

CAPITOLO XII

LA VERIFICA DI RESISTENZA NELLE STRUTTURE MONODIMENSIONALI

1. La ricerca del coefficiente di sicurezza in fase elastica. Calcolo di verifica e di progetto.

Data una struttura soggetta a determinate forze di esercizio F_1 , si moltiplichino le forze per un coefficiente k unico per tutte, e cioè si facciano variare le F_1 in modo che conservino inalterati i mutui rapporti. Per k crescente a partire dal valore uno, si giunge ad un valore $k = s_e$ per cui nella struttura, e in particolare nell'intorno di un punto P_e di essa, cominciano a verificarsi delle plasticizzazioni. Il numero s_e prende nome (§ 9-1 del Vol. I) di *coefficiente di sicurezza elastico globale*.

Calcolate le tensioni principali $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ provocate in un punto generico P dalle forze di esercizio, il *coefficiente di sicurezza nel punto*, $s(P)$, è il più alto rapporto in cui si possono incrementare le $\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta$ senza che nell'intorno del punto si verifichino plasticizzazioni, $s(P)$ è funzione del punto, ed è fornito dalla *condizione di plasticizzazione* (Vol. I, § 9-2).

$$f(s\sigma_\xi, s\sigma_\eta, s\sigma_\zeta) = 0 .$$

Se si ammette che sotto le forze $s_e F_1$ il comportamento è ancora tale da far reputare valido il principio di sovrapposizione, s_e coincide con il più basso $s(P)$:

$$s_e = s(P)_{\min} .$$

E' evidente da quanto sopra che questa formula non è più valida se entrano in gioco problemi di stabilità dell'equilibrio.

L'approssimazione che si consegue con detta formula è abbastanza buona; infatti, in genere, quando in un punto P_e si raggiunge la plasticizzazione per forze F_1 crescenti, in tutti gli altri punti della struttura, eccetto una zona piccola accanto a P_e , si è ancora ben lontani dal soddisfare la condizione di plasticizzazione, e cioè si è ancora in elasticità lineare; d'altro canto gli spostamenti, nella maggior parte dei casi, possono ancora

reputarsi di ampiezza tale da poter considerare accettabile l'ipotesi di piccoli spostamenti.

E' ovviamente impossibile calcolare s per tutti i punti P della struttura; per fortuna è spesso facile nelle strutture monodimensionali individuare le sezioni dove si verificano i minimi relativi di s , e, nelle sezioni così fissate, i punti della sezione stessa.

In tal modo la ricerca di $s(P)_{\min}$ è ricondotta in termini di pratica possibilità. Quanto sopra è il cosiddetto *calcolo di verifica*, inteso a ricercare il coefficiente di sicurezza s_e essendo note la struttura e le forze. Il calcolo di verifica può risultare lungo, ma è eseguibile in ogni caso. Esso si articola nelle seguenti fasi:

a) calcolo delle reazioni iperstatiche, se la struttura è iperstatica; di questo calcolo si parlerà nel volume successivo;

b) calcolo delle caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione o, come suol dirsi, dei diagrammi delle caratteristiche; se le forze di esercizio sono mobili o alterne, si devono calcolare i diagrammi dei valori estremi delle caratteristiche in ogni sezione, attraverso il procedimento delle linee d'influenza, di cui si parlerà pure in seguito;

c) ricerca delle sezioni più pericolose, e cioè di quelle dove presumibilmente si verificano i minimi relativi di $s(P)$;

d) studio di ciascuna delle suddette sezioni, individuando i punti di essa dove presumibilmente $s(P)$ raggiunge, nella sezione stessa, i minimi relativi.

Per quanto riguarda i punti a) e b), si dice fin d'ora che in una struttura i volte iperstatica occorre eseguire $i + 1$ studi sulla stessa struttura resa isostatica se le forze sono fisse, ed $i + 1$ studi sulla struttura effettiva se le forze sono mobili; anche questi ultimi si riducono però, in definitiva, agli $i + 1$ eseguiti sulla struttura isostatica. Da ciò la convenienza di una oculata scelta delle incognite iperstatiche. In molti casi particolari, opportuni procedimenti ad hoc valgono a ridurre la mole dei calcoli; l'importanza di questi procedimenti, il cui nome è legione, è per fortuna molto diminuita con la diffusione dei calcolatori elettronici.

Per il punto c), se le forze sono fisse occorre in ogni sezione considerare la presenza contemporanea di tutte le caratteristiche. Se le forze invece sono mobili, occorre, assieme al valore massimo o minimo della generica caratteristica C_i , considerare ad esso contemporanei i valori C_{ih} delle altre caratteristiche C_h generati dalla stessa condizione di carico che fornisce $C_{i \max}$ e $C_{i \min}$, valori C_{ih} che in genere non sono nè i massimi nè i minimi delle C_h ; nè è detto che in tal modo si attinga proprio il minimo di s_e .

Per il punto d), si è fornito già un esempio per il solo momento flettente M_x (§ 5-2); il coefficiente s che in esso si calcola è il valore $s(P)_{\min}$ rispetto agli altri punti della sezione. Altri esempi si sono forniti nel

§ (6-3) per M_x ed M_y contemporanei, nel § (7-4) per M_x , M_y ed N , nel § (9-14) per M_x e T_y .

Ben più difficoltoso è il *calcolo di progetto*, che in senso lato è volto a realizzare con il minimo costo una struttura destinata ad assolvere determinate funzioni. Il progetto, così inteso, è in genere solo in parte un problema di statica; è fin troppo ovvio che esso deve essere risolto per tentativi, e solo l'intuito del cast di progettisti, e un pizzico di fortuna, può dare qualche speranza di non andare troppo lontani dalla soluzione optimum.

Comunque, per quel che riguarda lo strutturista, in ognuno dei tentativi si presenta sempre, alla fine, un problema più semplice (*problema base*); il suo aspetto fondamentale è: assegnato il *tipo strutturale*, e cioè gli assi delle travi costituenti la struttura portante, i vincoli e le forze agenti, fissare le dimensioni delle varie sezioni in modo da minimizzare il costo della struttura stessa. In una semplificazione molto grossolana, minimo costo equivale in tal caso a minimo peso, e condizione necessaria a ciò ottenere è che ovunque sia $s(P) = s_e$; la soluzione di minimo peso è perciò da ricercarsi tra quelle per cui è ovunque $s(P) = s_e$, e tale ricerca non può farsi che eseguendo successivi calcoli di verifica su strutture di tentativo, variando ogni volta forma e dimensioni della sezione.

Salvo casi eccezionali (per es. travature reticolari isostatiche) la condizione che sia ovunque $s(P) = s_e$ non è però realizzabile; basti considerare che in tutte le caratteristiche, ad eccezione dello sforzo normale, le tensioni non sono mai distribuite uniformemente sulla sezione (*). Ci si contenta perciò di uguagliare i coefficienti di sicurezza minimi delle varie sezioni. Se la struttura è isostatica, ciò è abbastanza semplice, perchè in ogni sezione sono note le caratteristiche, che non dipendono dalle dimensioni delle sezioni (salvo la parte relativa al peso della trave), ma solo dalle lunghezze degli assi delle travi, dalla disposizione dei vincoli e dalle forze. Nel § 5-2 si è appunto fornito un esempio di progetto di sezione inflessa; in presenza di più sollecitazioni, il calcolo è meno elementare. Se la struttura è iperstatica, le sollecitazioni sono funzioni delle dimensioni delle varie sezioni; in tal caso, la condizione $s(P) = s_e$, sia pure limitata ai minimi delle singole sezioni, non è sempre ottenibile.

E' da dire, però, che minimo peso non è quasi mai sinonimo di massima economia; per esempio, nelle strutture in conglomerato armato sono

(*) Le sezioni sottili (in particolare quelle chiuse, se c'è torsione) riducono questo inconveniente, come già fatto notare nel caso della flessione, e della flessione e taglio contemporanei (trave a I); esse perciò sono le più razionali, anche se le più esposte al pericolo dell'instabilità, e le meno garantite nei riguardi dei margini plastici.

determinanti, tra l'altro, il costo delle centine e delle casseforme, e cioè la forma di perimetro della sezione retta, nonchè le maggiori o minori difficoltà di getto, in relazione alla sottigliezza e all'altezza della sezione, l'onere di sagomatura dell'acciaio, la possibilità di adottare casseforme metalliche, etc.; nelle strutture metalliche la possibilità di modulazione strutturale e di prefabbricazione in serie di numerosi elementi, le necessità inerenti al trasporto, le difficoltà maggiori o minori di saldatura o chiodatura, etc.

Il problema base si presenta, in pratica, semplificato, perchè molte delle dimensioni sono imposte da fattori diversi da quelli inerenti strettamente alla statica, alla realizzazione, o al peso; oltre a dover soddisfare le esigenze cui si è accennato, e relative al costo brutale, devono infatti essere spesso rispettate molte altre condizioni. Per esempio, in un fabbricato in c.a. può essere imposta l'esecuzione di travi a spessore di solaio; oppure può essere assegnata una delle dimensioni dei pilastri in tutta la verticale, per esigenze di tompagno, o l'altezza dei solai per fatto termico o acustico o per necessità inerenti ai servizi. In altri casi entrano in gioco l'istanza estetica, oppure altri fattori, come nei ponti, in cui spesso l'altezza in cui può svilupparsi la travata è limitata superiormente dal piano stradale o del ferro, inferiormente da esigenze idrauliche (rigurgiti etc.).

La questione più difficile è quindi nella scelta del tipo strutturale, perchè è evidente che, pur nelle semplificazioni di cui sopra, non possono sempre esaminarsi tutti i tipi con cui una struttura può essere realizzata, ma solo alcuni di essi. Tale scelta va fatta caso per caso, affidandosi all'istinto, ma molto di più all'esperienza, magari a quella altrui se la propria non è ancora ben maturata.

I problemi connessi con la scelta del tipo strutturale sono svariati. Già nel caso più semplice e più frequente di un fabbricato in c.a., può essere preferibile incrementare la luce dei solai e ridurre l'interasse dei pilastri; così aumenta l'altezza dei solai, diminuisce quella delle travi, e si raggiunge la soluzione ideale per travi incorporate, mentre le fondazioni risultano più onerose perchè i punti di scarico sono più numerosi, anche se gli scarichi singoli sono più modesti; viceversa, si potrebbe aumentare l'interasse dei pilastri sviluppando le travi in altezza fino a incorporare le piattabande dei vani. Ottimo consiglio sarebbe poi quello di unificare al massimo le dimensioni delle travi, anche se qualcuna risultasse sovrabbondante, e giungere addirittura alla modulazione strutturale connessa con quella architettonica e impiantistica; ciò trova particolare conforto nei nuovi criteri di progettazione coordinata adottati nei maggiori Istituti di edilizia popolare. Nelle strutture di più ampio respiro, per esempio nei ponti, il problema tipologico è ancora più sentito; scelta del materiale (acciaio, conglomerato armato classico, conglomerato precompresso, al-

luminio, etc.), scelta del tipo (ponte sospeso, ad arco a via superiore o inferiore, a travata, strutture speciali tipo Africa, Nielsen, Maillart, Mélan, Boussiron, etc.), scelta delle luci, scelta dei vincoli.

A questo proposito, è sempre aperta la polemica tra isostaticisti ed iperstaticisti, rinnovantesi si può dire ogni qualvolta nasce un nuovo tipo di materiale o di tecnica costruttiva. I primi invocano, a difesa delle strutture isostatiche, i seguenti validi argomenti:

a) indipendenza (almeno entro certi limiti) dai cedimenti di fondazione e dagli effetti termici e di ritiro, e quindi minor costo delle fondazioni;

b) semplicità dello schema statico;

c) facilità di calcolo.

I secondi oppongono motivi non meno convincenti:

a) eliminazione di vincoli particolari, come snodi, appoggi, cerniere, di elevato costo, spesso di difficile manutenzione e di rapido degradamento;

b) margini di sicurezza a rottura tanto più elevati quanto più numerose sono le iperstatiche;

c) minore deformabilità;

d) valori più elevati dei moltiplicatori critici, almeno nei riguardi della instabilità globale;

e) esecuzione più agevole;

f) diminuzione di quasi tutte le caratteristiche della sollecitazione da carico accidentale mobile o alterno, e spesso anche di quelle da peso proprio.

Nelle strutture iperstatiche l'effetto dei cedimenti, e in genere delle distorsioni, è certo tutt'altro che trascurabile; esso è però molto meno preoccupante di quanto a prima vista può apparire, se si considera che gli effetti statici dei cedimenti al disarmo — i più pericolosi — sono molto attutiti, nel conglomerato, dalla viscosità.

Emerge da quanto sopra che nel progetto deve palesarsi l'arte dell'ingegnere, nella verifica il mestiere; aspetti ambedue rispettabili della stessa professione, ma qualitativamente ben differenziati.

Nei paragrafi che seguono si daranno alcuni esempi di calcoli di verifica di carattere elementare.

2. La sollecitazione composta di flessione, torsione e taglio nella trave di sezione circolare.

Questo è il caso degli alberi di trasmissione.

La trave AD (fig. 12-1) sia a sezione circolare costante di raggio R, vincolata in B e D su appoggi caratterizzati dall'unica condizione $v=0$,

caricata in A e C da due forze F e $-F$ parallele tra loro, normali all'asse, e distanti d da quest'ultimo. E' la situazione che si verifica per un albero di trasmissione con due ruote dentate di ugual diametro in A e C, appoggiato in B e D su due cuscinetti di banco a semplice fila di sfere. I diagrammi M_x , T , M_t sono riportati nella figura. Si osserva subito che in C si ha $M_{x_{\max}}$, nel tratto AB si ha T_{\max} , mentre il momento M_t è presente solo nel tratto AC, e pari ovunque ad $M_t = Fd$.

