

CAPITOLO XI

UTILIZZAZIONE DEI RISULTATI DEL DE SAINT-VENANT E RELATIVA APPROSSIMAZIONE

1. Estensione dei risultati del De Saint-Venant alle travi.

Si è detto (Cap. I) che i risultati del De Saint-Venant sono validi, per un cilindro corto, solo se le sollecitazioni sulle due basi sono distribuite alla De Saint-Venant. Se il cilindro è lungo, il postulato del De Saint-Venant permette di far dipendere la soluzione del problema dalle sole caratteristiche della sollecitazione sulle due basi, e quindi di conoscere la soluzione relativa a qualsiasi sollecitazione sulle due basi.

Il campo di utilizzazione dei risultati, così faticosamente acquisiti, è ancora però molto limitato: solido cilindrico, senza peso, sollecitato solo sulle basi.

Perchè essi siano resi operanti sul piano applicativo, occorre esaminare se, e con quale approssimazione, essi possono essere accettati per travi, e cioè per strutture monodimensionali, a sezione variabile, ad asse curvilineo, comunque vincolate, dotate di peso proprio, e caricate anche sulla superficie laterale (*).

Un primo esempio di estensione dei risultati del De Saint-Venant si è svolto con riferimento alla pila di uniforme resistenza (Cap. III, § 2); si vuole adesso trattare questo tema più in generale.

Si consideri perciò un arco (trave ad asse curvilineo) a sezione variabile, comunque vincolato alle due estremità, soggetto ad un peso proprio non trascurabile, e caricato comunque sulla superficie laterale (fig. 11-1).

Ogni sezione retta sia definita dall'ascissa curvilinea s , misurata lungo l'asse, a partire da uno dei suoi estremi, per esempio A. Si consideri un tronco elementare lungo ds all'ascissa generica s , e da ambedue le parti di questo tronco altri due tronchi, lunghi ciascuno quanto la distanza di

(*) Una trave si può pensare generata assegnando prima l'asse AB, e facendo poi percorrere questo da un'area S (*sezione retta*), che si mantenga sempre con il suo baricentro sull'asse, che sia sempre ortogonale all'asse, e che muovendosi possa variare di dimensioni in funzione dell'ascissa s .

estinzione d_e (valutata attraverso le caratteristiche geometriche della sezione retta all'ascissa s).

Siano S_1 ed S_2 le estremità del tronco somma dei tre prima considerati. Lo stato di tensione nel tronco ds dipende soltanto dalle caratteristiche della sollecitazione sulle due sezioni S_1 ed S_2 , e non dalla effettiva distribuzione delle tensioni su di esse. Se poi il tronco $S_1 S_2$ può assimilarsi nei riguardi della geometria e delle forze ad un solido di De Saint-Venant, può anche dirsi che per il tronco ds possono essere accettati i risultati del De Saint-Venant; ovviamente, in funzione delle sole caratteristiche in S_1 e S_2 , e cioè in funzione delle sole caratteristiche della sollecitazione relative al tronco ds . L'approssimazione quindi con cui i risultati del De

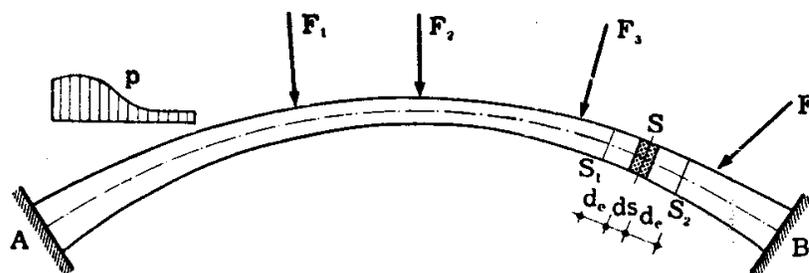


FIG. 11-1

Saint-Venant possono applicarsi al tronco ds è la stessa con cui il tronco $S_1 S_2$ può assimilarsi ad un solido di De Saint-Venant. E' necessario perciò innanzitutto che le variazioni (con s) di dimensioni della sezione retta non siano troppo rapide, perchè esse devono potersi trascurare in relazione alla lunghezza $2 d_e$. Occorre poi che il raggio di curvatura dell'asse sia tale da poter trascurare, in rapporto ad esso, la lunghezza $2 d_e$. Queste due ipotesi consentono di considerare il tronco $S_1 S_2$ come prismatico; esse escludono dai casi di applicabilità dei risultati del De Saint-Venant le travi con sezione rapidamente variabile, e le travi a grande curvatura.

