

CAPITOLO V
FLESSIONE RETTA

1. La sollecitazione semplice di flessione retta.

Si assuma l'origine O coincidente con il baricentro, e gli assi x e y con gli assi baricentrici principali di inerzia di una base. Si consideri la terna di funzioni.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{c}{mE} xy \\ v &= -\frac{c}{2mE} (mz^2 - x^2 + y^2) \\ w &= \frac{c}{E} yz . \end{aligned} \tag{1}$$

Le (2-9) e (2-6) sono soddisfatte. Poichè è

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \\ \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

le (2-4) risultano pur esse soddisfatte; le (5-1) rappresentano perciò una soluzione del problema di De Saint-Venant (*).

(*) La terna

$$\begin{aligned} u &= -\frac{c}{mE} xy \\ v &= -\frac{c}{2E} z^2 \\ w &= \frac{c}{E} yz \end{aligned}$$

soddisfa le (2-9) e la (2-4), ma non le (2-6); essa è un esempio di terna che, pur

La componente σ_z è fornita da

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = cy. \quad (a)$$

Dalle (2-12) risulta perciò

$$\begin{aligned} F'_x &= F'_y = \mathcal{N}'_z = 0 \\ \mathcal{N}'_x &= c \int_A y^2 dA = c I_x = \mathcal{N}_x \\ \mathcal{N}'_y &= -c \int_A xy dA = 0 \\ F'_z &= c \int_A y dA = 0 ; \end{aligned} \quad (b)$$

infatti l'integrale

$$\int_A y^2 dA = I_x$$

è il momento d'inerzia della sezione retta rispetto all'asse x, l'integrale

$$\int_A xy dA = -I_{xy}$$

è il momento centrifugo (cambiato di segno) rispetto ai due assi x e y, che risulta nullo essendo i due assi principali di inerzia, e l'integrale

$$\int_A y dA = S_x$$

è il momento statico della sezione retta rispetto all'asse x, momento che risulta nullo perchè x è baricentrico.

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla base $z=l$ si riducono perciò alla coppia

$$\mathcal{N}_x = c I_x \quad (c)$$

soddisfacendo le (2-9), non è equilibrata, perchè non soddisfa le più generali equazioni di equilibrio. Queste ultime infatti sono costituite dalle (2-6) e (2-9), non dalle sole (2-9).

il cui asse momento coincide con l'asse x ; per le già fatte convenzioni sul verso positivo delle coppie, per $c > 0$ \mathcal{M}_x è diretta nel verso che porta y su z (fig. 5-1).

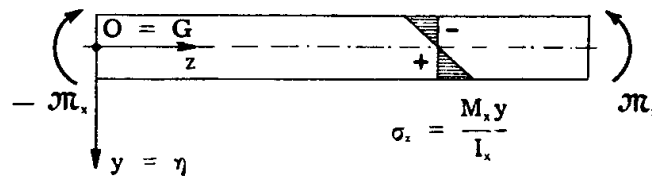


FIG. 5-1

Dalle (2-11) si ha

$$F_x^o = F_y^o = \mathcal{M}_z^o = \mathcal{M}_y^o = F_z^o = 0$$

$$\mathcal{M}_x^o = -c I_x = -\mathcal{M}_x ;$$

sulla base $z=0$ le caratteristiche della sollecitazione esterna si riducono perciò ad una coppia $-\mathcal{M}_x$ il cui asse momento è parallelo ad x , e il cui verso è contrario a quello della coppia applicata sulla base $z=l$. Si è in presenza della *sollecitazione semplice di flessione*, detta anche *flessione retta*, relativa ad x .

Dalle (2-18) risulta che in ogni sezione retta l'unica caratteristica della sollecitazione interna diversa da zero è il *momento flettente* M_x

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA = \mathcal{M}_x . \quad (d)$$

Dalle (a), (c) e (d) si trae

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y . \quad (2)$$

E' questa la cosiddetta *formula di Navier*; essa assicura che le tensioni σ_z provocate in corrispondenza della sezione retta da un momento flettente M_x si annullano sull'asse x (*asse neutro*), sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse x , proporzionali alla distanza da questo, positive (di trazione) per y positiva, negative (di compressione) per y negativa.

