

### 6. La sezione sottile aperta soggetta a taglio.

La trattazione approssimata del taglio (§ 9-6) è, nel caso delle sezioni sottili, più precisa e di più semplice applicazione. La maggior precisione deriva dal fatto che, scegliendo la corda  $b$  coincidente con uno spessore, l'ipotesi di  $\tau_{zm}$  costante e coincidente con la  $\tau_{zm}$  media è più aderente al vero, attesa l'esiguità dello spessore; la  $\tau_{zt}$ , nulla ai due estremi dello spessore, può considerarsi nulla su tutto lo spessore (anche se questo non è parallelo all'asse neutro), per lo stesso motivo. Quindi la  $\tau$  è diretta in ogni punto normalmente allo spessore, ed è costante su ogni spessore;  $\tau$  cioè è funzione solo dell'ascissa  $s$ , così come nella torsione delle sezioni sottili chiuse.

La suddetta ipotesi circa l'andamento delle  $\tau$  porta all'ortogonalità tra le due sollecitazioni di taglio e torsione. Infatti chiamando  $\tau_t \gamma_t$  tensioni e scorrimenti da taglio,  $\tau_s \gamma_s$  tensioni e scorrimenti da torsione, si ha

$$L_{ab} = \int_m \tau_s \gamma_t \delta ds = \frac{1}{G} \int_m \tau_s \tau_t \delta ds . \quad (i)$$

Se la sezione è aperta,  $\tau_s$  è variabile linearmente lungo  $\delta$  annullandosi al centro,  $\tau_t$  è costante, e quindi  $L_{ab} = 0$ . Viceversa, se si pone  $L_{ab} = 0$ , discende che la  $\tau_t$  è costante lungo lo spessore.

Se la sezione è chiusa, suddividendo l'integrale (i) in quelli parziali relativi ai canali di flusso elementari della torsione (§ 8-14) (la dimostrazione è, così, del tutto generale) si ha

$$L_{ab} = \frac{1}{G} \Sigma_e \int_{me} \tau_s \tau_t \delta ds = \frac{1}{G} \Sigma_k \tau_{sk} \delta \int_{mt} \tau_t ds . \quad (l)$$

Le ipotesi fatte circa l'andamento delle tensioni importano, per il taglio (\*)

$$\text{rot } \bar{\tau} = 0 ; \quad (32)$$

(\*) Dalla (9-16), esatta,

$$\text{rot } \bar{\tau} = \frac{T_y}{(m+1) I_x} x$$

si osserva che la (10-32) equivale a porre  $1/m = 0$ ; ciò è in accordo con la teoria approssimata, dove le tensioni risultano indipendenti da  $1/m$ . Poichè le stesse ipotesi sull'andamento delle  $\tau$  si fanno nella torsione delle sezioni sottili chiuse, può sembrare che anche in questa sia  $\text{rot } \bar{\tau} = 0$ ; di questa apparente anomalia si tratterà nel § 10-8, come già detto (nota § 4-10).

in tale ipotesi, per il teorema di *Stokes*, ogni integrale della (1) è nullo, ed  $L_{ab} = 0$ .

La maggiore semplicità di applicazione è connessa con il fatto di conoscere in ogni punto la direzione di  $\tau$ , che anzi è funzione di una sola coordinata,  $s$ ; la costruzione dei diagrammi di  $\tau$  è semplificata di molto, nei tratti rettilinei di spessore costante, dalla seguente osservazione. Sia AB (fig. 10-32) il tratto in questione,  $\delta$  uno spessore qualsiasi (di valore

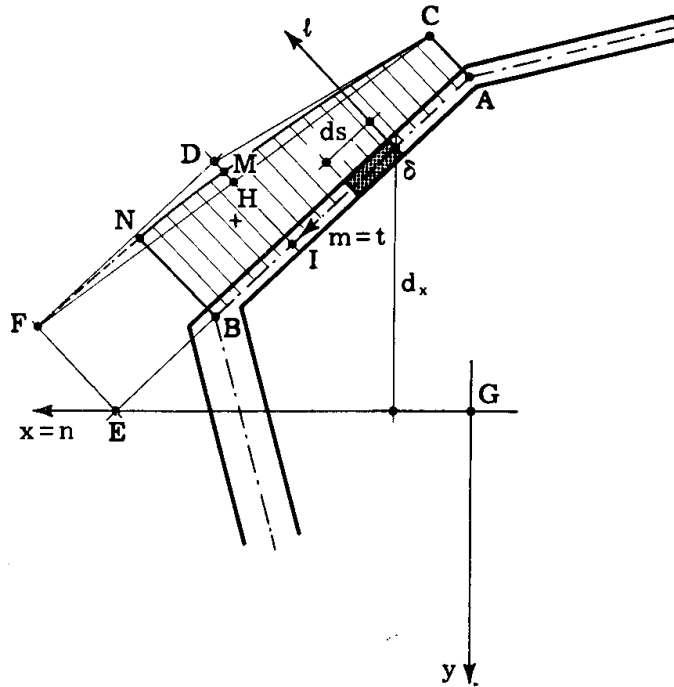


FIG. 10-32

costante nel tratto) all'ascissa  $s$ . In  $\delta$  si ha (9-22), se  $x$  è l'asse neutro,

$$\tau = - \frac{T_y S_x}{I_x \delta};$$

è quindi

$$\frac{d\tau}{ds} = - \frac{T_y}{I_x \delta} \frac{dS_x}{ds}. \quad (m)$$

Poichè può scriversi

$$dS_x = \delta ds dx$$

dove  $d_x$  è la distanza di  $\delta$  dall'asse  $x$ , la (m) si scrive

$$\frac{d\tau}{ds} = - \frac{T_y}{I_x} d_x . \quad (33)$$

La (10-33) può ottenersi, a prescindere dalla (9-22), dalla condizione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $z$  della parte di solido di base  $\delta ds$ , o dalla espressione della divergenza (9-15).

L'inclinazione del diagramma  $\tau$  è quindi funzione lineare di  $d_x$ , e cioè di  $s$  (\*); ciò significa che nel tratto considerato il diagramma  $\tau(s)$  è una parabola quadratica.

Il punto dove questa parabola presenta tangente parallela alla linea media del tratto, e cioè dove  $d\tau/ds = 0$ , è quello che corrisponde a  $d_x = 0$ , e cioè è il punto  $E$  d'incontro della linea media del tratto con l'asse neutro  $x$  (fig. 10-32).

In  $A$  il valore di  $\tau$  è immediatamente ricavabile da quello del tratto precedente, variandolo nel rapporto inverso dei  $\delta$ ; se in  $A$  confluiscono più tratti, è

$$\tau = \frac{\sum \tau_i \delta_i}{\delta} .$$

L'inclinazione  $d\tau/ds$  in  $A$  è poi la stessa che si verifica in  $A$  per il tratto o per i tratti precedenti, perchè  $d_x$  è lo stesso. La conoscenza di  $\tau$  e di  $d\tau/ds$  in  $A$  basta per definire la parabola nel tratto  $AE$  (interessa però il solo tratto  $AB$ ). Assunta la linea media di  $AB$  come fondamentale, si traccia  $AC = \tau$ , normale alla  $AB$ , e la retta  $CD$  inclinata di  $d\tau/ds$ . Si tenga presente che la retta  $m$ , il cui verso bisogna fissare per poter applicare la (9-22), si orienta nel verso che si è preso positivo per le ascisse; in base al verso di  $m = t$  si riportano  $\tau$  e  $d\tau/ds$ , che nella fig. 10-12 si sono supposte entrambe positive (\*\*).

La parabola si traccia fra  $A$  e il punto  $E$  dove  $AB$  incontra l'asse neutro; infatti in corrispondenza di  $E$  è conosciuta l'altra tangente, che è parallela ad  $AB$ . Per ottenere questa tangente si costruisce il punto medio  $I$  del segmento  $AE$ , da  $I$  si tira la normale ad  $AB$  fino ad incontrare la tangente in  $C$  nel punto  $D$ ; per  $D$  passa la tangente  $DF$  in corrispondenza di  $E$ , parallela ad  $AB$ .

(\*) La (10-33) è valida anche per tratti curvilinei, e per piccole variazioni di  $\delta$ .

(\*\*) Molte volte per chiarezza di disegno le  $\tau$  si riportano senza rispettare questa convenzione; in tal caso una freccia nel diagramma di ogni tratto indica senza equivoci il verso di  $\tau$ .

Uniti F e C, la tangente in corrispondenza di I è la parallela a CF per il punto medio di DH. In possesso di tali elementi è facile disegnare la parabola, di cui interessa il solo tratto relativo al segmento AB. E' ovvio che, per una maggiore precisione, è opportuno controllare le inclinazioni nei vertici della linea media attraverso la (10-33), e qualche punto intermedio con l'aiuto della (9-22) (\*).

Partendo perciò da un estremo, dove  $\tau=0$  ( $S_x=0$ ), e calcolando l'inclinazione iniziale con la (10-33), si può costruire graficamente, senza altri calcoli, l'intero diagramma delle  $\tau$ .

Nei tratti paralleli all'asse neutro (e di spessore costante) il diagramma è lineare. Per questo motivo, nella ricerca del centro di taglio C (§ 9-15) si fissano i due assi neutri, relativi alle due sollecitazioni taglienti

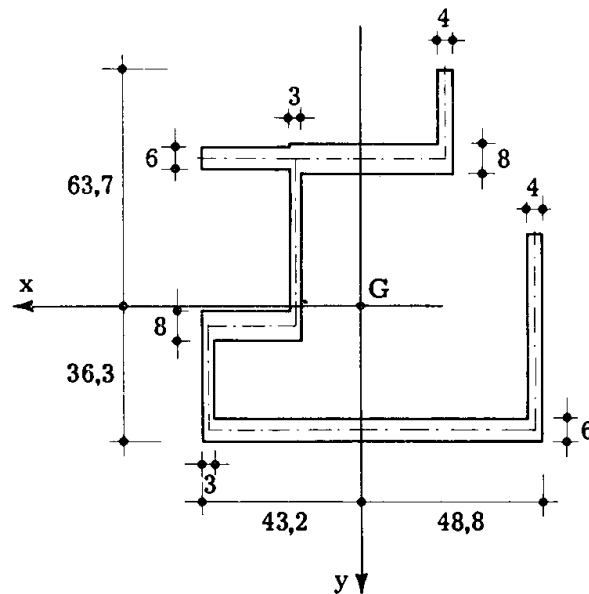


FIG. 10-33 a

la cui conoscenza è sufficiente per definire C, paralleli alle direzioni del maggior numero possibile di tratti; così si ottengono dei diagrammi lineari, la cui area è immediatamente calcolabile. Con riferimento alla fig. 10-33 a, i due assi suddetti sono x ed y. Scelto x come asse neutro,

(\*) Se invece è noto il valore BN e la tangente  $t_N$  in N, e si vuole il tratto NC, si costruiscono prima F e la tangente  $t_F$  in F, e poi la tangente  $t_C$  in C come congiungente del punto intersezione di  $t_F$  con l'asse di EA, e del punto intersezione di  $t_N$  con l'asse di BA.

il diagramma delle  $\tau$  per una  $T_y$  generica si presenta come nella fig. 10-33 b.

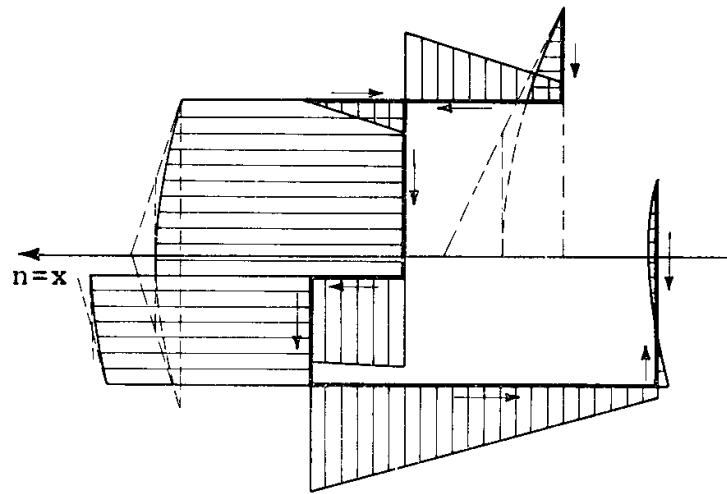


FIG. 10-33 b

Le forze agenti lungo ogni tratto sono riportate nella fig. 10-33 c; esse si

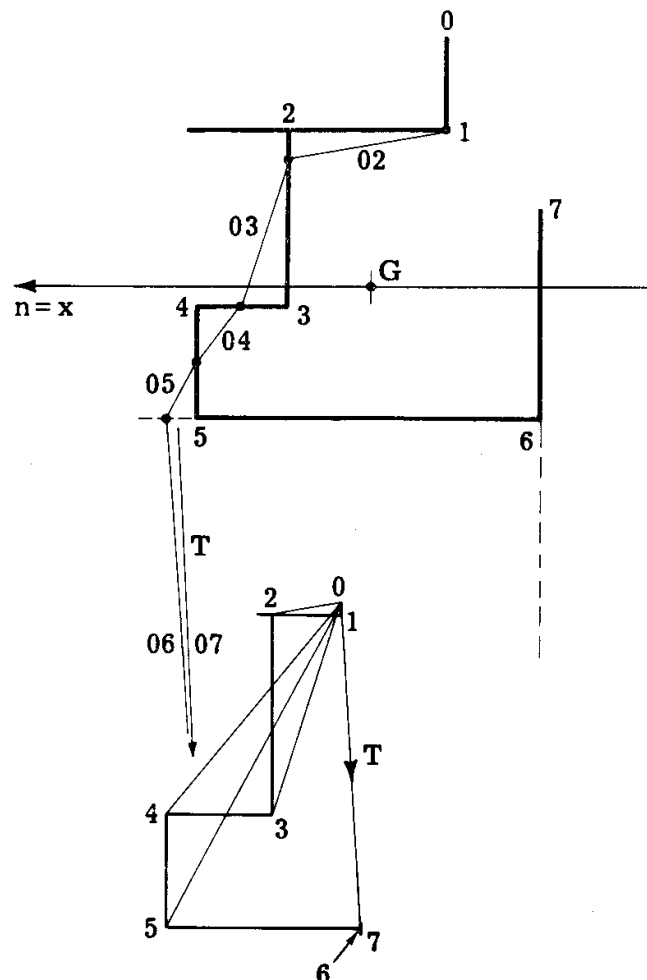


FIG. 10-33 c

compongono tracciando il poligono delle successive risultanti, e danno

per risultante una forza  $T$  definita in intensità e retta d'azione; quest'ultima avrà la direzione della coniugata di  $x$ .

Ripetendo la stessa costruzione a partire dall'asse neutro  $y$ , l'incontro delle due rette d'azione definisce la posizione di  $C$ . Le sollecitazioni taglianti dei due casi si riportano a due sollecitazioni  $T$  unitarie, per poter risolvere, come detto al § 9-15, qualsiasi altro caso di sollecitazione. E' opportuno qui ricordare che il centro  $C$  può anche determinarsi sfruttando le (9-19) e (9-20). Per la terza delle (8-5)

$$w = - \frac{q M_t}{G I_p} \Psi = - \vartheta' \Psi$$

e quindi

$$\Psi = - \frac{w}{\vartheta'} = - w_u .$$

dove  $w_u$  sono le  $w$  calcolate per  $\vartheta' = 1$ . Per le (10-13) e (10-30) è

$$w_u = - 2 A_s + \frac{1}{G} \int_R^P \tau_u ds$$

dove l'integrale compare nelle sezioni chiuse. Le (9-19) e (9-20) si scrivono così

$$\begin{aligned} x_C &= - \frac{1}{I_x} \int_m w_u y \delta ds \\ y_C &= \frac{1}{I_y} \int_m w_u x \delta ds . \end{aligned} \tag{34}$$

Si ricorda che  $x$  ed  $y$  sono baricentrici e principali di inerzia, e le  $A_s$  sono relative al baricentro.