Per quel che riguarda le forze, è necessario che le forze relative alla massa e quelle agenti sulla superficie laterale siano trascurabili in rapporto alle caratteristiche della sollecitazione sulle due basi S_1 ed S_2 . Fissate le dimensioni delle sezioni rette, i valori delle caratteristiche della sollecitazione provocate dal peso proprio aumentano con la luce, mentre il peso proprio del tronco $S_1 S_2$ non varia; perciò è necessario che la trave AB sia abbastanza lunga in rapporto alle dimensioni delle sezioni rette. Così pure, fissato il valore delle forze p distribuite sulla superficie laterale, le caratteristiche della sollecitazione provocate dalle forze p aumentano con la luce, mentre la forza agente sul tronco $S_1 S_2$ è invariata. Anche per quel che riguarda le forze superficiali distribuite è necessario

perciò che la trave sia abbastanza lunga rispetto alle dimensioni delle sezioni rette.

Le forze o le coppie concentrate possono essere dello stesso ordine di grandezza delle caratteristiche della sollecitazione; in tal caso esse non possono impegnare il tronco $S_1 S_2$ se si vuole ancora considerare quest'ultimo come un solido di De Saint-Venant. E' per questo motivo che i risultati del De Saint-Venant non sono accettabili ad una distanza minore di d_e dalle forze concentrate di una certa entità, e quindi anche dai vincoli. In corrispondenza di queste zone è necessario prendere dei provvedimenti locali; di questi si è già fatto un esempio, trattando delle pile ad uniforme resistenza, nella gabbia che si prevede per le costruzioni in c.a. in corrispondenza dei rulli di appoggio. In genere i provvedimenti locali si calcolano ad abundantiam, facendosi guidare dall'esperienza, e chiedendo all'intuito informazioni sommarie sull'andamento delle linee isostatiche; le armature

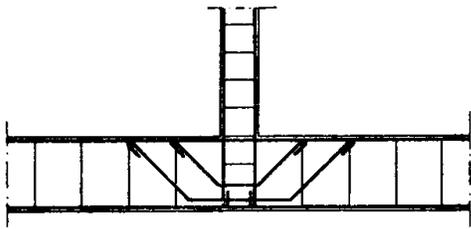


FIG. 11-2

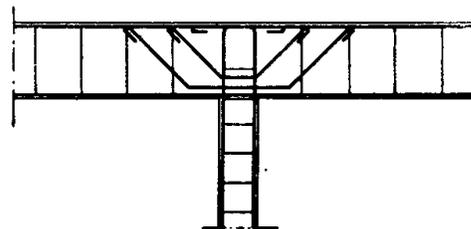


FIG. 11-3

supplementari nel c.a. si dispongono seguendo grosso modo tali linee, prevalentemente secondo quelle di trazione; così pure nelle costruzioni metalliche si prevedono cantonali o piatte o lastre di rinforzo che garantiscono con ampia sicurezza le zone di comportamento incerto. Nella figura

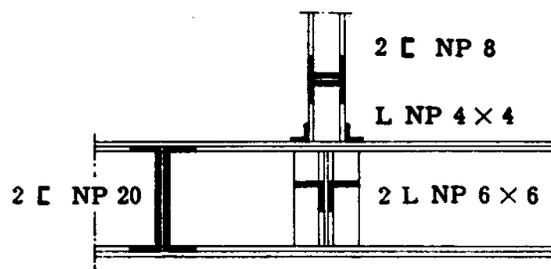


FIG. 11-4

11-2, è riportato il particolare del collegamento di un pilastro su una trave in c.a.; i ferri sagomati seguono approssimativamente l'andamento delle linee isostatiche di trazione. Nella fig. 11-3 è disegnato il particolare dell'attacco di un tirante ad una trave in c.a. Nella fig. 11-4 è tracciato un

particolare analogo a quello della fig. 11-2, per una struttura metallica.

Se il tronco $S_1 S_2$ è tale da consentire l'uso dei risultati del De Saint-Venant per il tronco ds , si calcolano le tensioni relative alla sezione retta S di ds attraverso le (3-2), (5-2), (8-6) e le prime due delle (9-9) (*); la terza delle (9-9) non si considera, perchè il tronco ds è di lunghezza elementare, e le tensioni normali fornite dalla terza delle (9-9) sono trascurabili in rapporto con quelle relative allo sforzo normale ed alle due flessioni rette. Le caratteristiche $N T_x T_y$ che entrano nelle suddette relazioni si ottengono per una trave compresa tra due vincoli A e B (esterni o interni), (fig. 11-5) considerando la normale z alla sezione S nel suo baricentro, (e