Osservando la trave disposta con l'asse z orizzontale e l'asse y verticale e orientato verso il basso, il momento flettente è positivo se le due coppie \mathcal{M}_x sono dirette in senso orario sulla estremità di sinistra e in senso antiorario su quella di destra, e le tensioni σ_z che ne derivano sono

positive al disotto dell'asse neutro, negative al disopra. Si spiega così la dizione comune, secondo cui in una trave ad asse orizzontale il momento flettente positivo tende le fibre inferiori e comprime quelle superiori.

Per la (c), le (5-1) si scrivono:

$$\begin{aligned} u &= - \frac{M_x}{mEI_x} xy \\ v &= - \frac{M_x}{2mEI_x} (mz^2 - x^2 + y^2) \\ w &= \frac{M_x}{EI_x} yz . \end{aligned} \quad (3)$$

Le coordinate $x' y' z'$ del punto A' corrispondente del generico punto $A (x y z)$ sono, rispetto alla terna $G x y z$ già assunta,

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{M_x}{mEI_x} xy \\ y' &= y - \frac{M_x}{2mEI_x} (mz^2 - x^2 + y^2) \\ z' &= z + \frac{M_x}{EI_x} yz . \end{aligned} \quad (e)$$

I punti giacenti sul piano di equazione

$$z = k$$

si trovano, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione

$$z' = k \left(1 + \frac{M_x}{EI_x} y \right)$$

e cioè

$$z' = k \left[1 + \frac{M_x}{EI_x} \left(y' + \frac{M_x}{2EI_x} \frac{mk^2 - x^2 + y^2}{m} \right) \right] . \quad (f)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti si può trascurare v in rapporto ad y ,

e porre quindi in prima approssimazione $y = y'$. La (f) si scrive allora

$$z' = k \left(1 + \frac{M_x}{EI_x} y' \right). \quad (g)$$

La (g) è l'equazione di un piano parallelo all'asse x ; la sua traccia sul piano yz ha la stessa equazione (g), e taglia l'asse y nel punto T di coordinate $0, -\frac{EI_x}{M_x}$ (fig. 5-2).

Le sezioni rette si conservano perciò piane; e cioè i punti appartenenti ad un piano normale a z si trasferiscono, a deformazione avvenuta,

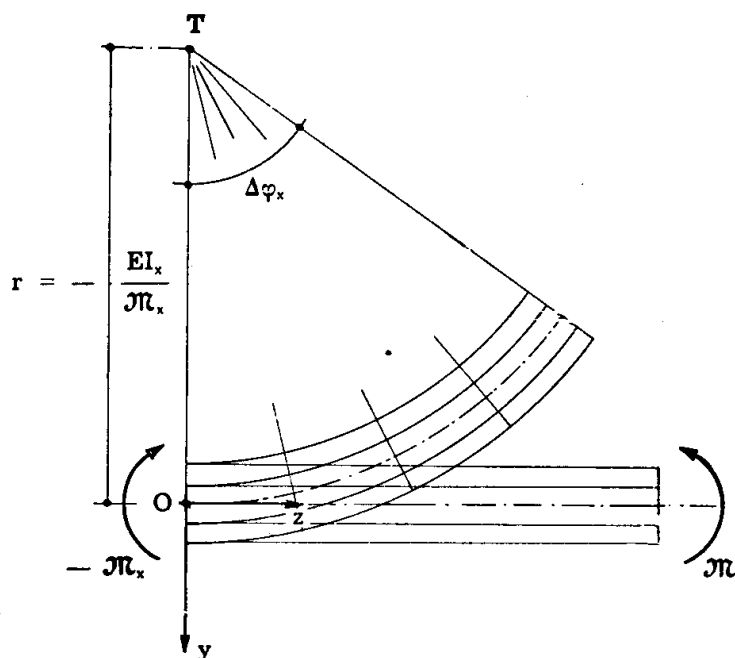


FIG. 5-2

su un altro piano, appartenente al fascio che ha per sostegno la retta passante per T e perpendicolare al piano yz . Le basi ruotano l'una rispetto all'altra della quantità

$$\Delta\varphi_x = \frac{M_x \ell}{EI_x}; \quad (4)$$

infatti, essendo gli spostamenti molto piccoli, l'angolo $\Delta\varphi_x$ si può confondere con la sua tangente. Il vettore rappresentativo di $\Delta\varphi_x$ è diretto secondo l'asse x , poichè la rotazione relativa $\Delta\varphi_x$ avviene intorno a un asse parallelo ad x . Il segno di $\Delta\varphi_x$ è concorde con quello delle coppie \mathcal{M}_x e $-\mathcal{M}_x$ nel senso che per suo effetto le coppie compiono lavoro positivo.

