

CAPITOLO III

TRAZIONE E COMPRESSIONE

1. La sollecitazione semplice di trazione (o compressione).

Si assuma l'origine O del riferimento cartesiano coincidente con il baricentro G di una base (fig. 2-4). Si consideri la terna di funzioni.

$$\begin{aligned}u &= -\frac{c}{mE} x \\v &= -\frac{c}{mE} y \\w &= \frac{c}{E} z.\end{aligned}\tag{1}$$

Le (3-1), essendo lineari in $x y z$, soddisfano le (2-9). Inoltre si verifica che sono soddisfatte anche le (2-6). Poichè risulta

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \\ \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0\end{aligned}\tag{a}$$

anche la (2-4) è verificata. Quindi le (3-1) rappresentano una possibile soluzione del problema di De Saint-Venant.

Le (3-1) sono l'unica terna di funzioni lineari che risolvono il problema di De Saint-Venant (a meno, naturalmente, delle componenti di un moto rigido). La terna di funzioni lineari più generale è la seguente:

$$\begin{aligned}u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 ;\end{aligned}\tag{b}$$

essa soddisfa le (2-9).

Dalle (b) si ricava

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= G (c_1 + a_3) \\ \tau_{zy} &= G (c_2 + b_3) ;\end{aligned}$$

poichè le τ_{zx} e τ_{zy} sono costanti, per il rispetto della (2-4) è necessario che esse siano nulle.

Si ha perciò

$$\begin{aligned}u &= a_1 x + b_1 y + c z + d_1 \\ v &= a_2 x + b_2 y - d z + d_2 \\ w &= -c x + d y + c_3 z + d_3 .\end{aligned}\tag{c}$$

Le (c) soddisfano le (2-9) e la (2-4), ma non possono ancora assumersi come soluzioni del problema di De Saint-Venant, perchè in genere esse non soddisfano le (2-6), e perciò ad esse non corrisponde $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. E' perciò necessario che sia

$$\begin{aligned}a_1 &= b_2 = -\frac{c_3}{m} \\ b_1 &= -a_2 .\end{aligned}$$

Le (c) si scrivono perciò

$$\begin{aligned}u &= -\frac{a}{m} x - b y + c z + d_1 \\ v &= b x - \frac{a}{m} y - d z + d_2 \\ w &= -c x + d y + a z + d_3 .\end{aligned}\tag{d}$$

Le quantità

$$\begin{aligned}u &= -b y + c z + d_1 \\ v &= b x - d z + d_2 \\ w &= -c x + d y + d_3\end{aligned}\tag{e}$$

sono le componenti di un moto rigido, e possono trascurarsi. Si ricade così nelle (3-1).

L'unica componente non nulla è la σ_z :

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = c .\tag{f}$$

Dalle (2-12) risulta, ricordando che il momento statico rispetto ad un asse baricentrico è nullo,

$$\begin{aligned}
 F'_x &= F'_y = \mathcal{M}'_z = 0 \\
 \mathcal{M}'_x &= c \int_A y dA = 0 \\
 \mathcal{M}'_y &= -c \int_A x dA = 0 \\
 F'_z &= c \int_A dA = cA = F_z .
 \end{aligned} \tag{g}$$

Dalle (2-11) si ha, analogamente,

$$\begin{aligned}
 F^o_x &= F^o_y = \mathcal{M}^o_z = \mathcal{M}^o_x = \mathcal{M}^o_y = 0 \\
 F^o_z &= -cA = -F_z .
 \end{aligned}$$

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono perciò alla $F'_z = F_z$ ed $F^o_z = -F_z$; è questa *la sollecitazione semplice di trazione* ($F_z > 0$), o di *compressione* ($F_z < 0$). Dalle (2-18) risulta che in ogni sezione retta l'unica caratteristica di sollecitazione interna è lo *sforzo normale* N , positivo se F'_z è positiva ed F^o_z negativa (trazione), negativo in caso contrario (compressione).

Dalle (2-19) e dalle (g) si trae

$$c = \frac{N}{A}$$

e cioè, per la (f),

$$\sigma_z = \frac{N}{A} . \tag{2}$$

Le (3-1) si scrivono perciò

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{m} \frac{N}{EA} x \\
 v &= -\frac{1}{m} \frac{N}{EA} y \\
 w &= \frac{N}{EA} z .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Le (3-3) sono le componenti degli spostamenti rispetto alla terna G_{xyz} .