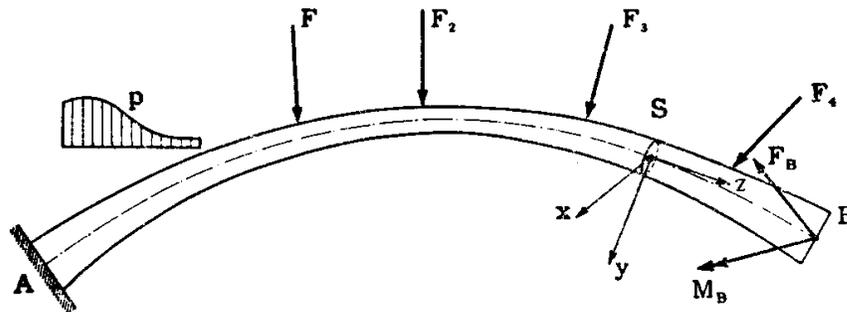


FIG. 11-5

cioè la tangente all'asse della trave in S), e i due assi principali di inerzia x ed y di S , e proiettando su questi tre assi tutte le forze agenti su una delle due parti in cui la trave è divisa da S , ivi comprese le reazioni vincolari, di vincolo esterno o interno; le caratteristiche $M_x M_y M_t$ si ottengono calcolando i momenti delle stesse forze rispetto agli assi x ed y , ed alla parallela all'asse z condotta per il centro di taglio C della sezione S .

Orientata la terna $x y z$ su una delle due facce risultanti da un taglio in S in modo che z sia diretta verso l'esterno del corpo (e cioè come nella fig. 11-5, ove S è considerata appartenente alla parte AS) le sei caratteristiche, (calcolate in relazione alle forze agenti sulla parte asportata, e cioè sulla parte SB) sono positive se dirette come gli assi.

L'energia di deformazione è fornita, attraverso i suddetti valori delle caratteristiche, da

$$L = \int_A^B \frac{N^2 ds}{2 EA} + \int_A^B \frac{M_x^2 ds}{2 EI_x} + \int_A^B \frac{M_y^2 ds}{2 EI_y} + \int_A^B q \frac{M_t^2 ds}{2 G I_p} + \int_A^B \chi_\xi \frac{T_y^2 ds}{2 GA} + \int_A^B \chi_\eta \frac{T_x^2 ds}{2 GA}; \quad (1)$$

(*) Le tensioni da taglio e torsione si calcolano, in pratica, con i procedimenti già illustrati, validi per i vari casi (sezioni, sottili aperte, chiuse, etc.).

la (11-1) è approssimata, perchè nello scriverla si è supposto che le espressioni del De Saint-Venant siano valide anche in prossimità delle forze e dei vincoli. La (11-1) è ottenuta dalla (9-21); si ricordi che M_t deve essere valutato rispetto al centro di taglio.

2. Espressione della tensione tangenziale da taglio nelle travi a sezione fortemente variabile.

Si esporrà in questo paragrafo un notevole esempio di tensioni secondarie derivanti dalla non assimilabilità del tronco $S_1 S_2$ ad un solido di De Saint-Venant; si intendono al solito per tensioni secondarie i termini correttivi da affiancare a quelli derivanti dalla trattazione alla De Saint-Venant. Si consideri una trave a sezione fortemente variabile, ed in questa un tronco elementare ottenuto tagliando la trave con due piani ortogonali all'asse e distanti dz (fig. 11-6). Sia x l'asse neutro, M_x la componente del

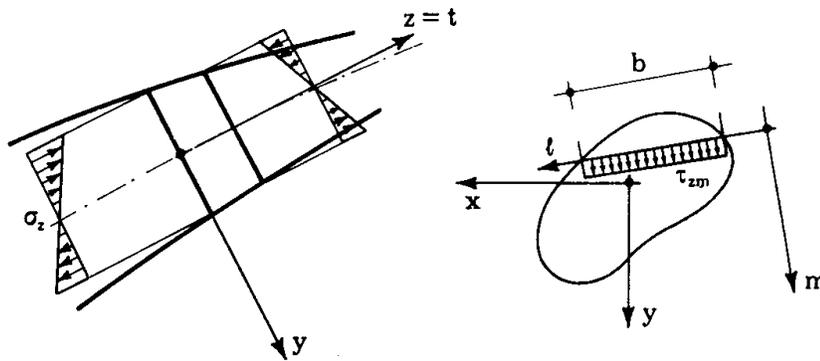


FIG. 11-6

vettore momento secondo quest'asse, T_y la componente del taglio secondo la normale y ad x . Si suppone che la tensione normale σ_z sia ancora fornita dalla formula di Navier (in assenza di sforzo normale)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y . \quad (a)$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse z della stessa parte di solido considerata nella trattazione approssimata del taglio (§ 9-6) è la stessa (9-u)

$$\tau_{zm} b dz + \int_{A'} d\sigma_z dA = 0 . \quad (b)$$

Dalla (a) si trae

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = y \left[\frac{1}{I_x} \frac{dM_x}{dz} + M_x \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{I_x} \right) \right]$$

e quindi, essendo $T_y dz = dM_x$ (fig. 11-7),

$$d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \frac{T_y}{I_x} y dz + M_x y \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{I_x} \right) dz. \quad (c)$$