Poichè gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} sono nulli, alle rette che prima della deformazione erano parallele all'asse z , e perciò normali alle sezioni rette, corrispondono, a deformazione avvenuta, curve che risultano ancora normali alle superfici in cui si trasformano le sezioni rette, e cioè archi di cerchio contenuti in piani paralleli ad yz ed aventi il centro sulla retta normale al piano yz e passante per T .

All'asse z , e così a tutte le rette del piano xz , corrispondono archi di cerchio di raggio

$$r = - \frac{EI_x}{M_x} ; \quad (5)$$

il segno dipende dal fatto che il centro del cerchio giace dalla parte delle y negative.

Nella trattazione precedente si è fatta implicitamente l'ipotesi che i più elevati valori delle $x y z$ siano dello stesso ordine di grandezza.

Se infatti la lunghezza del prisma è eccessiva nei confronti delle dimensioni della base, k può risultare di un ordine di grandezza tale che il termine $\left(\frac{M_x k}{EI_x}\right)^2$

non è più trascurabile rispetto al termine $\frac{M_x y'}{EI_x}$. La (f) si scriverebbe in tal caso

$$z' = k \left[1 + \frac{M_x}{EI_x} y' + \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{EI_x}\right)^2 k^2 \right].$$

Questa è ancora l'equazione di un piano parallelo ad x , ma la sua traccia taglia l'asse y in un punto T le cui coordinate sono funzioni di k :

$$z_T = 0$$

$$y_T = - \frac{EI_x}{M_x} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{EI_x}\right)^2 k^2 \right].$$

In tal caso però tutta la trattazione del De Saint-Venant cade in difetto, perchè non possono più trascurarsi le componenti della deformazione del secondo ordine rispetto a quelle del primo; dalle (5-1) risulta infatti:

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c}{E} y$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] = \frac{c^2}{E^2} z^2$$

e, per z elevato, $\varepsilon_z^{(2)}$ è dello stesso ordine di grandezza di $\varepsilon_z^{(1)}$.

Così pure, se le dimensioni del solido secondo x predominano su quelle secondo y e z , la (f) si scrive

$$z' = k \left[1 + \frac{M_x}{EI_x} y' - \frac{1}{2m} \left(\frac{M_x}{EI_x} \right)^2 x^2 \right]$$

che non è più l'equazione di un piano; anche in questo caso, però, la stessa trattazione di De Saint-Venant cade in difetto.

E' opportuno anche un cenno relativo ad una apparente anomalia.

Dalle (5-3) si ha l'equazione della deformata dell'asse ($x = y = 0$):

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= - \frac{M_x}{2 EI_x} z^2 \\ w &= 0 . \end{aligned}$$

La seconda di queste relazioni rappresenta una parabola, il cui raggio di curvatura è fornito in rigore dalla formula generale (*)