Delle (10-34) si può avere, per le sezioni aperte costituite da un sol tratto, un'immediata dimostrazione per una via diversa da quella seguita per giungere alle (9-19) e (9-20). In questo caso è

$$\begin{aligned} \Psi &= - w_u = 2 A_s \\ x_C &= \frac{2}{I_x} \int_m A_s y \delta ds = 2 \frac{S_x^*}{I_x} \\ y_C &= - \frac{2}{I_y} \int_m A_s x \delta ds = 2 \frac{S_y^*}{I_y} . \end{aligned} \tag{35}$$

Siano infatti  $x = \xi$  ed  $y = \eta$  gli assi principali d'inerzia della sezione (fig. 10-

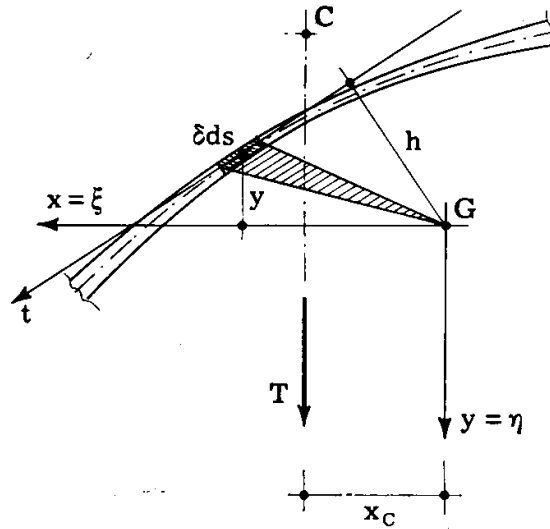


FIG. 10-34

34), soggetta a taglio secondo  $y$ . Il momento della forza elementare  $\tau \delta ds$  rispetto a  $G$  è fornito, come già noto, da

$$dM_t = \tau \delta ds h$$

dove  $h$  è la distanza di  $G$  dalla retta  $t$ ;  $\tau$  è positiva se orientata nel verso di  $t$ ,  $h$  è positivo se  $G$  è alla sinistra di  $t$ . Il momento di tutte le forze  $\tau \delta ds$  rispetto a  $G$  è perciò

$$M_t = \int_m \tau \delta h ds = - \frac{T}{I_x} \int_m S_x h ds = - 2 \frac{T}{I_x} \int_m S_x dA_s,$$

dove  $dA_s$  è l'area settoriale elementare di vertice  $G$  e base  $ds$ .

Poichè  $T$  è parallelo ad  $y$ , la sua distanza da  $G$  coincide con la coordinata  $x_C$  del centro di taglio; l'uguaglianza tra i momenti intorno a  $G$  fornisce quindi

$$T x_C = - 2 \frac{T}{I_x} \int_m S_x A_s$$

da cui

$$x_C = - \frac{2}{I_x} \int_m S_x dA_s. \quad (n)$$

Si può scrivere

$$2 S_x^* = 2 \int_m A_s y \delta ds = \int_m y \delta \int_0^s h ds' ds;$$

così pure si ha, essendo  $2 dA_s = h ds$ ,

$$2 \int_m S_x dA_s = \int_m h \int_0^s y \delta ds' ds .$$

Si ottiene, integrando per parti ( $h ds$  fattore infinitesimo,  $\int_s^0 y \delta ds'$  fattore finito),

$$\int_m h \int_0^s y \delta ds' ds = \left[ \int_0^s h ds' \int_0^s y \delta ds' \right]_m - \int_m y \delta \int_0^s h ds' ds .$$

Poichè  $x$  è baricentrico, si ha

$$\left[ \int_0^s y \delta ds' \right]_m = \int_m y \delta ds' = 0 ,$$

e quindi

$$\int_m h \int_0^s y \delta ds' ds = - \int_m y \delta \int_0^s h ds' ds ,$$

da cui

$$2 \int_m S_x dA_s = - 2 S_y^*$$

e, dalla (n),

$$x_C = \frac{2 S^*}{I_x} .$$

Analogamente si perviene alla seconda delle (10-35).

La suddetta dimostrazione è stata effettuata per una sezione aperta senza diramazioni. Negli altri casi, la dimostrazione può ripetersi suddividendo gli integrali in tante parti quanti sono i tratti.

## 7. La sezione sottile chiusa soggetta a taglio.

Si è detto nel paragrafo precedente che, partendo da un estremo, dove  $\tau = 0$ , si può disegnare il diagramma di  $\tau$  per tutta la sezione. Se la sezione è chiusa (fig. 10-35) l'inclinazione è sempre fornita dalla (10-33); ma non esiste alcuna ascissa ove la  $\tau$  sia conosciuta.

Occorre perciò rendere la struttura monoconnessa, mediante tanti tagli  $S_h$  quante sono le maglie (ovviamente eseguiti in modo da non scon-



nettere la sezione, lasciando una parte pluriconnessa); se in corrispondenza dei tagli  $S_h$  sono conosciuti i valori  $\tau_h$  delle  $\tau$ , si può risalire nel

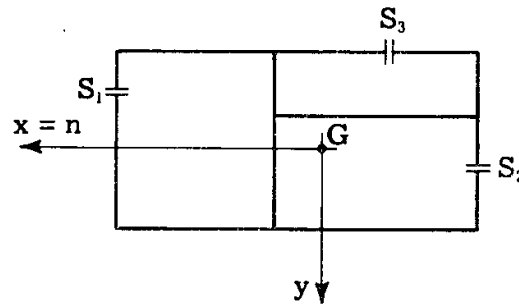


FIG. 10-35

modo solito alle  $\tau$  su tutta la struttura. Costruiti così i diagrammi delle  $\tau$ , dove le  $\tau_h$  sono incognite, gli  $m$  valori di quest'ultime si ottengono attraverso le  $m$  equazioni esprimenti il teorema di *Stokes* per ogni maglia. Poichè  $\text{rot } \bar{\tau} = 0$ , le equazioni sono

$$\int_{mh} \tau ds = 0 . \quad (36)$$

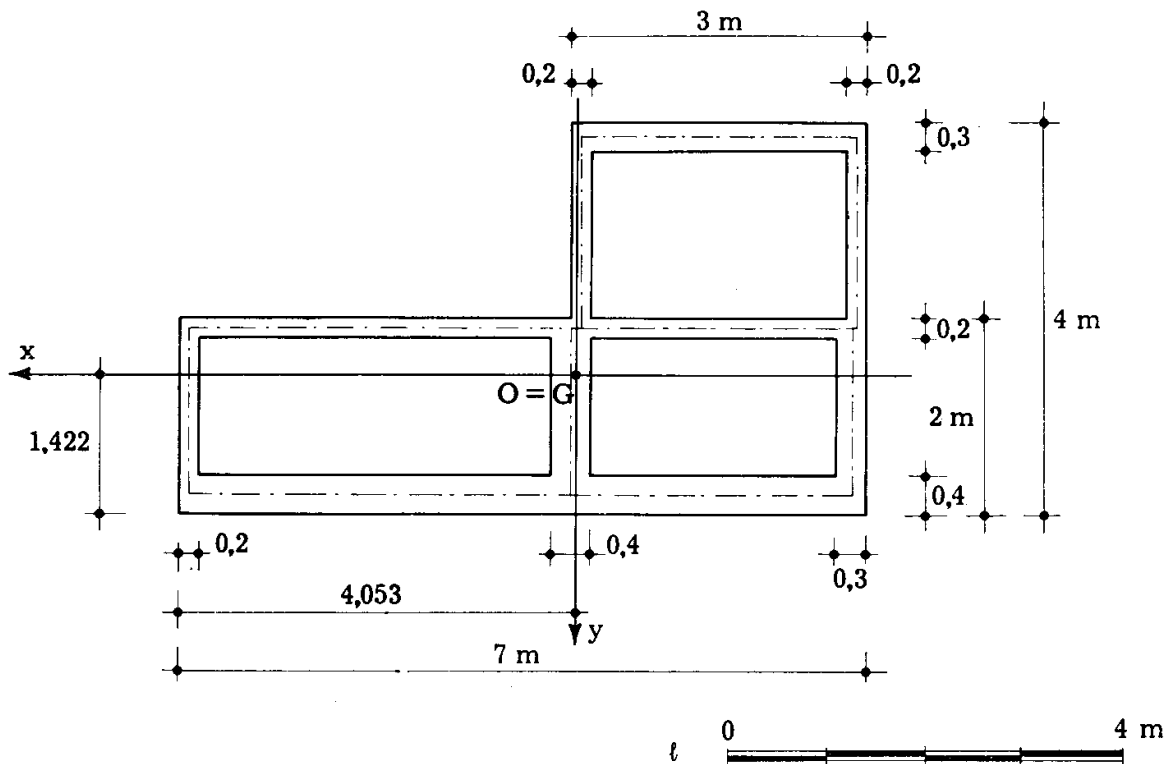


FIG. 10-36 a

Si riporta un esempio di calcolo delle tensioni  $\tau$  e del centro di taglio, eseguito per la sezione quattro volte connessa della fig. 10-36 a. Il rife-

rimento prescelto è quello disegnato nella figura stessa; l'origine O coincide con il baricentro della sezione, e gli assi x ed y sono paralleli ai bordi.

Si ha:

$$I_x = 12,67 \text{ m}^4$$

$$I_y = 31,43 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = - 6,08 \text{ m}^4 .$$

Si considera la sezione suddivisa in rettangoli, così come indicato in fig. 10-36 b; i rettangoli e le maglie sono numerati, e così pure è fissato il verso positivo delle  $\tau$ .

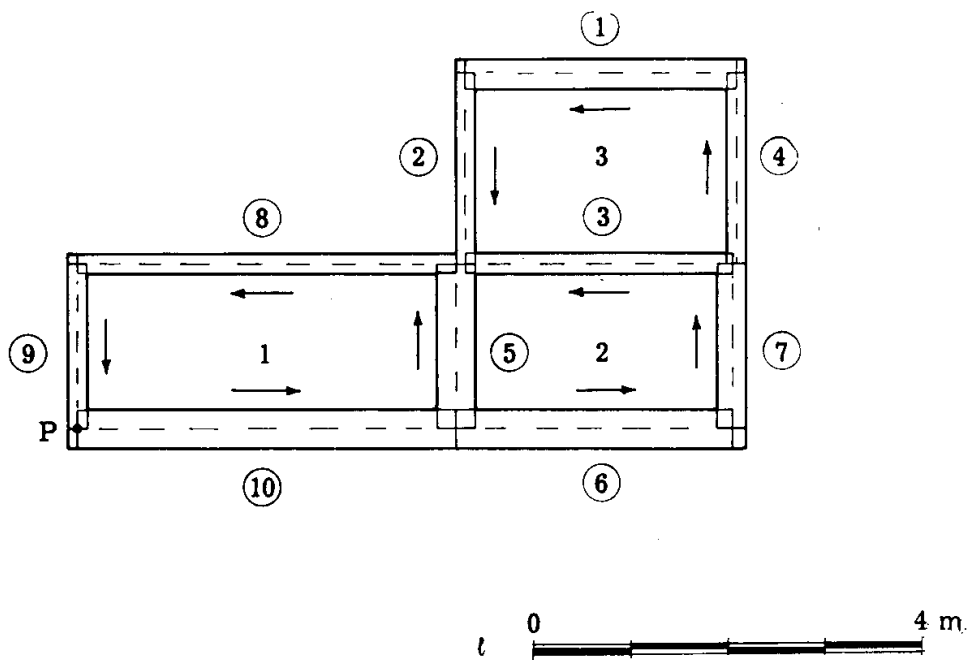


FIG. 10-36 b

Nel primo stadio si assume l'asse x come asse neutro, e si determina, con le già esposte costruzioni grafiche, la distribuzione delle  $\tau$  per la sezione resa monoconnessa con tre tagli in A, B, C (fig. 10-37).

Per semplificare, conviene imporre la condizione (numerica)

$$\frac{T_y}{I_x} = 1, \quad T_y = I_x$$

e riportare in diagramma le quantità

$$t = - \frac{S_x}{\delta}$$

Alle  $t$  di fig. 10-37 vanno aggiunte quelle di fig. 10-38 per ripristi-

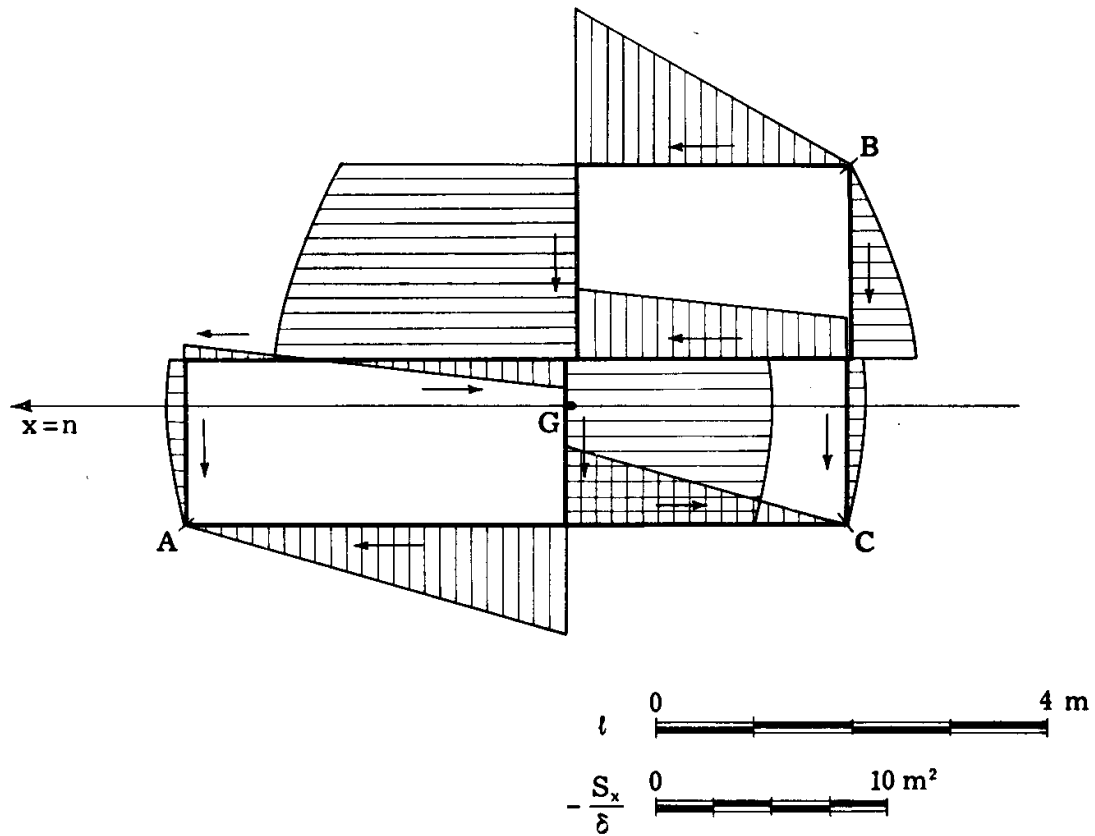


FIG. 10-37

nare la congruenza in A, B, C. I valori  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  si calcolano scrivendo,

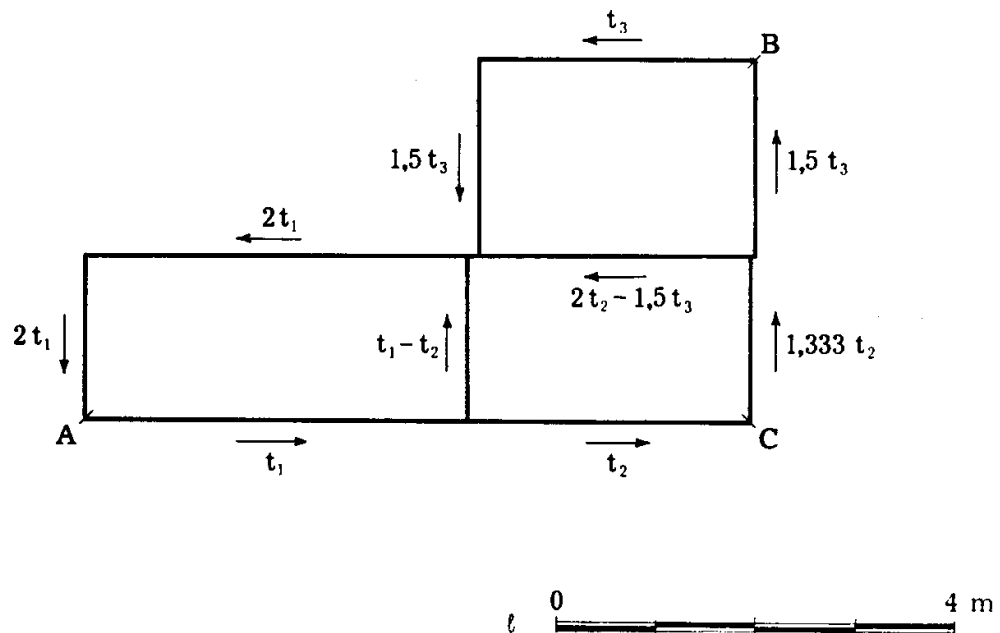


FIG. 10-38

per ogni maglia:

$$\int_{m_i} \tau ds = 0$$

e cioè, in termini di circuitazione di  $t$ ,

$$\int_{m_i} t ds = 0. \quad (o)$$

L'integrale della (o) può suddividersi in due aliquote: la prima dovuta alle  $t$  nella sezione resa monoconnessa, la seconda alle  $t$  correttive. Per la maglia 1 il contributo alla circuitazione (positiva se antioraria) delle  $t$  da sezione aperta vale:

$$\begin{aligned} \int_8 t ds + \int_9 t ds + \int_{10} t ds + \int_5 t ds &= \\ &= (t_{8,9} + t_{8,5}) \frac{l_8}{2} + (t_{9,8} + 4 t_{9,9} + t_{9,10}) \frac{l_9}{6} + \\ &+ (t_{10,9} + t_{10,5}) \frac{l_{10}}{2} + (t_{5,10} + 4 t_{5,5} + t_{5,8}) \frac{l_5}{6} = \\ &= - 23,555 \text{ m}^3, \end{aligned}$$

dove si è indicato con  $\int_i$  l'integrale esteso al tratto  $i$  di lunghezza  $l_i$  e con  $t_{i,k}$  e  $t_{i,i}$  rispettivamente il valore di  $t$  nel baricentro del rettangolo  $i$ , e quello nell'estremo di  $i$  comune a  $k$ .