Il generico punto A di coordinate xyz si porta, a deformazione avvenuta, nel punto A' , le cui coordinate $x'y'z'$ sono fornite, rispetto alla stessa terna, da

$$x' = x \left(1 - \frac{1}{m} \frac{N}{EA} \right)$$

$$y' = y \left(1 - \frac{1}{m} \frac{N}{EA} \right)$$

$$z' = z \left(1 + \frac{N}{EA} \right).$$

I punti giacenti sul piano di equazione

$$z = k$$

si trovano, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione

$$\frac{z'}{1 + \frac{N}{EA}} = k$$

e cioè sul piano

$$z' = k \left(1 + \frac{N}{EA} \right)$$

traslato, rispetto al precedente, secondo z della quantità Nk/EA . Le sezioni rette si conservano perciò piane; le due sezioni rette alle ascisse z_1 e z_2 ($z_2 > z_1$) si trovano a deformazione avvenuta, su due piani traslati tra loro della quantità $N(z_2 - z_1)/EA$.

Le due sezioni di estremità presentano lo spostamento relativo

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}; \quad (4)$$

il segno di Δl è tale che per suo effetto le due forze F_z e $-F_z$ compiono lavoro positivo (allontanamento per $N > 0$, avvicinamento in caso contrario).

Le sezioni rette, pur conservandosi piane, non restano identiche a se stesse; ciò si riconosce dall'essere diverse da zero le componenti u e v .

Poichè u e v sono indipendenti da z , ogni sezione retta si deforma ugualmente. Inoltre, u e v sono proporzionali alle coordinate x ed y secondo lo stesso rapporto $-\frac{1}{m} \frac{N}{EA}$; se ne trae (fig. 3-1) che i punti della gene-

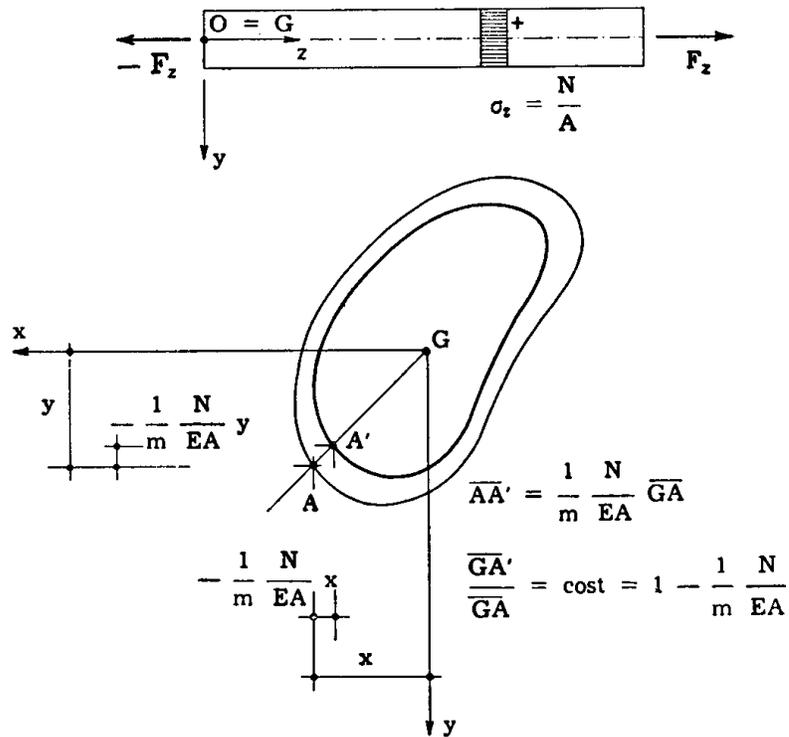


FIG. 3-1

rica sezione retta prima della deformazione (A) e a deformazione avvenuta (A') si corrispondono in una omotetia di centro G e costante $1 - \frac{1}{m} \frac{N}{EA}$.