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}} ;$$

(*) Circa il segno, il raggio di curvatura AC in A è da considerarsi positivo

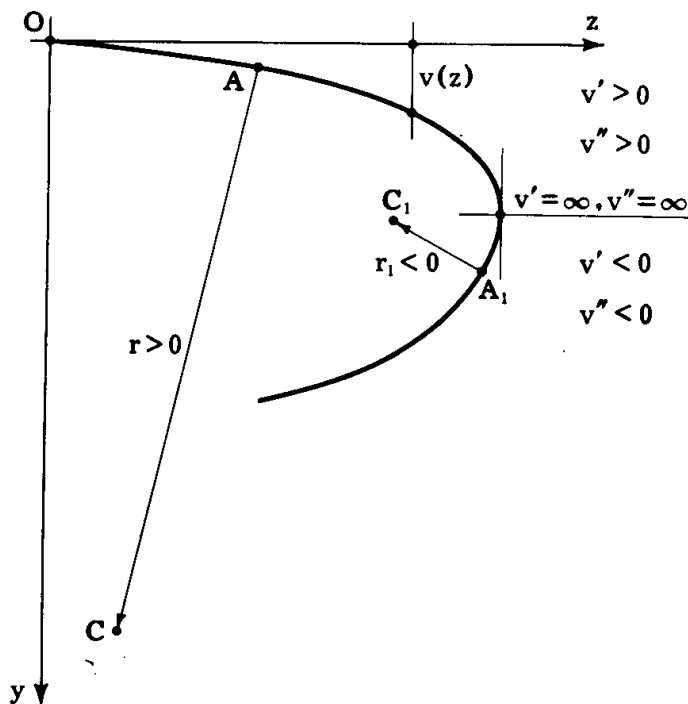


FIG. 5-3

se la componente secondo y del vettore \vec{AC} è positiva (fig. 5-3):

$$(AC)_y > 0 \quad r > 0 .$$

ciò appare in contrasto con la (5-5). Si consideri però che nello stesso ordine di approssimazione che ha permesso di dedurre il principio della conservazione delle sezioni piane, può trascurarsi $(dv/dz)^2$ in confronto all'unità; è perciò

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x}.$$

Il piano yz , che contiene la curva corrispondente all'asse z (*linea elastica*), si chiama *piano di flessione*; l'asse y , traccia sulla sezione retta del piano di flessione, si chiama *asse di flessione*. Il piano yz , ortogonale all'asse momento della coppia M_x , è detto anche *piano di sollecitazione*, e l'asse y , sua traccia sulla sezione retta, viene chiamato *asse di sollecitazione*.

Nel caso in esame asse di sollecitazione e di flessione coincidono, e ambedue sono ortogonali all'asse neutro; questa proprietà, derivante, come si vedrà meglio in seguito, dalla coincidenza dell'asse di sollecitazione con una direzione principale, giustifica la denominazione di *retta* con cui si qualifica questo caso di sollecitazione semplice.

Si osservi pure che le fibre parallele a z e contenute nel piano xz non presentano variazioni di lunghezza ($\varepsilon_z = \sigma_z/E = 0$); si giustifica anche così il nome di *piano neutro*, che si assegna al piano xz , e di *asse neutro*, che si assegna all'asse x .

I punti che prima della deformazione giacciono sul piano di equazione

$$x = h$$

parallelo al piano di sollecitazione yz , si trasferiscono a deformazione avvenuta sulla superficie di equazione

$$x' = h \left[1 - \frac{M_x}{m EI_x} \left(y' + \frac{M_x}{2 EI_x} \frac{mz^2 - x^2 + y^2}{m} \right) \right].$$

Nello stesso ordine di approssimazione che ha condotto alla (g), si può scrivere

$$x' = h \left(1 - \frac{M_x}{m EI_x} y' \right). \quad (h)$$

Si deduce che la trasformata del piano $x=h$ è ancora un piano, parallelo all'asse z ; la sua traccia sul piano della base $z=0$ è fornita dalla (h), e taglia l'asse y (fig. 5-4) nel punto V di coordinate $0, m \frac{EI_x}{M_x}$ indipendente da h .

Con riferimento alla generica sezione retta $z=k$, la retta $x=h$ si trasforma nell'intersezione dei due piani (g) ed (h). Se si confonde il piano (g) con il piano $z=k$, e questo è lecito nello stesso ordine di approssimazione che ha permesso la scrittura della (g) e della (h), l'equazione dell'intersezione (g) (h), con riferimento alla terna $O x y z$ traslata secondo z fino a portare O sul piano $z=k$, è ancora la (h).