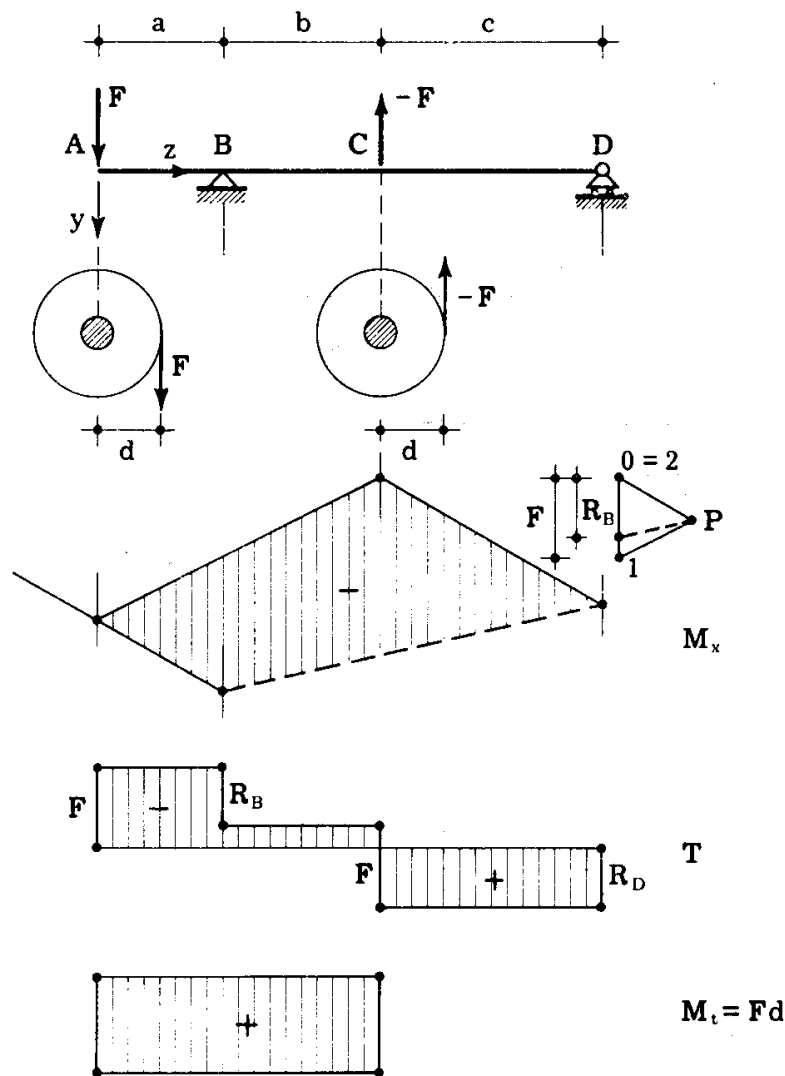


FIG. 12-1

Esaminando l'andamento delle σ da flessione e delle τ da torsione e taglio, si vede che in ogni sezione i punti più pericolosi sono verosimilmente l'estremo del diametro orizzontale dove si sommano le τ da torsione e taglio, e quelli del diametro verticale, dove si verificano la massima σ , e la massima τ da torsione. Perciò le sezioni più pericolose sono quelle dove M_t ed M_x raggiungono assieme i massimi (sezione C), e quella dove lo stesso accade per M_t e T (sezione A).

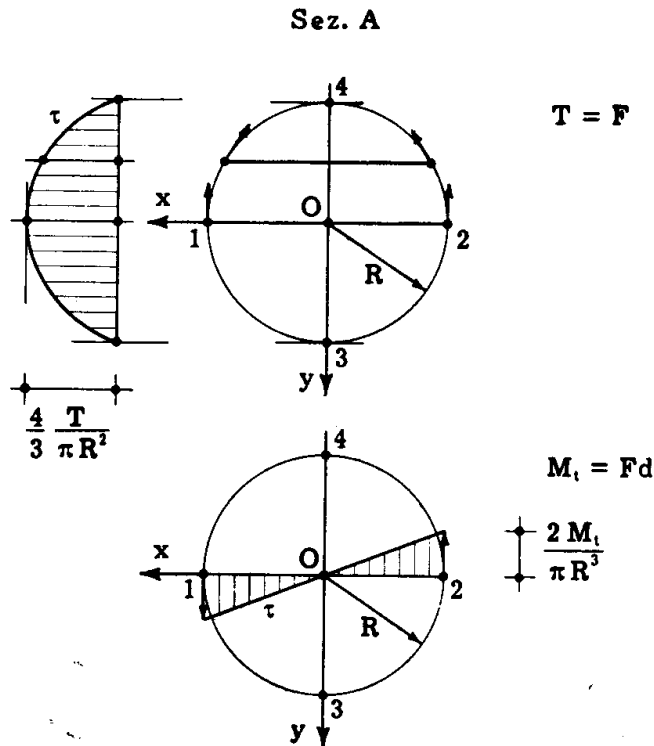
Nella sezione A (fig. 12-2) è in 2

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi R^2} + \frac{2 Fd}{\pi R^3}$$

e quindi

$$s_{A2} = \frac{\tau_0}{\frac{4}{3} \frac{F}{\pi R^2} + \frac{2 Fd}{\pi R^3}} \quad (1)$$

dove τ_0 è la tensione limite di taglio puro.



Nella sezione C (fig. 12-3) i punti più pericolosi sono 2 e 3 (indifferentemente 3 o 4, perchè $\sigma'_o = -\sigma''_o$). In 2 c'è soltanto la τ , pari a

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{F - R_D}{\pi R^2} + \frac{2 Fd}{\pi R^3};$$

il relativo coefficiente s_{C2} è sicuramente, come già detto, più elevato di s_{B2} calcolato per il punto 2 della sezione B. In 3 invece c'è

$$\sigma = \frac{4 M_x}{\pi R^3}$$

$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$$

Dalle (2-27) del Vol. I, si trae, per le travi,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\zeta} \\ \sigma_{\xi} \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (a)$$

Dalla (a), o dall'esame del dominio piano di plasticizzazione, si trae che

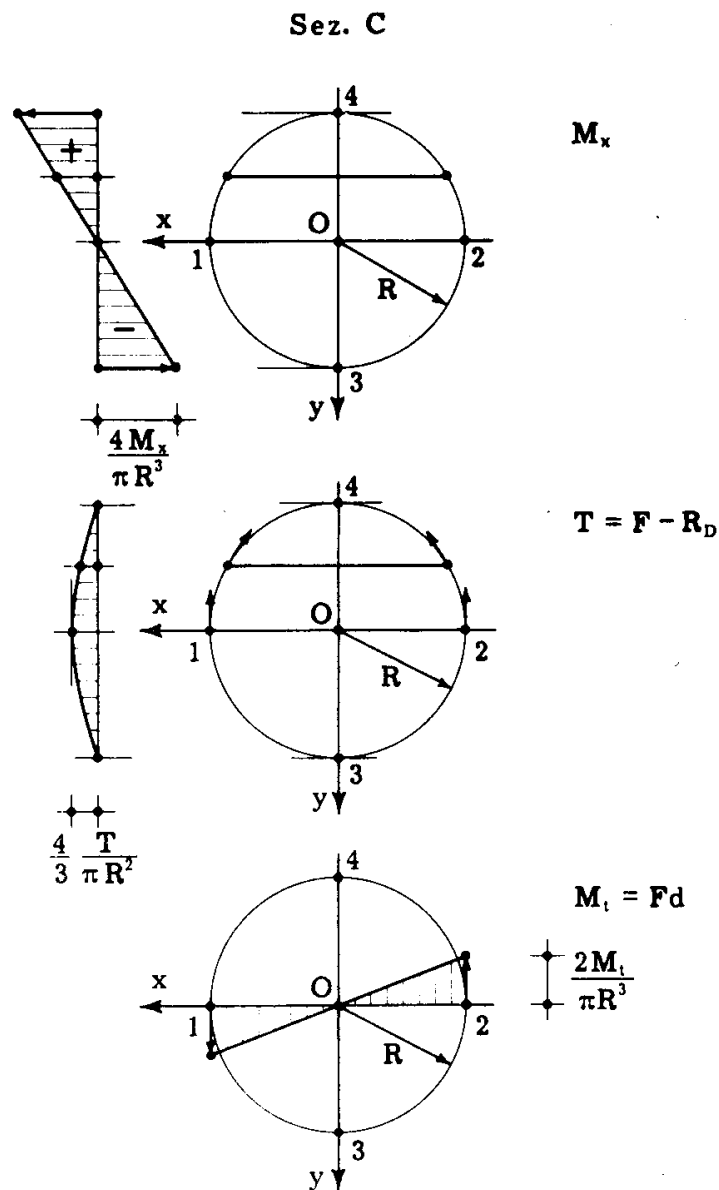


FIG. 12-3

nel caso delle travi, se si adotta il criterio di *Grashof* (tensioni ideali) per qualsiasi valore di m la terza e quinta delle (9-45) del Vol. I sono da escludere, e dalle altre si ha che s_{C_3} è il più basso tra i valori positivi dei

rapporti (il materiale è tale da poter assumere $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$)

$$s_{C_3} = \left(\frac{\pm \sigma_o}{\frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \right)_{\text{pos. min.}} \quad (2)$$

e ancora, adottando i valori assoluti di M_x ed M_t ,

$$\begin{aligned} s_{C_3} &= \frac{\sigma_o}{\frac{m-1}{2m} \frac{4M_x}{\pi R^3} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\left(\frac{4M_x}{\pi R^3}\right)^2 + 4\left(\frac{2M_t}{\pi R^3}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sigma_o}{\frac{4}{\pi R^3} \left(\frac{m-1}{2m} M_x + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_x^2 + M_t^2} \right)} \end{aligned}$$

Con la posizione

$$M_{f \text{ id}} = \frac{m-1}{2m} M_x + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_x^2 + M_t^2} \quad (3)$$

(momento flettente ideale) il coefficiente s_{C_3} è dato da

$$s_{C_3} = \frac{\sigma_o}{\frac{4 M_{f \text{ id}}}{\pi R^3}}, \quad (4)$$

e cioè il solido si verifica come se fosse sollecitato solo a flessione, da un momento flettente $M_{f \text{ id}}$ fornito dalla (12-3).

Se si adotta il criterio di *Hencky* e *V. Mises* si ha (Vol. I, form. 9-30)

$$s_{C_3} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{\sigma_\zeta^2 + \sigma_\xi^2 - \sigma_\zeta \sigma_\xi}}; \quad (5)$$

è quindi, per la (a),

$$s = \frac{\sigma_o}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \quad (6)$$

da cui

$$s_{C_3} = \frac{\sigma_0}{\frac{4}{\pi R^3} \sqrt{M_x^2 + \frac{3}{4} M_t^2}}$$

Ponendo

$$M_{f\ id} = \sqrt{M_x^2 + \frac{3}{4} M_t^2} \tag{7}$$

si ha ancora la (12-4); la (12-7) è l'espressione del momento flettente ideale secondo *Hencky* e *V. Mises*.

Il coefficiente di sicurezza globale è il più piccolo tra s_{A_2} e s_{C_3} ; è ovvio che la τ_0 della (12-1) deve essere calcolata, in funzione di σ_0 , con lo stesso criterio adottato per la (12-4).

Si osserva subito che se la trave è corta l'effetto del taglio prevale su quello del momento flettente, e la (12-1) è più bassa; se la trave è lunga, si ha il contrario, ed è minore la (12-4).

La (12-4) è valida per qualsiasi forma di sezione soggetta a flessione e torsione; se nel punto dove si esegue la verifica è

$$\sigma = k_f M_f$$

$$\tau = k_t M_t$$

si ha, adottando per esempio il criterio di *Hencky* (12-6)

$$s_{C_3} = \frac{\sigma_0}{k_f \sqrt{M_f^2 + 3 \frac{k_t^2}{k_f^2} M_t^2}}$$

da cui, con la posizione

$$M_{f\ id} = \sqrt{M_f^2 + 3 \frac{k_t^2}{k_f^2} M_t^2}, \tag{8}$$

si ricade nella (12-4). Si noti che la (12-8) è funzione, attraverso il rapporto k_t/k_f , del punto dove si effettua la verifica. Nella sezione circolare,

in 3 e 4 (fig. 12-3) è $\frac{k_t}{k_f} = \frac{1}{2}$.

3. La sollecitazione composta di flessione, torsione e taglio nelle travi a sezione sottile chiusa, e quella composta di flessione e taglio nelle travi a sezione sottile qualsiasi.

Si distende (fig. 12-4) la trave su un piano, così che ad ogni *tratto* della sezione corrisponde un *foglio* sul piano sz , e cioè un rettangolo lungo l (luce della trave) ed alto h (lunghezza del tratto). La generica sezione S

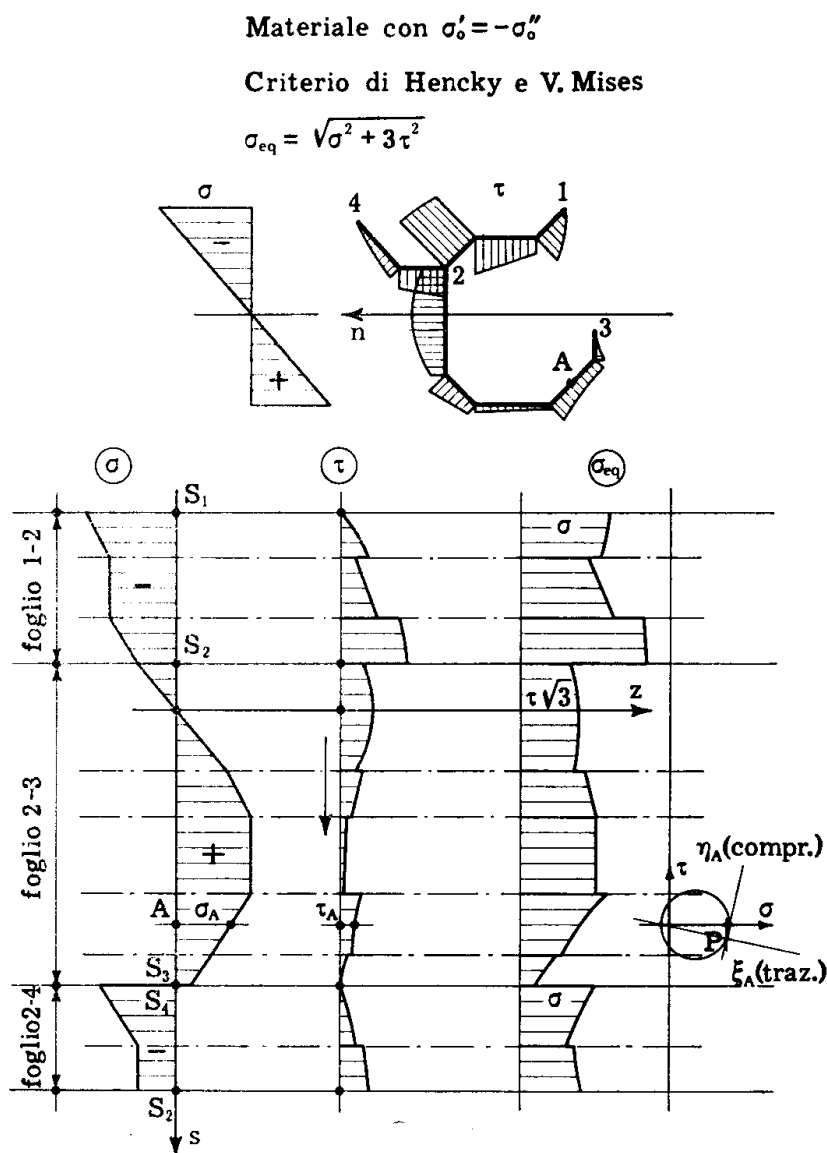


FIG. 12-4

è rappresentata dai segmenti $S_1 S_2, S_2 S_3$, etc.; su essi, assunti come fondamentali, si riportano i diagrammi delle σ e delle τ relativi alla sezione stessa, σ e τ che sono funzioni della sola s . Adottando un qualsiasi criterio,

si disegna poi il diagramma della tensione equivalente; per esempio, con il criterio di *Hencky* e *V. Mises* (materiali con $\sigma'_o = -\sigma''_o$) il diagramma (12-6)