La dilatazione cubica è (2-7)

$$\Theta = \frac{N}{EA} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \quad (5)$$

e la variazione di volume

$$\Delta V = \int_v \Theta dV = \frac{N l}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right). \quad (6)$$

Il potenziale elastico è (2-23)

$$\varphi = \frac{N^2}{2 EA^2}; \quad (7)$$

l'energia di deformazione è quindi

$$L = \int_v \varphi dV = \frac{N^2 l}{2 EA} . \quad (8)$$

Alla (3-8) si può pervenire anche attraverso il teorema di Clapeyron, calcolando il lavoro L_e compiuto dalle forze esterne. Poichè sulle due basi sono diverse da zero soltanto le p_z , il lavoro delle forze esterne dipende esclusivamente dagli spostamenti w ; dalle (3-3) si osserva che, in relazione ai w , ogni sezione retta si muove rigidamente, restando cioè identica a se stessa; segue che il lavoro compiuto dalle forze elementari $p_z dA$ coincide con quello svolto dalle loro risultanti F_z e $-F_z$.

Poichè lo spostamento relativo delle due basi è fornito dalla (3-4), si ha

$$L_e = \frac{1}{2} F_z \Delta l = \frac{N^2 l}{2 EA} .$$

Il cerchio di Mohr è quello della fig. 3-2; delle tensioni principali la

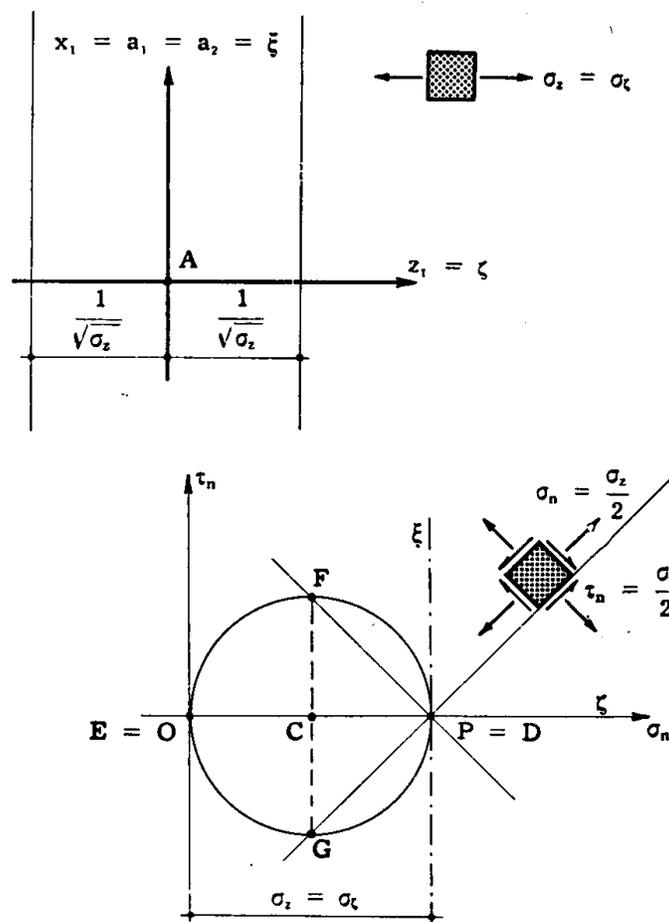


FIG. 3-2

sola $\sigma_z = \sigma_z$ è diversa da zero; le isostatiche corrispondenti sono le rette parallele a z . Lo stato tensionale è *monoassiale* (Vol. I, § 2-11).

Sugli elementi piani inclinati di 45° su z si ha la massima tensione tangenziale

$$\tau_n = \tau_{\max} = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_\xi}{2} = \frac{\sigma_z}{2};$$

ad essa si accompagna una σ_n pari anche essa a $\frac{\sigma_z}{2}$:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\zeta + \sigma_\xi}{2} = \frac{\sigma_z}{2}.$$

I due asintoti delle coniche di tensione coincidono con la retta x_1 ; le due iperboli degenerano una nelle due rette parallele all'asse x_1 e a distanza $\pm 1/\sqrt{\sigma_z}$ da esso, l'altra nel punto improprio di x_1 .