La seconda aliquota della circuitazione si scrive, detto  $\delta_i$  lo spessore dell' $i$ -esimo rettangolo, e per la prima maglia:

$$t_1 \left( l_{10} + l_5 + l_8 \frac{\delta_{10}}{\delta_8} + l_9 \frac{\delta_{10}}{\delta_9} \right) - t_2 l_5 = 16,8 t_1 - 1,7 t_2.$$

Sviluppando la (o) per le tre maglie, si ha in definitiva il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} 16,8 t_1 - 1,7 t_2 &= + 23,555 \\ - 1,7 t_1 + 12,347 t_2 - 4,14 t_3 &= - 25,247 \\ - 5,52 t_2 + 12,94 t_3 &= - 23,117 \end{aligned} \quad (p)$$

la cui soluzione è:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1,108 \text{ m}^2 \\ t_2 &= - 2,907 \text{ m}^2 \\ t_3 &= - 3,026 \text{ m}^2 . \end{aligned} \quad (q)$$

Sommando al diagramma di fig. 10-37 le  $t$  ottenute dalla fig. 10-38 e dalle (q), si ha (fig. 10-39) lo stato tensionale nella sezione chiusa.

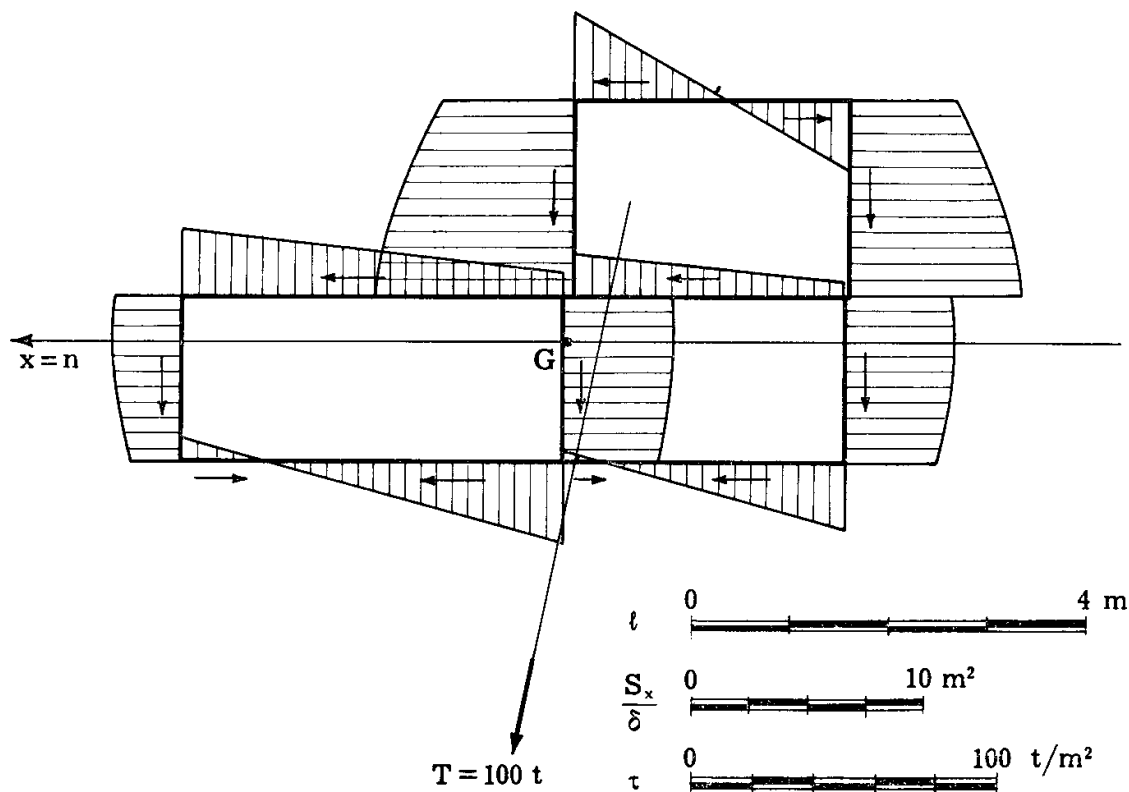


FIG. 10-39

Indicando con  $F_i$  la risultante delle  $t \, dA$  da sezione aperta agenti sul rettangolo  $i$ , può scriversi:

$$\begin{aligned} T_y &= \sum F_{iy} \\ T_x &= \sum F_{ix} . \end{aligned}$$

Poichè l'asse di sollecitazione, secondo il quale è diretta la  $T$ , è coniugato di  $x$ , la sua equazione è (Capitolo I, § 6):

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{y}{x} = - \frac{I_x}{I_{xy}} ,$$

e quindi, per la condizione numerica imposta per la valutazione delle  $t$

$$T_y = I_x$$

deve risultare anche

$$T_x = - I_{xy} .$$

Calcolando le  $F_i$  con la formula

$$F_i = \int_i t \delta ds = \frac{A_i}{6} (t_{i,h} + 4 t_{i,l} + t_{i,k}) ,$$

dove  $A_i$  è l'area di  $i$ , si ottiene, con i valori di fig. 10-37:

$$T_y = F_2 + F_4 + F_9 + F_5 + F_7 = 11,97 \cong 12,67 = I_x$$

$$T_x = F_1 + F_3 + F_8 + F_6 + F_{10} = 5,85 \cong 6,08 = - I_{xy} .$$

Alla sezione è applicata una forza

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 13,32 \text{ m}^4 ;$$

dalle  $t$  si passa ai valori di  $\tau$  corrispondenti a

$$T = 100 \text{ t}$$

mediante la

$$\tau = \frac{100}{13,32} \text{ t/mq}$$

e la scala corrispondente è riportata nella figura 10-39.

La posizione dell'asse di sollecitazione relativa al diagramma di  $\tau$  sulla sezione chiusa di fig. 10-39 (la sua direzione, come pure il valore di  $T$ , non mutano rispetto a quelle calcolate sulla sezione aperta) si ottiene valutando le nuove  $F_i$  e scrivendo la condizione di equilibrio alla rotazione attorno a un punto qualsiasi:

$$Td = \Sigma F_i d_i$$

in cui  $d, d_i$  indicano le distanze di  $T$  ed  $F_i$  dal punto  $P$  comune ai rettangoli 9 e 10 (fig. 10-36 b).

Si ha:

$$d = \frac{\Sigma F_i d_i}{T} = - 3,89 \text{ m} ,$$

e ciò permette di disegnare l'asse di sollecitazione (fig. 10-39).

In maniera identica si procede assumendo come asse neutro l'asse  $y$  (fig. 10-40).

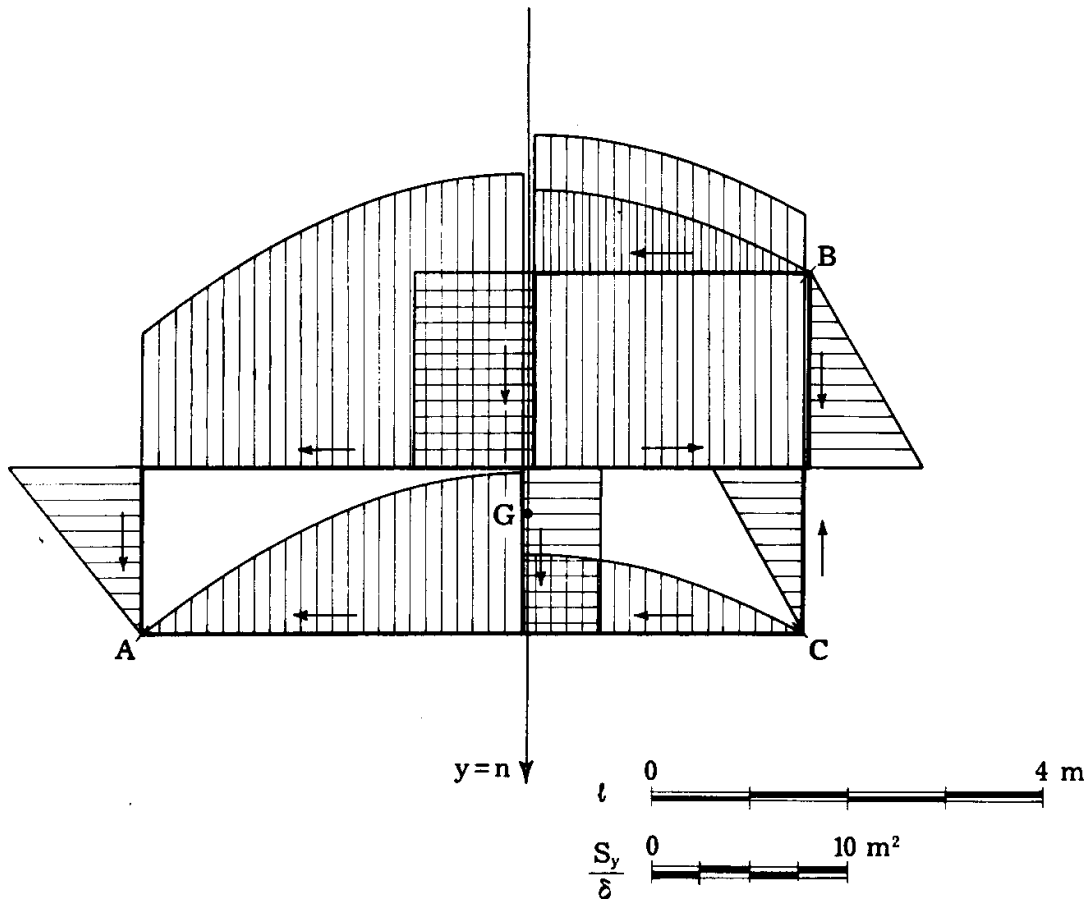


FIG. 10-40

La sezione è ancora resa monoconnessa operando tre tagli in A, B e C, ed il corrispondente diagramma di  $\tau$  è costruito nella stessa figura. Si procede ponendo (numericamente)

$$T_x = I_y$$

e si riportano in diagramma le

$$t = \frac{S_y}{\delta} ;$$

dalla condizione di coniugio tra l'asse di sollecitazione e l'asse  $y$

$$\frac{y}{x} = - \frac{I_{xy}}{I_y}$$

segue

$$T_y = - I_{xy} .$$

Con i valori della fig. 10-40, si ottiene

$$\begin{aligned} T_x = \Sigma F_{ix} &= 31,46 \cong 31,43 = I_y \\ T_y = \Sigma F_{iy} &= 6,20 \cong 6,08 = - I_{xy} . \end{aligned}$$

Poichè anche in questo secondo caso le  $t$  incognite atte a ripristinare la congruenza lungo i tagli sono le  $t_1, t_2, t_3$  di fig. 10-38, il sistema di equazioni che le determina ha lo stesso determinante dei coefficienti delle (p); eseguendo i calcoli, si ha:

$$\begin{aligned} 16,8 t_1 - 1,7 t_2 &= 21,675 \\ - 1,7 t_1 + 12,347 t_2 - 4,14 t_3 &= 39,087 \\ - 5,52 t_2 + 12,94 t_3 &= - 24,302 . \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} t_1 &= - 1,877 \text{ m}^2 \\ t_2 &= - 3,735 \text{ m}^2 \\ t_3 &= 0,587 \text{ m}^2 . \end{aligned} \quad (r)$$

Utilizzando i valori (r) si costruisce il diagramma delle  $t$  effettive

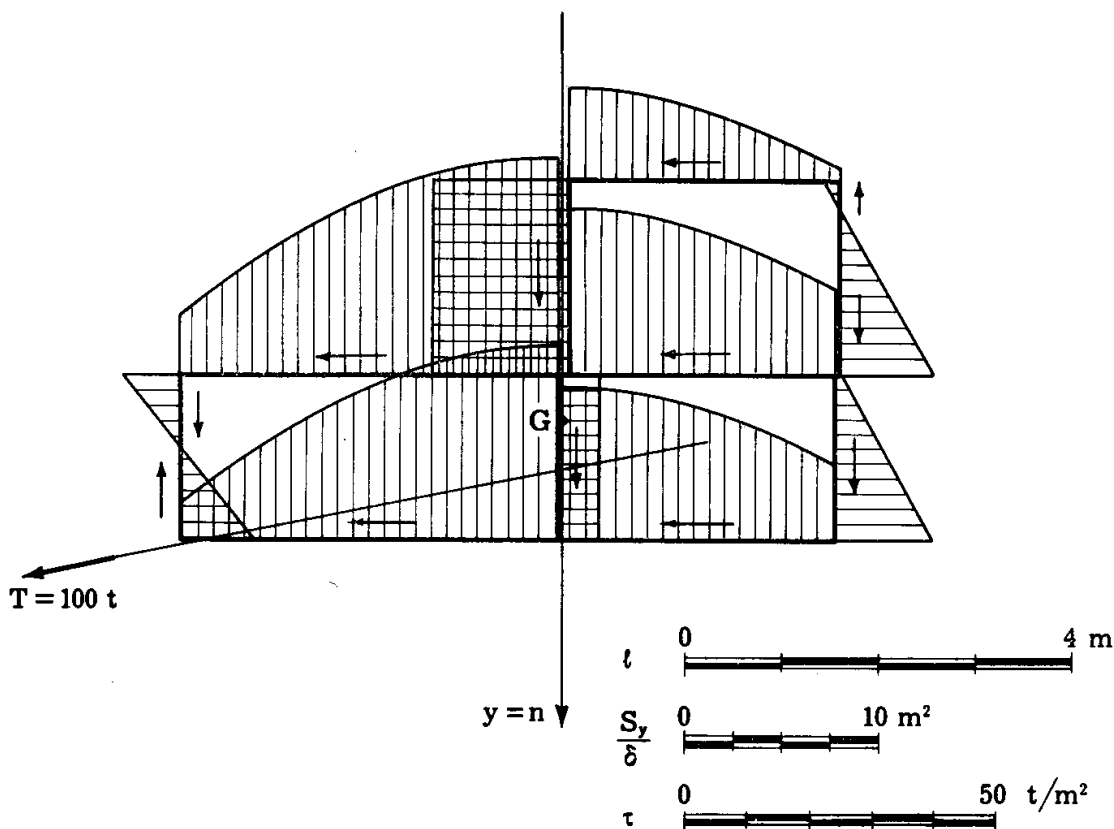


FIG. 10-41

per la sezione chiusa (fig. 10-41) e queste vengono utilizzate per scri-



vere l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a P, che fornisce

$$d = \frac{\Sigma F_i d_i}{T} = - 0,04 \text{ m} .$$

Ciò permette, insieme al risultato ottenuto assumendo  $x$  come asse neutro, di ubicare il centro di taglio C (fig. 10-42).