La (b) si scrive perciò

$$\tau_{zm} b = - \frac{T_y}{I_x} S_x - M_x \frac{d}{dz} \int_A \frac{y}{I_x} dA = - \frac{T_y}{I_x} S_x - M_x \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{I_x} \right)$$

da cui

$$\tau_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b} - \frac{M_x}{b} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{I_x} \right). \quad (2)$$

Scegliendo le corde b parallele all'asse neutro, la tensione in corrispondenza dell'asse neutro è fornita da una espressione binomia il cui pri-

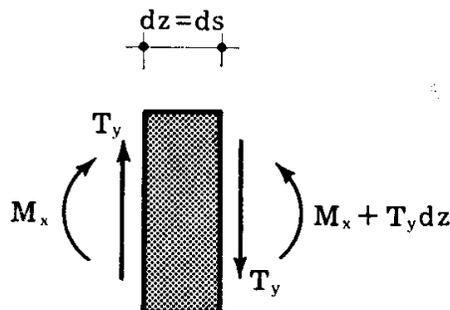


FIG. 11-7

mo termine coincide con la (9-26); poichè in tal caso è $I_x = -S_x h^*$, si trae dalla (11-2)

$$\tau_{zyn} = \frac{T_y}{b_n h^*} - \frac{M_x}{b_n h^{*2}} \frac{dh^*}{dz}. \quad (3)$$

Si consideri, per esempio, una trave appoggiata con bordo superiore orizzontale, in cui il braccio h^* aumenta dall'appoggio alla mezzeria (fig. 11-8 a); se le forze sono verticali, comprese le reazioni, si usa scegliere i piani che definiscono le sezioni rette anch'essi verticali, perchè sia $N=0$ sulle sezioni che così si considerano. Poichè $T > 0$, $M > 0$,

$dh^*/dz > 0$, si osserva dalla (11-3) che i due termini della formula sono di segno opposto, e perciò il momento esercita una benefica influenza nei riguardi della tensione tangenziale (*).