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} ; \quad (9)$$

è ciò che si è fatto nella fig. 12-4. Se si adotta invece il criterio di *Grashof* (materiali qualsiasi), i diagrammi da disegnare sono, quali che siano i valori di m , i due

$$\frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (10)$$

di cui si chiamano σ'_{eq} i valori > 0 , σ''_{eq} i valori < 0 . Nel primo caso il coefficiente di sicurezza s_e relativo alla sezione S è

$$s_e = \left(\frac{\sigma_o}{\sigma_{\text{eq}}} \right)_{\text{min}} ; \quad (11)$$

nel secondo caso s_e è il più piccolo tra i due valori

$$\left(\frac{\sigma'_o}{\sigma'_{\text{eq}}} \right)_{\text{min}} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\sigma''_o}{\sigma''_{\text{eq}}} \right)_{\text{min}}$$

Spesso è utile il tracciamento sui fogli delle *linee isostatiche*. In tal caso conviene disegnare in più punti A della sezione il cerchio di *Mohr* delle tensioni, in modo da ottenere gli angoli secondo cui le linee isostatiche tagliano la traccia della sezione stessa; fatto ciò per un numero opportuno di sezioni, è facile disegnare le isostatiche. Queste sono, come è noto (Vol. I, Cap. II) tre famiglie di curve mutuamente ortogonali; nel caso in esame (sezione sottile) queste famiglie si riducono a due.

4. La sollecitazione composta di flessione, torsione e taglio in una trave a I

Si consideri la trave della fig. 12-5, lunga 10 m, appoggiata agli estremi su vincoli per cui $v=0$ e $\mathfrak{D}=0$; la sezione è riportata nella stessa figura, il carico è costituito da una forza $F=20$ t agente in mezzera, normale all'asse x di massima inerzia, e applicata all'estremo dell'ala.

Si esegue il calcolo trascurando l'effetto del bimomento (fig. 12-6). La sezione più pericolosa è quella di mezzeria, dove tutte le caratteristiche

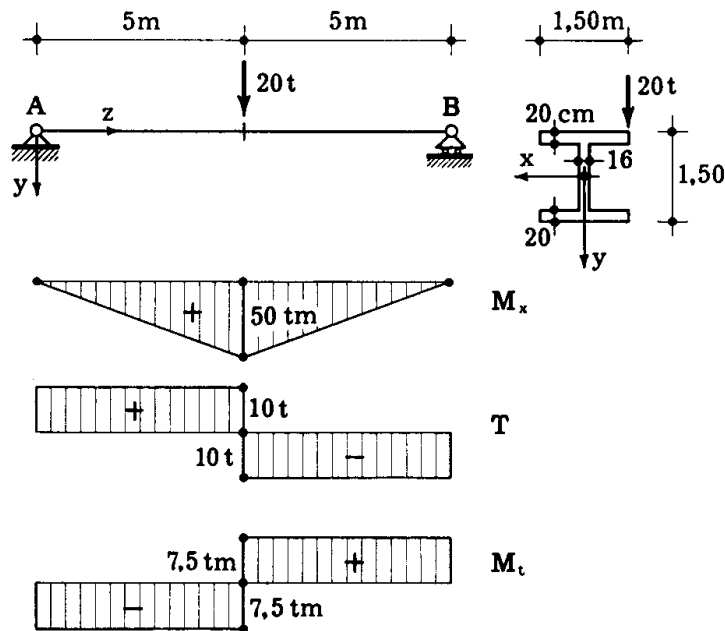


FIG. 12-5

raggiungono il massimo. Gli spessori più pericolosi della sezione sono poi il 2 e il 3; nel primo si hanno la massima σ , e la massima τ da torsione

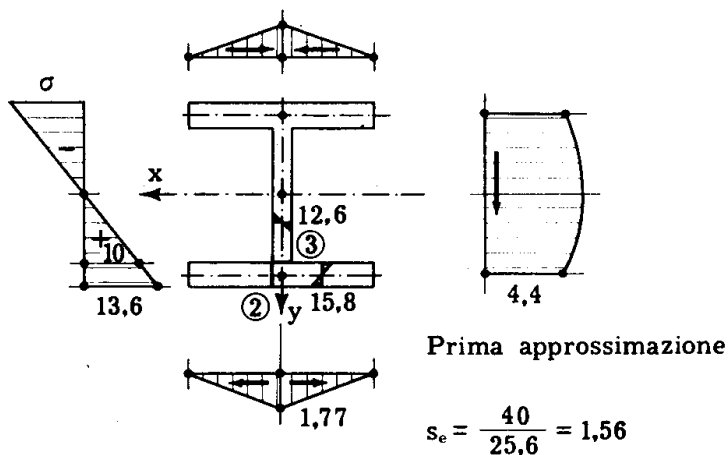


FIG. 12-6

(oltre la τ da taglio), nel secondo i valori di σ e della τ da taglio sono poco discosti dai massimi (oltre la τ da torsione). Nella sezione di mezzeria si ha

$$M_x = \frac{Fl}{4} = 50 \text{ tm}$$

$$T = \frac{F}{2} = 10 \text{ t}$$

$$M_t = \frac{Fd}{2} = 7,5 \text{ tm .}$$

In 2 ($I_x = 0,273 \text{ m}^4$) si calcola:

flessione
$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{50 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,273} = 137 \text{ t/mq} = 13,7 \text{ Kg/cm}^2$$

taglio

$$\tau = \frac{T S_x}{I_x \delta} = \frac{10 \cdot 0,0975}{0,273 \cdot 0,20} = 17,7 \text{ t/mq} = 1,77 \text{ Kg/cm}^2$$

torsione

$$\tau = \frac{3 M_t \delta}{\sum s_i \delta_i^3} = \frac{7,5 \delta}{0,0095} = \frac{7,5 \cdot 0,20}{0,0095} = 158 \text{ t/mq} = 15,8 \text{ Kg/cm}^2$$

Adottando il criterio di *Grashof*, e ponendo $1/m = 0$, è

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm 6,8 \pm \sqrt{354} = \pm 25,6 \text{ Kg/cm}^2$$

In 3 si ha

flessione
$$\sigma = \frac{13,6 \cdot 0,55}{0,75} = 10 \text{ Kg/cm}^2$$

taglio
$$\tau = \frac{10 \cdot 0,195}{0,273 \cdot 0,16} = 44 \text{ t/mq} = 4,4 \text{ Kg/cm}^2$$

torsione
$$\tau = \frac{15,8 \cdot 16}{20} = 12,6 \text{ Kg/cm}^2 ,$$

e quindi

$$\sigma_{eq} = \pm 5 \pm \sqrt{315} = \pm 22,8 \text{ Kg/cm}^2 .$$

Se si tiene conto del bimomento (fig. 12-7), si possono utilizzare i dati del § 10-10, relativi alla mensola di lunghezza 5 m; la sezione di mez-

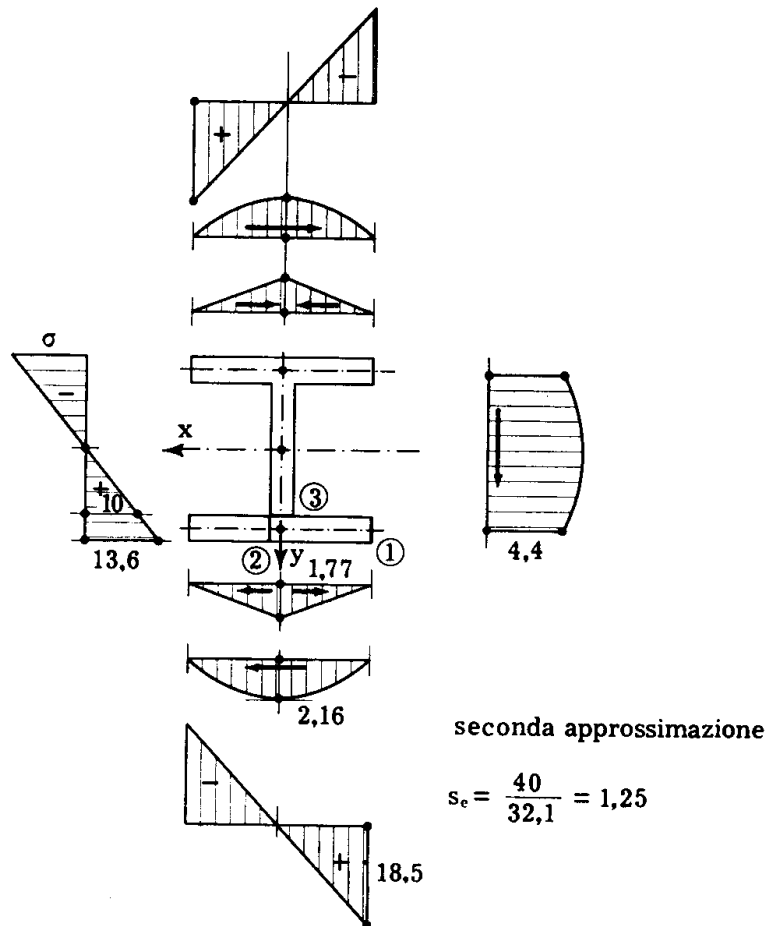


FIG. 12-7

zeria della trave in esame si comporta come quella d'incastro torsionale della mensola. E' perciò in 1,

$$\sigma_{tor} = 24,66 \cdot 7500 \text{ Kg/m}^2 = 18,5 \text{ Kg/cm}^2$$

da cui

$$\sigma_{eq} = \sigma_{fless} + \sigma_{tor} = \pm 13,6 \pm 18,5 = \pm 32,1 \text{ Kg/cm}^2 .$$

In 2 invece è

$$\sigma_{\text{tor}} = 0$$

$$\sigma_{\text{fless.}} = 13,6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{tor}} = 2,878 \cdot 7500 \text{ Kg/m}^2 = 2,16 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{tag}} = 1,77 \text{ Kg/cm}^2$$

e quindi

$$\sigma_{\text{eq}} = \pm 6,8 \pm \sqrt{61,6} = \pm 14,6 \text{ Kg/cm}^2 .$$

In 3 si ha poi

$$\sigma = 10 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau = 4,4 \text{ Kg/cm}^2$$

e perciò

$$\sigma_{\text{eq}} = \pm (5 + \sqrt{44,9}) = \pm 11,7 \text{ Kg/cm}^2 .$$

La verifica ora fatta è relativa ad una trave in conglomerato cementizio (verifica a fessurazione); posto $\sigma'_0 = 40 \text{ Kg/cm}^2$, risulta in prima approssimazione

$$s_e = \frac{40}{25,6} = 1,56$$

e in seconda

$$s_e = \frac{40}{32,1} = 1,25 .$$

5. La sollecitazione composta di flessione, torsione e taglio in una mensola con sezione retta sottile di forma generica.

La mensola in esame (*) ha la sezione retta consegnata in fig. 12-8. Per essa sono già noti il baricentro e le caratteristiche d'inerzia (Cap. I, § 12), ed il suo studio viene qui completato con la ricerca del centro di taglio C e con il calcolo della rigidità C_1 e del bimomento C_2 , necessarie

(*) Lo studio che segue è stato condotto dall'ing. *Maceri*, cui vanno i miei ringraziamenti.

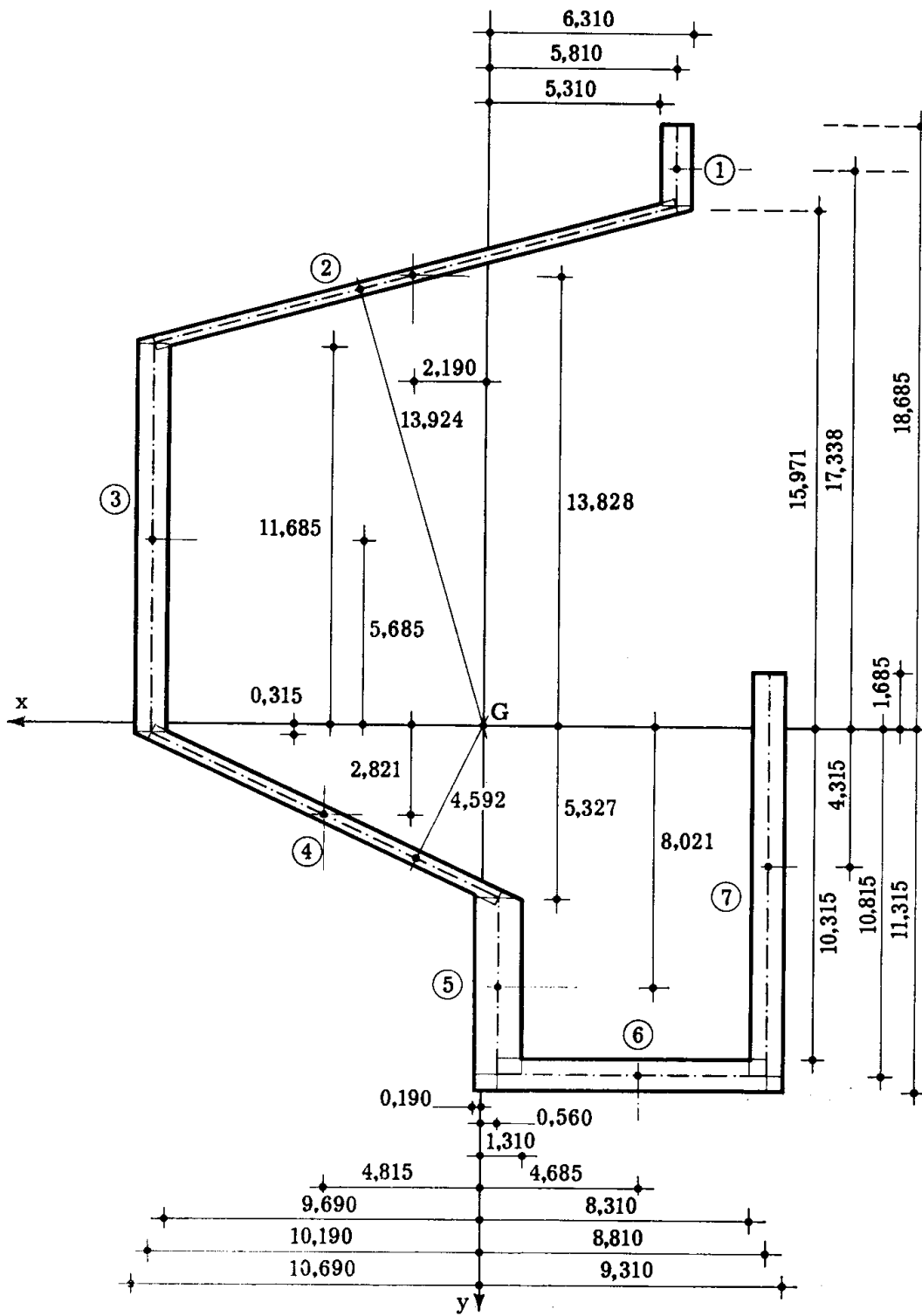


FIG. 12-8

premesse alla ricerca dello stato di sollecitazione connesso con un qualsiasi insieme di caratteristiche.

