

CAPITOLO II

IL PROBLEMA DI DE SAINT-VENANT

1. Generalità sul problema della trave, o di De Saint-Venant.

Per *trave* o *struttura monodimensionale* si intende un solido in cui una dimensione sia predominante rispetto alle altre. La trave risulta così il più diffuso tra gli elementi portanti; possono infatti con buona approssimazione considerarsi travi, o insiemi di travi, moltissime delle strutture di più frequente incontro: i ritti e i traversi di un portale o di un telaio, gli archi, le strutture reticolari, i graticci, la maggior parte delle strutture da ponte, gli alberi di trasmissione, etc. Purtroppo, fatta eccezione per alcuni casi tra cui quelli già esaminati nell'ambito degli stati tensionali piani (Vol. I), non è in genere possibile risolvere in rigore le equazioni dell'equilibrio elastico relative alle travi.

E' merito del *De Saint-Venant* (*) aver fornito le soluzioni esatte per un solido cilindrico qualsiasi, quindi anche corto, omogeneo, sia pure sollecitato sulle basi soltanto, ed in maniera molto particolare (*solido di De Saint-Venant*). Tali soluzioni sarebbero di per sè prive di interesse, essendo valide soltanto per determinate leggi di distribuzione delle forze esterne; attraverso esse, però, e sotto l'unica ipotesi che la lunghezza del cilindro sia preponderante rispetto alle dimensioni delle basi, è possibile ottenere con buona approssimazione le soluzioni relative al solido cilindrico ed a qualsiasi tipo di sollecitazione che interessi le due basi, e in genere, (Cap. XI), sia pure con minore approssimazione, a qualsiasi struttura monodimensionale comunque caricata. Questa possibilità si poggia su un postulato, di portata generale, che dallo stesso De Saint-Venant trae il nome, e al quale si è già fatto ricorso alcune volte nel primo volume.

(*) *Barré De Saint-Venant* — 1) Mémoires des Savants étrangers (1855); 2) Journal de Math. (Liouville, 1856); 3) Journal de Math. (Liouville, 1863).

2. Il postulato di De Saint-Venant.

Questo postulato si enuncia come segue (fig. 2-1): « se un sistema di forze F in equilibrio agisce su una parte S' della superficie S di un corpo, i suoi effetti si smorzano allontanandosi da S' ; perciò la presenza delle forze praticamente non si avverte più ad una distanza che dipende dalla forma di S' , dalle sue dimensioni, e dalla geometria delle forze ».

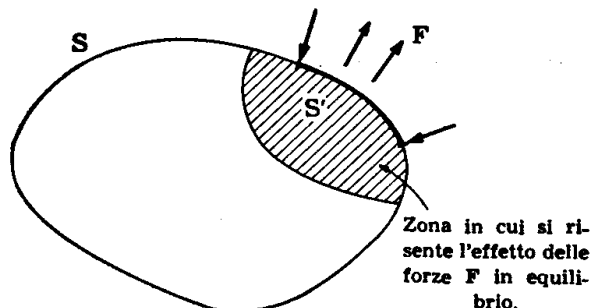


FIG. 2-1

Perchè il postulato abbia un senso pratico, perchè cioè esista in realtà un'ampia zona in cui l'effetto delle forze non si risente, è necessario che la superficie S' sia piuttosto ristretta in rapporto alle dimensioni del corpo. Nel caso in esame ciò si ottiene imponendo che il cilindro sia abbastanza lungo in rapporto alle dimensioni delle basi, e utilizzando il postulato di De Saint-Venant con riferimento a ciascuna delle basi stesse.

Si considerano nulle per necessità di trattazione sia le forze di massa, che quelle agenti sulla superficie laterale; le uniche forze esterne sono perciò presenti sulle due basi.

Dal postulato di De Saint-Venant si trae che, escluse le zone più vicine alle due basi, gli effetti delle forze applicate dipendono soltanto dalle *caratteristiche* delle forze stesse, e non dalla effettiva distribuzione di quest'ultime. E infatti si consideri (fig. 2-2 a) il prisma soggetto alle forze superficiali $p_1^o dA$ su una base, e $p_1^i dA$ sull'altra; siano C_1^o e C_1^i le caratteristiche di questi due sistemi di forze.

Come caratteristiche possono scegliersi le forze che si ottengono scomponendo la generica forza F_1 secondo gli spigoli di un tetraedro, (fig. 2-3), e sommando le componenti lungo ciascun spigolo. In particolare, se il triedro in O è retto, ed i vertici ABC degenerano nei punti impropri delle tre rette ortogonali OA , OB , OC , si ricade nel caso del riferimento cartesiano ortogonale; le sei caratteristiche sono le forze aventi per intensità la somma delle componenti rispetto ai tre assi, e le coppie aventi come valori le somme dei momenti delle singole forze rispetto ai tre assi (Vol. I, § 2-1).

Si consideri poi (fig. 2-2 b) lo stesso prisma soggetto sulle due basi ad altri due sistemi di forze $p_2^o dA$ e $p_2^t dA$, le cui caratteristiche C_2^o e C_2^t

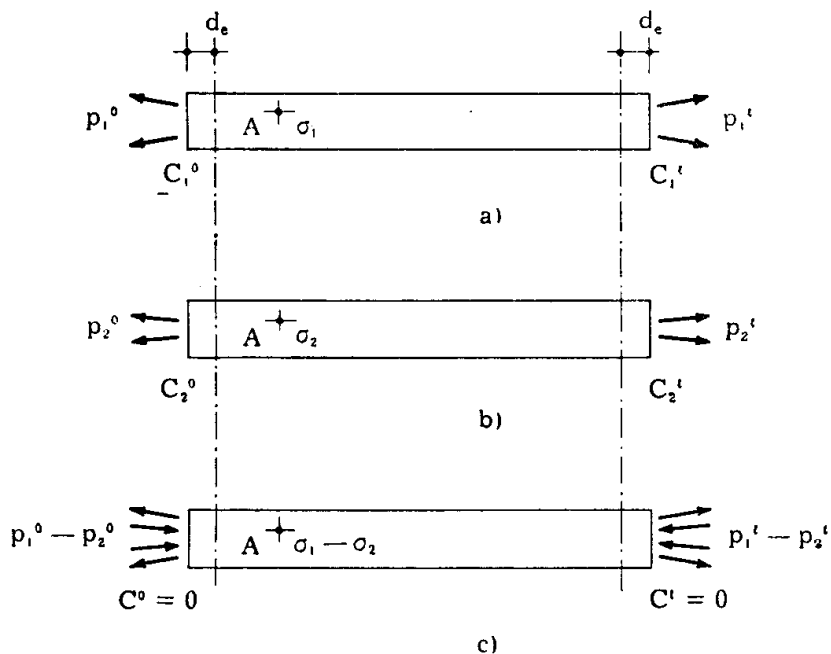


FIG. 2-2

coincidono con le C_1^o e C_1^t . In corrispondenza di un generico punto A del solido, siano σ_1 e σ_2 le generiche componenti di tensione nei due casi.