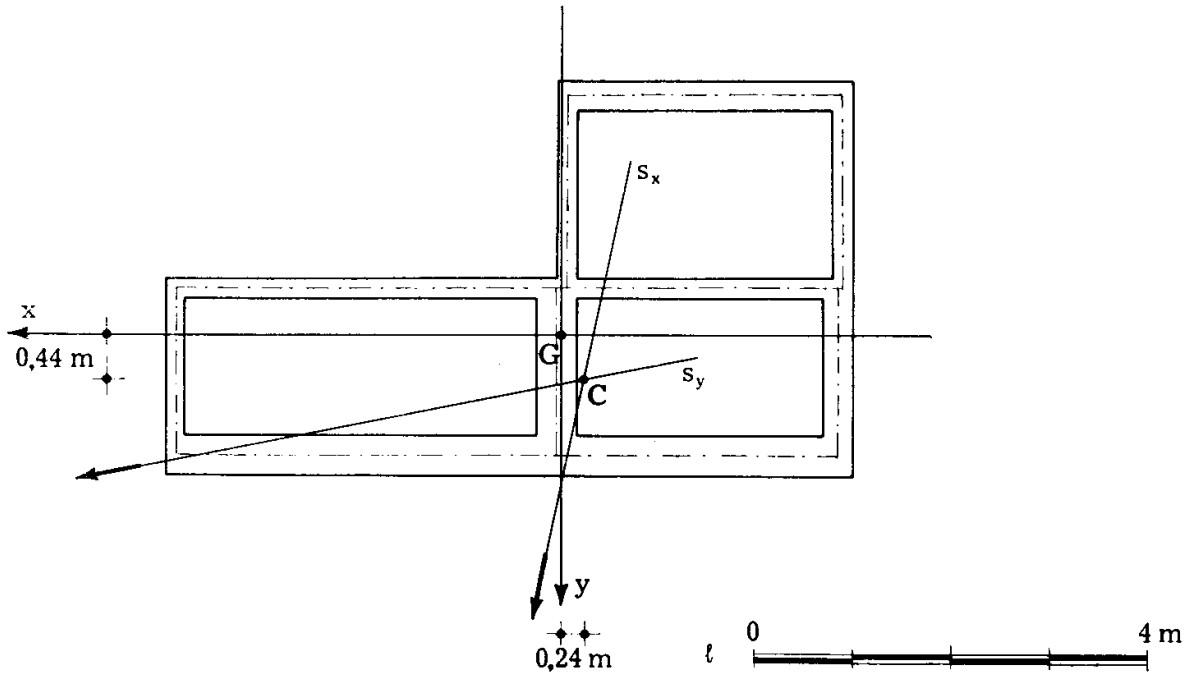


FIG. 10-42

Alla sezione è applicata una forza

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 32,07 \text{ m}^4 ;$$

le  $\tau$  corrispondenti a  $T=100 \text{ t}$  vanno lette sul disegno nella scala indicata nella fig. 10-41, e si ottengono dalla:

$$\tau = \frac{100}{32,07} \text{ t} \quad \text{t/mq} .$$

### 8. L'effetto della curvatura della linea media.

Si considera un tratto di sezione in cui il raggio di curvatura della linea media sia  $R$  (fig. 10-43); se  $\tau$  è la tensione sullo spessore giacente sull'asse  $n$ , risulta, con riferimento agli assi  $n$  e  $t$ , ed allo spessore pros-

simo a quello giacente su  $n$ ,

$$\tau_t \cong \tau$$

$$\tau_n = \frac{\tau}{R-n} t \quad (37)$$

$$r = \frac{\partial \tau_t}{\partial n} - \frac{\partial \tau_n}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial n} - \frac{\tau}{R-n} \quad (38)$$

Nel caso delle sezioni aperte soggette a torsione, la (10-2) si scrive perciò

$$r = 2 G \vartheta' = \frac{\partial \tau}{\partial n} - \frac{\tau}{R-n}$$

da cui

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 2 G \vartheta' + \frac{\tau}{R-n} \quad (39)$$

Con i dati della fig. 10-44, è  $\vartheta' > 0$ ,  $R < 0$ , quindi, rispetto al pun-

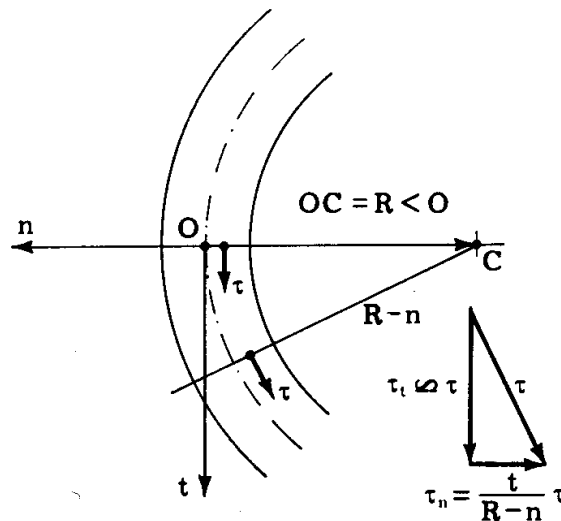


FIG. 10-43

to O ove  $\tau = 0$ , è  $\tau/R < 0$  a sinistra,  $\tau/R > 0$  a destra. Nel punto O è  $\partial \tau / \partial n = 2 G \vartheta' > 0$ ; questo valore dell'inclinazione diminuisce a sinistra, aumenta a destra, quindi il diagramma si presenta come in figura. Poiché il flusso complessivo attraverso  $\delta$  è nullo, il punto O si sposta, rispetto al punto medio di  $\delta$ , a destra, e cioè verso il centro di curvatura.

Con approssimazione, si può supporre che il diagramma delle  $\tau$  supplementari sia quadratico, e che l'inclinazione all'estremo di tale diagramma sia pari a  $\tau^*/(R - n')$ , dove la  $\tau^*$  è il valore fornito dalla (10-7)

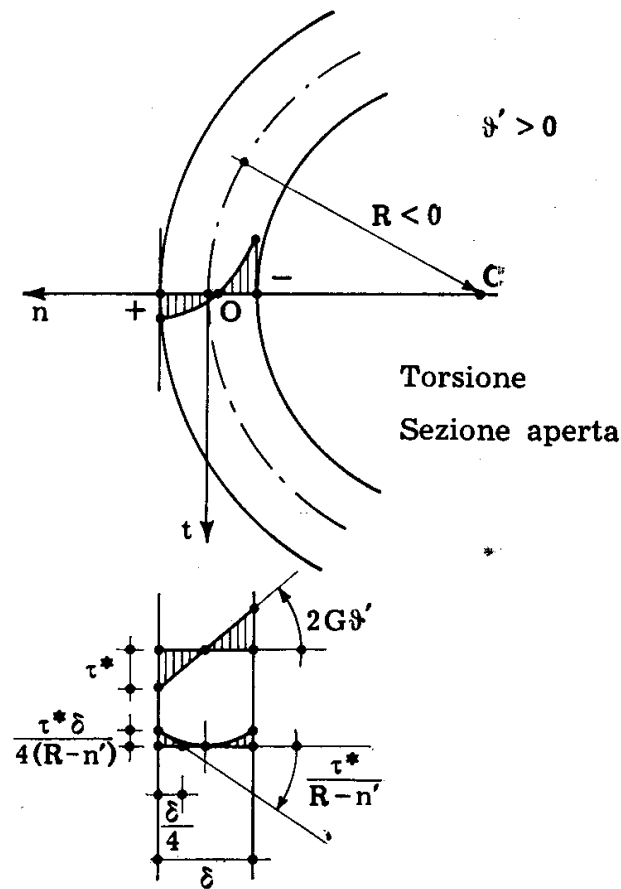


FIG. 10-44

ed  $n'$  è relativo al punto più vicino al centro di curvatura; quindi il valore massimo di  $\tau$  può porsi

$$\tau_{\max} = \tau^* \left( 1 + \frac{\delta}{4(R - n')} \right), \quad (40)$$

e si verifica nel punto dello spessore più vicino al centro di curvatura (\*).

Nelle sezioni chiuse soggette a torsione la condizione  $\tau = \text{cost}$  lungo lo spessore non soddisfa la congruenza; infatti sarebbe  $r = 0$  nei tratti rettilinei, mentre nei tratti curvilinei si avrebbe  $r = -\tau/(R - n)$ , variabile quindi lungo lo spessore.

(\*) S. TIMOSHENKO e J. N. GOODIER: *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1951 (pag. 289).

Occorre perciò correggere il diagramma costante aggiungendo un diagramma supplementare. Si suppone che tale diagramma sia lineare, e si annulli sulla linea media; se  $\tau_t$  è il valore di questo diagramma per

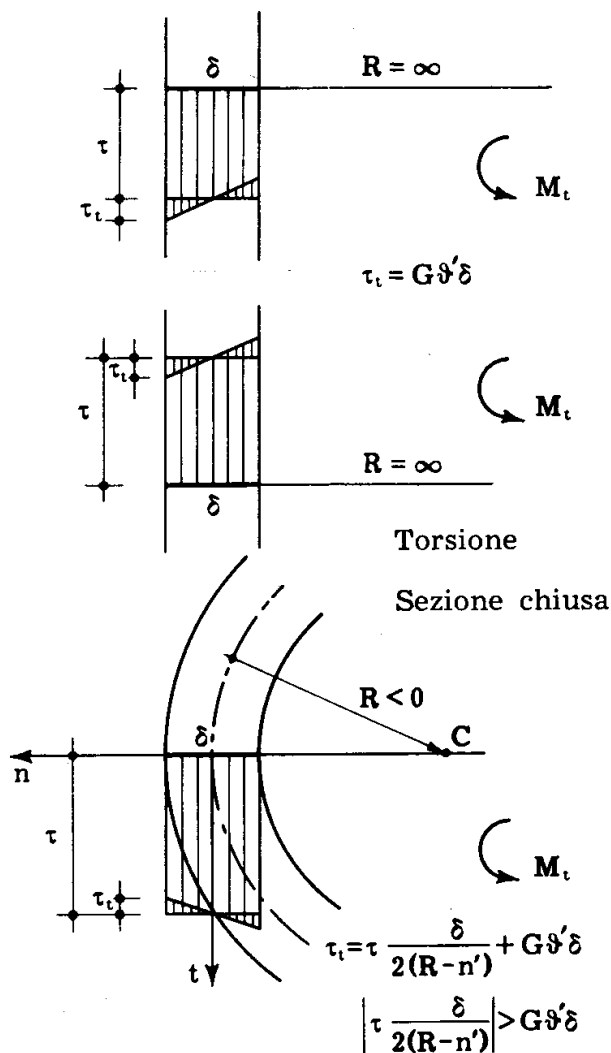


FIG. 10-45

$n = +\delta/2$ , e  $\tau_m$  il valore medio di  $\tau$  lungo lo spessore, si può porre (fig. 10-45)

$$2 \frac{\tau_t}{\delta} - \frac{\tau_m}{R - n'} = 2 G \theta' . \quad (41)$$

Dalla (10-41), ponendo in via di approssimazione  $\tau_m$  pari al valore  $\tau$  ricavato nell'ipotesi di tensione costante, si ha

$$\tau_t = \tau \frac{\delta}{2(R - n')} + G \theta' \delta . \quad (42)$$

La formula (10-42) è in ottimo accordo con quella di Timoshenko (loco citato pag. 300).

Si fa notare che nel caso dei punti angolosi, ove  $R - n' = 0$ , sia la (10-40) che la (10-42) forniscono un valore infinito di  $\tau_t$ .

Se  $R$  non è abbastanza grande rispetto a  $\delta$ , i valori (10-40) e (10-42) forniscono con buona approssimazione soltanto la  $\tau$  sull'estremo più vicino al centro di curvatura.

Si constata che nei tratti rettilinei è

$$\tau_t = G \vartheta' \delta ,$$

ed il diagramma supplementare è sempre tale da fornire un momento elementare equiverso a  $\vartheta'$ , e cioè ad  $M_t$ . Nei tratti curvilinei occorre tener conto del segno di  $R$ .

Si consideri come esempio la sezione a forma di corona circolare

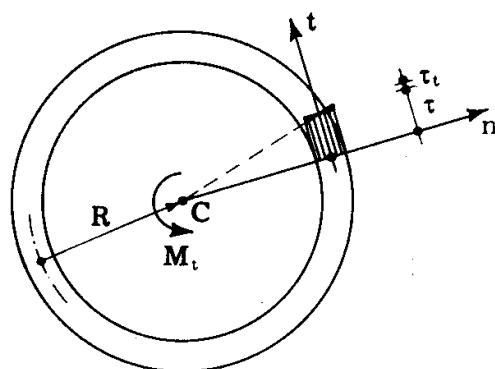


FIG. 10-46

sottile (fig. 10-46) di spessore  $\delta$  e linea media di raggio  $R$ ; per le (10-21) e (10-22) è, prendendo  $R$  in valore assoluto, e trascurando  $n'$  nei confronti di  $R$ ,

$$\tau = \frac{M_t}{2 \pi R^2 \delta}$$

$$\vartheta' = \frac{M_t}{2 \pi G R^3 \delta} .$$

La (10-42) fornisce

$$\tau_t = - \frac{M_t}{2 \pi R^2 \delta} \frac{\delta}{2 R} + G \frac{M_t}{2 \pi G R^3 \delta} \delta$$

e quindi

$$\tau_t = \frac{M_t}{4 \pi R^3} ; \quad (s)$$

risulta

$$\frac{\tau_t}{\tau} = \frac{\delta}{2 R} . \quad (t)$$

Il termine  $\tau \frac{\delta}{2 R}$  della (10-42), negativo, è in valore assoluto minore (esattamente la metà) dell'altro termine  $G \vartheta' \delta$ . Si osserva dalla (t) che il diagramma delle  $\tau$  supplementari è una retta passante per il centro C.

Una trattazione di seconda approssimazione delle sezioni chiuse si ha partendo dalla (10-41).

Si cominci con il trattare la sezione biconnessa. Il prodotto  $\tau_m \delta$  è costante, per il teorema della divergenza. Il contributo al momento  $M_t$  delle  $\tau_m \delta ds$  è

$$M_1 = 2 A_m \tau_m \delta ,$$

mentre le aree triangolari offrono un ulteriore contributo

$$M_2 = \frac{1}{6} \int_m \tau_t \delta^2 ds .$$

Per la (10-41) è

$$M_2 = \frac{G \vartheta'}{6} \int_m \delta^3 ds + \frac{\tau_m \delta}{12} \int_m \frac{\delta^2}{R} ds ;$$

quindi può scriversi

$$M_t = \tau_m \delta \left( 2 A_m + \frac{1}{12} \int_m \frac{\delta^2}{R} ds \right) + \frac{G \vartheta'}{6} \int_m \delta^3 ds . \quad (u)$$

Per il teorema di Stokes è

$$\int_m \tau_m ds = 2 G \vartheta' A_m ,$$

che può anche porsi nella forma

$$\tau_m \delta \int_m \frac{ds}{\delta} = 2 G \vartheta' A_m . \quad (v)$$

Sostituendo la (v) nella (u) si ha

$$M_t = \tau_m \delta \left( 2 A_m + \frac{1}{12} \int_m \frac{\delta^2}{R} ds + \frac{1}{12 A_m} \int_m \frac{ds}{\delta} \int_m \delta^3 ds \right)$$

e quindi le formule di *Bredt* corrette

$$\begin{aligned} \tau_m &= \frac{M_t}{\delta \left( 2 A_m + \frac{1}{12} \int_m \frac{\delta^2}{R} ds + \frac{1}{12 A_m} \int_m \frac{ds}{\delta} \int_m \delta^3 ds \right)} \\ \vartheta' &= \frac{\tau_m \delta \int_m \frac{ds}{\delta}}{2 G A_m} \\ \tau_t &= \frac{\tau_m \delta}{2 R} + G \vartheta' \delta . \end{aligned} \tag{43}$$

Nel caso della corona circolare (fig. 10-46) è  $\delta = \text{cost}$ ,  $R < 0$ , e quindi

$$\begin{aligned} A_m &= \pi R^2 \\ \int_m \frac{\delta^2}{R} ds &= -2 \pi \delta^2 \\ \frac{1}{A_m} \int_m \frac{ds}{\delta} \int_m \delta^3 ds &= 4 \pi \delta^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \tau_m &= \frac{M_t}{\delta \left( 2 \pi R^2 + \pi \frac{\delta^2}{6} \right)} = \frac{M_t}{2 \pi R^2 \delta \left( 1 + \frac{\delta^2}{12 R^2} \right)} \\ \vartheta' &= - \frac{M_t}{2 \pi G R^3 \delta \left( 1 + \frac{\delta^2}{12 R^2} \right)} \\ \tau_t &= - \frac{M_t}{4 \pi R^3 \left( 1 + \frac{\delta^2}{12 R^2} \right)} . \end{aligned} \tag{z}$$

Dalle (z) e dalle (10-21) ed (s) si osserva che sia  $\tau_m$  che  $\tau_t$  differiscono dai valori di prima approssimazione per il fattore

$$1 + \frac{\delta^2}{12 R^2},$$

mentre  $\tau_t$  sta a  $\tau$  (o a  $\tau_m$ ) nel rapporto (t)

$$\frac{\delta}{2 R};$$

ciò significa che è lecito, in prima approssimazione, e trascurando  $\delta/R$  nei confronti dell'unità, porre  $\tau = \tau_m$ .

Nel caso limite della sezione piena di raggio CA si deve porre nelle (z), prendendo CA in valore assoluto,

$$\delta = CA$$

$$R = -\frac{CA}{2};$$

si ottiene

$$\tau_m = \frac{2 M_t}{\pi CA^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$\tau_t = \frac{2 M_t}{\pi CA^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

e quindi

$$\tau_{\max} = \frac{3 M_t}{\pi CA^3}$$

contro il valore esatto (8-31)

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi CA^3}.$$

L'errore si spiega facilmente, perchè la sezione non è più sottile, e le parti comprese tra due raggi, per quanto vicini, definiscono sempre un'area triangolare.