Le dilatazioni principali valgono

$$\varepsilon_\zeta = \frac{\sigma_z}{E} \quad ; \quad \varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta = - \frac{\sigma_z}{Em} \quad ; \quad (9)$$

le quadriche di deformazione sono perciò, per m positivo, un iperboloide ad una falda, di rotazione intorno all'asse ζ , ed un iperboloide a due falde, pur esso di rotazione intorno a ζ .

I risultati precedenti valgono, per quanto già detto nel paragrafo precedente, se le forze applicate sulle due basi hanno lo stesso andamento delle σ_z , se cioè sono distribuite uniformemente sulle due basi. In caso contrario, essi possono essere accettati solo ad una distanza dalle basi uguale o maggiore della lunghezza di estinzione.

Si osservi nella fig. 3-3 il particolare dell'appoggio scorrevole di una trave su un pilastro in conglomerato armato, realizzato con un rullo. La forza N è trasmessa al pilastro attraverso una piastra metallica di area A_0 , e perciò al disotto della piastra può assumersi $\sigma = N/A_0$; ad una certa distanza dalla sommità si può supporre che siano validi i risultati del De Saint-Venant e perciò, se A è l'area della sezione retta del pilastro, può ritenersi $\sigma = N/A$.

Le linee isostatiche relative alla pressione massima, rappresentate nella fig. 3-3 (alcune volte si chiamano impropriamente *linee di flusso delle tensioni*) mostrano come le σ tendano con continuità a quelle fornite dalla trattazione del De Saint-Venant. Nella zona in prossimità della base caricata occorre adottare provvedimenti locali, come nel caso in esame, ove si è previsto al disotto della piastra un insieme di tondini di acciaio verticali collegati da staffe orizzontali pur esse di acciaio, atte ad assorbire le trazioni

orizzontali che altrimenti provocherebbero l'apertura del pilastro secondo il piano di mezzeria (effetto cuneo). Tali trazioni sono difficilmente valu-

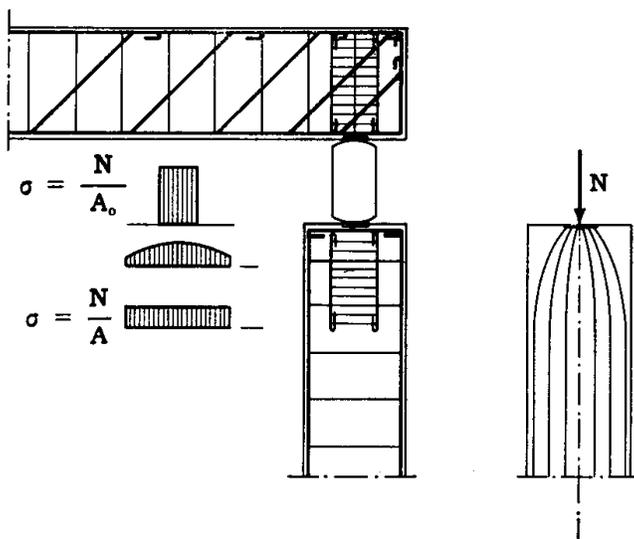


FIG. 3-3

tabili, e si preferisce calcolare in larga massima, proporzionando di conseguenza in abbondanza le staffe destinate ad assorbirle.

2. Un primo esempio di estensione dei risultati del De Saint-Venant alle travi non prismatiche: le pile di uniforme resistenza.

Talora si è in presenza di pilastri di notevole altezza, realizzati con materiali di non alta resistenza (muratura, conglomerato ordinario), in cui il peso proprio è notevole, e dello stesso ordine di grandezza del carico F applicato in sommità: ciò può verificarsi ad esempio per le pile piene da ponte. Conviene in tali casi che la sezione del pilastro aumenti al diminuire della quota, in modo che l'aumento del peso proprio sia compensato dall'incremento dell'area.

Si ottengono così pilastri più leggeri, senza che peraltro ciò significhi sempre maggiore economia; infatti la realizzazione di una struttura a sezione variabile importa oneri di magistero (formazione dei casseri, esecuzione della muratura etc.) ben più elevati di quelli richiesti da analoga struttura a sezione costante, e tali da superare spesso l'economia che si realizza con la riduzione del materiale.

Il problema è di interesse ancora maggiore in quei casi in cui le forze di massa sono notevoli per la presenza di forti accelerazioni, come nelle giranti di una turbina.