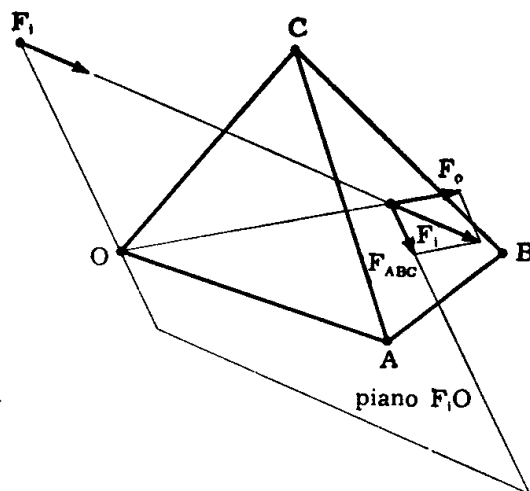


FIG. 2-3

Si consideri infine (fig. 2-2 c) il prisma soggetto su una base alle forze $p_1^o dA - p_2^o dA$, e sull'altra base alle forze $p_1^t dA - p_2^t dA$; per il principio

di sovrapposizione, la generica componente di tensione in A è $\sigma_1 - \sigma_2$. Poichè il sistema di forze $p_1^\circ dA - p_2^\circ dA$ è *in equilibrio* (*), il suo effetto può supporre nullo ad una certa distanza dalla base, detta *lunghezza di estinzione* d_e ; altrettanto può dirsi del sistema $p_1' dA - p_2' dA$. Purchè quindi il punto A sia situato a distanza maggiore di d_e da ciascuna delle basi, può porsi $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, e perciò $\sigma_1 = \sigma_2$. Il valore che può essere assunto per la distanza di estinzione varia caso per caso. Nella sollecitazione di sforzo assiale essa può essere considerata pari, o poco più grande, della maggiore dimensione della sezione retta (**). Si tenga presente che d_e aumenta al crescere dello scostamento (in senso lato) della sollecitazione effettiva sulle basi, rispetto a quella alla De Saint-Venant, e al diminuire dell'entità dell'errore che si tollera. Il mezzo più sicuro per fissare d_e è l'indagine sperimentale.

Si avverte esplicitamente che la dimostrazione resta invariata se sulla superficie laterale agiscono forze, o se esistono forze di massa; esse infatti, identiche sulle due strutture delle figg. 2-2 a e 2-2 b, sono nulle su quella della fig. 2-2 c. In tal caso la dimostrazione porta a concludere che, escluse le due zone estreme del solido, le forze agenti sulle basi entrano in gioco attraverso le sole caratteristiche, quale che sia la loro distribuzione.

La soluzione del problema dipende, per quanto detto, soltanto dalle caratteristiche della sollecitazione, e cioè da sei parametri; sei perchè le caratteristiche C' sono uguali e contrarie alle C° , per ragioni di equilibrio, essendo nulle le forze di massa e quelle agenti sulla superficie laterale. E' sufficiente perciò conoscere le soluzioni in sei casi particolari di *sollecitazioni indipendenti* (tali cioè che le caratteristiche di una non siano combinazioni lineari delle caratteristiche di un'altra di esse) per ottenere, attraverso il principio di sovrapposizione, le soluzioni in qualsiasi altro caso. Infatti, si assumano come caratteristiche le forze $F_x F_y F_z$ e le coppie $\mathcal{M}_x \mathcal{M}_y \mathcal{M}_z$ rispetto ad una terna cartesiana, e siano rispettivamente, per i sei casi di cui sopra, $F_{1x} \dots \mathcal{M}_{1z}$, $F_{2x} \dots \mathcal{M}_{2z}$, $F_{6x} \dots \mathcal{M}_{6z}$ le caratteristiche, e $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_6$ le soluzioni.

La generica sollecitazione di caratteristiche $F_x \dots \mathcal{M}_z$ è combinazione li-

(*) Sistema di forze *in equilibrio* è un insieme di forze che applicate ad un corpo privo di vincoli non gli imprime movimento; condizione necessaria e sufficiente di equilibrio (deriva dal più generale principio dei lavori virtuali) è che le sei caratteristiche, rispetto ad un qualsiasi riferimento siano nulle. Due sistemi di forze si definiscono *equivalenti* se, rispetto ad un generico riferimento, le caratteristiche del primo sono uguali a quelle corrispondenti del secondo. In tal caso, questa proprietà è valida rispetto ad ogni riferimento.

(**) C. L. RICCI - *Meccanica applicata alle Costruzioni*, Cap. VI, pag. 211. Vedi pure *Franciosi*, Vol. I, § 6-8.

neare delle prime sei secondo i coefficienti k_1, k_2, \dots, k_6 forniti dal sistema seguente:

$$\begin{aligned} k_1 F_{1x} + k_2 F_{2x} + \dots + k_6 F_{6x} &= F_x \\ k_1 F_{1y} + k_2 F_{2y} + \dots + k_6 F_{6y} &= F_y \\ \dots &\dots \\ k_1 \mathcal{M}_{1z} + k_2 \mathcal{M}_{2z} + \dots + k_6 \mathcal{M}_{6z} &= \mathcal{M}_z \end{aligned} \tag{a}$$

perciò la soluzione ad essa inerente è

$$\sigma = k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + \dots + k_6 \sigma_6.$$

Si osserverà in seguito come sia possibile ottenere le soluzioni esatte in sei casi particolari definiti ciascuno da una sola, o al massimo due caratteristiche; in tal caso il sistema (a) si particularizza in sei equazioni, cinque ad una sola ed una a tre incognite, ed i coefficienti k si ottengono immediatamente.

3. Il solido di De Saint-Venant.

Il corpo preso in esame dal De Saint-Venant è, come già osservato, un solido omogeneo a forma di cilindro retto; il materiale costituente si suppone linearmente elastico ed isotropo. La *sezione retta* (fig. 2-4) è la figura

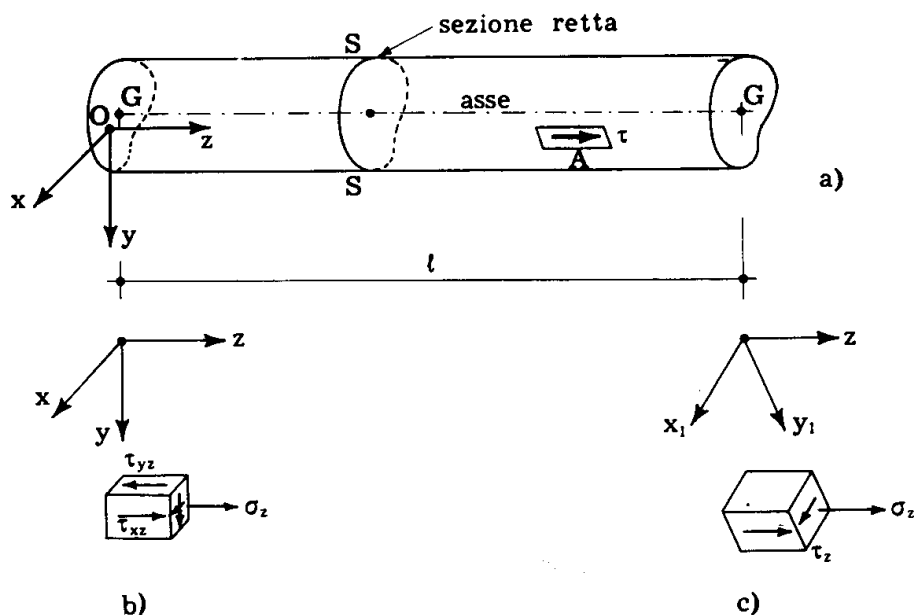


FIG. 2-4

che si ottiene tagliando il solido con un piano parallelo alle due basi; l'asse del solido è la retta cui appartengono i baricentri delle sezioni rette;

queste ultime risultano perciò ortogonali all'asse. Si assume come riferimento una terna ortogonale destrorsa avente l'origine O e gli assi x e y contenuti nel piano di una delle due basi; l'asse z è orientato verso l'interno del corpo. Nella trattazione dei casi particolari quasi sempre l'origine O coincide con il baricentro G , e le rette x ed y con gli assi principali d'inerzia della sezione retta; i risultati cui si perviene in questo capitolo non sono però condizionati da queste posizioni.