Nelle sezioni connesse più di due volte, il procedimento è analogo; le equazioni delle maglie e dei nodi si scrivono come noto (10-23 e 10-24) ma nelle  $\tau_m$ ; l'equazione di equilibrio globale si scrive aggiungendo al termine (10-25), scritto



nelle  $\tau_m$ , quello relativo ai diagrammi triangolari delle  $\tau$ :

$$M_t = 2 \sum_k \tau_{km} \delta_k A_{sk} + \frac{1}{6} \left( \sum_k \tau_{km} \delta_k \int_k \frac{\delta^2 ds}{2R} + G \vartheta' \int_m \delta^3 ds \right).$$

Nelle sezioni soggette a taglio (chiuse o aperte) l'ipotesi di  $\tau$  costante lungo lo spessore è in accordo con la posizione (10-32)

$$\text{rot } \bar{\tau} = 0$$

lungo i tratti rettilinei, non lo è più in quelli curvilinei. E' opportuno perciò, in seconda approssimazione, sovrapporre al diagramma costante un diagramma triangolare, di valore  $\tau_t$  per  $n = +\delta/2$ , tale che sia

$$2 \frac{\tau_t}{\delta} - \frac{\tau}{R - n'} = 0,$$

dove  $\tau$  è il valore della  $\tau_m$ , coincidente con quello calcolato nell'ipotesi di  $\tau$  costante lungo lo spessore; si ha perciò

$$\tau_t = \tau \frac{\delta}{2(R - n')} \quad (44)$$

La fig. 10-47 mostra la costruzione grafica della  $\tau_t$ , nell'ipotesi che  $n'$  sia trascurabile rispetto a  $R$ ; si osserva che il valore assoluto della  $\tau$  risulta sempre incrementato nel bordo più vicino al centro di curvatura.

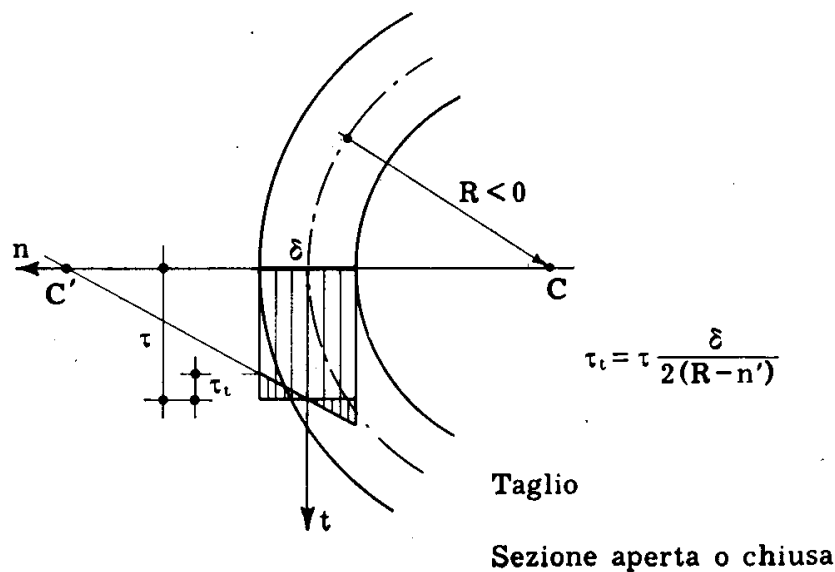


FIG. 10-47

Si avverte che, prendendo in considerazione l'effetto delle curvature della linea media, la posizione del centro di taglio viene, sia pure di poco, alterata.

### 9. La torsione non uniforme.

I risultati del De Saint-Venant sono validi se — tra le altre ipotesi — la superficie laterale è scarica, e le basi sono sollecitate alla De Saint-Venant. Se queste due ipotesi non si verificano, in particolare se su una base gli ingobbimenti  $w$  sono impediti dal vincolo che quindi esercita delle  $p_z$ , occorre correggere i risultati. Se  $\vartheta$  è l'angolo generico di rotazione torsionale, la

$$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz}$$

è costante nella teoria del De Saint-Venant ( $\vartheta'$  *angolo specifico di torsione* § 8-2), è invece variabile con  $z$  se qualcuna delle ipotesi suddette cade in difetto. Si parla, se

$$\vartheta' = \vartheta'(z), \quad (45)$$

di *torsione non uniforme*.

Così pure cade il risultato  $\partial w / \partial z = 0$ .

Si vuole ottenere il legame fra  $M_t$  e  $\vartheta$  in regime di torsione non uniforme. Si consideri, a ciò fare, un tronco del solido (ancora di sezione costante) di lunghezza  $dz$  (fig. 10-48), in corrispondenza del quale il mo-

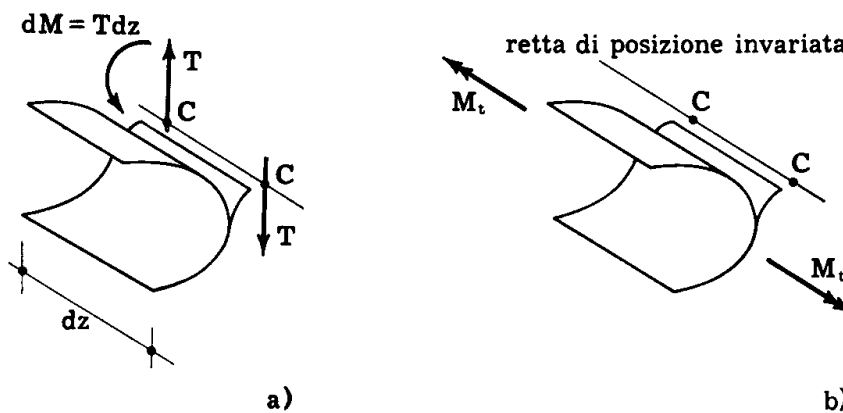


FIG. 10-48

mento torcente sia  $M_t$ . Una parte  $M_1$  di  $M_t$  è equilibrata dalle tensioni  $\tau_1$  distribuite alla De Saint-Venant, e dipendenti perciò da  $\vartheta'$ ; può porsi, dato  $\vartheta'$ ,

$$M_1 = C_1 \vartheta', \quad (a')$$

dove  $C_1$  è la già incontrata *rigidità torsionale*. Una seconda parte  $M_2$  è equilibrata da tensioni interne  $\tau_2$  supplementari, che nascono per la varia-

zione di  $w$  lungo l'asse  $z$  e cioè per le tensioni  $\sigma_z$  (variabili con  $z$  anch'esse) che derivano dalla variabilità di  $w$  (\*).

Siano  $w$  gli spostamenti da torsione calcolati, alla De Saint-Venant, in funzione di  $\vartheta'$ ; l'approssimazione della teoria consiste nel fatto che, per effetto delle  $\tau_2$ , le  $w$  sono alterate, e di ciò non si tiene conto.

Le  $w$  sono fornite per la sezione aperta dalla (10-13)

$$w = - 2 \vartheta' A_s \quad (b')$$

e per la sezione chiusa dalla (10-30)

$$w = - 2 \vartheta' \left( A_s - \frac{1}{2G} \int_R^P \tau_{1u} ds \right). \quad (c')$$

Vale sempre la condizione

$$\int_m w \delta ds = 0 ; \quad (d')$$

il punto  $R$  dove  $w=0$  deve essere scelto in modo da soddisfare questa condizione.

Per le (b') e (c') può scriversi

$$w = - 2 \vartheta' f(s)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = - 2 \vartheta'' f(s) \quad (46)$$

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial z} = - 2 E \vartheta'' f(s),$$

dove  $f(s)$  è pari ad  $A_s$  nella sezione aperta, alla parentesi della (c') nella sezione chiusa.

Le  $w$  dipendono dal centro  $O$ , traccia della fibra di posizione invariata; variando  $O$ , le  $w$  (e quindi le  $\sigma$ ) variano di una quantità lineare omogenea in  $x$  e  $y$ , e cioè variano i momenti  $M_x$  ed  $M_y$  delle  $\sigma dA$  rispetto ai due assi  $x$  ed  $y$ . Per la (d') si ha sempre

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (47)$$

---

(\*) Tale modo di procedere è giustificato dal fatto che, ottenendosi alla fine una soluzione equilibrata e congruente, questa è la soluzione del problema. Si precisa che la soluzione è congruente a meno delle  $\gamma_2 = \tau_2/G$ , che si trascurano per non alterare le  $w$ ; comunque, le  $\gamma_2$  non alterano la  $\vartheta(z)$ .

Si scelga  $O$  coincidente con il centro di taglio  $C$ , e si esprima il lavoro mutuo tra le due sollecitazioni di taglio e torsione; esso è fornito da (fig. 10-48)

$$L_{ab} = \int_A d\sigma_f w dA ,$$

dove  $d\sigma_f$  è la differenza di tensione normale tra due punti corrispondenti delle due basi in a), e  $w$  gli spostamenti in b). Infatti, si è scelta la retta dei centri di taglio come fibra fissa nel calcolo dei  $w$  da torsione; le tensioni tangenziali in a) compiono lavoro per gli spostamenti dovuti alla rotazione rigida della sezione nella torsione; quindi tale lavoro è uguale a quello delle risultanti  $T$ , che passano proprio per  $C$ , e cioè è nullo. Non resta quindi, in  $L_{ab}$ , che il lavoro delle  $d\sigma_f$ .

Poichè

$$L_{ab} = 0 ,$$

si ha pure

$$\int_A d\sigma_f w dA = 0 ,$$

e cioè, assumendo in a) l'asse neutro coincidente con  $x$  o  $y$  (baricentrici)

$$\int_m w x \delta ds = 0 \tag{e'}$$

$$\int_m w y \delta ds = 0$$

da cui

$$M_x = \int_A \sigma y dA = 0 \tag{48}$$

$$M_y = - \int_A \sigma x dA = 0$$

Poichè  $N=0$ , i momenti delle  $\sigma dA$  sono nulli rispetto a qualsiasi retta del piano  $x y$ .

Come la (10-47) dipende dalla scelta di  $R$ , così le (10-48) discendono dall'aver scelto  $O=C$ .

Poichè le (10-48) devono essere rispettate, ogni volta che si è in presenza di torsione non uniforme la sezione ruota spontaneamente intorno a C, se ciò le è consentito. Se, come a volte accade, il generico vincolo consente la  $\mathfrak{F}$  o la  $\mathfrak{F}'$  intorno ad un centro obbligato su una retta, è necessario che il punto C stia su tale retta. In genere, i vincoli che consentono  $\mathfrak{F}$  o  $\mathfrak{F}'$  devono anche permettere, con riferimento alla *struttura fondamentale* (\*), che queste ultime avvengano intorno a C; in caso contrario, il regime tensionale nella torsione non uniforme presenta variazioni anche notevoli rispetto a quello trattato nel presente paragrafo ed in quelli seguenti.

Le  $\sigma$  sono in genere variabili con  $z$ ; sorgono perciò le  $\tau_2$  supplementari, per ragioni di equilibrio. Dalla fig. 10-49 risulta, considerando le  $\tau_2$

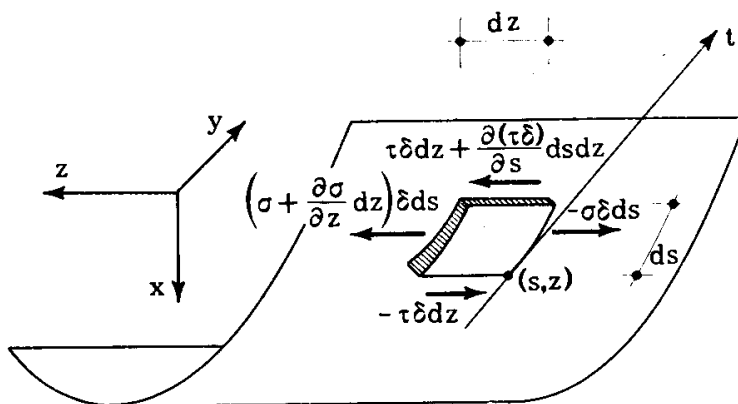


FIG. 10-49

costanti su ogni spessore  $\delta$ , e fissato un qualsiasi verso per l'ascissa  $s$  crescente,

$$\frac{\partial (\tau_2 \delta)}{\partial s} ds dz + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \delta ds = 0$$

da cui

$$\frac{\partial (\tau_2 \delta)}{\delta s} = - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta$$

e, per la (10-46),

$$\frac{\partial (\tau_2 \delta)}{\partial s} = 2 E \delta f \mathfrak{F}''' \quad (f')$$

(\*) Si intende per *struttura fondamentale* quella, isostatica o ancora iperstatica, sulla quale si opera, attraverso la congruenza, per ottenere la soluzione sulla struttura effettiva.

Dato un punto A fisso e un punto P variabile, dalla (f') si trae:

$$(\tau_2 \delta)_P = (\tau_2 \delta)_A + 2 E \vartheta''' \int_A^P f \delta ds . \quad (49)$$

Il calcolo delle  $\tau_2$  può essere eseguito attraverso le (10-49), una volta conosciuto  $\vartheta'''$ . In ogni nodo infatti deve verificarsi l'equazione (10-23)

$$\Sigma_i \tau_{2i} \delta_i = 0 ; \quad (g')$$

per ogni maglia deve verificarsi l'equazione analoga alla (10-24)

$$\int_{mh} \tau_2 ds = 0 ,$$

poichè il flusso della rotazione  $2 G \vartheta' A_{mh}$  è assorbito tutto dalla circuitazione di  $\tau_1$ ; agli estremi di una sezione aperta è  $\tau_2 = 0$ .

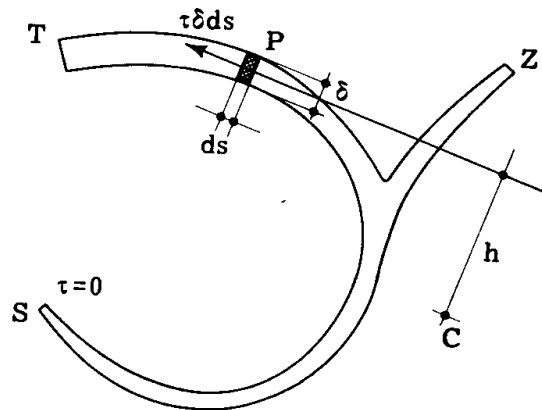


FIG. 10-50

Le forze  $\tau_2 \delta ds$  hanno risultante nulla; il loro momento  $M_2$  può essere perciò calcolato rispetto ad un punto qualsiasi del piano, in particolare C.

Si ha così (fig. 10-50)

$$M_2 = \int_m \tau_2 \delta h ds ;$$

poichè è

$$2 df = h ds - \frac{1}{2 G} \tau_{1u} ds$$

si può scrivere

$$M_2 = 2 \int_m \tau_2 \delta \frac{df}{ds} ds + \frac{1}{2G} \int_m \tau_2 \tau_{1u} \delta ds = 2 \int_m \tau_2 \delta \frac{df}{ds} ds .$$

Chiamando  $\tau_{1u}^*$  le  $\tau_{1u}$  calcolate alla Bredt per le singole maglie come nel § 10-4 d, si ha

$$\int_m \tau_{1u} \tau_2 \delta ds = \sum_h \tau_{1u}^* \delta_h \int_{mh} \tau_2 ds = 0 .$$

Dalla (f') si ha, partendo da un punto A ove  $\tau_2 = 0$ ,

$$M_2 = 4 E \vartheta''' \int_m \left[ \int_A^P f \delta ds \right] \frac{df}{ds} ds . \quad (h')$$

Se la sezione è aperta e costituita da un solo tratto, o se è chiusa e costituita da una sola maglia, risulta

$$\int_m \left[ \int_A^P f \delta ds \right] \frac{df}{ds} ds = \left[ f \int_A^P f \delta ds \right]_m - \int_m f^2 \delta ds ;$$

poichè

$$\int_m f \delta ds = 0 \quad (i')$$

è pure

$$\int_m \left[ \int_A^P f \delta ds \right] \frac{df}{ds} ds = - \int_m f^2 \delta ds . \quad (l')$$

Se la sezione è aperta con tratti diramati, o chiusa con più maglie, occorre suddividere l'integrale nella sommatoria dei termini relativi ai singoli tratti k, di estremi  $M_k$  ed  $N_k$ . Si ha così

$$\begin{aligned} \int_m \left[ \int_A^P f \delta ds \right] \frac{df}{ds} ds &= \sum_k \int_{M_k}^{N_k} \left[ \int_A^P f \delta ds \right] \frac{df}{ds} ds = \\ &= \frac{1}{2 E \vartheta'''} \sum_k \left[ f_{N_k} (\tau_2 \delta)_{N_k} - f_{M_k} (\tau_2 \delta)_{M_k} \right] - \sum_k \int_{M_k}^{N_k} f^2 \delta ds . \end{aligned}$$

Si può scrivere, per la (g')

$$\sum_k \left[ f_{N_k} (\tau_2 \delta)_{N_k} - f_{M_k} (\tau_2 \delta)_{M_k} \right] = \sum_n (f_n \sum_i \tau_{2i} \delta_i) = 0 ,$$

dove la  $\tau_i$  è positiva se entra nel nodo, negativa se esce; quindi vale la (l') anche per sezioni aperte con diramazioni, o chiuse con più maglie.