Per la ricerca di C si assume come primo asse neutro n_1 , l'asse x (fig. 12-9); la sezione è scomposta in rettangoli nel modo indicato in

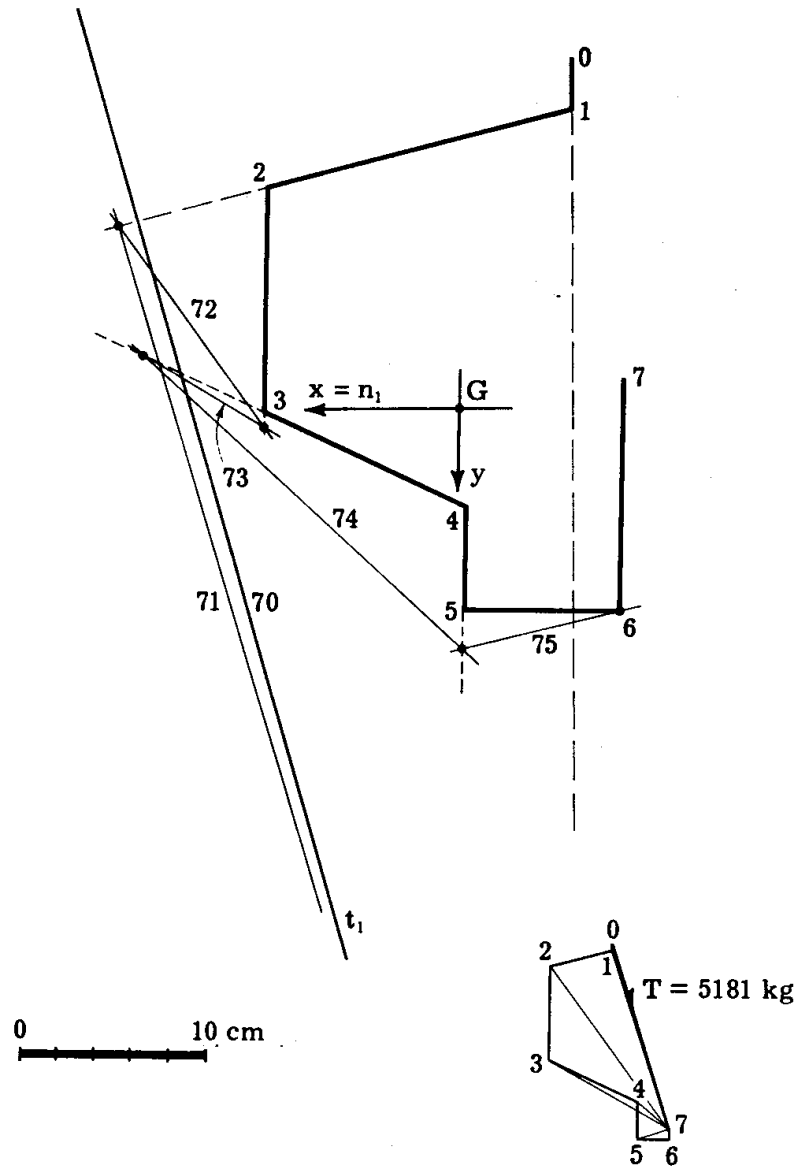


FIG. 12-9

fig.12-8, e si calcolano le

$$\tau = - \frac{T_y S_x}{I_x \delta}$$

nei punti della linea media appartenenti agli estremi di ciascun rettangolo ed in quelli baricentrici dei rettangoli stessi. Il calcolo della τ nel baricentro può essere evitato, quando il diagramma delle τ sulla linea me-

dia risulta lineare. Per semplificare le cose, conviene procedere a meno di T_x/I_y . Numerando i rettangoli da 1 a 7, e indicando con $t_{i, i-1}$, $t_{i, i}$, $t_{i, i+1}$ le quantità $-S_x/\delta$ valutate in corrispondenza degli estremi e del baricentro del rettangolo i -esimo, si ottiene:

$$t_{1,0} = 0$$

$$t_{1,1} = t_{1,0} + \frac{2,714}{2} \frac{18,685 + 17,328}{2} = 24,435 \text{ cm}^2$$

$$t_{1,2} = t_{1,0} + 2,714 \cdot 17,328 = 47,028 \text{ cm}^2$$

$$t_{2,1} = \frac{\delta_1}{\delta_2} t_{1,2} = \frac{t_{1,2}}{0,5} = 94,056 \text{ cm}^2$$

etc.; il quadro completo delle t è riportato in tab. 1, e si evince anche

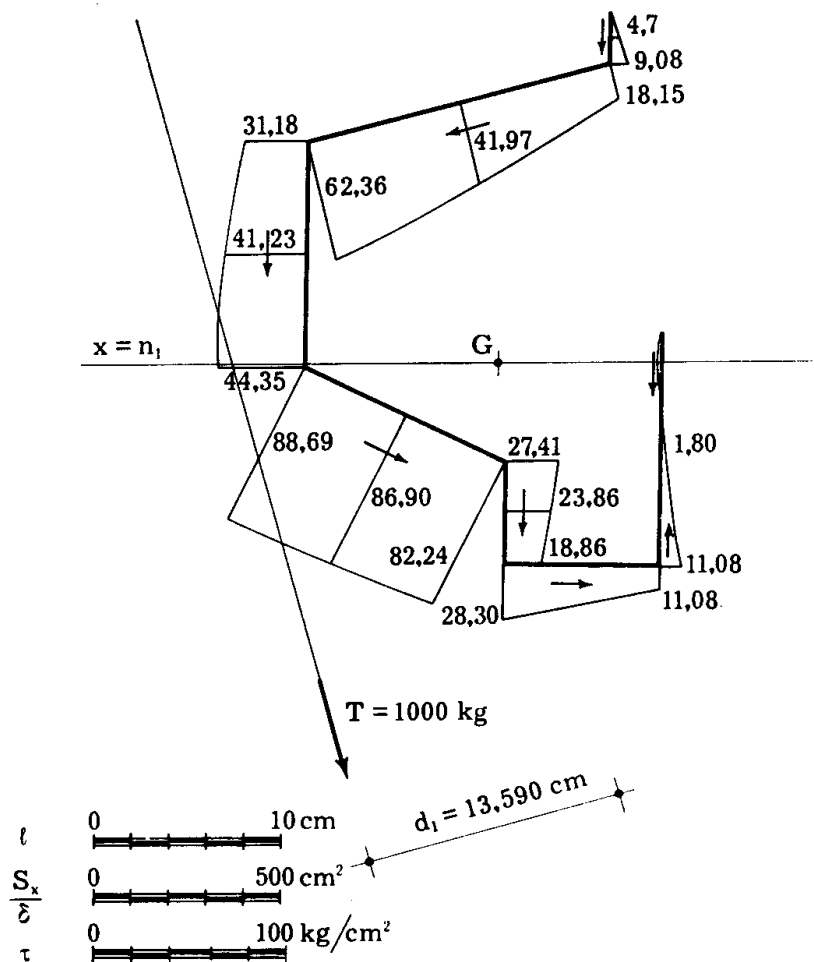


FIG. 12-10

dalla fig. 12-10, leggendo le ordinate nella scala indicata.

TABELLA 1
ASSE NEUTRO x

rettangolo	$t_{1, i-1}$ (cm ²)	$t_{1, i}$ (cm ²)	$t_{1, i+1}$ (cm ²)	F_1 (cm ⁴)
1	0	24,435	47,028	65,483
2	94,056	217,483	323,103	1776,615
3	161,552	213,662	229,772	2491,944
4	459,544	450,246	427,087	2655,271
5	142,029	123,649	97,743	1007,369
6	146,615		57,391	841,525
7	57,391	9,328	0	197,299

Ad ogni rettangolo compete una forza (formula di *Stirling*)

$$F_1 = \int_{A_1} t \delta_1 ds = \frac{A_1}{6} (t_{1, i-1} + 4 t_{1, i} + t_{1, i+1})$$

(A_1 è l'area del rettangolo) agente lungo la linea media; la risultante delle F_1 , ottenibile ad esempio mediante un poligono funicolare (fig. 12-9) fornisce in grandezza e posizione la forza tagliante applicata, e cioè l'asse di sollecitazione t_1 .

Analiticamente, dalla condizione (numerica)

$$T_y = I_x$$

imposta per la valutazione delle t , deve derivare

$$\Sigma F_{1y} = T_y = I_x .$$

Per la condizione di coniugio tra l'asse di sollecitazione e l'asse neutro:

$$\frac{y}{x} = - \frac{I_x}{I_{xy}}$$

(Cap. I, § 6), deve risultare ancora

$$T_x = \Sigma F_{1x} = - I_{xy} .$$

Con i valori di tab. 1, si ha

$$\begin{aligned} T_y = \Sigma F_{iy} &= 4949 \varnothing 4957 = I_x \\ T_x = \Sigma F_{ix} &= -1532 \varnothing -1529 = -I_{xy} \end{aligned}$$

e dunque

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 5181 \text{ Kg .}$$

Dalle t si passa perciò alle τ' corrispondenti a

$$T = 1000 \text{ Kg}$$

mediante la

$$\tau' = \frac{1000}{5181} t ,$$

ed i corrispondenti valori appaiono in fig. 12-10.

La distanza d_1 di t_1 da G si ricava dall'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a G stesso

$$\Sigma F_i d_i = T d_1$$

dove con d_i sono indicate le distanze dei singoli tratti della linea media dal baricentro; si ottiene

$$d_1 = 13,590 \text{ cm ,}$$

in buon accordo col valore grafico.

In maniera del tutto analoga si procede assumendo quale secondo asse neutro n_2 l'asse y ; unica variante è che le τ vanno valutate con la formula

$$\tau = \frac{T_x S_y}{I_y \delta} ,$$

in cui il segno $+$ si giustifica con l'essere minore di zero il momento statico di aree il cui baricentro cade sul semipiano $x > 0$.

In questo secondo caso, si può procedere ponendo (numericamente) $T_x = I_y$; i corrispondenti valori di t sono riportati in tab. 2, dalla quale si traggono pure le

$$F_i = \int t \delta_i ds .$$

TABELLA 2
ASSE NEUTRO y

rettangolo	$t_{i, i-1}$ (cm^2)	$t_{i, i}$ (cm^2)	$t_{i, i+1}$ (cm^2)	F_i (cm^4)
1	0		- 15,768	- 21,397
2	- 31,357	- 46,527	4,738	- 293,883
3	2,369		124,649	762,108
4	249,298	293,788	306,404	1710,661
5	102,135		99,062	828,026
6	148,593	137,775	109,942	1113,258
7	109,942		0	687,138

Queste ultime, applicate lungo la linea media e connesse con un

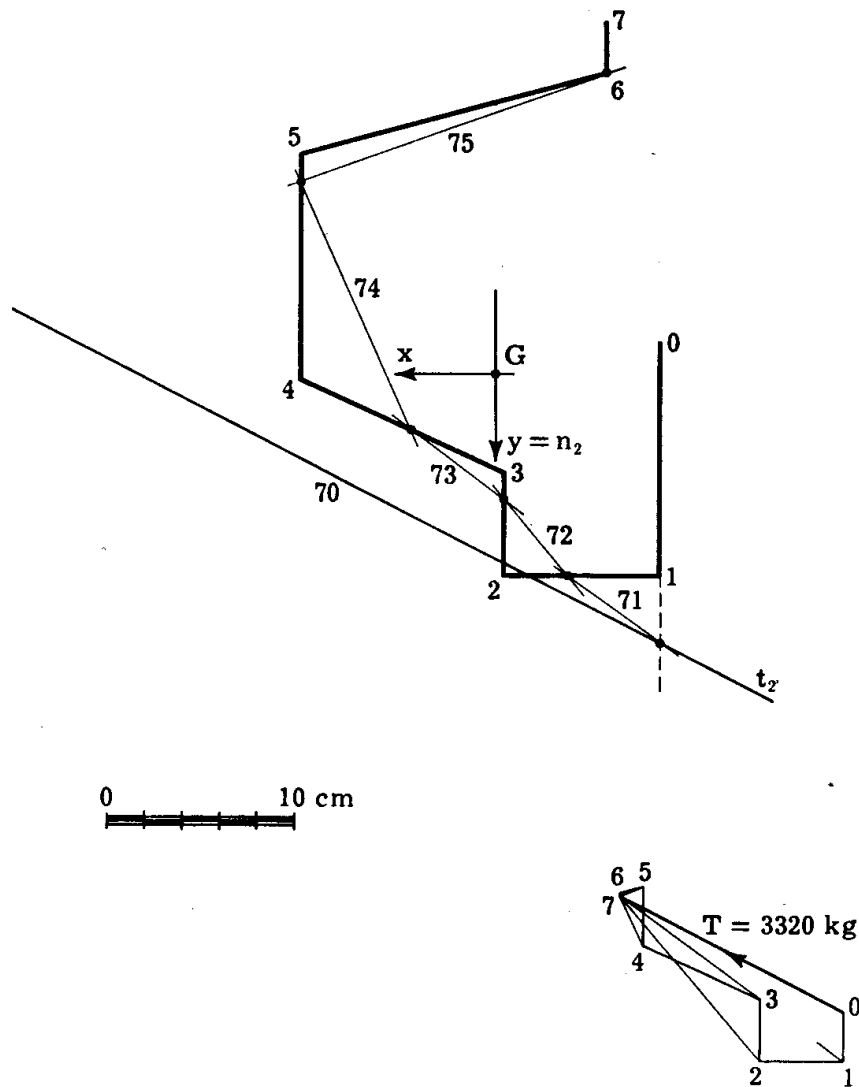


FIG. 12-11

poligono funicolare (fig. 12-11) forniscono l'asse t_2 coniugato ad $n_2 = y$.

