}$$

si ha quindi

$$M_t = 2 V \quad (45)$$

essendo V il volume del solido $z = F(xy)$ (fig. 8-19).

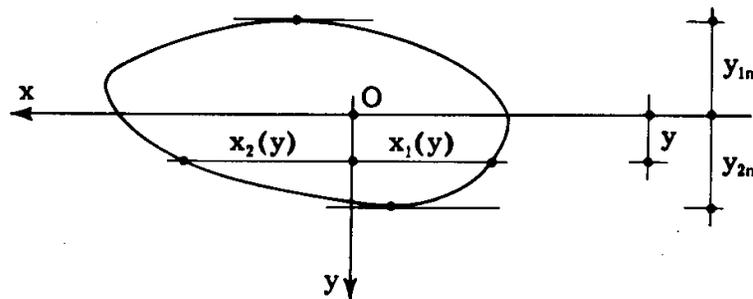


FIG. 8-20

La (8-45) permette di esprimere in funzione di M_t la costante r della (8-41).