Si è osservato già che si trascurano le forze di massa, e si considera scarica la superficie laterale. Con il riferimento scelto le condizioni ai limiti (Vol. I, form. 2-6) si scrivono:

superficie laterale (coseni direttori della normale $\alpha_x, \alpha_y, 0$)

$$\begin{aligned}\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y &= 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y &= 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y &= 0 ;\end{aligned}\tag{b}$$

base $z=0$ (coseni direttori della normale, $0, 0, -1$)

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -p_x \\ \tau_{zy} &= -p_y \\ \sigma_z &= -p_z ;\end{aligned}\tag{1}$$

base $z=l$ (coseni direttori della normale $0, 0, 1$)

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= p_x \\ \tau_{zy} &= p_y \\ \sigma_z &= p_z .\end{aligned}\tag{2}$$

Il De Saint-Venant ha mostrato che il problema si semplifica di molto, pur senza che i risultati perdano di generalità, imponendo che ovunque nel corpo si verifichi (fig. 2-4 b):

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 .\tag{3}$$

Sono così soddisfatte identicamente le prime due delle (b), e si semplificano, come si vedrà, le espressioni delle equazioni indefinite dell'equilibrio.

La condizione (2-3) equivale all'altra che su un qualsiasi elemento piano parallelo all'asse del solido (fig. 2-4) la tensione sia esclusivamente tangenziale e diretta secondo z ; si ha prova di ciò osservando che in tal caso, e solo in tal caso, per qualsiasi punto A il cerchio di Mohr relativo agli elementi piani del fascio di sostegno z si riduce all'origine (*). Perciò

(*) Si dimostra ciò anche attraverso le (2-7) del primo volume.

la tensione sugli elementi piani paralleli a z è tutta tangenziale, e diretta sempre secondo z . Si osserva che, facendo ruotare l'elemento di volume della fig. 2-4 b in modo che uno spigolo sia parallelo a z e un altro alla direzione x_1 , della tensione tangenziale τ_z che agisce sull'elemento normale a z , sugli elementi paralleli al piano $x_1 z$ non agisce nessuna tensione (fig. 2-4 c); perciò lo stato tensionale derivante dalla posizione (2-3) è piano, e nel generico punto A il piano delle tensioni è quello $x_1 z$ definito dalla direzione di σ_z e di τ_z in A.

La posizione (2-3), come si è visto, semplifica grandemente il problema, senza peraltro porre delle limitazioni alla sollecitazione esterna, poiché sulle due basi le $p_x p_y p_z$ possono essere tutte, per le (2-1) e (2-2), diverse da zero; tutto sta a vedere se la (2-3) permette di pervenire a sei sollecitazioni indipendenti, in modo da poter ottenere, per combinazioni di questi casi, le soluzioni in qualsiasi altro caso di sollecitazione.

Si vedrà che ciò è possibile, ed anzi quattro casi sono definiti da una sola caratteristica diversa da zero, e due casi da due.

Ciò significa che in realtà qualsiasi sollecitazione sulle basi porta, ad una certa distanza da esse, all'estinzione delle $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$.

Le condizioni ai limiti sulla superficie laterale si riducono alla terza delle (b):

$$\tau_{xz} \alpha_{nx} + \tau_{yz} \alpha_{ny} = 0 ; \quad (4)$$

essa assicura (*) che in corrispondenza di un punto qualsiasi del contorno della generica sezione retta la τ_z è diretta secondo la tangente al contorno nel punto. Questo risultato, conseguenza del fatto che la superficie laterale è scarica, si è già ottenuto nel Cap. II del Vol. I.

Le relazioni dirette di Navier (Vol. I, form. 4-4 e 4-6) si semplificano nelle seguenti

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = - \frac{\sigma_z}{Em} = - \frac{\varepsilon_z}{m} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = 0 .$$

(*) Nella (2-4) α_{nx} ed α_{ny} sono i coseni direttori della normale al contorno della sezione retta; è opportuno affiancare l'indice n agli indici x ed y per caratterizzare la suddetta normale.

Le (2-5) si traducono nelle tre relazioni lineari del primo ordine tra le componenti dello spostamento:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

Viceversa, se valgono le (2-6), sono valide le (2-3); le (2-6) e (2-3) sono perciò equivalenti.

La 4-7 del Vol. I si scrive

$$\Theta = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) T = \frac{\sigma_z}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) = \varepsilon_z \left(1 - \frac{2}{m} \right) . \quad (7)$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio (Vol. I, form 2-8) si semplificano anche esse, come già detto, per le (2-3), e si scrivono, poichè sono nulle le forze di massa,

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 ;$$

le prime due delle (2-8) assicurano che il campo vettoriale delle τ_z è lo stesso su tutte le sezioni rette.

Dalle prime due delle (2-8) si ha

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 . \quad (c)$$

Le (c) non sono che le particolarizzazioni delle prime due delle (5-1) del Vol. I nel caso in esame. Infatti, dalle relazioni (2-6) si trae

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (d)$$

e analoga

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (e)$$

Dalle prime due delle (5-1) del Vol. I si trae, per la (2-7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0 \quad (f)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = 0 .$$

Le (f), per le (d) ed (e), si traducono nelle (c).

La terza delle (5-1) del Vol. I fornisce, per la (2-7),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Le equazioni dell'equilibrio elastico si specializzano perciò nelle seguenti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 .$$

Perchè una terna $u v w$ soddisfi le condizioni del De Saint-Venant occorre e basta che siano soddisfatte le (2-4), (2-6); perchè la soluzione sia anche equilibrata, occorre poi e basta che siano soddisfatte le (2-9) (*).

Sovente si impongono al solido delle condizioni di vincolo, relative al punto O ed agli elementi ad esso adiacenti; precisamente si impone che sia fisso il punto O , che sia fisso l'elemento lineare dell'intorno di O disteso sull'asse x , e che l'elemento lineare dell'intorno di O disteso sull'asse y non possa uscir fuori dal piano xy . Le suddette condizioni si traducono analiticamente nelle sei relazioni che seguono:

$$\begin{aligned} u_o &= v_o = w_o = 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_o &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_o = 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_o &= 0 . \end{aligned} \tag{g}$$

Si riconosce che un tale sistema di vincolo permette una qualsiasi deformazione dell'intorno di O ; esso corrisponde infatti ad imprimere al corpo gli spostamenti $u v w$ soddisfacenti le (2-9), le (2-6) e le condizioni (2-1), (2-2), (2-4), assegnando in seguito un moto rigido che riporti O' in O , x' in x , ed y' sul piano xy . Ciò facendo y' si porta su y , poichè $\gamma_{xy} = 0$, ma z' non si porta in genere su z , perchè γ_{zx} e γ_{zy} sono in genere diversi da zero.