Sostituendo la (l') nella (h') si ha

$$M_2 = - 4 E \vartheta''' \int_m f^2 \delta ds . \quad (50)$$

Sia  $M_2^o$  il momento rispetto ad un qualsiasi punto O diverso da C; si ha, indicando con l'esponente O gli enti relativi ad O,

$$M_2^o = \int_m \tau_2 \delta h^o ds = 2 \int_m \tau_2 \delta \frac{df^o}{ds} ds = - 4 E \vartheta''' \int_m f^o f \delta ds .$$

Variando O, le f variano di una quantità lineare in x ed y; si può scrivere quindi

$$M_2^o = - 4 E \vartheta''' \left[ \int_m f^2 \delta ds + a \int_m f x \delta ds + b \int_m f y \delta ds \right] .$$

Poichè i momenti delle  $\sigma$ , e quindi delle f, rispetto a qualsiasi retta della sezione sono nulli si può dire che  $M_2^o = M_2$ . Ciò assicura, come detto prima, che la risultante delle  $\tau_2 \delta ds$  è nulla.

La quantità

$$C_2 = 4 E \int_m f^2 \delta ds \quad (51)$$

si chiama *bimomento* della sezione; essa ha le dimensioni  $[F l^4]$ , e dipende dalla geometria della sezione, dal materiale, e dal centro di rotazione O (che regola le f), coincidente nel caso in esame con il centro di taglio C. Nelle sezioni aperte è

$$C_2 = 4 E \int_m A_s^2 \delta ds . \quad (51')$$

Con la posizione (10-51), la (10-50) si scrive

$$M_2 = - C_2 \vartheta''' , \quad (52)$$

e quindi, per la (a'),

$$M_t = C_1 \vartheta' - C_2 \vartheta''' ; \quad (53)$$

la (10-53) è l'equazione fondamentale delle travi soggette a torsione non uniforme.



## 10. Il caso della mensola con incastro torsionale.

Si consideri una trave a mensola AB (fig. 10-51) incastrata in A in modo che risulti  $\vartheta = 0$ , e su tutta la sezione  $w = 0$ ; è questo il cosiddetto *incastro torsionale*. In B la trave sia sollecitata da una coppia

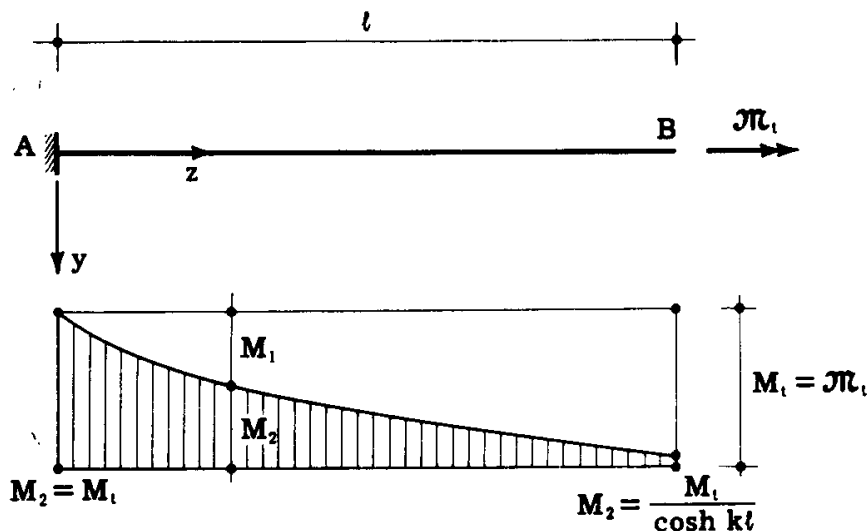


FIG. 10-51

torcente  $M_t$  applicata secondo la distribuzione di  $\tau$  nella sezione corrente, calcolata per  $z = l$ . La caratteristica torcente  $M_t$  è costante e pari ad  $M_t$ ; l'equazione è perciò la (10-53) per  $M_t$  costante.

Si ponga

$$k^2 = \frac{C_1}{C_2}; \quad (m')$$

risulta  $[C_1] = [F\ell^2]$ ,  $[C_2] = [F\ell^4]$ ,  $[k] = [\ell^{-1}]$ .

Per la (m'), la (10-53) si scrive

$$\vartheta''' - k^2 \vartheta' = - \frac{M_t}{C_2} \quad (n')$$

il cui integrale generale è

$$\vartheta = \frac{M_t}{k^2 C_2} z + A + A_1 \sinh kz + A_2 \cosh kz .$$

Per  $z = 0$  è  $\vartheta = \vartheta' = 0$ , perchè nell'incastro è impedita la rotazione  $\vartheta$  e la  $w$ , che è proporzionale (c') a  $\vartheta'$ . Per  $z = l$  si assume  $\sigma = 0$ , e quindi, per la (10-46)  $\vartheta'' = 0$ .

Si trae dalle suddette condizioni

$$A_1 = - \frac{M_t}{C_2 k^3}$$

$$A = - A_2 = - \frac{M_t}{C_2 k^3} \operatorname{tgh} k\ell$$

da cui

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_1 k} [kz - \operatorname{senh} kz + \operatorname{tgh} k\ell (\operatorname{cosh} kz - 1)] . \quad (o')$$

Per  $z = \ell$  risulta

$$\vartheta_i = \frac{M_t \ell}{C_1} \left( 1 - \frac{1}{k\ell} \operatorname{tgh} k\ell \right) . \quad (p')$$

In assenza di effetti secondari, sarebbe  $\vartheta_i = M_t \ell / C_1$ ; il termine tra parentesi, minore dell'unità, equivale ad un aumento della rigidità, ed è tanto più vicino all'unità, a parità di sezione, quanto più elevata è la lunghezza.

Dalla (o') si trae

$$\vartheta' = \frac{M_t}{C_1} (1 - \operatorname{cosh} kz + \operatorname{tgh} k\ell \operatorname{senh} kz)$$

$$\vartheta'' = \frac{M_t k}{C_1} (-\operatorname{senh} kz + \operatorname{tgh} k\ell \operatorname{cosh} kz) \quad (q')$$

$$\vartheta''' = \frac{M_t k^2}{C_1} (-\operatorname{cosh} kz + \operatorname{tgh} k\ell \operatorname{senh} kz)$$

da cui (10-52)

$$M_2 = M_t (\operatorname{cosh} kz - \operatorname{tgh} k\ell \operatorname{sen} kz) \quad (r')$$

Risulta così:

$$\text{per } z = 0 \quad M_2 = M_t \quad (s')$$

$$\text{per } z = \ell \quad M_2 = \frac{M_t}{\operatorname{cosh} k\ell} .$$

Il diagramma tratteggiato della fig. 10-51 rappresenta il momento  $M_2$ , in funzione di  $z$ ; conformemente al postulato di De Saint-Venant, si riconosce che l'effetto perturbante del vincolo si smorza con la distanza da esso.

Noti i valori  $\vartheta''(z)$  e  $\vartheta'''(z)$  si ricavano, in ogni sezione, le  $\sigma$  attraverso la (10-46), e le  $\tau_2$  connesse con la  $\sigma$  attraverso la (10-49); a queste  $\tau_2$ , uniformi su  $\delta$ , vanno aggiunte le  $\tau_1$  dovute al momento  $M_1(z) = M - M_2(z)$  e calcolate alla De Saint-Venant.

La (10-49), per la (10-52), si scrive pure

$$(\tau_2 \delta)_P = (\tau_2 \delta)_A - M_2 \frac{2E}{C_2} \int_A^P f \delta ds ; \quad (54)$$

quindi le  $\tau$  secondarie sono proporzionali ad  $M_2$ , e cioè a  $\vartheta'''$ , mentre le  $\sigma$  secondarie sono proporzionali a  $\vartheta''$ .

Il diagramma delle  $\sigma$  sulla sezione è sempre (10-46) affine a quello dei  $w$ , e varia in valore proporzionalmente a  $\vartheta''(z)$ , mentre il diagramma delle  $\tau_2$  è sempre affine a quello fornito dalla (10-54), e varia in valore proporzionalmente a  $\vartheta'''(z)$ .

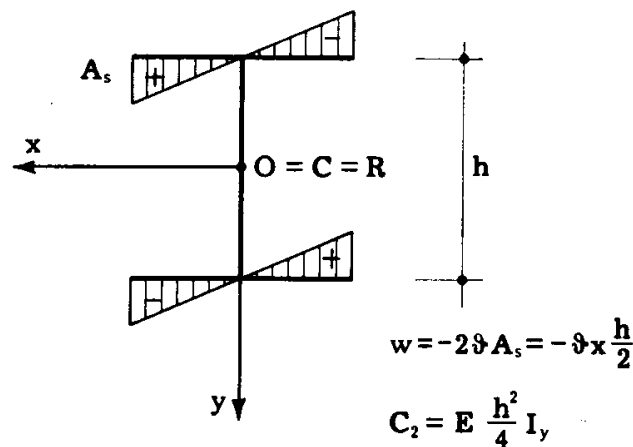


FIG. 10-52

Si prenda per esempio un profilato con sezione a I (fig. 10-52); assumendo  $O = C$  risulta

$$2 A_s = x \frac{h}{2}$$

$$w = -2 \vartheta'' A_s = -\vartheta'' x \frac{h}{2}$$

$$\int_s A_s^2 \delta ds = \frac{h^2}{16} \int_s x^2 \delta ds = \frac{h^2}{16} I_y$$

e quindi (10-51')

$$C_2 = E \frac{h^2}{4} I_y .$$

La condizione della fig. 10-51 può essere facilmente realizzata caricando una trave, appoggiata su due vincoli a forchetta alle estremità, con due forze equivalenti ad un momento torcente ed agenti in mezzeria (fig. 10-53); la sezione di mezzeria, per ragioni di simmetria, presenta ovunque  $w = 0$ .

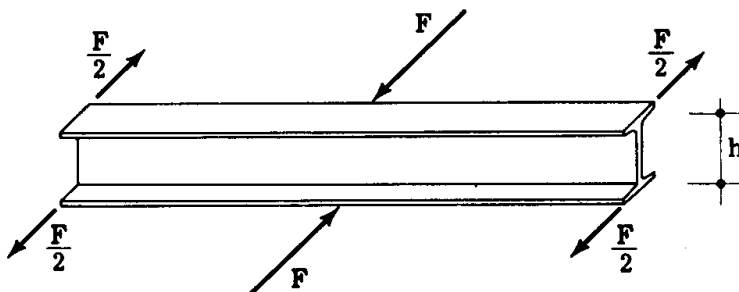


FIG. 10-53

Il *Timoshenko*, sperimentando secondo tale via, ha trovato buona rispondenza tra i risultati teorici e sperimentali.

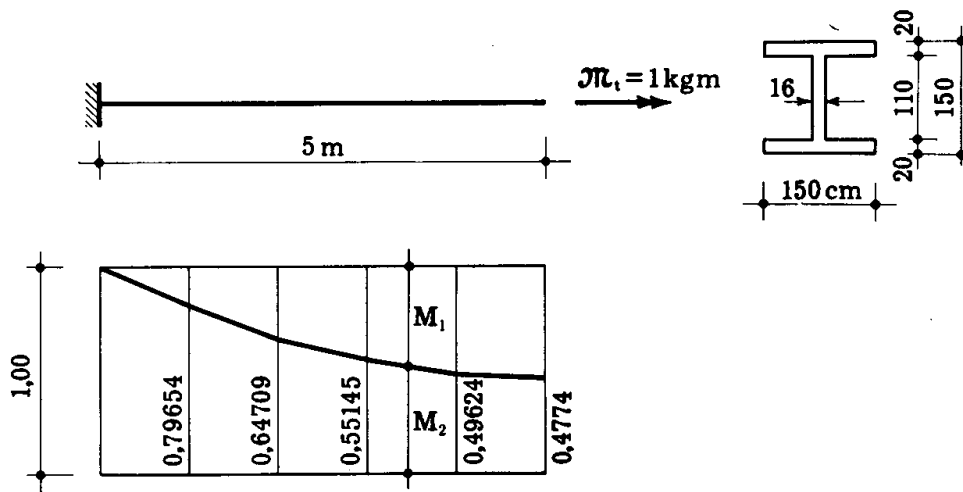


FIG. 10-54

Con riferimento alla trave a mensola con sezione a I delle dimensioni delle figg. 10-54 e 10-55, per  $E = 2 G$ , si ha

$$\begin{aligned} I_y &= 0,11287 && \text{m}^4 \\ C_1 &= 0,00475 E && \text{Kgm}^2 \\ C_2 &= 0,06349 E && \text{Kgm}^4 \\ k^2 &= 0,07481 && \text{m}^{-2} \\ k &= 0,27350 && \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

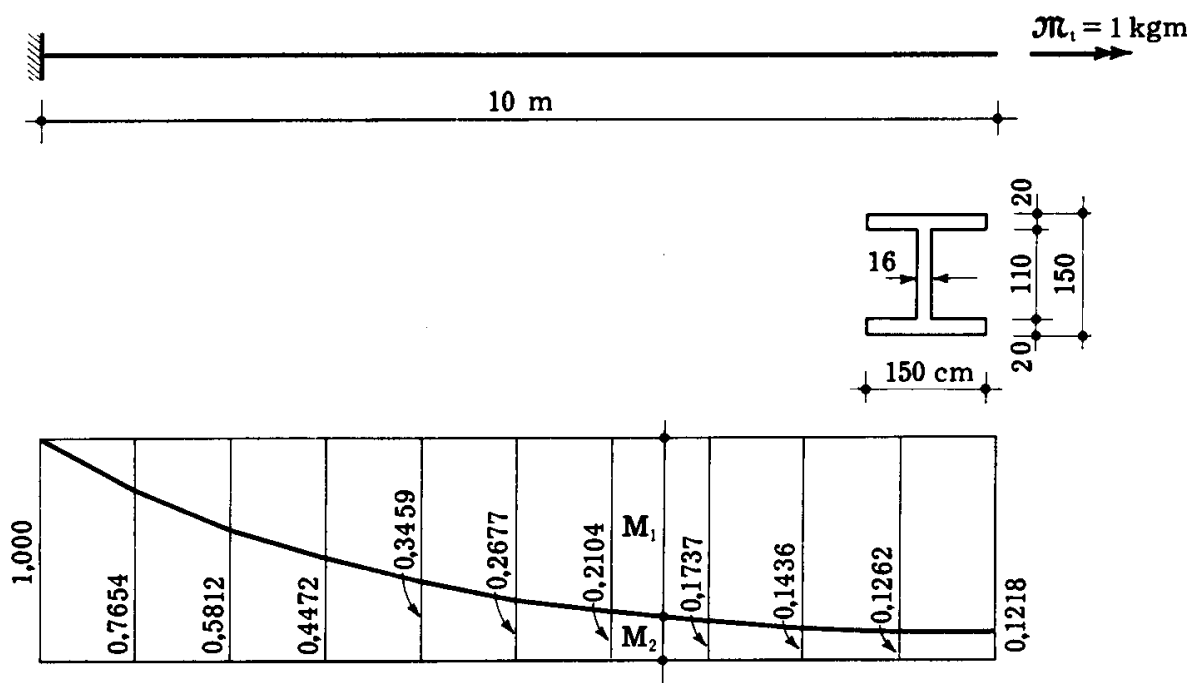


FIG. 10-55

Per luci rispettivamente di 5 m (fig. 10-54) e di 10 m (fig. 10-55) si ha

$$\operatorname{tgh} kl = 0,87869$$

$$\operatorname{tgh} kl = 0,99263$$

ed i seguenti valori dei rapporti  $M_2/M_t$

TABELLA 13

z (m)	$M_2/M_t$	
	$l = 5 \text{ m}$	$l = 10 \text{ m}$
0	1,00000	1,00000
1	0,79654	0,76540
2	0,64709	0,58122
3	0,55145	0,44719
4	0,49624	0,34595
5	0,47740	0,26768
6		0,21040
7		0,17366
8		0,14365
9		0,12618
10		0,12180