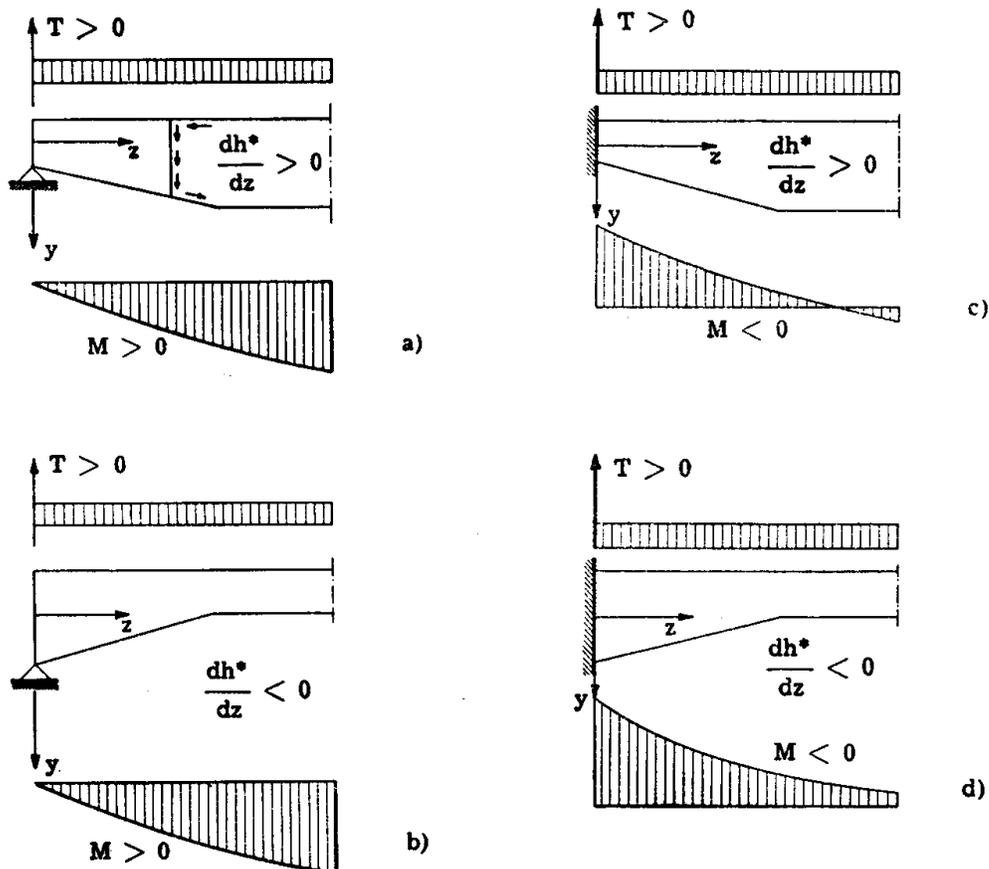


FIG. 11-8

La spiegazione fisica è immediata, non appena si tenga conto del verso delle τ_{zy} e delle tensioni sul bordo inferiore, poichè quest'ultime presentano una componente verticale dello stesso segno delle τ_{zy} , che perciò con esse collabora all'assorbimento del taglio.

Effetto benefico il momento esercita anche nelle travi incastrate in cui h^* diminuisce dall'incastro alla mezzeria, nelle zone in cui M è negativo (fig. 11-8 d).

Il contrario accade nei due casi illustrati nelle figg. 11-8 b e 11-8 c. Si osservi che i due casi in cui il momento esercita un'azione benefica sono quelli in cui la sezione varia in modo razionale anche nei riguardi delle tensioni normali, perchè h^* ed $|M|$ presentano leggi di variazione analoghe.

(*) Si trae dalla (11-3) che τ_{zyn} può addirittura annullarsi; ciò accade se

$$\frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{dz} = \frac{1}{M_x} \frac{dM_x}{dz}$$

In presenza anche di sforzo normale la (a) si scrive

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A}$$

e quindi la (c) si modifica nell'altra

$$d\sigma_z = \frac{T_y}{I_x} y dz + M_x y \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{I_x} \right) dz + \frac{1}{A} \frac{dN}{dz} dz - \frac{N}{A^2} \frac{dA}{dz} dz .$$

La (11-2) diviene

$$\tau_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b} - \frac{M_x}{b} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{I_x} \right) - \frac{A'}{Ab} \frac{dN}{dz} + \frac{A'N}{A^2 b} \frac{dA}{dz} . \quad (4)$$

La (11-4) è particolarmente utile negli archi, ove lo sforzo normale è sempre presente, e spesso fortemente variabile assieme alla sezione (fig. 11-9).

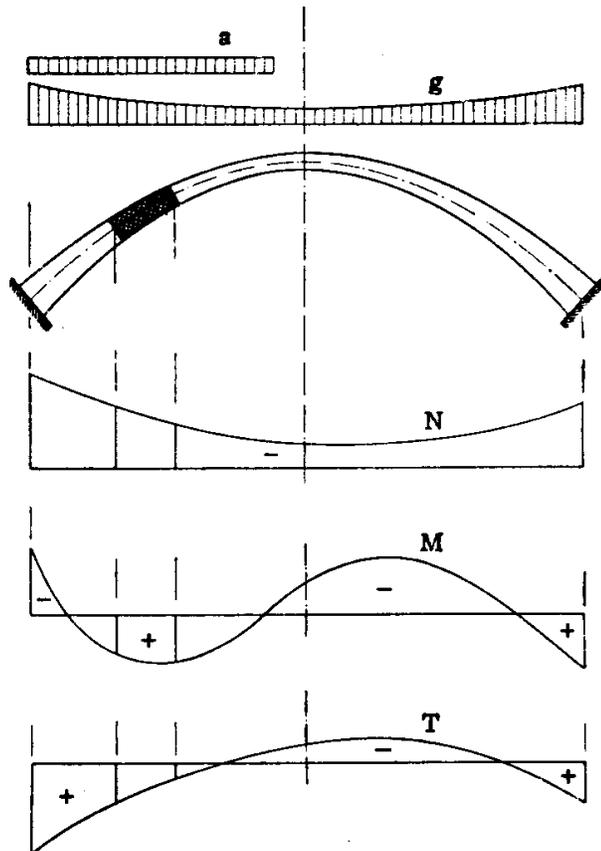


FIG. 11-9

Si osserva dalla (11-4) che se la sezione A e lo sforzo normale non variano con z , lo sforzo normale non introduce alcuna variazione nell'espressione della τ_{zm} .