Analiticamente si ha

$$\Sigma F_{ix} = T_x = I_y ,$$

e, per la condizione di coniugio tra y e t_2

$$\frac{y}{x} = - \frac{I_{xy}}{I_y} ,$$

è anche

$$T_y = \Sigma F_{iy} = - I_{xy} .$$

Il calcolo analitico porge infatti

$$T_x = 2948 \approx 2955 = I_y$$

$$T_y = - 1528 \approx - 1529 = - I_{xy}$$

e quindi

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 3320 \text{ Kg} .$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al baricentro fornì-

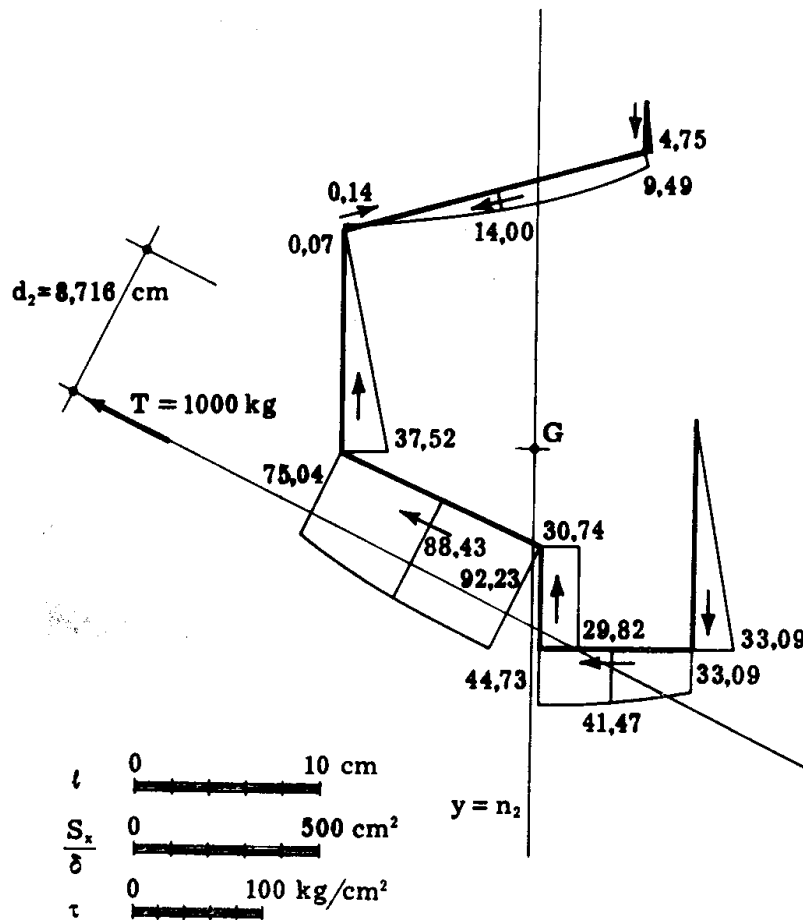


FIG. 12-12

sce infine

$$d_2 = 8,716 \text{ cm} .$$

Il fattore per cui vanno moltiplicate in questo secondo caso le t per

ottenere le τ'' relative a $T = 1000 \text{ Kg}$ vale perciò $1000/3320$, e le τ'' corrispondenti sono quelle di fig. 12-12.

Il centro di taglio C è determinato (fig. 12-13) dall'intersezione delle due rette t_1 e t_2 ; le sue coordinate possono anche ottenersi analitica-

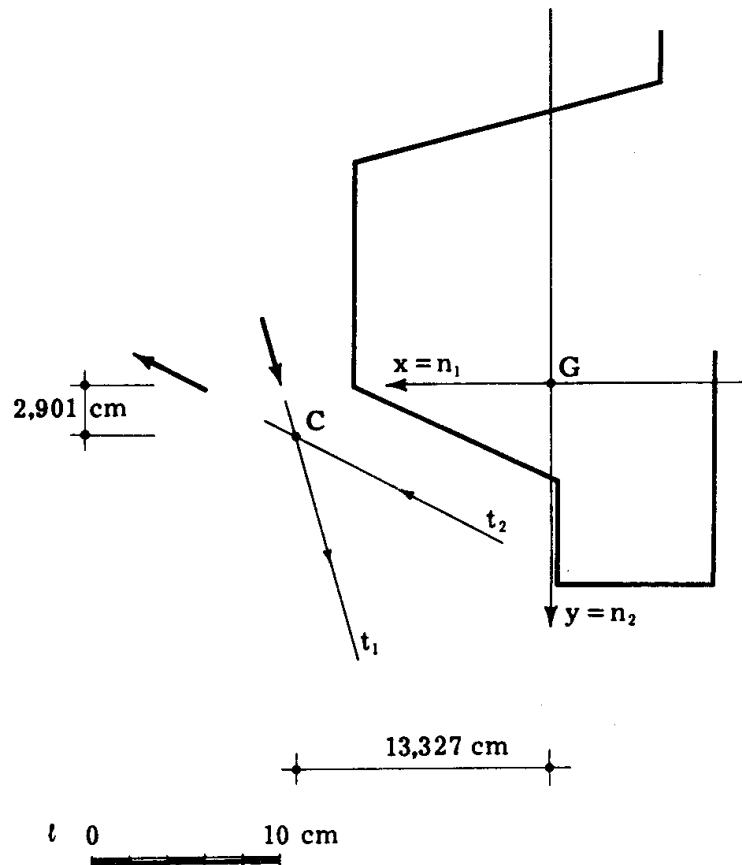


FIG. 12-13

mente, scrivendo le equazioni dei due assi di sollecitazione e risolvendone il sistema; si ha (*)

(*) Posta l'equazione della retta nella forma

$$y = m x + p$$

la sua distanza dall'origine è data da

$$d = \pm \frac{p}{\sqrt{1 + m^2}} ;$$

per il caso $n_1 \equiv x$, è $m_1 = -I_x/I_{xy}$, mentre per $n_2 \equiv y$ si ha $m_2 = -I_{xy}/I_y$, e ciò consente, note d_1 e d_2 , di calcolare p_1 e p_2 , da cui le (b).

$$\begin{aligned} t_2 & \quad y = - 0,52 x + 9,83 \\ t_1 & \quad y = - 3,24 x + 46,08 \end{aligned} \quad (b)$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_c &= 13,327 \text{ cm} \\ y_c &= 2,901 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Restano da determinare, per caratterizzare completamente la sezione, la rigidità torsionale alla *De Saint-Venant* (10-9)

$$C_1 = \frac{G}{3} \sum s_i \delta_i^3$$

ed il bimomento C_2 .

Per il calcolo di C_1 , scomposta la figura in rettangoli, si ha (*) (tab. 3)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{G}{3} \sum_1^7 \delta_i^2 A_i = (2,714 + 2,071 + 12,000 + 1,482 + 18,520 + \\ &+ 8,250 + 12,500) \frac{G}{3} = 19,179 G = 15,506 \times 10^6 \text{ Kg cmq} . \end{aligned}$$

TABELLA 3

rettangolo	lunghezza s_i (cm)	spessore δ_i (cm)	area A_i (cm ²)	d_i (cm)
1	2,714	1,000	2,714	19,137
2	16,564	0,500	8,282	13,277
3	12,000	1,000	12,000	3,137
4	11,861	0,500	5,930	3,670
5	5,487	1,500	8,231	13,887
6	8,250	1,000	8,250	7,914
7	12,500	1,000	12,500	22,137

(*) Si assume, per l'acciaio, $G/E = 0,385$, $E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

Per valutare il bimomento C_2 , si assume un riferimento xy con l'origine nel centro di taglio C (fig. 12-14). L'origine R delle ascisse curvilinee

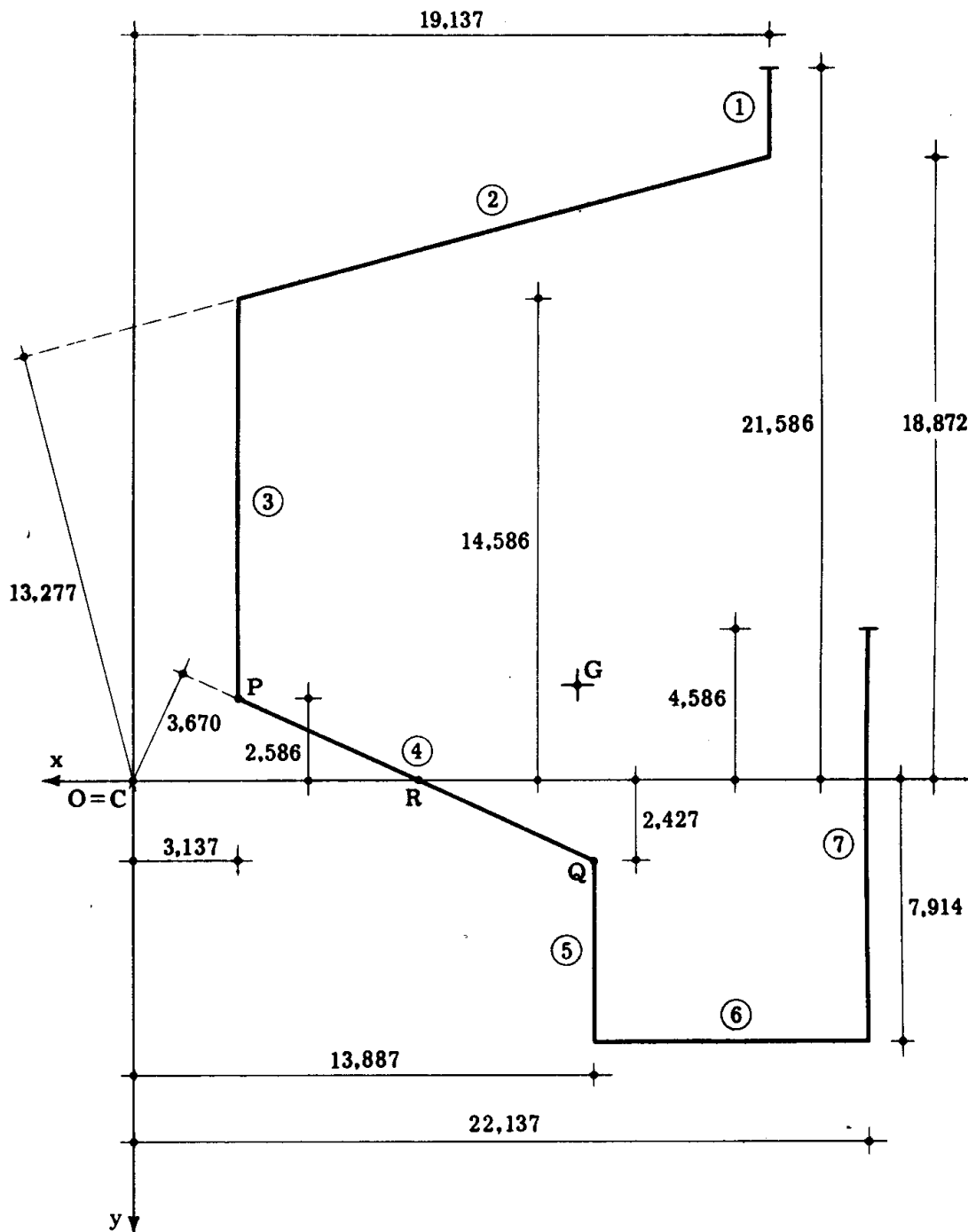


FIG. 12-14

sulla linea media è assunta, come già noto, in modo che riesca

$$\int_m A_s \delta ds = 0 .$$

A questo scopo, l'osservazione che, scegliendo R coincidente con P o con Q (fig. 12-14), riesce

$$\int_m A_s \delta ds \leq 0$$

fa concludere che R appartiene al tratto 4; scelta come incognita $A_{s_{43}}$ (con $A_{s_{ij}}$ si indica il valore dell'area settoriale nel punto comune ai tratti i e j), si ha, sviluppando secondo i dati di tab. 3:

$$A_{s_{32}} = A_{s_{43}} + \frac{1}{2} s_3 d_3 = A_{s_{43}} + 18,822$$

$$A_{s_{21}} = A_{s_{32}} - \frac{1}{2} s_2 d_2 = A_{s_{43}} - 91,138$$

$$A_{s_{10}} = A_{s_{21}} + \frac{1}{2} s_1 d_1 = A_{s_{43}} - 65,169$$

$$A_{s_{45}} = A_{s_{43}} - \frac{1}{2} s_4 d_4 = A_{s_{43}} - 21,763$$

$$A_{s_{56}} = A_{s_{45}} - \frac{1}{2} s_5 d_5 = A_{s_{43}} - 59,862$$

$$A_{s_{67}} = A_{s_{56}} + \frac{1}{2} s_6 d_6 = A_{s_{43}} - 27,217$$

$$A_{s_{70}} = A_{s_{67}} + \frac{1}{2} s_7 d_7 = A_{s_{43}} + 111,139$$

(l_i e d_i sono rispettivamente la lunghezza e la distanza dall'origine del tratto i); e quindi, poichè

$$\int_m A_s \delta ds = \sum_1^7 \frac{A_i}{2} (A_{s_{i, i-1}} + A_{s_{i, i+1}}) = 57,907 A_{s_{43}} - 633,781$$