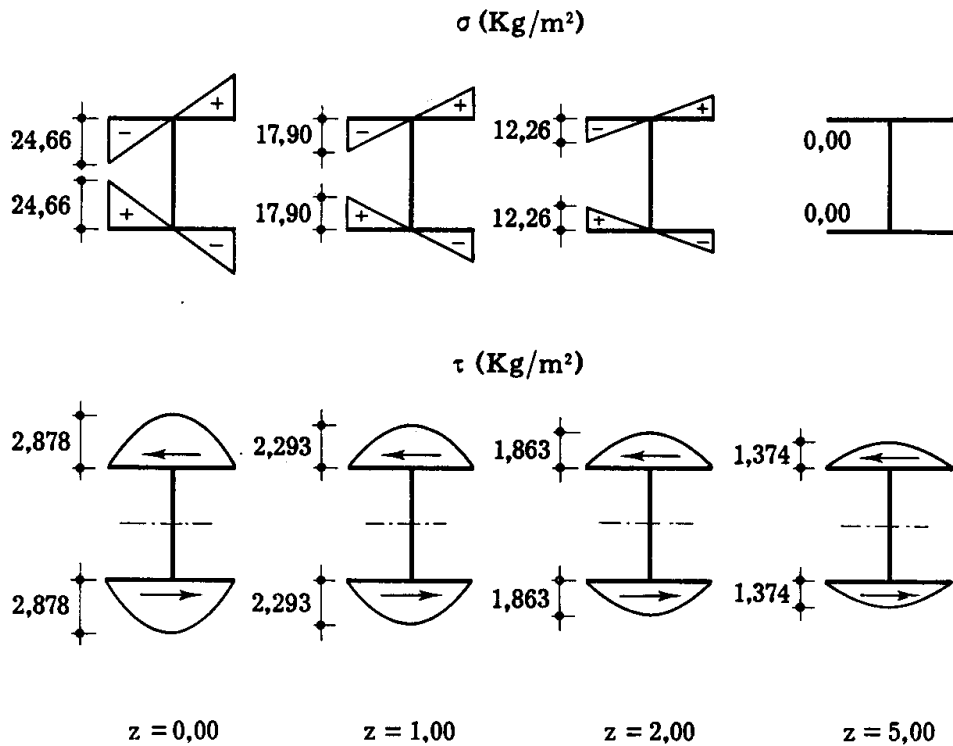


FIG. 10-56

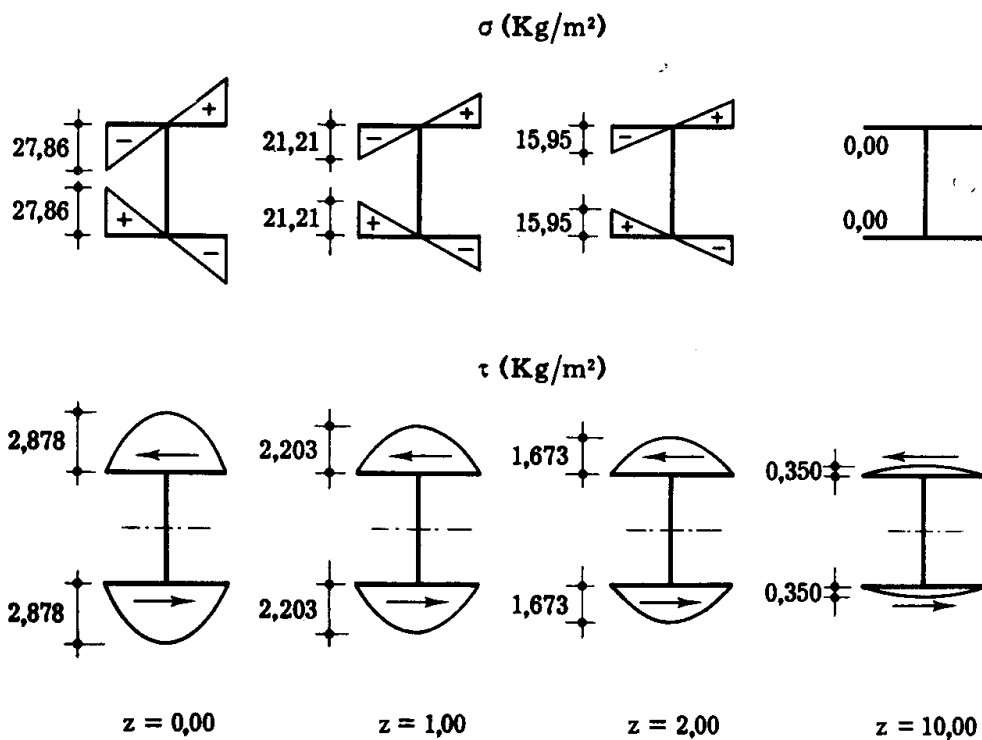


FIG. 10-57

I diagrammi di  $M_1$  ed  $M_2$  sono riportati nelle figg. 10-54 e 10-55. Si osserva come l'effetto del vincolo si smorzi molto meno rapidamente di quanto ci si attenderebbe in conformità del postulato del De Saint-Venant; inoltre aumentando la luce aumenta la rapidità di smorzamento.

Nelle figg. 10-56 e 10-57 sono riportati per varie sezioni i diagrammi delle  $\sigma$  e delle  $\tau_2$  espresse in Kg/mq, per una coppia torcente di 1 kgm. La massima  $\tau_1$  da torsione alla De Saint-Venant è fornita nelle varie sezioni dalla tabella 14.

TABELLA 14

z (m)	l = 5 m		l = 10 m	
	$M_1/M_t$	$\tau_1 \max$	$M_1/M_t$	$\tau_1 \max$
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
1,00	0,204	8,874	0,235	10,222
2,00	0,353	15,355	0,419	18,226
5,00	0,523	22,750	—	—
10,00	—	—	0,878	38,193

Il quadro delle tensioni è fornito dalla tabella 15.

TABELLA 15

l = 5 m	z (m)	$\sigma_{\max}$	$\tau_2 \max$	$\tau_1 \max$
		0,00	24,66	2,88
	1,00	17,90	2,29	8,874
	2,00	12,26	1,86	15,355
	5,00	0,00	1,37	22,750
l = 10 m	z (m)	$\sigma_{\max}$	$\tau_2 \max$	$\tau_1 \max$
	0,00	27,86	2,88	0,000
	1,00	21,21	2,20	10,222
	2,00	15,95	1,67	18,226
	10,00	0,00	0,35	38,193

L'angolo  $\vartheta$ , di rotazione della sezione estrema è fornito dai seguenti valori ( $M_t$  espresso in Kgm, E in Kg/mq)

TABELLA 16

$l = 5 \text{ m}$		$l = 10 \text{ m}$	
Alla De Saint-Venant	Corretto	Alla De Saint-Venant	Corretto
$1087 \frac{M_t}{E}$	$377 \frac{M_t}{E}$	$2174 \frac{M_t}{E}$	$1341 \frac{M_t}{E}$

Si osservi che nelle sezioni chiuse  $C_1$  è molto più alta che nelle aperte,  $C_2$  molto più bassa,  $k$  quindi estremamente più alta; ne deriva che il fenomeno delle tensioni secondarie da torsione non uniforme è molto meno sentito.

### 11. Le tensioni secondarie in regime di torsione non uniforme per momento torcente variabile (\*).

Si consideri una trave a sezione costante, vincolata alle estremità in modo che in esse sia impedita alla sezione retta la rotazione torsionale

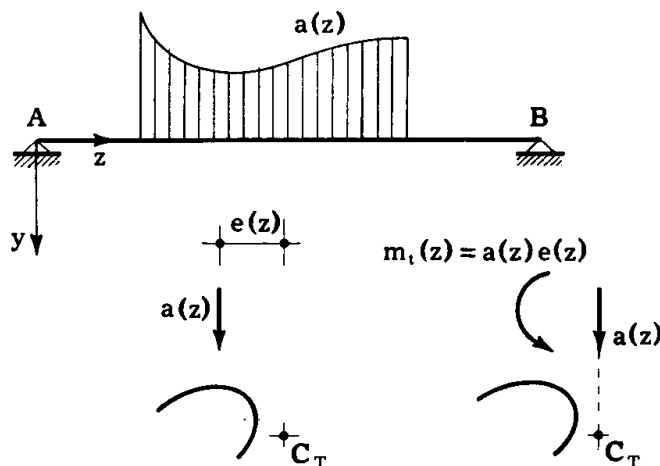


FIG. 10-58

(fig. 10-58). Agli effetti dell'abbassamento e della rotazione intorno agli

(\*) Per la lettura di questo paragrafo è necessario essere in possesso delle cognizioni elementari della teoria delle travi, contenute nel terzo volume.



altri assi il vincolo può essere di qualsiasi tipo (appoggio, o incastro più o meno cedevole). Deve comunque essere consentito che la  $\vartheta'$  in A e B avvenga intorno al centro di taglio.

La trave sia caricata da forze  $a(z)$  distribuite lungo  $z$  e di direzione normale all'asse  $z$  stesso. Riportando tali forze sulla retta dei centri di taglio, il problema si scinde in due, il primo relativo alla sollecitazione di flessione e taglio senza torsione, il secondo relativo alla sollecitazione di sola torsione sotto momenti torcenti distribuiti  $m_t$  applicati alla trave con una legge qualsiasi di variazione lungo  $z$ . Il valore del *momento torcente esterno distribuito*  $m_t(z)$  è fornito da  $a(z) \cdot e(z)$ , dove  $e(z)$  è la distanza tra

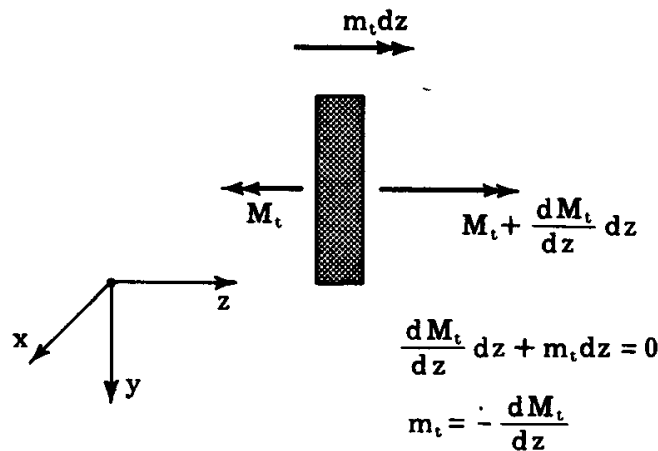


FIG. 10-59

la retta d'azione di  $a(z)$  e la retta dei centri di taglio. La caratteristica torcente  $M_t$  è variabile e legata ad  $m_t$  dalla relazione (fig. 10-59)

$$\frac{dM_t}{dz} = -m_t. \quad (55)$$

Dalla (10-53) derivando si ottiene

$$\frac{dM_t}{dz} = C_1 \vartheta'' - C_2 \vartheta''''$$

e, per la (10-55),

$$\vartheta'''' - \frac{C_1}{C_2} \vartheta'' = \frac{m_t}{C_2}. \quad (56)$$

Le condizioni ai limiti per  $z=0$  e  $z=l$  sono  $\vartheta=0$  e  $\sigma=0$  ai due estremi, e cioè  $\vartheta = \vartheta'' = 0$ .

Si vedrà (Vol. V) che, in una trave appoggiata, di sezione costante,

soggetta alle forze distribuite  $q(z)$ , ed alla forza normale  $H$  di trazione, gli abbassamenti  $v$  sono forniti dall'equazione

$$v^{IV} - \frac{H}{EI} v'' = \frac{q}{EI} \quad (57)$$

con le condizioni ai limiti  $v = v'' = 0$  (fig. 10-60 a)

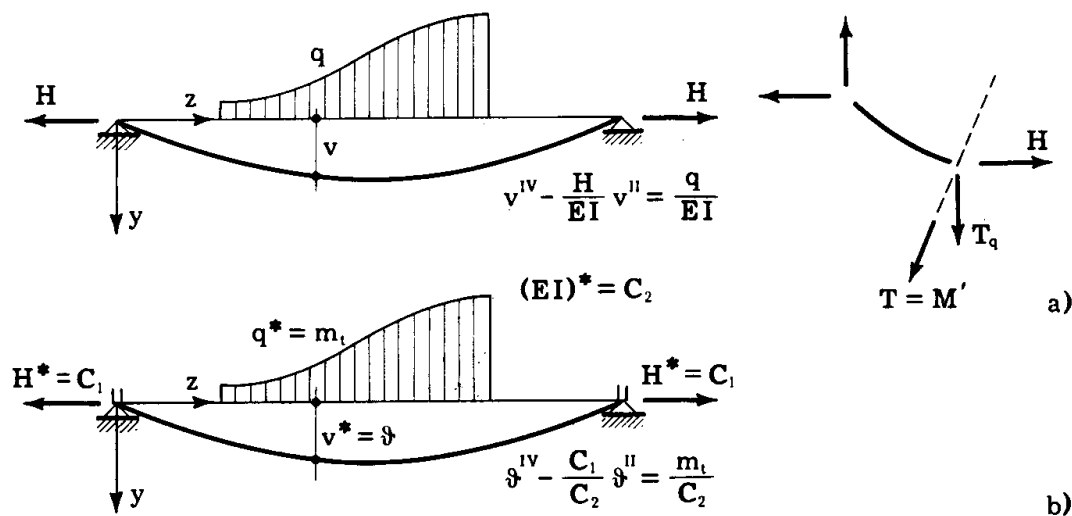


FIG. 10-60

Dal confronto tra la (10-56) e la (10-57) si osserva che le  $\vartheta$  sono gli abbassamenti fittizi  $w^*$  di una trave appoggiata a sezione costante, di rigidità flessionale fittizia  $(EI)^* = C_2$ , soggetta al carico fittizio  $q^*(z) = m_t(z)$  ed alla forza assiale fittizia di trazione  $H^* = C_1$ , (fig. 10-60 b). Per le dimensioni fisiche, i termini della (10-56) sono delle  $l^{-4}$ , i termini della (10-57) delle  $l^{-3}$ .

Nella trave inflessa risulta (fig. 10-60)

$$T = M' = -EI v''' = T_q - H v'$$

da cui

$$T_q = H v' - EI v''' \quad (58)$$

dove  $T_q$  è il taglio calcolato sulla trave considerata indeformata. Dalla relazione

$$M_t = C_1 \vartheta' - C_2 \vartheta'''$$

e dalla (10-58) si trae che la caratteristica torcente  $M_t$  è fornita in ogni

caso dal taglio fittizio  $T_q^*$  calcolabile per effetto dei soli carichi  $q^* = m_t$ ; di questa la parte  $C_1 \vartheta' = H^* v^*$  è assorbita alla De Saint-Venant, la parte  $-C_2 \vartheta''' = -(EI)^* v^{*''}$  genera le tensioni cosiddette secondarie  $\tau_2$  (figura 10-61).

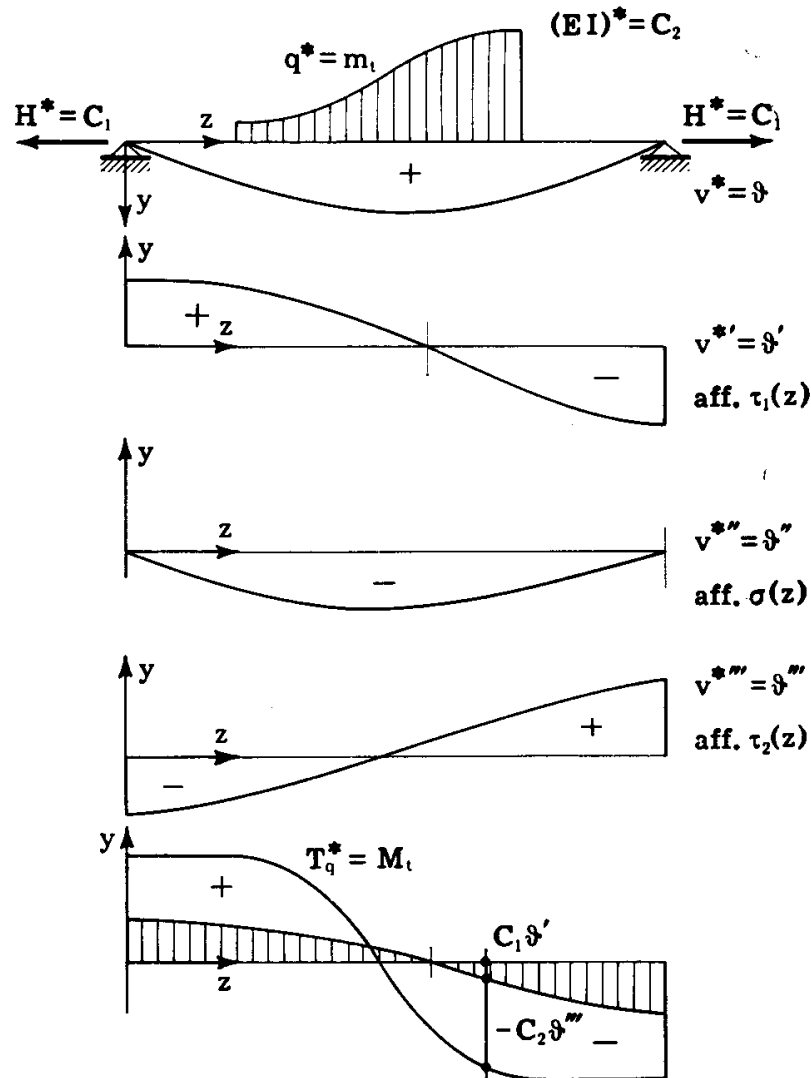


FIG. 10-61

Se la rigidità  $EI$  è nulla, la trave si riduce ad un filo teso da un tiro  $H$  noto; la sollecitazione tagliante è nulla, e le (10-57) e (10-58) si scrivono

$$-H v'' = q \quad (59)$$

$$T_q = H v' . \quad (60)$$

Se si trascura il bimomento  $C_2$  (trattazione classica) è  $C_2 = (EI)^* = 0$ , e si ricade appunto nell'equazione dei fili flessibili soggetti ad un tiro  $H^* = C_1$  noto (figg. 10-62 e 10-63). In tal caso il diagramma del taglio  $T_q^*$ ,

che si genererebbe sulla trave indeformata soggetta al carico fittizio  $q^*(z) = m_t(z)$ , coincide con  $H^* v^* = C_1 \vartheta'$ , ed è tutto assorbito alla De Saint-Venant.