Si osserva da quanto sopra che non è però necessario imporre condizioni di vincolo. Infatti le $u v w$ verificano le (2-1), (2-2) e (2-4), perciò le condizioni di equilibrio sono soddisfatte; d'altro canto il generico punto A e la sua posizione deformata A' sono univocamente definiti rispetto alla terna $Oxyz$ dalle coordinate xyz ed

$$\begin{aligned} x' &= x + u(xyz) = x'(xyz) \\ y' &= y + v(xyz) = y'(xyz) \\ z' &= z + w(xyz) = z'(xyz) . \end{aligned} \tag{h}$$

Un eventuale moto rigido imposto dalla presenza di vincoli fa variare le $x' y' z'$, ma non gli spostamenti relativi dei punti del corpo. Perciò la configurazione deformata del corpo è univocamente definita anche in assenza di vincoli.

4. La risoluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico.

In generale, il problema dell'equilibrio elastico si traduce in un sistema di equazioni differenziali (Vol. I, § 5-1) connesso con delle condizioni ai limiti, nelle quali intervengono tutti i vincoli e tutte le forze esterne

(*) Se una terna $u v w$ soddisfa solo le (2-9), e non le (2-6), le condizioni di equilibrio (Vol. I, § 5-1) non sono soddisfatte; esse infatti si riducono alle (2-9) se e soltanto se sono valide le (2-3), e cioè le (2-6).

agenti sul corpo. La risoluzione di questo sistema differenziale è molto ardua, e praticamente impossibile nella maggior parte dei casi; il principio di Kirchhoff permette però a volte una notevole semplificazione. Se infatti una qualsiasi terna $u v w$ soddisfa sia le equazioni di equilibrio che le condizioni ai limiti, essa è l'unica possibile soluzione del problema, e come tale può essere senz'altro accettata. Nel caso in esame non è neppure necessario imporre a priori tutte le condizioni ai limiti, poichè non ha interesse il valore puntuale della sollecitazione sulle basi.

L'unica condizione che si impone è la (2-4), e questo facilita estremamente il problema; del resto, non si conoscono a priori le distribuzioni di forze esterne compatibili con la posizione (2-3).

Si assegna perciò una particolare terna $u v w$, si verifica che essa soddisfa le (2-9) le (2-6) e la (2-4), e attraverso le (2-1) e (2-2) si perviene alle p^0 e p' ; il principio di Kirchhoff permette di asserire che a questi valori della sollecitazione esterna corrisponde la terna $u v w$ da cui si è partiti, e soltanto quella. Si conosce così la soluzione per un caso particolare di sollecitazione, valida anche se il prisma è molto corto; essa però non rivestirebbe particolare importanza, essendo relativa ad una ben definita legge di variazione delle forze sulle basi, per giunta ricavata a posteriori. Se però il solido è abbastanza lungo, l'effettiva distribuzione delle p^0 e p' perde interesse, restringendosi questo alle sole caratteristiche delle forze stesse. La soluzione ottenuta è perciò valida, sotto tale ipotesi, per qualsiasi altra distribuzione che presenti le stesse caratteristiche; la sua importanza cresce perciò grandemente, essendo essa, come già visto, una delle sei soluzioni particolari dalla cui combinazione risulta la soluzione di qualsiasi altro caso. Si forniscono nel paragrafo che segue le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione esterna in funzione delle tensioni sulle due basi.

5. Caratteristiche della sollecitazione esterna.

Sulla base $z=0$ le caratteristiche della sollecitazione esterna sono le forze $F_x^0 F_y^0 F_z^0$ aventi come intensità la somma delle componenti delle forze elementari $p_x dA$, $p_y dA$, $p_z dA$ secondo i tre assi $x y z$, e le coppie $\mathcal{M}_x^0 \mathcal{M}_y^0 \mathcal{M}_z^0$ aventi come momenti le somme dei momenti delle stesse forze rispetto agli stessi assi. Si ha perciò (fig. 2-5 a)

$$F_x^0 = \int_A p_x dA$$

$$F_y^0 = \int_A p_y dA$$

$$\begin{aligned}
 F_z^o &= \int_A p_z dA \\
 \mathcal{M}_x^o &= \int_A p_z y dA \\
 \mathcal{M}_y^o &= - \int_A p_z x dA \\
 \mathcal{M}_z^o &= \int_A (p_y x - p_x y) dA ;
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

gli integrali delle (2-10) sono estesi all'area A della base.

Per la scrittura delle (2-10) si è adottata la convenzione secondo cui le forze p ed F sono positive se dirette nel verso degli assi, e le coppie \mathcal{M} sono positive se portano rispettivamente y su z , z su x , x su y . Se le coppie si rappresentano, come in genere si usa, con un vettore ortogonale al

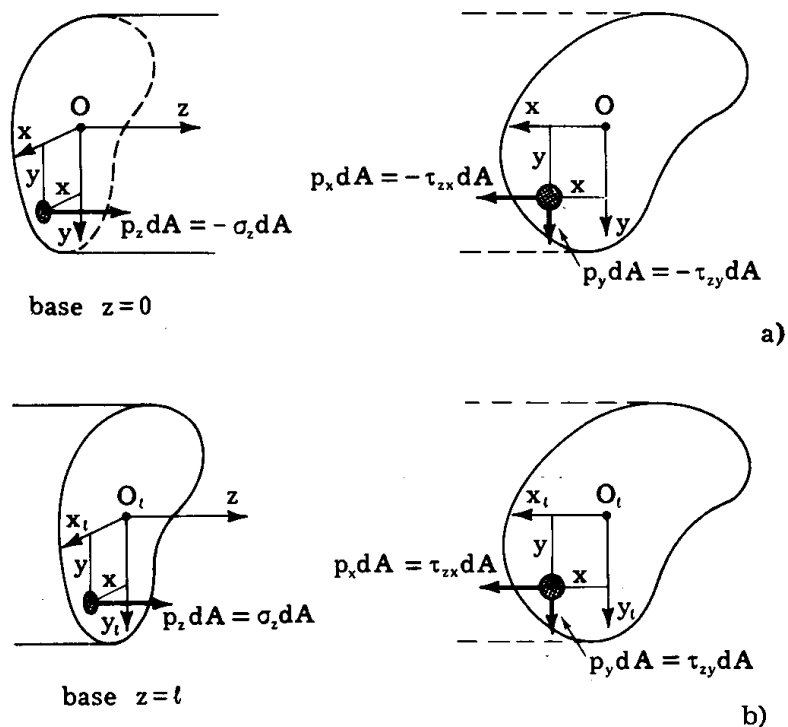


FIG. 2-5

piano in cui il momento agisce, e orientato in modo che un cavaturaccioli avanzi nel verso del vettore quando il suo manico gira nel verso della coppia, si può anche dire che le coppie \mathcal{M}_x^o , \mathcal{M}_y^o , \mathcal{M}_z^o sono positive se i loro vettori rappresentativi hanno lo stesso verso degli assi x y z .