si ottiene, imponendo che riesca

$$\int_m A_s \delta ds = 0,$$

$$A_{s_{43}} = 10,945 \text{ cm}^2.$$

Indicando con d la distanza di R da P , si ha allora

$$A_{s_{43}} = 10,945 = \frac{1}{2} d \cdot d_4 = \frac{3,670}{2} d$$

$$d = 5,965 \text{ cm .}$$

Il diagramma di fig. 12-15 a dà l'andamento delle A_s sulla sezione,

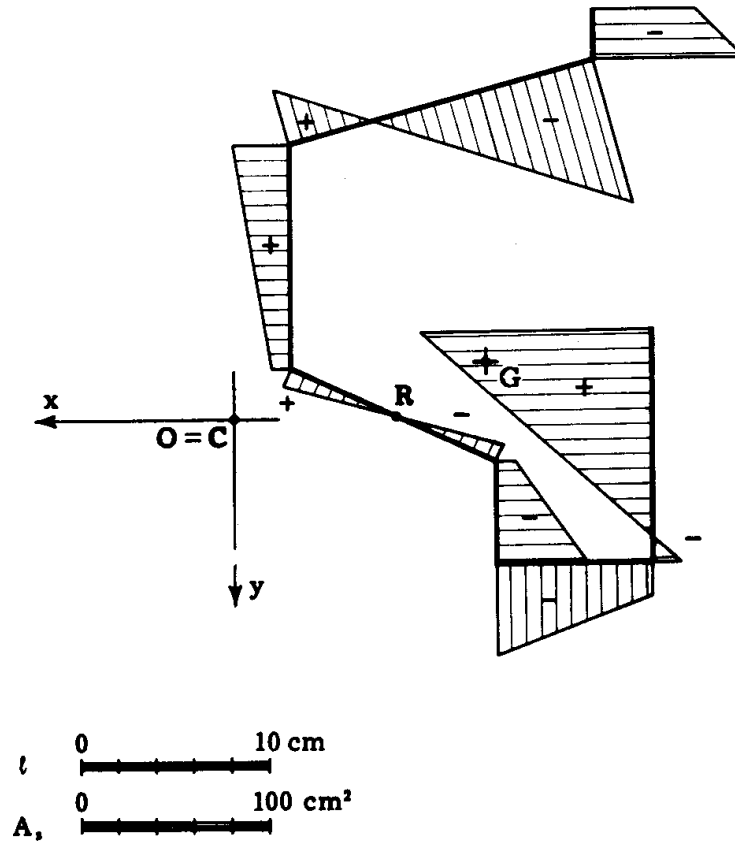


FIG. 12-15 a

relativo alla particolare scelta di R ; esso è affine a quello delle $-w$, che si ottengono dalla

$$w = - 2 \vartheta' A_s ,$$

e a quello delle σ , date da $\sigma = - 2 E \vartheta'' A_s$.

In fig. 12-15 b è riportato il diagramma della funzione

$$g = \frac{1}{\delta} \int_s^P A_s \delta ds$$

affine a quello delle τ_2 (S è l'estremo della linea media segnato in fig. 12-15 b, P il suo punto generico).

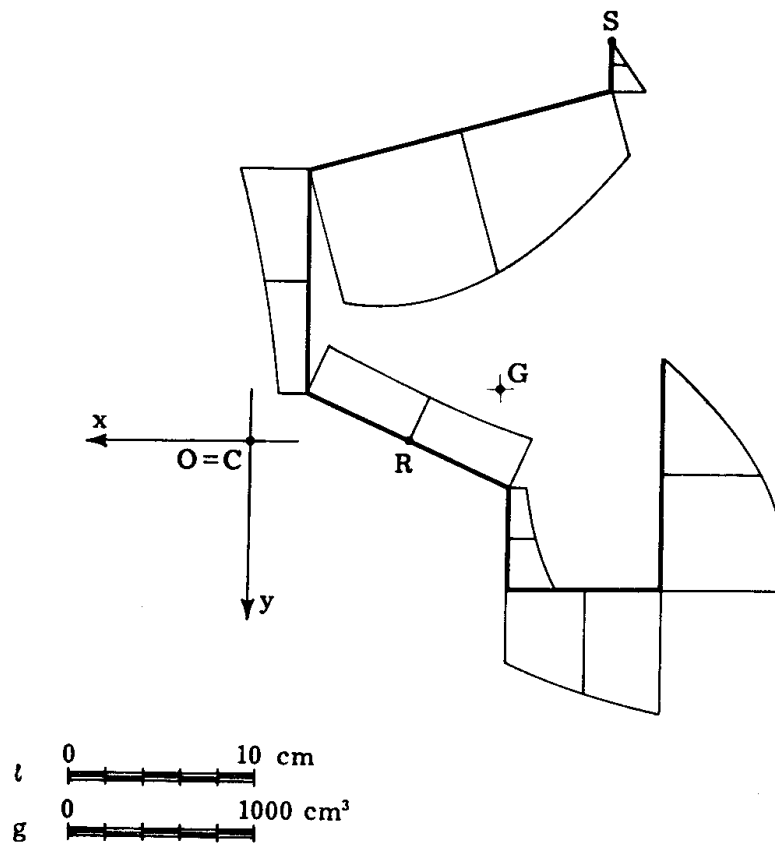


FIG. 12-15 b

I dati relativi ad ambedue i diagrammi si desumono dalla tabella 4.

TABELLA 4

rettangolo	$A_{sl, i-1}$ (cm ²)	$A_{sl, i+1}$ (cm ²)	$g_{i, i-1}$ (cm ³)	$g_{i, i}$ (cm ³)	$g_{i, i+1}$ (cm ³)
1	— 54,224	— 80,193	0	— 82,392	— 182,404
2	— 80,193	29,767	— 364,808	— 801,294	— 782,438
3	29,767	10,945	— 391,219	— 240,850	— 146,947
4	10,945	— 10,818	— 293,894	— 261,254	— 293,140
5	— 10,818	— 48,917	— 97,713	— 153,527	— 261,607
6	— 48,917	— 16,272	— 392,410	— 560,527	— 661,315
7	— 16,272	122,084	— 661,315	— 546,835	0

La quantità

$$\begin{aligned}
 C_2 &= 4 E \int_s A_s^2 \delta ds = \\
 &= 4 E \sum_1^7 \frac{A_1}{6} (A_{sl, i-1}^2 + 4 A_{sl, i}^2 + A_{sl, i+1}^2) = \\
 &= 4 E \sum_1^7 \frac{A_1}{6} \left[A_{sl, i-1}^2 + 4 \left(\frac{A_{i, i-1} + A_{i, i+1}}{2} \right)^2 + A_{sl, i+1}^2 \right] = \\
 &= \frac{4}{3} E \sum_1^7 A_1 (A_{sl, i-1}^2 + A_{sl, i-1} A_{sl, i+1} + A_{sl, i+1}^2)
 \end{aligned}$$

risulta pari a

$$C_2 = 417386 E = 876511 \times 10^6 \text{ Kg cm}^4 .$$

Lo studio della sezione è così completo. Si prenda ora in esame la mensola consegnata in fig. 12-16 a, caricata come si evince dalla figura stessa; la condizione di vincolo è quella di incastro flessionale ($v = v' = 0$ per $z = 0$) ed appoggio torsionale ($\vartheta = \vartheta'' = 0$ per $z = 0$).

La caratteristica taglio è costante lungo l'asse della trave, e pari in valore a 5 t; il diagramma del momento flettente è lineare e presenta il suo massimo (25 tm) all'incastro; anche la caratteristica torcente è costante e pari a

$$M_t = T \cdot e = - 5000 \cdot 3,137 = - 15685 \text{ Kg cm}$$

dove con e si è indicata la distanza del centro di taglio dalla retta di applicazione di T .

L'equazione della trave sottoposta a torsione è

$$\vartheta''' - k^2 \vartheta' = - \frac{M_t}{C_2} ,$$

con $k^2 = \frac{C_1}{C_2} = 17,691 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2}$; essa ammette il seguente integrale

generale

$$\vartheta = \frac{M_t z}{k^2 C_2} + A + A_1 \sinh kz + A_2 \cosh kz ;$$

le condizioni ai limiti:

$$z = 0 \quad \vartheta = 0$$

$$z = 0 \quad \vartheta'' = 0$$

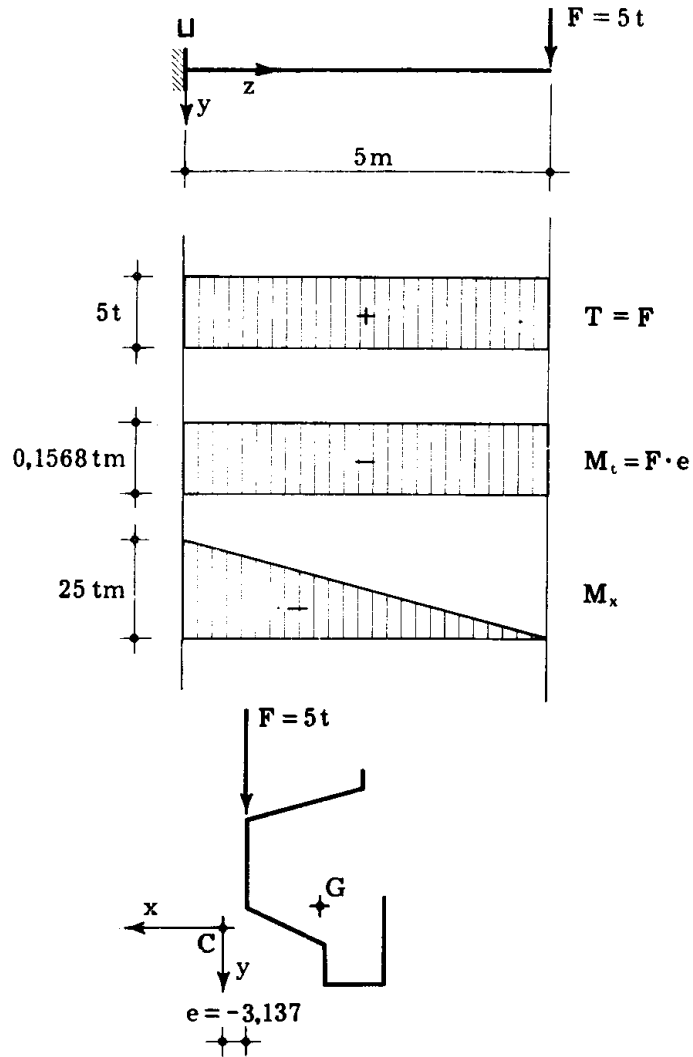


FIG. 12-16 a

porgono

$$A_2 + A = 0$$

$$A_2 k^2 = 0$$

e cioè

$$A_2 = A = 0 .$$

Inoltre, per $z = l$ è $\sigma = 0$, e cioè $\vartheta'' = 0$; ciò impone che riesca:

$$A_1 k^2 \sinh kl = 0$$

e cioè $A_1 = 0$.

La soluzione è perciò data da

$$\vartheta = \frac{M_t}{k^2 C_2} z = \frac{M_t}{C_1} z$$

che assicura essere la trave sottoposta a torsione uniforme. Si ha pure (*)

$$\vartheta_t = \frac{M_t}{C_1} l = - \frac{15685 \cdot 500}{15,506 \cdot 10^6} = - 0,506$$

$$\vartheta' = \frac{\vartheta_t}{l} = - 1,012 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} .$$

Tanto poteva anche desumersi dall'analogia con la trave inflessa: per essa infatti, (fig. 12-16 b) le condizioni di vincolo sono quelle di appog-

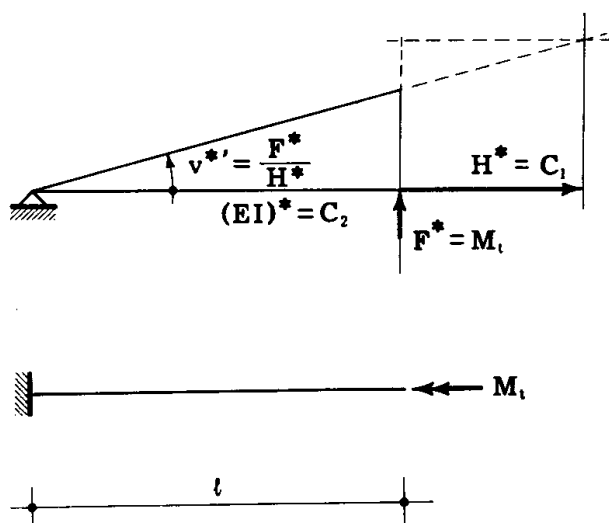


FIG 12-16 b

gio ($v^* = v^{**} = 0$) per $z = 0$, e di estremo libero per $z = l$. I carichi sono costituiti da una forza $F^* = M_t$ e dal tiro $H^* = C_1$, mentre la rigidezza $(EI)^*$ è pari al bimomento C_2 : la configurazione di equilibrio è evidente-

(*) E' appena necessario far notare che tale valore di ϑ_t è incompatibile con l'ipotesi di piccoli spostamenti. Perciò la struttura, pur risultando sicura dal punto di vista statico, deve essere calcolata rimuovendo la suddetta ipotesi. L'esempio è stato volutamente scelto per evidenziare da una parte la grande deformabilità a torsione delle sezioni sottili aperte, e dall'altra la necessità di giudicare una struttura soltanto in base a un calcolo completo.

mente quella rettilinea, cui corrisponde torsione uniforme, e dove

$$v^{*'} = \vartheta' = \frac{F^*}{H^*} = \frac{M_t}{C_1},$$

come si è già dimostrato per via diretta.