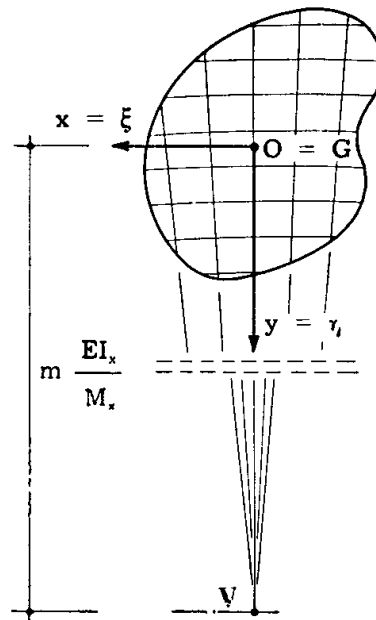


FIG. 5-4

Si deduce da quanto sopra che le sezioni rette si conservano piane, ma si deformano nel proprio piano, e tutte nella stessa maniera. Le rette parallele all'asse y si trasformano nelle rette del fascio il cui sostegno V_k è la proiezione di V secondo z sul piano $z=k$. Poichè $\gamma_{xy}=0$, le rette parallele all'asse x si trasformano in archi di cerchio di centro V_k ; in particolare, i punti giacenti sull'asse x si trasferiscono sull'arco di cerchio di raggio

$$r_t = m \frac{EI_x}{M_x},$$

m volte maggiore di quello (5-5) della linea elastica. Poichè risulta $\epsilon_x = -\epsilon_z/m$, la fibra giacente su x non presenta variazioni di lunghezza.

Lo stato tensionale è monoassiale, quindi tutto quanto già detto nel capitolo precedente circa lo stato di deformazione e di tensione nell'intorno di un punto generico vale anche nel caso della flessione.

2. Il calcolo di verifica e di progetto dei solidi semplicemente inflessi.

La condizione di sicurezza è (stato monoassiale di tensione)

$$\sigma_{z \max} \leq \frac{\sigma'_o}{s} \quad (i)$$

$$\sigma_{z \min} \geq \frac{\sigma''_o}{s} ;$$

chiamando (fig. 5-5) y_1 e y_2 le distanze dall'asse neutro dei due punti 1 e 2 più lontani da esso ($y_1 > 0$, $y_2 < 0$), e σ_{at} , σ_{ac} i rapporti σ'_o/s , σ''_o/s

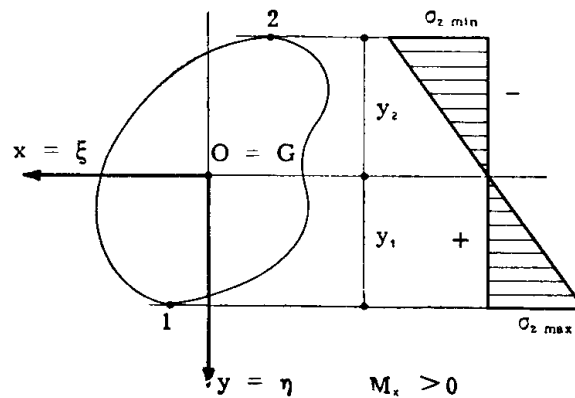


FIG. 5-5

(tensioni ammissibili a trazione e a compressione) le (i) si scrivono

$$\frac{M_x}{I_x} y_1 \leq \sigma_{at} \quad ; \quad \frac{M_x}{I_x} y_2 \geq \sigma_{ac} \quad (M_x > 0)$$

$$\frac{M_x}{I_x} y_1 \geq \sigma_{ac} \quad ; \quad \frac{M_x}{I_x} y_2 \leq \sigma_{at} \quad (M_x < 0) .$$

Le quantità

$$W_{1x} = \frac{I_x}{y_1} \quad ; \quad W_{2x} = \frac{I_x}{|y_2|} \quad (7)$$

si definiscono (§ 1-11) *moduli di resistenza* della sezione rispetto all'asse x ; le (5-6) si scrivono, adottando tale simbolo,

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{W_{1x}} &\leq \sigma_{at} & ; & & \frac{M_x}{W_{2x}} &\leq |\sigma_{ac}| & \quad (M_x > 0) \\ \frac{|M_x|}{W_{1x}} &\leq |\sigma_{ac}| & ; & & \frac{|M_x|}{W_{2x}} &\leq \sigma_{at} & \quad (M_x < 0) . \end{aligned} \quad (8)$$