Poichè è necessario, come già fatto osservare, risalire dalle componenti di tensione alle caratteristiche della sollecitazione, si forniscono, utilizzando le (2-1), le espressioni di queste ultime in funzione delle componenti di tensione calcolate sulla base $z=0$:

$$\begin{aligned}
 F_x^0 &= - \int_A \tau_{zx} dA \\
 F_y^0 &= - \int_A \tau_{zy} dA \\
 F_z^0 &= - \int_A \sigma_z dA \\
 \mathcal{M}_x^0 &= - \int_A \sigma_z y dA \\
 \mathcal{M}_y^0 &= \int_A \sigma_z x dA \\
 \mathcal{M}_z^0 &= - \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA .
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Perchè le caratteristiche della sollecitazione sulla base $z=l$ siano fornite da espressioni analoghe alle (2-10) e (2-11), ci si riferisce per definirle non alla terna $Oxyz$, ma all'altra $O_i x_i y_i z$ ottenuta traslando la prima secondo l'asse z fino a portare l'origine O sulla base $z=l$ (fig. 2-5 b); rispetto al nuovo riferimento si ha $x_i = x$, $y_i = y$, $z_i = z - l$. Si definiscono perciò come caratteristiche della sollecitazione sulla base $z=l$ le forze $F_x^i F_y^i F_z^i$ aventi come intensità le somme delle componenti delle forze elementari $p_x dA$, $p_y dA$, $p_z dA$, secondo i tre assi $x_i y_i z$, e le coppie $\mathcal{M}_x^i \mathcal{M}_y^i \mathcal{M}_z^i$ aventi come momenti le somme dei momenti delle stesse forze rispetto agli stessi assi. Si ha così, ricordando le (2-2),

$$\begin{aligned}
 F_x^i &= \int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA \\
 F_y^i &= \int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA \\
 F_z^i &= \int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_x &= \int_A p_z y \, dA = \int_A \sigma_z y \, dA \\ \mathcal{M}'_y &= - \int_A p_z x \, dA = - \int_A \sigma_z x \, dA \\ \mathcal{M}'_z &= \int_A (p_y x - p_x y) \, dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \, dA ; \end{aligned}$$

le componenti di tensione che compaiono nelle (2-12) sono calcolate sulla base $z=l$. Nella fig. 2-6 sono riportate le caratteristiche della sollecitazione in $z=0$ e $z=l$, con il verso positivo.

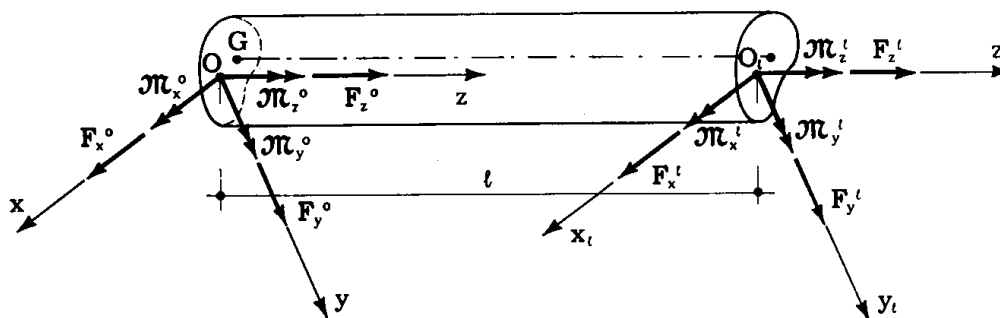


FIG. 2-6

Le prime due delle (2-8) assicurano che

$$\begin{aligned} F'_x &= - F^0_x \\ F'_y &= - F^0_y \\ \mathcal{M}'_z &= - \mathcal{M}^0_z ; \end{aligned} \tag{13}$$

le (2-13) sono tre delle sei equazioni della statica dei corpi rigidi, e traducono analiticamente le condizioni di equilibrio alla traslazione secondo gli assi x ed y , ed alla rotazione intorno all'asse z . Le altre tre condizioni di equilibrio alla traslazione secondo l'asse z e alla rotazione intorno agli assi x e y , impongono che sia

$$\begin{aligned} F'_z &= - F^0_z \\ \mathcal{M}'_x &= - \mathcal{M}^0_x + F^l_y l \\ \mathcal{M}'_y &= - \mathcal{M}^0_y - F^l_x l . \end{aligned} \tag{14}$$

Le (2-14) sono rispettate poichè lo sono le (2-1), (2-2), (2-4) e (2-8), che garantiscono l'equilibrio dell'elemento generico, e quindi anche l'equilibrio globale. Si osservi che, avendo definito le caratteristiche sulle due basi con riferimento a due terne diverse, le C^i non sono più uguali e contrarie alle C^o ; lo confermano le ultime due delle (2-14).

6. Le sollecitazioni semplici.

Scelti comunque l'origine O e gli assi x e y , è sempre possibile assegnare sei terne di funzioni $u v w$ tali che a ciascuna di esse corrisponda, sulla base $z = \ell$, una sola caratteristica. I sei casi particolari di sollecitazione che ne derivano non godono però della proprietà della *ortogonalità*, e cioè l'energia di deformazione del tronco elementare connessa con due o più casi particolari di sollecitazione contiene i termini di scambio. Si riconoscerà invece che scegliendo l'origine O coincidente con il baricentro G , e gli assi x ed y coincidenti con gli assi principali d'inerzia ξ ed η , è possibile assegnare sei terne di funzioni $u v w$ caratterizzate dall'ortogonalità; soltanto a quattro di esse corrisponde però una sola caratteristica, mentre alle altre due sono connesse in genere due caratteristiche sulla base $z = \ell$, che si riducono ad una sola in casi particolari. Queste sei sollecitazioni si dicono *semplici*; esse di seguito si elencano.

Si ha la sollecitazione semplice di *trazione* (o *compressione*) se sono diverse da zero soltanto F_z^o ed F_z^i , essendo l'asse z baricentrico; il nome deriva dal fatto che le due forze $F_z^i = F_z$ ed $F_z^o = -F_z$ tendono a stirare, o a comprimere, il solido.

Si ha la sollecitazione semplice di *flessione* relativa all'asse $x \equiv \xi$ se sono diverse da zero soltanto $\mathcal{M}_x^i = \mathcal{M}_x$ ed $\mathcal{M}_x^o = -\mathcal{M}_x$; il nome deriva dal fatto che la coppia \mathcal{M}_x tende ad inflettere il solido, e cioè ad imprimere una curvatura al suo asse.

Analoga definizione vale per la sollecitazione semplice di *flessione* relativa all'asse $y \equiv \eta$.

Si ha la sollecitazione semplice di *torsione* se sono diverse da zero soltanto $\mathcal{M}_z^i = \mathcal{M}_z$ ed $\mathcal{M}_z^o = -\mathcal{M}_z$; la coppia \mathcal{M}_z tende a torcere il solido, e cioè a far ruotare le sezioni rette l'una rispetto all'altra lasciando inalterato l'asse.

Nella sollecitazione semplice di *flessione*, *taglio secondo l'asse* $y \equiv \eta$ e *torsione* sono diverse da zero (fig. 2-7 a) $F_y^i = F_y$ ed $\mathcal{M}_z^i = \mathcal{M}_{zy}$ sulla base $z = \ell$, ed $F_y^o = -F_y$, $\mathcal{M}_z^o = F_y \ell$, $\mathcal{M}_z^o = -\mathcal{M}_{zy}$ sulla base $z = 0$.

Il valore di \mathcal{M}_{zy} è legato a quello di F_y da una ben definita relazione

$$\mathcal{M}_{zy} = x_c F_y ,$$

dove x_c è una costante.

Comunemente, questo tipo di sollecitazione si chiama semplicemente *sollecitazione di taglio secondo y*.