Si consideri alla generica ascissa z un concio elementare compreso tra due sezioni rette alla distanza dz (fig. 3-4 a); con quale approssimazione possono in relazione a questo concio utilizzarsi i risultati del De Saint-Venant, in particolare i risultati cui si è pervenuti nel precedente paragrafo? Si prenda in esame, a ciò fare, il tronco di altezza finita $dz + 2d_e$, compreso tra le sezioni rette alle ascisse $z - d_e$ e $z + dz + d_e$; esso comprende il concio elementare lungo dz , e al disopra e al disotto di esso due tronchi aventi lunghezza pari a quella di estinzione (fig. 3-4 b).

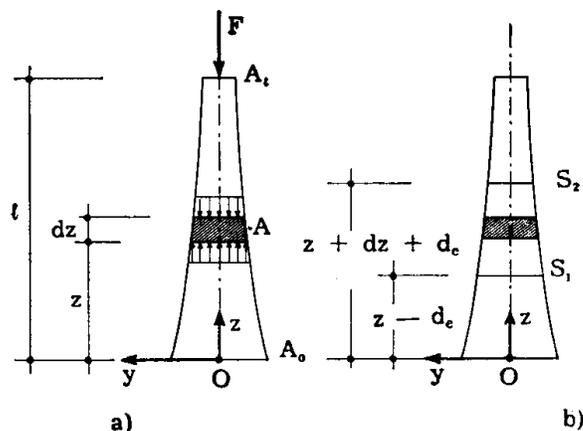


FIG. 3-4

Sullo stato di tensione nel concio elementare, i cui punti distano dalle due basi S_1 ed S_2 di una lunghezza pari o maggiore di quella di estinzione, le sollecitazioni sulle due basi S_1 ed S_2 giocano soltanto attraverso le loro caratteristiche. Se poi il tronco $S_1 S_2$ può assimilarsi ad un solido di De Saint-Venant, può anche dirsi che per il tronco dz sono validi i risultati della trattazione omonima.

Perchè il tronco $S_1 S_2$ possa essere considerato un solido di De Saint-Venant, è necessario che le variazioni delle dimensioni della sezione retta con l'ascissa siano abbastanza lievi da poter trascurare le variazioni stesse fra z e $z + 2d_e$ nei confronti di $2d_e$; così il solido può supporre prismatico. E' inoltre necessario che il peso proprio del tronco sia trascurabile rispetto alle caratteristiche della sollecitazione sulle due basi, e cioè che la pila abbia sufficiente altezza.

Si avverte esplicitamente che l'approssimazione con cui sono accettabili i risultati del De Saint-Venant non può valutarsi limitandosi a considerare il concio di lunghezza dz . Essendo dz piccolo a piacere, anche la variazione di sezione è piccola a piacere. Così pure il peso proprio del concio, pari a $-\gamma \cdot A dz$, può ridursi a piacere perchè dipende da dz , e può rendersi trascurabile in relazione alle caratteristiche delle sollecitazioni anche se queste non sono abbastanza elevate. Analogo ragionamento può essere eseguito se forze esterne agiscono sulla superficie laterale della pila. Perciò il concio elementare può in ogni caso assi-

milarsi ad un solido di De Saint-Venant, quali che siano profilo e dimensioni della trave. Perchè, però, siano per esso validi i risultati del De Saint-Venant, è necessario, attesa la piccola lunghezza, che la distribuzione della sollecitazione sulle due basi sia alla De Saint-Venant; e la maggiore o minore rispondenza al vero di questa ipotesi non può essere saggiata che introducendo la distanza di estinzione, e considerando perciò il tronco finito lungo $dz + 2 d_e$.

Se per il tronco dz sono validi i risultati del De Saint-Venant, la tensione sulle due basi del tronco è tutta normale, uniformemente distribuita, e pari a

$$\sigma_z = \frac{N}{A} ;$$

infatti l'unica caratteristica della sollecitazione all'ascissa z , risultante dalle forze agenti al disopra della sezione retta alla stessa ascissa, è lo sforzo normale, fornito da

$$N = F - \int_z^z \gamma A dz ;$$

al solito, le forze si considerano positive se aventi il verso dell'asse z , N positivo se di trazione.