La sezione più sollecitata è quella d'incastro. Le tensioni tangenziali τ_1 da torsione alla De Saint-Venant sono lineari lungo lo spessore δ generico e si annullano sulla linea media; al bordo, risulta

$$\tau^* = \frac{G}{C_1} M_t \delta = 817,8 \delta .$$

Le τ da taglio si ricavano scomponendo la T secondo le due direzioni

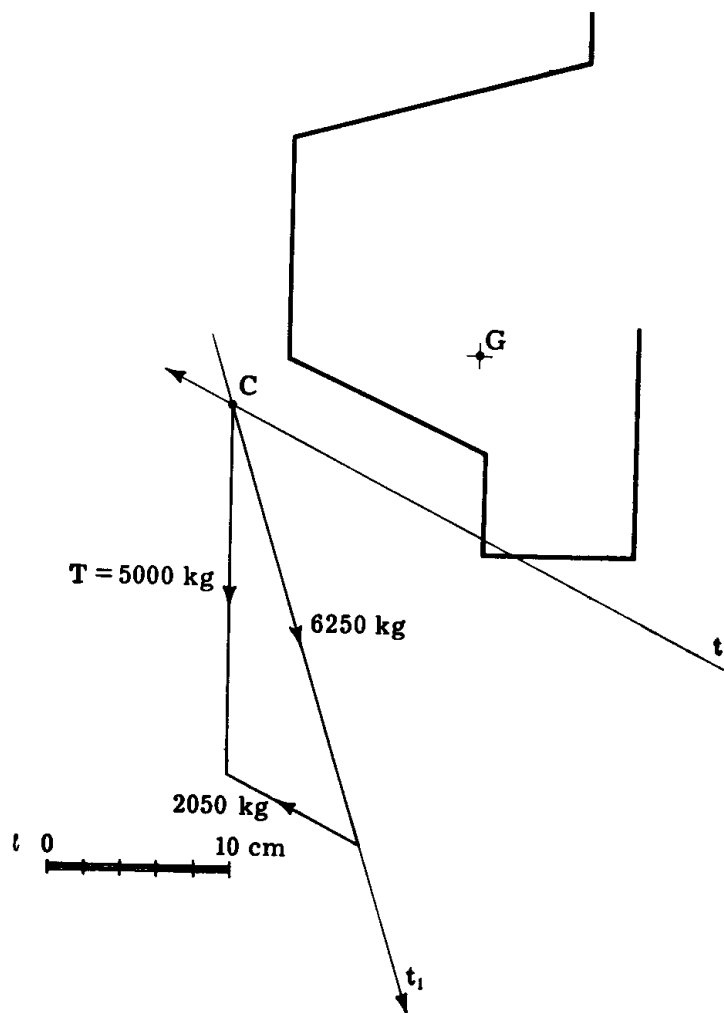


FIG. 12-17 a

t_1 e t_2 di fig. 12-13; dette T_1 e T_2 le componenti in Kg (fig. 12-17 a), le

corrispondenti τ sono ottenibili da quelle dei diagrammi di figg. 12-10 e

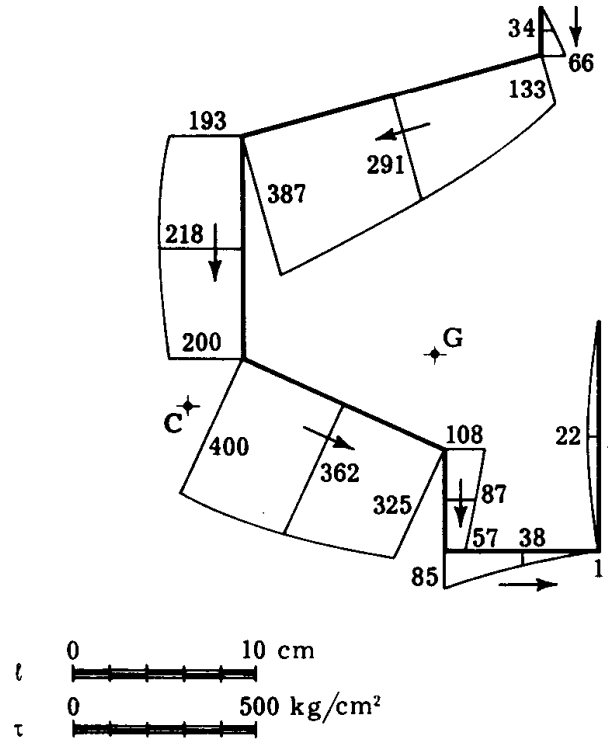


FIG. 12-17 b

12-12, moltiplicate per $T_1/1000$ e $T_2/1000$ rispettivamente.

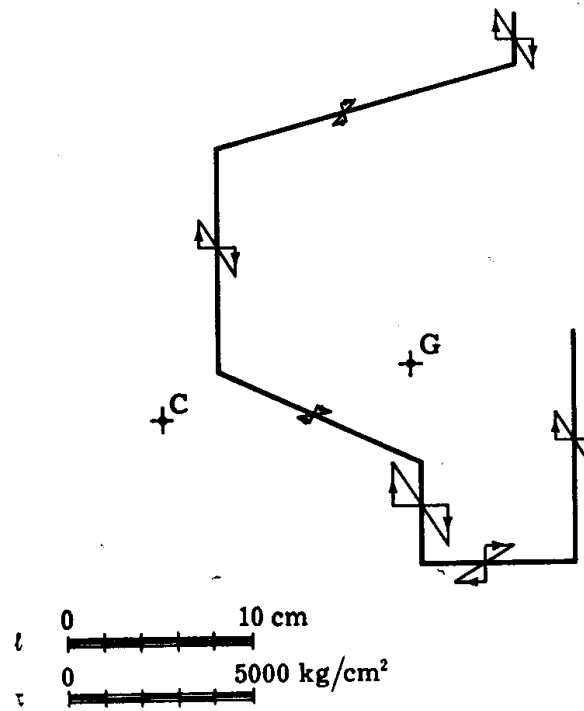


FIG. 12-17 c

In fig. 12-17 b figurano le τ compressive da taglio e in fig. 12-17 c quelle

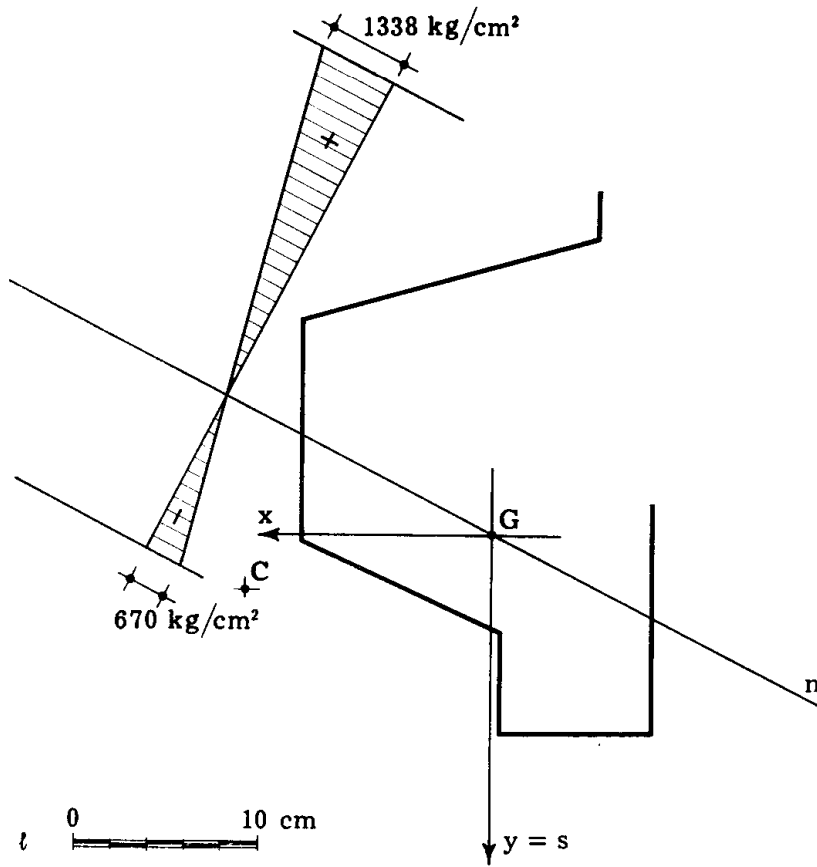


FIG. 12-17 d

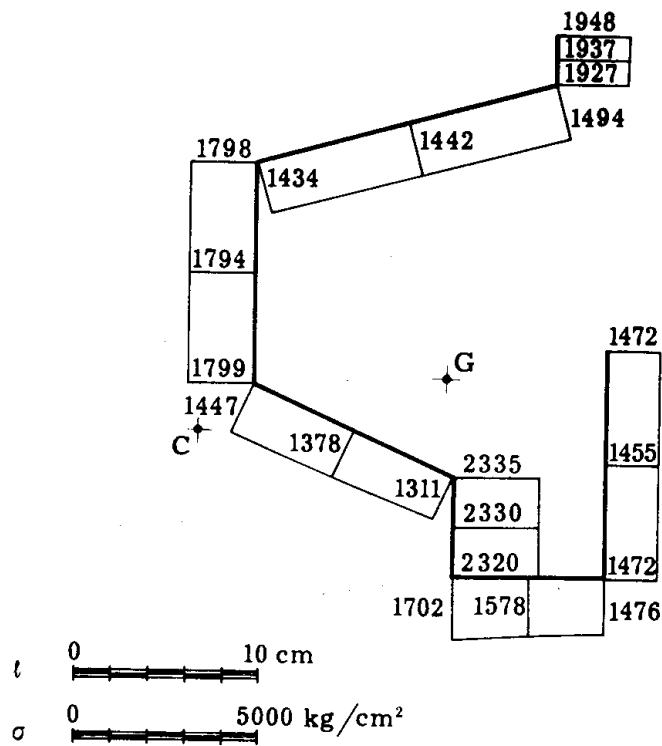


FIG. 12-17 e

da torsione. Le σ da flessione si ottengono facilmente in quanto l'asse neutro, coniugato a y , è baricentrico e parallelo alla t_2 , già nota; il corrispondente diagramma si desume ancora dalla fig. 12-17 d.

L'applicazione del criterio di *Hencky*, nella forma

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_2 + 3\tau^2}$$

ha permesso di costruire il diagramma di fig. 12-17 e, nel quale, in ogni punto della linea media, si è riportata normalmente a quest'ultima la σ equivalente relativa al punto più sollecitato dello spessore δ corrispondente; i dati relativi ai successivi calcoli sono riportati in tab. 5.

TABELLA 5 a

(UNITA' DI MISURA Kg/cm²)

Sollecitazione	Taglio			Torsione	Flessione		
	$\tau_{i, i-1}$	$\tau_{i, i}$	$\tau_{i, i+1}$	τ_i^*	$\sigma_{i, i-1}$	$\sigma_{i, i}$	$\sigma_{i, i+1}$
1	0	34	66	818	1338	1254	1171
2	133	291	387	409	1163	780	396
3	193	218	200	818	406	23	— 359
4	400	362	325	409	— 361	— 341	— 322
5	108	87	57	1227	— 329	— 497	— 664
6	85	38	1	818	— 670	— 539	— 408
7	1	— 22	0	818	— 393	4	400

TABELLA 5 b

(UNITA' DI MISURA Kg/cm²)

Rettangolo	τ_{totali} (ai bordi)			σ_{eq}		
	$\tau_{i, i-1}$	τ_i	$\tau_{i, i+1}$	$\sigma_{eq i, i-1}$	$\sigma_{eq i, i}$	$\sigma_{eq i, i+1}$
1	818	852	884	1948	1937	1927
2	542	700	796	1494	1442	1434
3	1011	1036	1018	1798	1794	1799
4	809	771	734	1447	1378	1311
5	1335	1314	1283	2335	2330	2320
6	903	856	819	1702	1578	1476
7	819	840	818	1472	1455	1472

Se ci si riferisce ad un acciaio la cui σ di snervamento sia pari a 4800 Kg/cm^2 , si ha

$$s_e = 2,15 .$$

Come secondo esempio di applicazione, si prenda in esame la trave a mensola di fig. 12-18. Per essa, il diagramma del taglio, del momento flet-

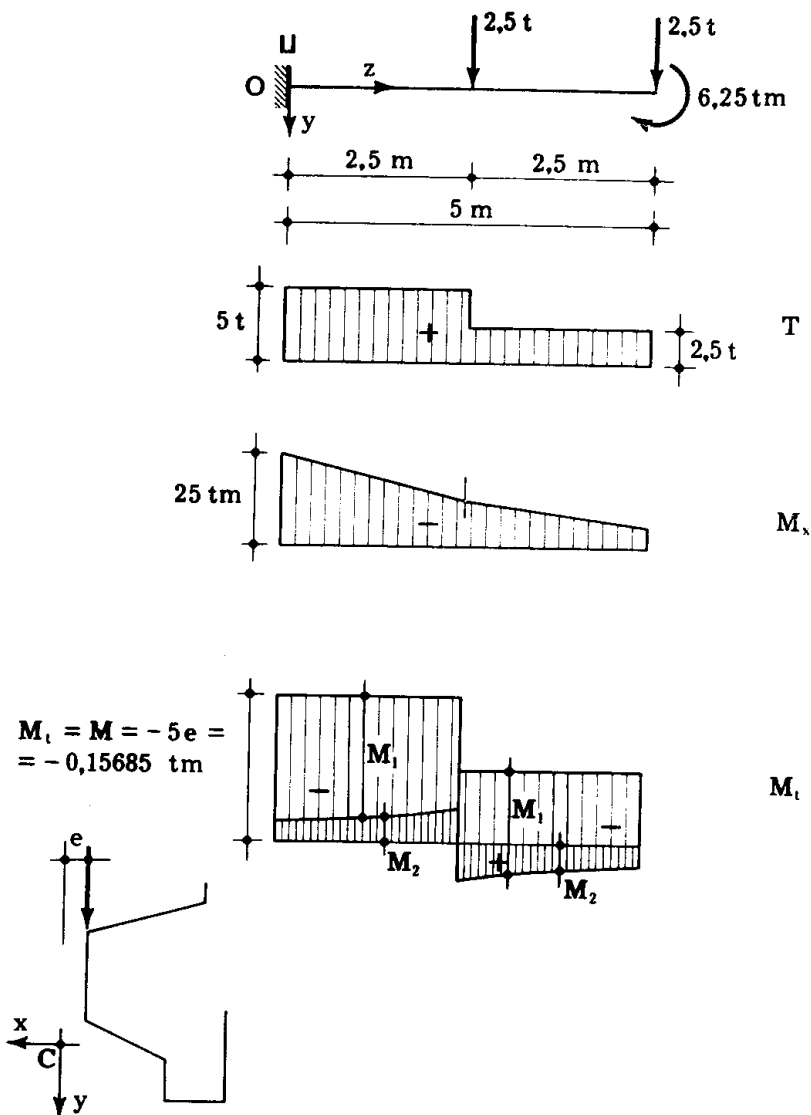


FIG. 12-18

tente e del momento torcente appaiono nella stessa figura. Anche in questo caso si suppone il vincolo del tipo appoggio a torsione ($\vartheta = \vartheta'' = 0$ per $z = 0$); sorgono però, a differenza del caso precedente, tensioni secondarie dovute alla torsione non uniforme. Trascurando queste ultime, la sezione più sollecitata risulta ancora quella d'incastro, e per esse le

caratteristiche sono pari in valore a quelle del precedente esempio: il coefficiente di sicurezza vale quindi ancora

$$s_e = 2,15 .$$

Procedere in via più rigorosa comporta la valutazione degli effetti secondari; tanto si consegue scrivendo l'equazione della torsione non uniforme

$$\vartheta''' - k^2 \vartheta' = - \frac{M_t}{C_2} \quad \left(k^2 = \frac{C_1}{C_2} \right) .$$