Se $\sigma_{at} = |\sigma_{ac}| = \sigma_a$, le (5-8) si riducono alla sola

$$\frac{|M_x|}{W_{x \min}} \leq \sigma_a , \quad (9)$$

essendo $W_{x \min}$ il più piccolo tra W_{1x} e W_{2x} . Molte volte accade che $y_1 = -y_2 = h/2$; è allora

$$W_{1x} = W_{2x} = W_x = \frac{2 I_x}{h} , \quad (l)$$

e la (5-9) si scrive

$$\frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_a . \quad (10)$$

Per esempio, nella sezione rettangolare $b \times h$ (ove b è parallelo ad x) è

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{bh^3}{12} \\ W_x &= \frac{bh^2}{6} . \end{aligned} \quad (m)$$

Per tutte le sezioni di profilati metallici i W_x e W_y relativi ai due assi principali sono consegnati nei manuali. In genere W è espresso in cm^3 , σ in Kg/cm^2 , M in Kg cm ; in alcuni casi si preferisce esprimere W in m^3 , σ in t/m^2 , M in tm .

Le formule (5-6) (5-7) (5-8) si prestano direttamente per il calcolo di *verifica* dei solidi semplicemente inflessi, e cioè in quei casi in cui la sezione e il momento sono assegnati, e si vuole conoscere se si è in condizioni di sicurezza.

Il coefficiente s si calcola dalle (5-8) ponendo σ_0/s al posto di σ_a , ed = al posto di \leq .

Sovente però si presenta il problema del *progetto* della sezione, e cioè quello di assegnare le dimensioni della sezione una volta noti il momento e le tensioni ammissibili. Dalle (5-8) si ha

$$\begin{aligned} W_{1x} &\geq \frac{M_x}{\sigma_{at}} \quad ; \quad W_{2x} \geq \frac{M_x}{|\sigma_{ac}|}, \quad (M_x > 0) \\ W_{1x} &\geq \frac{|M_x|}{|\sigma_{ac}|} \quad ; \quad W_{2x} \geq \frac{|M_x|}{\sigma_{at}}, \quad (M_x < 0) \end{aligned} \quad (n)$$

quindi il problema si traduce nell'altro: assegnare le dimensioni di una sezione che presenti moduli di resistenza tali da rispettare le (n).

Nel caso dei profilati metallici, in cui $\sigma_{at} = |\sigma_{ac}| = \sigma_a$, vale la (5-9), e le (n) si traducono nella relazione

$$W_{x \text{ min}} \geq \frac{|M_x|}{\sigma_a} \quad ; \quad (o)$$

si fissa perciò il tipo di profilato, e utilizzando i manuali o le tabelle delle ferriere si adotta quel profilato avente il minore tra i due W_x immediatamente superiore al valore $\frac{|M_x|}{\sigma_a}$.

In molti tipi di profilati, per es. in quelli a I e a \square , per uno dei due assi principali risulta $W_1 = W_2$; conviene, salvo casi particolari, disporre il profilato in modo che tale retta coincida con l'asse neutro x , sia perchè in tal caso si riesce a raggiungere la tensione ammissibile tanto al lembo compresso che a quello teso, con migliore sfruttamento del materiale e quindi maggiore economia, sia perchè in genere i maggiori valori di W si hanno proprio in relazione a questo asse. In questo caso vale la (5-10), e la (o) si muta nell'altra

$$W_x \geq \frac{|M_x|}{\sigma_a} \quad ; \quad (p)$$

si sceglie il profilato il cui modulo W_x è immediatamente superiore a quello fornito dalla (p).

Se la trave è di sezione rettangolare $b \times h$, ottenuto il $W_x = bh^2/6$ si può conoscere b avendo prefissato h , o viceversa. Per travi in legno sorge il problema della determinazione del rapporto b/h che fornisce il massimo W_x ; infatti la trave è ricavata da un tronco, che può supporre a sezione circolare, di diametro d , e le dimensioni b ed h possono essere qualsiasi purchè legate dal-

la relazione (fig. 5-6)

$$b^2 + h^2 = d^2 .$$

Poichè è

$$W_x = \frac{b (d^2 - b^2)}{6}$$

la condizione

$$\frac{\partial W_x}{\partial b} = 0$$

porge

$$d^2 - 3b^2 = 0$$

$$b^2 = \frac{d^2}{3}$$

da cui

$$h^2 = \frac{2}{3} d^2$$

e quindi

$$\frac{h}{b} = \sqrt{2} .$$

In un solido inflesso la tensione ammissibile è raggiunta solo in corrispondenza delle fibre più lontane dall'asse neutro; in tutte le altre fibre è $\sigma < \sigma_a$, e il materiale non risulta utilizzato al massimo. Convienne perciò