Le soluzioni u, v, w delle (2-9) sono valide anche se il solido di De Saint-Venant è cortissimo, purchè la distribuzione delle forze elementari p^0 e p^1 sulle due basi sia quella che, attraverso le (2-1) e (2-2), deriva dalle stesse u, v, w ; se cioè, come si dice in sintesi, le forze sulle basi agiscono alla De Saint-Venant.

Se il solido è però abbastanza lungo, il postulato di De Saint-Venant permette di accettare le soluzioni anche per una diversa distribuzione delle forze applicate, purchè esse presentino le stesse caratteristiche della distribuzione alla De Saint-Venant, e purchè si considerino punti che siano

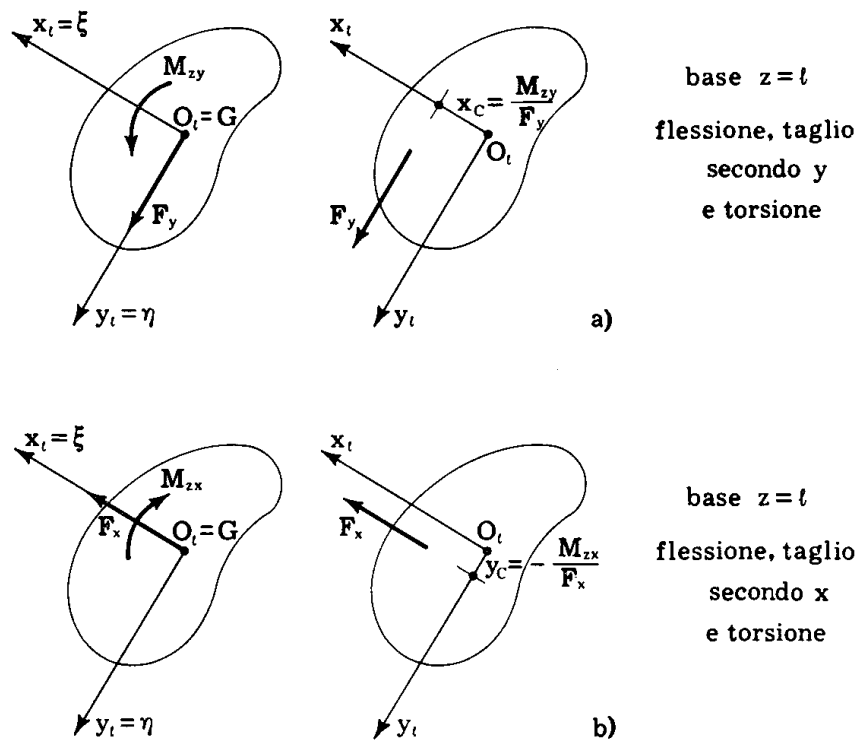


FIG. 2-7

sufficientemente distanti dalle due basi. Come già detto, è questa considerazione che, permettendo di far dipendere le sollecitazioni interne dalle sole caratteristiche globali della sollecitazione esterna, rende praticamente operanti i risultati del De Saint-Venant.

Sia presente una distribuzione qualsiasi di forze esterne le cui caratteristiche sulla base $z = l$ siano $F_x^*, F_y^*, F_z^*, \mathcal{M}_x^*, \mathcal{M}_y^*, \mathcal{M}_z^*$; la soluzione ad essa relativa — nei punti che distano dalle due basi di una lunghezza maggiore di quella di estinzione — si ottiene combinando linearmente le soluzioni relative ai sei casi particolari prima esaminati, secondo sei coefficienti k_i forniti dal sistema (a) così semplificato:

$$\begin{aligned}
 k_1 F_x &= F_x^* \\
 k_2 F_y &= F_y^* \\
 k_3 F_z &= F_z^* \\
 k_4 \mathcal{M}_x &= \mathcal{M}_x^* \\
 k_5 \mathcal{M}_y &= \mathcal{M}_y^* \\
 k_1 \mathcal{M}_{zx} + k_2 \mathcal{M}_{zy} + k_6 \mathcal{M}_z &= \mathcal{M}_z^* .
 \end{aligned} \tag{15}$$

Si ha così

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{F_x^*}{F_x} ; & k_2 &= \frac{F_y^*}{F_y} ; & k_3 &= \frac{F_z^*}{F_z} ; \\
 k_4 &= \frac{\mathcal{M}_x^*}{\mathcal{M}_x} ; & k_5 &= \frac{\mathcal{M}_y^*}{\mathcal{M}_y} ; \\
 k_6 &= \frac{\mathcal{M}_z^* - \frac{F_x^*}{F_x} \mathcal{M}_{zx} - \frac{F_y^*}{F_y} \mathcal{M}_{zy}}{\mathcal{M}_z} .
 \end{aligned} \tag{16}$$

Ponendo (fig.2-7 a, e 2-7 b)

$$\begin{aligned}
 y_C &= - \frac{\mathcal{M}_{zx}}{F_x} \\
 x_C &= \frac{\mathcal{M}_{zy}}{F_y}
 \end{aligned}$$

risulta (*)

$$k_6 = \frac{\mathcal{M}_z^* + F_x^* y_C - F_y^* x_C}{\mathcal{M}_z} . \tag{17}$$

I coefficienti da k_1 a k_5 si ottengono perciò come rapporto tra la generica caratteristica della sollecitazione e il valore della caratteristica

(*) Si osservi (fig. 2-7) che x_C ed y_C sono rispettivamente le distanze dal baricentro, valutate come coordinate, della risultante di F_y ed \mathcal{M}_{zy} , e della risultante di F_x ed \mathcal{M}_{zx} .

del corrispondente caso particolare; il coefficiente k_g si può ottenere con un rapporto analogo, purchè a numeratore si ponga la coppia valutata,

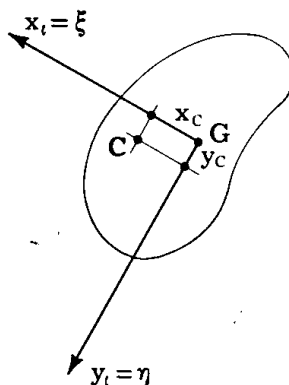


FIG. 2-8

invece che rispetto all'asse z , rispetto all'asse parallelo a z e passante per il punto C definito dalle coordinate x_c e y_c (fig. 2-8).

Il punto C prende nome di *centro di taglio*.

7. Caratteristiche della sollecitazione interna.

Si effettui (fig. 2-4) un taglio secondo la sezione retta S alla generica ascissa z , rimuovendo la parte del solido che non contiene l'origine.

Preso riferimento alla terna $O^* x^* y^* z$ ottenuta traslando la terna $O x y z$ lungo z fino a portare l'origine sul piano di S , si assumono come *caratteristiche della sollecitazione interna* in S , e cioè come caratteristiche delle forze elementari agenti su S , le forze aventi per intensità la somma delle componenti delle forze elementari $\tau_{zx} dA$, $\tau_{zy} dA$ e $\sigma_z dA$ secondo i tre assi $x^* y^* z$, e le coppie aventi per momenti la somma dei momenti delle stesse forze rispetto agli stessi assi.