All'ascissa $z + dz$ si ha

$$\sigma_{z + dz} = \frac{N + dN}{A + dA} .$$

Perchè la pila risulti di uniforme resistenza deve essere

$$\frac{N}{A} = \frac{N + dN}{A + dA} = \frac{\sigma''_o}{s} = \sigma_{ac} ;$$

la σ_{ac} , *tensione ammissibile a compressione*, è negativa.

Dalla relazione precedente si ricava

$$N dA = A dN . \quad (h)$$

Poichè è

$$dN = \gamma A dz$$

la (h) si scrive

$$\frac{dA}{A} = \frac{dN}{N} = \frac{\gamma A dz}{\sigma_{ac} A} = \frac{\gamma}{\sigma_{ac}} dz . \quad (i)$$

Dalla (i) si ha

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma_{ac}} z + C , \quad (l)$$

e poichè per $z=l$ è $A = A_t$, risulta

$$C = \ln A_t - \frac{\gamma l}{\sigma_{ac}} .$$

La (l) si scrive perciò

$$\ln \frac{A}{A_t} = \frac{\gamma}{\sigma_{ac}} (z - l)$$

da cui

$$A = A_t e^{\frac{\gamma}{\sigma_{ac}} (z - l)} \quad (10)$$

e per $z=0$

$$A_0 = A_t e^{-\frac{\gamma l}{\sigma_{ac}}}$$

Dalla (3-10) si trae che, per far sì che ovunque sia $\sigma = \sigma_{ac}$, occorre che l'area della sezione retta varii con legge esponenziale. In pratica la pila si realizza in tronchi successivi con variazione lineare delle dimensioni; spesso inoltre la sezione retta è un rettangolo di cui una dimensione è costante, e l'altra varia con la legge (3-10).

In sommità è

$$A_t = \frac{N}{\sigma_{ac}} = \frac{F}{\sigma_{ac}} .$$

L'accorciamento della pila è

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_z dz = \int_0^l \frac{\sigma_{ac}}{E} dz = \frac{\sigma_{ac}}{E} l .$$

Il volume V della pila è fornito da

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^l A \, dz = A_l \int_0^l e^{-\frac{\gamma}{\sigma_{ac}}(z-l)} \, dz = A_l \frac{\sigma_{ac}}{\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{\sigma_{ac}}(z-l)} \right)_0^l = \\
 &= \frac{\sigma_{ac}}{\gamma} (A_l - A_0) = \frac{F}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma l}{\sigma_{ac}}} \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Se la pila fosse stata realizzata a sezione costante si sarebbe avuto, chiamando A l'area della generica sezione retta,

$$\begin{aligned}
 F - \gamma A l &= \sigma_{ac} A \\
 V_c = A l &= \frac{F l}{\sigma_{ac} + \gamma l}.
 \end{aligned} \tag{m}$$

Il rapporto $\frac{V}{V_c}$ è

$$\frac{V}{V_c} = \left(1 - e^{-\frac{\gamma l}{\sigma_{ac}}} \right) \left(\frac{\sigma_{ac}}{\gamma l} + 1 \right). \tag{12}$$

Il rapporto $\frac{\sigma_{ac}}{\gamma l}$ varia tra i limiti $-\infty$ e -1 ; infatti dalla (m) si trae

$$-\infty < A (\sigma_{ac} + \gamma l) < 0$$

e quindi

$$-\infty < \sigma_{ac} + \gamma l < 0$$

$$-\infty < \frac{\sigma_{ac}}{\gamma l} < -1. \tag{n}$$

Il rapporto V/V_c è pari a zero per $\sigma_{ac}/\gamma l = -1$, pari ad uno per $\sigma_{ac}/\gamma l = -\infty$; per $\sigma_{ac}/\gamma l$ variabile da -1 a $-\infty$, V/V_c varia da zero a uno crescendo con continuità. Ciò dimostra che la convenienza di sagomare la pila a sezione variabile è tanto maggiore quanto più alta è la pila, quanto più alto è il peso specifico del materiale, e quanto più bassa è la sua tensione ammissibile a compressione.