Poichè le sollecitazioni (momenti) sono due, bisogna scrivere separatamente le equazioni per la prima e la seconda metà dell'asta. Per $0 \leq z \leq l/2$ si ha, ponendo $M_t = M$ nel primo tratto ed $M_t = M/2$ nel secondo ($M = 2 \cdot 2,5 \cdot e = -0,15685 \text{ tm}$)

$$\begin{aligned} \vartheta''' - k^2 \vartheta' &= - \frac{M}{C_2} \\ \vartheta &= \frac{Mz}{k^2 C_2} + A + A_1 \sinh kz + A_2 \cosh kz \end{aligned}$$

con le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad \vartheta = 0 \\ z = l & \quad \vartheta'' = 0 \end{aligned}$$

che porgono

$$\begin{aligned} A + A_2 &= 0 \\ A_2 k^2 &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\vartheta = \frac{Mz}{k^2 C_2} + A_1 \sinh kz .$$

Per $l/2 \leq z \leq l$ è

$$\begin{aligned} \vartheta''' - k^2 \vartheta' &= - \frac{M}{2 C_2} \\ \vartheta &= \frac{Mz}{2 k^2 C_2} + B + B_1 \sinh kz + B_2 \cosh kz \end{aligned}$$

con la condizione ai limiti che riesca σ , e cioè ϑ'' , nulla per $z = \ell$; ciò si traduce nella:

$$B_1 k^2 \sinh k\ell + B_2 k^2 \cosh k\ell = 0$$

da cui

$$B_2 = - B_1 \operatorname{tgh} k\ell$$

$$\vartheta = \frac{Mz}{2k^2 C_2} + B + B_1 (\sinh kz - \cosh kz \operatorname{tgh} k\ell).$$

Le tre costanti A_1 , B e B_1 si determinano imponendo che, per $z = \ell/2$, ϑ , w (e cioè ϑ') e σ (e cioè ϑ'') abbiano lo stesso valore, valutate con la formula relativa al primo tratto o con quella relativa al secondo. Ciò comporta che sia

$$\frac{M}{k^2 C_2} \frac{\ell}{2} + A_1 \sinh \frac{k\ell}{2} = \frac{M}{2k^2 C_2} \frac{\ell}{2} + B + B_1 \left(\sinh \frac{k\ell}{2} - \cosh \frac{k\ell}{2} \operatorname{tgh} k\ell \right)$$

$$\frac{M}{k^2 C_2} + A_1 k \cosh \frac{k\ell}{2} = \frac{M}{2k^2 C_2} + B_1 k \left(\cosh \frac{k\ell}{2} - \sinh \frac{k\ell}{2} \operatorname{tgh} k\ell \right)$$

$$A_1 k^2 \sinh \frac{k\ell}{2} = B_1 k^2 \left(\sinh \frac{k\ell}{2} - \cosh \frac{k\ell}{2} \operatorname{tgh} k\ell \right)$$

e quindi

$$B_1 = \frac{M}{4k^3 C_2} \frac{\cosh k\ell}{\cosh \frac{k\ell}{2}}$$

$$A_1 = B_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tgh} k\ell}{\operatorname{tgh} \frac{k\ell}{2}} \right) = - \frac{M}{4k^3 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}}$$

$$B = \frac{M}{4k^3 C_2} k\ell.$$

In definitiva, per $0 \leq z \leq \ell/2$

$$\vartheta = \frac{Mz}{k^2 C_2} - \frac{M}{4k^3 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \sinh kz$$

$$\vartheta' = \frac{M}{k^2 C_2} - \frac{M}{4 k^2 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh kz$$

$$\vartheta'' = - \frac{M}{4 k C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \sinh kz$$

$$\vartheta''' = - \frac{M}{4 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh kz$$

$$M_2 = - C_2 \vartheta''' = \frac{M}{4} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh kz$$

Risulta così

$$\text{per } z=0 \quad M_2 = \frac{M}{4} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}}$$

$$\text{per } z = \frac{\ell}{2} \quad M_2 = \frac{M}{4}$$

Per $\ell/2 \leq z \leq \ell$ si ha invece

$$\vartheta = \frac{M\ell}{4 k^2 C_2} + \frac{Mz}{2 k^2 C_2} - \frac{M}{4 k^3 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \sinh k(\ell - z)$$

$$\vartheta' = \frac{M}{2 k^2 C_2} + \frac{M}{4 k^2 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh k(\ell - z)$$

$$\vartheta'' = - \frac{M}{4 k C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \sinh k(\ell - z)$$

$$\vartheta''' = - \frac{M}{4 C_2} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh k (\ell - z)$$

$$M_2 = - C_2 \vartheta''' = - \frac{M}{4} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}} \cosh k (\ell - z)$$

da cui

$$\text{per } z = \frac{\ell}{2} \quad M_2 = - \frac{M}{4}$$

$$\text{per } z = \ell \quad M_2 = - \frac{M}{4} \frac{1}{\cosh \frac{k\ell}{2}}$$

Il diagramma di M_2 è tratteggiato più fittamente in fig. 12-18, e le rispettive ordinate sono consegnate in tabella 6.

TABELLA 6

z (cm)	$\vartheta' \cdot 10^3$ (cm ⁻¹)	$\vartheta'' \cdot 10^6$ (cm ⁻²)	M_2 (Kg cm)
0	— 0,854	0	— 2445
0,50	— 0,851	0,140	— 2500
1,00	— 0,840	0,288	— 2665
1,50	— 0,821	0,448	— 2950
2,00	— 0,795	0,626	— 3365
2,50	— 0,758	0,835	— 3921
2,50	— 0,758	0,835	3921
3,00	— 0,722	0,625	3365
3,50	— 0,696	0,448	2950
4,00	— 0,677	0,288	2665
4,50	— 0,667	0,140	2500
5,00	— 0,663	0	2445

Infine, si ha (*)

$$\vartheta_t = \frac{3}{4} \frac{M\ell}{C_1} = -0,380$$

coincidente con il valore che si ottiene in regime di torsione uniforme.

Ciò appare ancora una volta chiaro dall'analogia con la trave inflessa (fig. 12-19); la trave ideale equivalente alla data, labile, è infatti in equi-

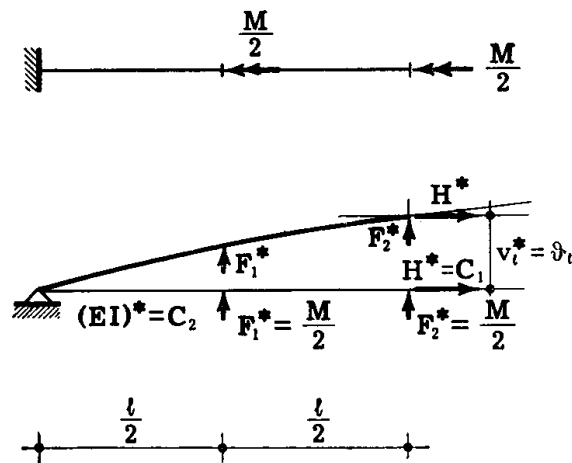


FIG. 12-19

librio per un ben determinato abbassamento v_t^* dell'estremo libero, ottenibile dall'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'appoggio.

$$-H^* v_t^* + F_1^* \frac{\ell}{2} + F_2^* \ell = 0$$

da cui

$$v_t^* = \vartheta_t = \frac{F_1^*}{H^*} \frac{\ell}{2} + \frac{F_2^*}{H^*} \ell = \frac{M}{2C_1} \frac{\ell}{2} + \frac{M\ell}{2C_1} = \frac{3}{4} \frac{M\ell}{C_1},$$

valore che non dipende da C_2 , e quindi dalla deformata della trave.

Si voglia ancora eseguire la verifica di resistenza in corrispondenza dell'incastro. Ivi le τ da taglio e le σ da flessione sono quelle calcolabili alla De Saint-Venant. Le τ^* primarie da torsione sono ridotte, rispetto al-

(*) Vedi nota precedente.

l'esempio precedente, nel rapporto

$$\frac{M_1}{M_t} = \frac{13240}{15685},$$

le σ da torsione sono nulle (in quanto lo è \mathfrak{F}''), ed infine le τ_2 da torsione, costanti lungo ogni spessore δ , sono distribuite sulla sezione come mostra

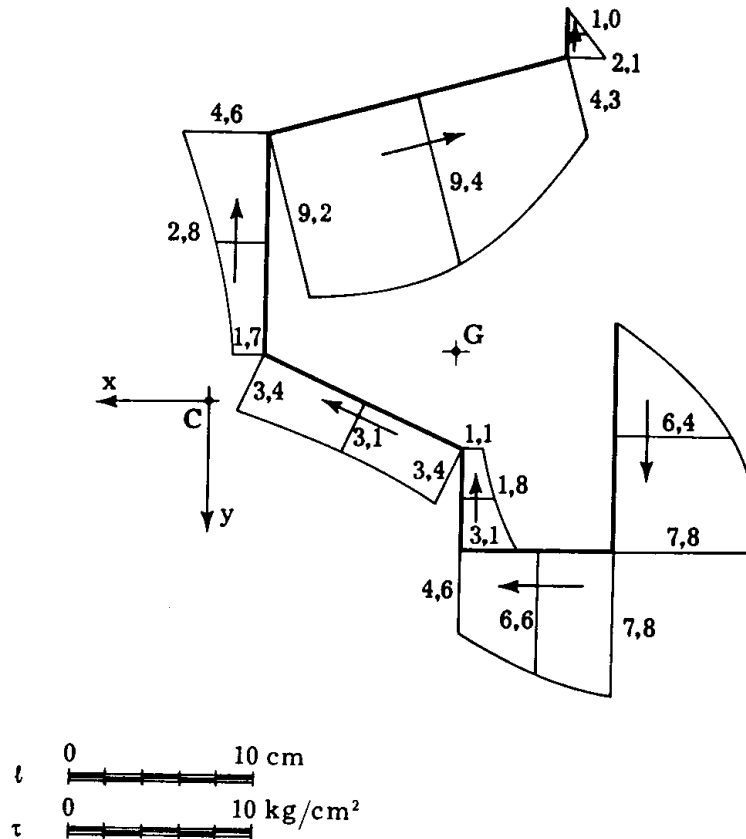


FIG. 12-20 a

la fig. 12-20 a, e si ottengono in valore moltiplicando le quantità g riportate in tab. 4 per il fattore di scala (10-54)

$$-\frac{2 M_2 E}{C_2} = 1,173 \cdot 10^{-2}.$$

In tab. 7 sono raccolte le σ , le τ e le tensioni equivalenti

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2},$$

TABELLA 7 a
(UNITA' DI MISURA Kg/cm²)

Sollecitazione	Torsione primaria	Torsione secondaria		
Rettangolo	τ_1^*	$\tau_{2\ i, i-1}$	$\tau_{2\ i, i}$	$\tau_{2\ i, i+1}$
1	690	0	— 1,0	— 2,1
2	345	— 4,3	— 9,4	— 9,2
3	690	— 4,5	— 2,8	— 1,7
4	345	— 3,4	— 3,1	— 3,4
5	1035	— 1,1	— 1,8	— 3,1
6	690	— 4,6	— 6,6	— 7,8
7	690	— 7,8	— 6,4	0

TABELLA 7 b
(UNITA' DI MISURA Kg/cm²)

Rettangolo	τ_{totali} (ai bordi)			σ_{eq}		
	$\tau_{i, i-1}$	$\tau_{i, i}$	$\tau_{i, i+1}$	$\sigma_{\text{eq}\ i, i-1}$	$\sigma_{\text{eq}\ i, i}$	$\sigma_{\text{eq}\ i, i+1}$
1	690	724	755	1794	1774	1755
2	474	627	723	1424	1337	1314
3	879	906	889	1576	1570	1581
4	742	704	666	1335	1266	1197
5	1142	1121	1089	2005	2002	2000
6	771	772	684	1494	1362	1253
7	684	786	690	1248	1223	1260

utilizzate per il diagramma di fig. 12-20 b da cui si trae, posto, come nell'esempio precedente

$$\sigma_0 = 4800 \text{ Kg/cm}^2 ,$$

il valore del coefficiente di sicurezza per la nuova condizione di carico, pari a

$$s_e = 2,39 .$$

Anche portando in conto gli effetti secondari, la sezione di incastro è

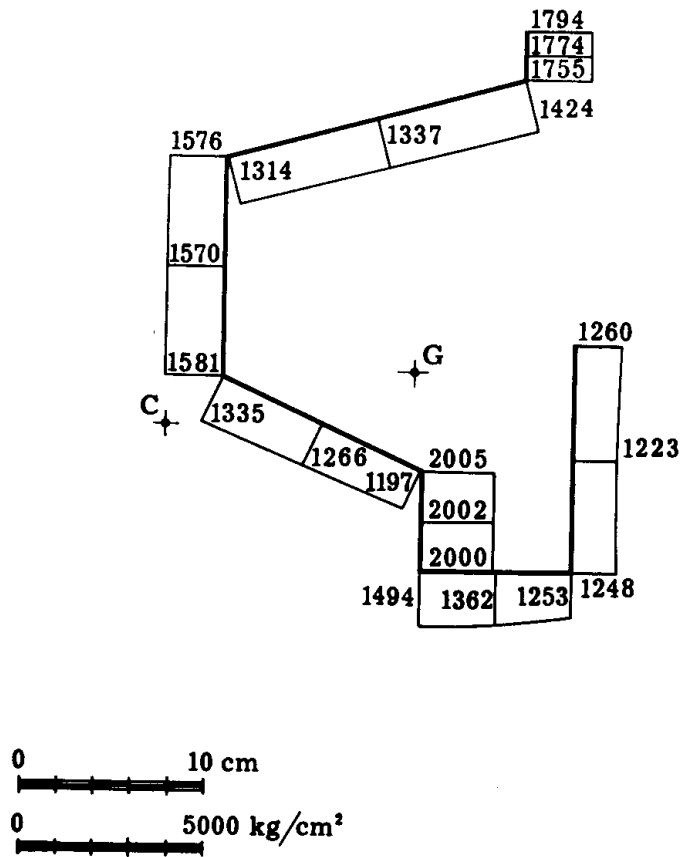


FIG. 12-20 b

la più sollecitata; la verifica in quella di mezzaria, a sinistra della forza applicata, porge infatti

$$s_e = 2,69 .$$