Le caratteristiche della sollecitazione interna sono quindi le seguenti (gli integrali sono estesi all'area A della sezione retta):

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_z dA &= N && \text{Sforzo normale} \\ \int_A \tau_{zx} dA &= T_x && \text{Sforzo tagliante secondo } x \\ \int_A \tau_{zy} dA &= T_y && \text{Sforzo tagliante secondo } y \end{aligned} \tag{18}$$

$$\int_A \sigma_z y \, dA = M_x \quad \text{Momento flettente relativo ad } x$$

$$- \int_A \sigma_z x \, dA = M_y \quad \text{Momento flettente relativo ad } y$$

$$\int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \, dA = M_t \quad \text{Momento torcente (*).$$

Più propriamente si dovrebbe parlare di sforzo tagliante secondo x^* (o y^*) e momento flettente relativo ad x^* (o ad y^*), e adottare i simboli $T_x^* T_y^* M_x^* M_y^*$; è invalso però nell'uso chiamare x ed y gli assi x^* e y^* , e ciò è in parte giustificato dall'uguaglianza delle coordinate $x = x^*$, $y = y^*$.

Se si rimuove la parte del solido che contiene l'origine, e si considerano le tensioni agenti sulla faccia S di normale contraria a z , le componenti di tensione, e con esse le caratteristiche (2-18), cambiano di segno. Per rendersi indipendenti dalla scelta della parte di solido che si rimuove, si conviene che il segno delle caratteristiche sia quello che compete alla faccia di normale concorde a z .

Le definizioni (2-18) sono in accordo con quelle fornite nel caso delle lastre-travi (Cap. VI del Vol. I) e con quelle che in genere si danno nella teoria delle travi (Cap. VI del Vol. III), con riferimento alle risultanti (forza e coppia) di tutte le forze (forze applicate e reazioni) agenti su una delle due parti in cui la trave è divisa dalla sezione (**).

Le (2-18) coincidono, per $z = l$, con le caratteristiche della sollecitazione esterna (2-12), e per $z = 0$ sono uguali e contrarie ad esse (2-11).

(*) M_t è diverso da zero anche nella sollecitazione semplice di taglio, mentre in tal caso $k_g = 0$, e non si ha torsione semplice da sovrapporre.

(**) Le caratteristiche della sollecitazione interna in corrispondenza della generica sezione retta S di una trave sono le caratteristiche del sistema di forze elementari σdA e τdA agenti sulla sezione, come detto ad inizio di paragrafo; esse però possono essere calcolate, se la struttura è isostatica, o se sono note le reazioni iperstatiche, prescindendo dalla conoscenza delle σ e delle τ . Si tagli infatti la struttura in S , e si eliminino i vincoli (esterni o interni) che eventualmente limitassero una o più delle libertà di movimento di una (ad es. C_d) delle due parti C_s e C_d che si affacciano in S , sostituendoli con le corrispondenti reazioni. Siano F_d le forze, comprese le reazioni dei vincoli soppressi, che si esercitano su C_d ; le caratteristiche del sistema F_d devono coincidere con quelle della sollecitazione interna in S , intese come azione su C_s , perchè le prime forze, assieme con le seconde cambiate di segno, sono in equilibrio; esse infatti non imprimono movimenti al corpo libero C_d .

Valgono per le (2-18) relazioni analoghe alle (2-13) e (2-14):

$$\begin{aligned}
 N(z) &= F'_z \\
 T_x(z) &= F'_x \\
 T_y(z) &= F'_y \\
 M_x(z) &= \mathcal{N}'_x - F'_y (\ell - z) \\
 M_y(z) &= \mathcal{N}'_y + F'_x (\ell - z) \\
 M_t(z) &= \mathcal{N}'_z ;
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

le (2-18) sono perciò definite una volta assegnate le caratteristiche della sollecitazione esterna.

Dalle (2-19) si trae che nel solido del De Saint-Venant le caratteristiche di sforzo normale, sforzo tagliante e momento torcente sono costanti con l'ascissa, le caratteristiche di momento flettente sono invece costanti solo se i relativi sforzi taglianti sono nulli. Si osserva pure che ogni caratteristica può essere presente da sola, e in tutte le sezioni del solido contemporaneamente, ad eccezione dello sforzo tagliante; questo è sempre accompagnato da momento flettente, e può essere presente da solo esclusivamente nella sezione all'ascissa $\ell - \frac{\mathcal{N}'_x}{F'_y}$, per quel che riguarda T_x ,

o all'ascissa $\ell + \frac{\mathcal{N}'_y}{F'_x}$, per quel che riguarda T_y .

8. Particolarizzazioni di risultati noti.

Si è osservato che in corrispondenza dell'intorno di ogni punto del solido esiste un elemento piano su cui non si esercita tensione, quindi lo stato tensionale è piano. Il piano delle tensioni è definito dalle direzioni di σ_z e τ_z . Questo piano varia con il punto, ma è lo stesso per tutti i punti appartenenti alla generica retta parallela a z , poichè per questi punti la τ_z ha lo stesso valore e la stessa direzione (2-8). Tracciate su una qualsiasi sezione retta le *linee di forza* (o *traiettorie*, o *linee di flusso*) del campo vettoriale τ_z (e cioè le linee cui le τ_z sono in ogni punto tangenti) i cilindri retti aventi tali linee per direttrici godono della proprietà che in ogni loro punto A il piano tangente è il piano delle tensioni in A . In questo piano sono contenute due delle direzioni principali, ξ e ζ , in A ; la terza direzione, η , cui corrisponde $\sigma_\eta = 0$, è ortogonale al piano delle tensioni (*).

(*) Non si confondano, come potrebbe accadere per la coincidenza dei simboli, le direzioni principali di inerzia della sezione retta con le direzioni principali di tensione.

Le linee isostatiche corrispondenti alle tensioni principali diverse da zero si sviluppano perciò sulle superfici dei cilindri retti prima definiti.

I valori delle tensioni principali σ_ξ e σ_ζ sono forniti (Vol. I, form. 2-23) da

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\xi \\ \sigma_\zeta \end{array} \right\} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \quad (20)$$

dove è

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}.$$

Il cerchio di Mohr relativo agli elementi piani del fascio di sostegno $y_1 = \eta$ (fig. 2-4 e 2-9) è un cerchio principale; esso è tangente o secante l'asse delle τ_n , perciò è il più grande dei tre cerchi di Mohr principali. Il cerchio è tangente se $\tau_z = 0$, e cioè se esiste solo la σ_z ; in questo caso $\sigma_\zeta = \sigma_z$, e $\sigma_\xi = 0$. Si osserva anche che una delle tracce PV e PW dei due elementi piani su cui non si esercita tensione normale è parallela a z.