Ponendo

$$\frac{\sigma_{ac}}{\gamma l} = -k$$

si ha

$$\frac{V}{V_c} = r = \left(1 - e^{-\frac{1}{k}}\right) (1 - k);$$

la condizione (n) si scrive

$$1 < k < \infty.$$

Per $k = 1$ risulta (fig. 3-5 a) $r = 0$;

per $k = \infty$ è

$$\begin{aligned} r &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{k}}}{1 - k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} e^{-\frac{1}{k}}}{\frac{1}{(1 - k)^2}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - k}{k}\right) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{k}} = 1. \end{aligned}$$

La derivata prima di r rispetto a k è

$$r' = \frac{k^2 - k + 1}{k^2} e^{-\frac{1}{k}} - 1;$$

per $k = 1$ è $r' = e - 1$, per $k = \infty$ è $r' = 0$ (fig. 3-5 b). Inoltre può asserirsi che $r' > 0$ in tutto l'intervallo $1 < k < \infty$. Infatti se r' fosse negativo in un certo tratto del suddetto intervallo, in un punto di questo dovrebbe risultare (fig. 3-5 c) $r'' = 0$, essendo r' una funzione continua; ma la espressione di r'' è

$$r'' = -e^{-\frac{1}{k}} \frac{k + 1}{k^4},$$

ed essendo

$$0 < \frac{k + 1}{k^4} < 2$$

$$1 < e^{\frac{1}{k}} < e$$

r'' è sempre minore di zero, fatta eccezione per $k = \infty$. La condizione $r' > 0$ nell'intervallo $1 < k < \infty$ garantisce che la funzione r è in esso sempre crescente; poichè per $k = \infty$ è $r = 1$, si deduce che in tutto l'intervallo $1 < k < \infty$ è $r < 1$.

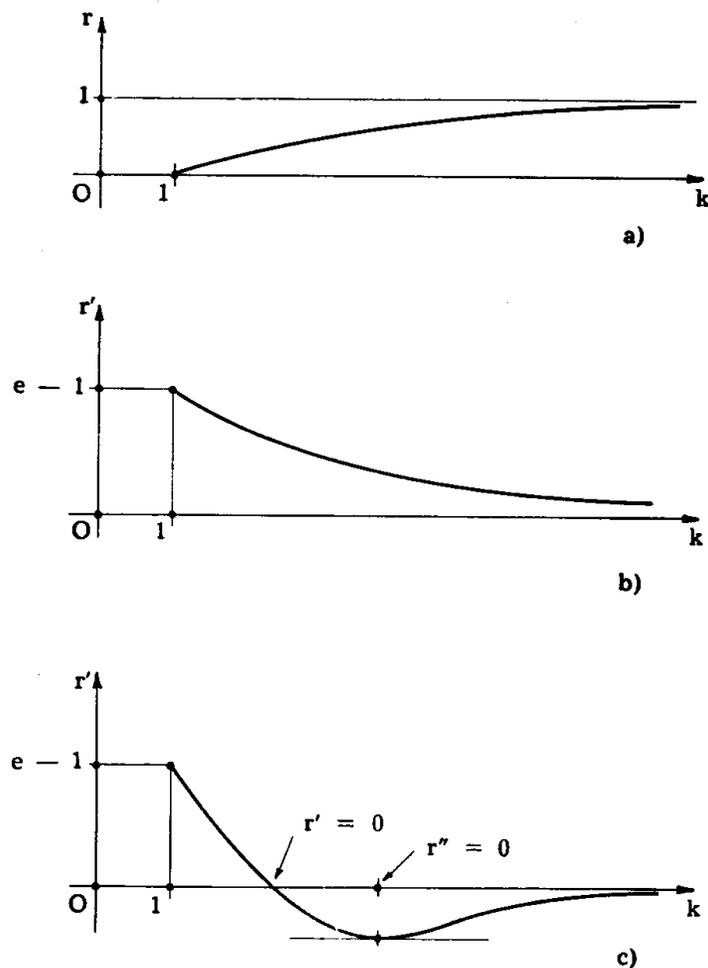


FIG. 3-5

E' interessante notare che nell'espressione del rapporto V/V_c non appare la forza F agente in sommità della pila; questo deriva dall'essere sia V che V_c proporzionali a F .

Si noti pure che la condizione $\sigma_{ac}/\gamma l = -1$ corrisponde, per la (m), ad $F=0$; in tal caso la pila di sezione costante e di altezza l può sopportare — quale che sia la sua sezione — soltanto il suo peso.