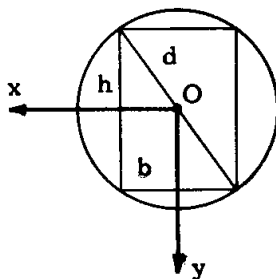


FIG. 5-6

adottare tipi di sezione in cui il materiale sia il più possibile distante dall'asse neutro; a questo criterio corrispondono ad es. le sezioni dei profilati, a I, a \square , a Γ costituite da un'anima molto sottile e da due ali molto robuste. E' evidente il vantaggio che così si consegue. Dalla formula

di Navier (5-2) si deduce che a parità di altezza e di tensione massima il momento flettente che si può affidare ad una sezione è proporzionale al momento d'inerzia; d'altro canto, trasportando un'area dA dalla quota y' alla quota y'' rispetto all'asse neutro, il momento d'inerzia varia della quantità $dA (y''^2 - y'^2)$.

Al limite converrebbe realizzare le anime sottilissime, ma in pratica non si può scendere al disotto di un certo rapporto tra spessore e altezza, sia per altre sollecitazioni quasi sempre agenti assieme alla flessione (taglio), sia per ragioni di stabilità dell'equilibrio. La suddetta tendenza è molto sentita anche nel conglomerato; nelle grandi travate da ponte si usano spesso sezioni cave, formate da una soletta di estradosso avente anche funzione di impalcato e da una soletta di intradosso molto distanti e collegate da più timpani di piccolo spessore.

Si intuisce però, e si mostrerà in rigore nel seguito, come la migliore utilizzazione del materiale in campo elastico venga a ridurre notevolmente le riserve di carattere plastico; per la sezione rettangolare il momento limite (momento massimo raggiungibile in regime idealmente plastico) è 1,5 più grande del momento in corrispondenza del quale si verificano le prime plasticizzazioni ai lembi, per la sezione di un profilato i due momenti praticamente coincidono (Vol. IV).

3. Espressione del potenziale e della variazione di volume.

Il potenziale elastico è fornito da

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{M_x^2}{2EI_x^2} y^2 \quad (11)$$

e l'energia di deformazione da

$$L = \int_V \varphi dV = \frac{M_x^2 \ell}{2EI_x^2} \int_A y^2 dA = \frac{M_x^2 \ell}{2EI_x} \quad (12)$$

Alla (5-12) si perviene anche attraverso il teorema di Clapeyron. Come accade nel caso dello sforzo normale, sulle due basi sono presenti solo le componenti p_z , perciò solo le componenti w dello spostamento forniscono lavoro esterno.

Per effetto dei w la generica sezione retta si sposta rigidamente, senza cioè deformarsi neppure nel proprio piano; ponendo infatti $u = v = 0$, l'equazione del piano (g) non varia, mentre l'equazione del piano (h) diviene $x' = h$, coincidente con quella dello stesso piano prima della deformazione. Il lavoro compiuto dalle p_z^0 e p_z^t coincide perciò con quello compiuto dalle loro caratteristiche,

ed è fornito, per la (5-4), da

$$L_e = \frac{1}{2} \mathcal{M}_x \Delta\varphi_x = \frac{\mathcal{M}_x^2 \ell}{2 EI_x}.$$

Alla stessa espressione di L_e si perviene calcolando direttamente il lavoro delle p_z . Con riferimento alla base $z = 0$, le p_z non compiono lavoro, essendo per le (5-3) $w = 0$. Con riferimento alla base $z = \ell$, si ha

$$L_e = \frac{1}{2} \int_A p_z^t w \, dA = \frac{\mathcal{M}_x}{2 I_x} \frac{\mathcal{M}_x}{EI_x} \ell \int_A y^2 \, dA = \frac{\mathcal{M}_x^2 \ell}{2 EI_x}.$$

La dilatazione cubica è

$$\Theta = \frac{M_x y}{EI_x} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \quad (13)$$

e la variazione di volume è nulla:

$$\Delta V = \int_v \Theta \, dV = \frac{M_x \ell}{EI_x} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \int_A y \, dA = 0.$$