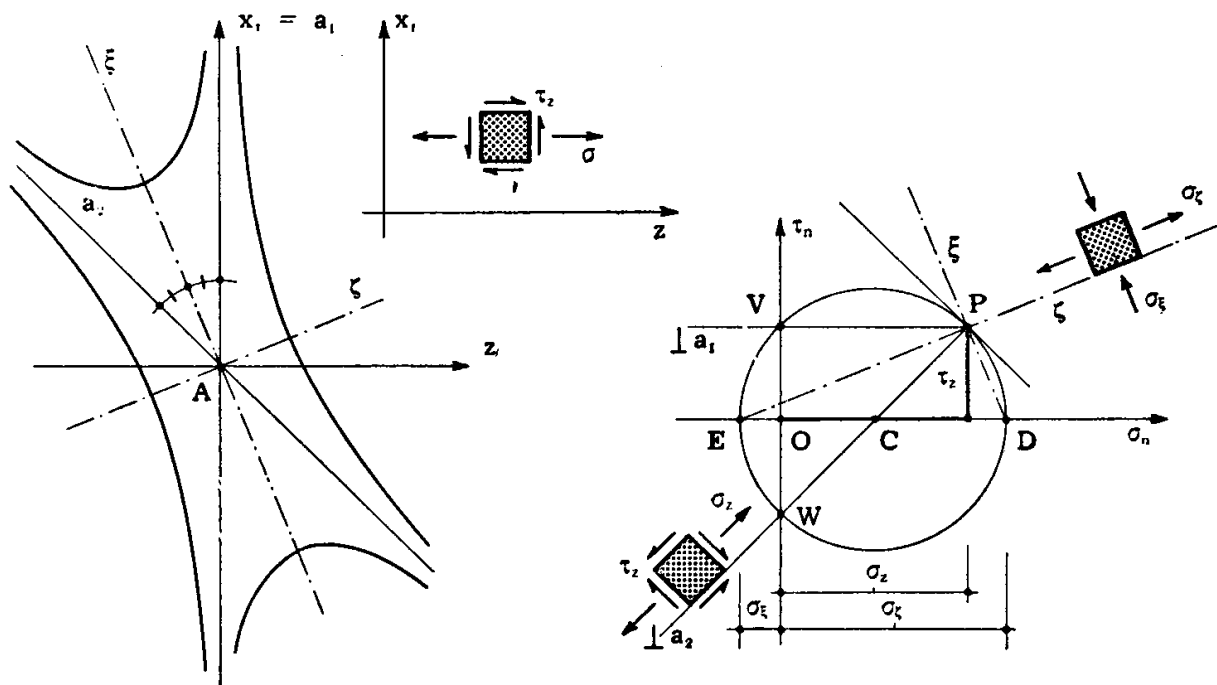


FIG. 2-9

Le coniche di tensione, tracce dei cilindri quadrici sul piano $\xi \zeta$, sono due iperboli, i cui asintoti sono a_1 e a_2 , rispettivamente ortogonali a PV e PW; l'asintoto a_1 coincide con x_1 , l'altro è il simmetrico di a_1 rispetto alle direzioni principali. La tensione tangenziale che si esercita su PV e su PW è pari a τ_z ; la tensione σ_n sulle facce ad esse normali è pari a σ_z .

Le direzioni principali di deformazione coincidono (Vol. I, § 4-2)

con quelle di tensione; risulta

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_\xi}{m} \right); \quad \varepsilon_\xi = \frac{1}{E} \left(\sigma_\xi - \frac{\sigma_z}{m} \right); \quad \varepsilon_\eta = - \frac{\sigma_\xi + \sigma_z}{mE}. \quad (21)$$

Poichè le tre dilatazioni principali sono in genere tutte diverse da zero, lo stato di deformazione non è piano. Se il modulo di Poisson è positivo — e in pratica ciò si verifica per tutti i materiali — le tre ε principali non possono avere lo stesso segno; infatti si ha

$$\varepsilon_\eta = - \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon_z}{m-1}$$

e quindi, essendo $m > 2$, ε_η risulta di segno opposto a quello della somma $\varepsilon_\xi + \varepsilon_z$. Si può affermare perciò che, se il modulo di Poisson è positivo, le quadriche di dilatazione sono due iperboloidi; la proposizione è valida per qualsiasi stato tensionale piano.

Le verifiche di resistenza sono quelle relative agli stati tensionali piani (*); in particolare nel criterio delle tensioni ideali, per $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$, e $0 \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$, la (9-47) del Vol. I fornisce ($s > 0$)

$$s \left(\frac{m-1}{2m} \sigma_z \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \right) = \pm \sigma_o. \quad (22)$$

L'espressione del potenziale elastico è, in funzione delle componenti di tensione (Vol. I, form. 8-24),

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{2G}, \quad (23)$$

e in funzione delle componenti della deformazione (2-5)

$$\varphi = \frac{E}{2} \varepsilon_z^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2). \quad (24)$$

9. Considerazioni relative alla validità dei risultati del De Saint-Venant.

I risultati del De Saint-Venant sono vincolati alle ipotesi su cui poggia il principio di sovrapposizione degli effetti; infatti le (2-9) sono un caso

(*) Si osservi che, essendo le due tensioni principali di segno contrario, il punto rappresentativo $\sigma_\xi \sigma_z$ capita sempre, nel piano $\sigma_\xi \sigma_z$ del dominio di elasticità (Vol. I, Cap. IX), nel quadrante superiore sinistro o inferiore destro.

particolare delle (5-1) del vol. I e queste si basano sulle stesse ipotesi (in più, anzi, il materiale deve essere isotropo).

Si ricordi anche che la portata pratica dei risultati del De Saint-Venant è tutta condizionata dal principio di sovrapposizione; è quest'ultimo infatti che permette di utilizzare il postulato di De Saint-Venant, e quindi di ridurre le sollecitazioni esterne alle sole caratteristiche, prescindendo dalla legge di distribuzione, ed è esso che permette di scomporre una generica sollecitazione esterna nei casi semplici, calcolandone gli effetti e sommandoli. I risultati del De Saint-Venant e la loro pratica utilizzazione sono perciò tanto più aderenti al vero quanto più attendibili risultano le seguenti due ipotesi: materiale elastico secondo Hooke (anzi isotropo), e componenti u v w dello spostamento così piccole che le caratteristiche della sollecitazione interna possano essere calcolate, così come appare dalla (2-19), sulla struttura indeformata. Si noti che è specifica delle travi questa forma particolare sotto cui può essere enunciata l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti.

I risultati del De Saint-Venant possono perciò risultare troppo lontani dal vero se sono mal soddisfatte le due ipotesi suddette; in particolare, con riferimento alla seconda, se il valore del modulo elastico è troppo basso, se le tensioni sono troppo elevate, e se qualcuna delle dimensioni del solido predomina eccessivamente sulle altre. Può darsi per esempio che la lunghezza sia eccessiva nei confronti delle dimensioni della sezione retta, o che, tra queste ultime, una o più predominino sulle altre; in tal caso si ha che se le u v w sono piccole in rapporto alla dimensione maggiore, non lo sono in rapporto alle altre. Sorge così una proposizione che può sembrare paradossale: i risultati del De Saint-Venant hanno pratica utilità nei prismi di lunghezza tale da rendere operante il postulato omonimo, ma questa lunghezza non deve essere eccessiva, per non correre il rischio di inficiare la validità dei risultati stessi.

Classico il caso della torsione, dove secondo la teoria del De Saint-Venant le generatrici del solido si conservano rettilinee, mentre in solidi lunghi esse si trasformano in eliche cilindriche; sempre nella torsione, la teoria del De Saint-Venant stabilisce che $\sigma_z = 0$, mentre questa è presente se una dimensione della sezione retta predomina sulle altre.

E' da dire che, in presenza di forti spostamenti, i risultati del De Saint-Venant sono ancora validi per i tronchi in cui la trave può essere suddivisa; ad esempio, nella trattazione della trave sottile soggetta a sforzo assiale (Vol. V) resta impregiudicato il legame tra momento e curvatura, mentre le caratteristiche vanno calcolate sulla struttura già deformata; e così pure, nella torsione di travi lunghe, le eliche cilindriche sono assimilabili, nei singoli tronchi, a segmenti di retta.