Il caso esaminato è quello della trave appoggiata con *appoggi torsionali di estremità* ( $\vartheta = 0, \vartheta'' = 0$ ); se il vincolo torsionale è tale da imporre  $\vartheta = 0$  e  $w = 0$ , e cioè  $\vartheta = \vartheta' = 0$ , il vincolo si chiama *incastro torsionale*. In questo caso l'analogia continua a sussistere, facendo corri-

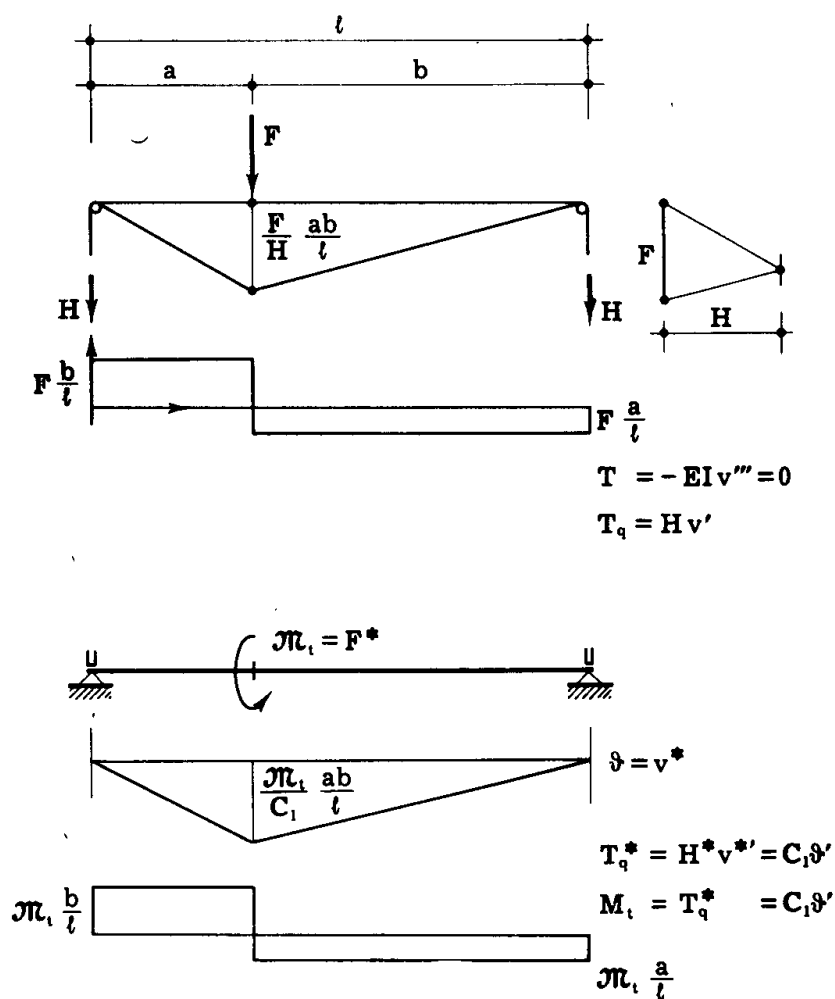


FIG. 10-62

spondere nella trave fittizia all'incastro torsionale un incastro ordinario, ove  $v = v' = 0, v'' \neq 0$ . In tal caso il taglio  $T_q$  della (10-58) è quello dovuto, sulla trave considerata indeformata, alle forze  $q$  ed alle coppie di estremità. Se  $C_2 = 0$  si ricade nel caso del filo, e  $T_q = H v'$  coincide con il taglio sulla trave indeformata soggetta alle sole forze  $q$ , perchè le coppie di estremità sono nulle ( $EI = 0$ , o  $H = \infty$ , portano appunto, nel caso in esame, a momenti di estremità nulli).

Il caso della mensola (fig. 10-51) ricade in quello più generale esposto in questo paragrafo. Il vincolo può essere un incastro torsionale, o un appoggio torsionale; l'equilibrio è comunque garantito per la presenza di  $H^* = C_1$ .

Un vincolo intermedio che impedisca le rotazioni  $\vartheta$  ( $\vartheta = 0$ ) si chiama *appoggio torsionale intermedio*; di tale tipo sono quasi sempre i vin-

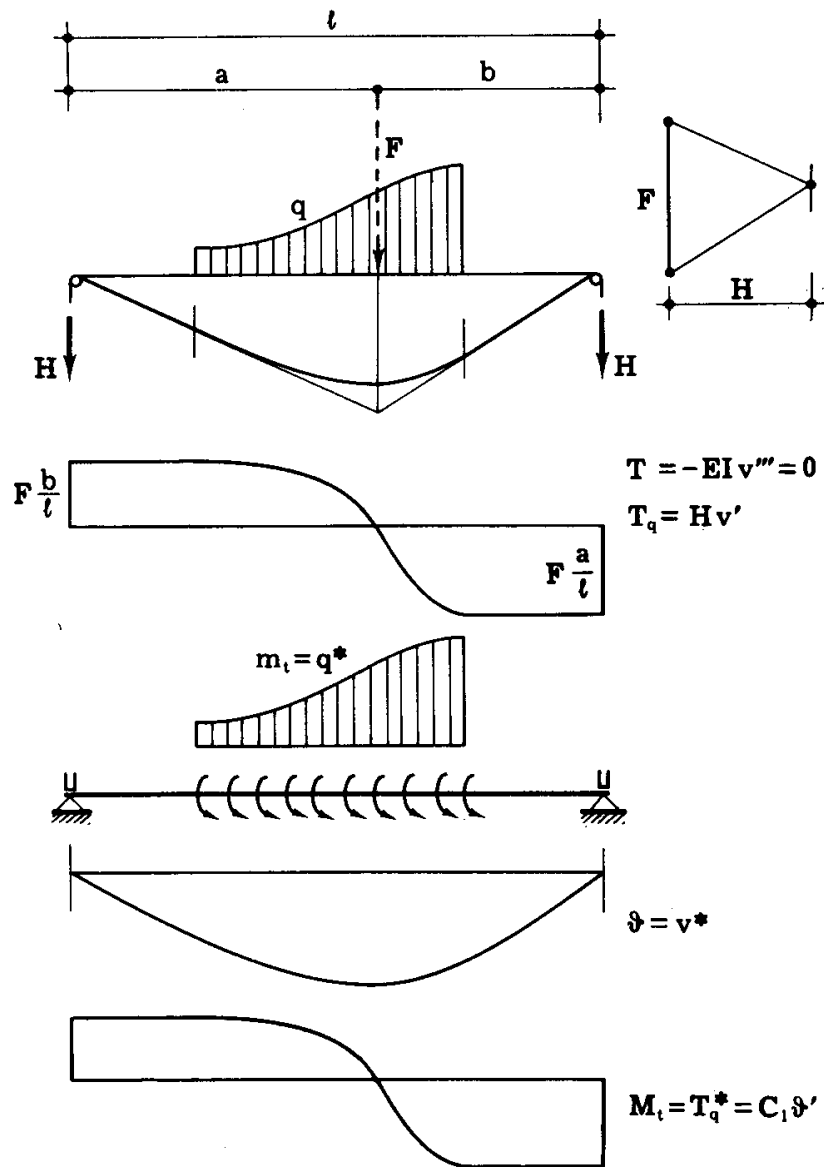


FIG. 10-63

coli delle travi continue. In essi può essere  $\sigma \neq 0$  e cioè  $\vartheta'' \neq 0$ . Anche in tal caso l'analogia è valida, per la stessa trave su appoggi intermedi ordinari e con le estremità appoggiate o incastrate secondo che i vincoli estremi siano appoggi o incastri torsionali. La soluzione di tale trave si persegue con facilità attraverso le funzioni iperboliche  $\Phi(H)$  e  $\Psi(H)$  (Vol. V) del *Timoshenko*, ed utilizzando le equazioni dei tre momenti o

il metodo di *Cross*. Se  $C_2$  si trascura si è in presenza di un filo flessibile, in cui  $T_q^* = H^* v^*$  coincide con il diagramma del taglio fittizio nelle campate considerate ciascuna isolata ed appoggiata a due estremi. Nel primo

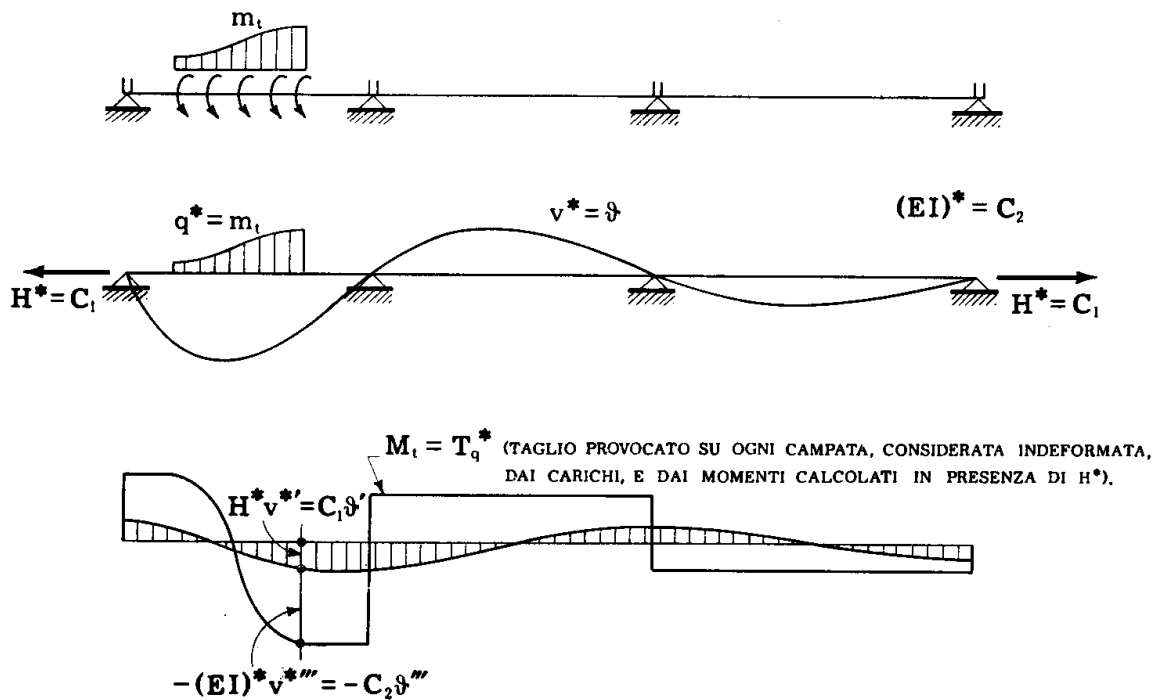


FIG. 10-64

caso (fig. 10-64) una sollecitazione torsionale agente su una sola campata si risente in tutte le altre, nel secondo caso invece (fig. 10-65) si risente solo

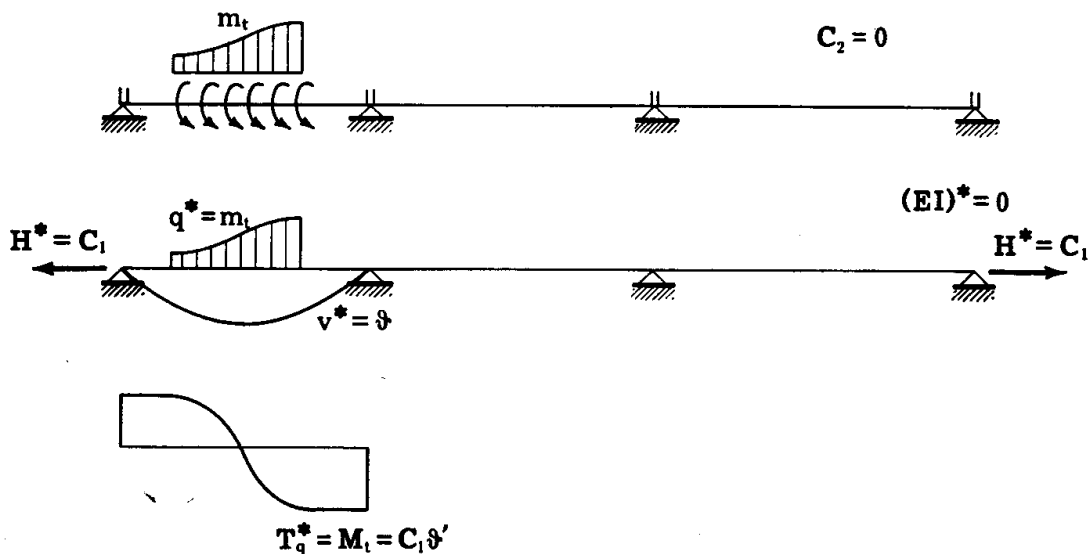
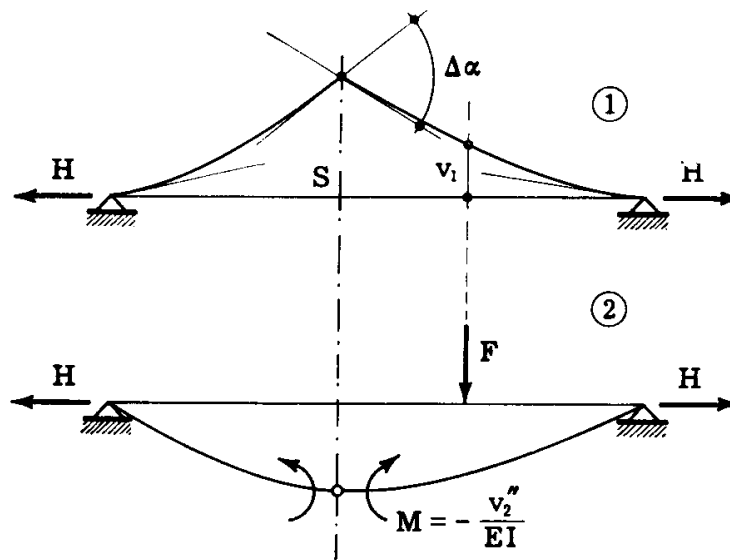


FIG. 10-65

sulla campata caricata, con gli stessi effetti che si avrebbero se tale campata fosse ad appoggi torsionali di estremità.

E' infine appena necessario accennare al fatto che, essendo  $H^* = C_1$  indipendente dal carico  $q^*$ , vale il principio di sovrapposizione e quindi la teoria delle linee d'influenza per tutte le forze trasversali; quindi si possono costruire, per ogni sezione, le linee d'influenza di  $\vartheta$ , di  $\vartheta'$  e di  $\vartheta''$  (e quindi delle tensioni principali e secondarie) per una forza  $F^* = M_t$  viaggiante.

Per costruire la linea di influenza di  $v_s^{*'} = \vartheta'_s$ , occorre far agire in S una coppia unitaria e costruire il diagramma degli spostamenti. Per costruire la linea d'influenza di  $v_s^{*''} = \vartheta''_s$ , occorre (fig. 10-66) far agire in S



$$Fv_1 + M\Delta\alpha = 0$$

$$Fv_1 - \frac{v_2''}{EI} \Delta\alpha = 0$$

$$v_2'' = Fv_1 \frac{EI}{\Delta\alpha}$$

FIG. 10-66

una distorsione  $\Delta\alpha$  unitaria; il diagramma degli spostamenti si ottiene dall'equazione (10-57) per  $q=0$ , con la condizione che la  $v'$  sia discontinua in  $S$  con discontinuità pari a  $\Delta\alpha$ . Analogamente si opera con una distorsione  $\Delta v$  unitaria per ottenere la linea d'influenza di  $v_s^{*'''} = \vartheta'''_s$ .

Se la trave è a sezione variabile, ma con i centri di taglio allineati su una retta, le forze  $a(z)$  riportate su tale linea non inducono torsione, mentre questa è dovuta ai momenti distribuiti  $m_t(z) = a(z) \cdot e(z)$ . Dalla (10-53) si ha in tal caso, differenziando,

$$-m_t = \frac{dC_1}{dz} \vartheta' + C_1 \vartheta'' - \frac{dC_2}{dz} \vartheta''' - C_2 \vartheta^{iv} \quad (61)$$

dalla quale, per  $C_1$  e  $C_2$  costanti, si ricade nella (10-56).

La (10-61) è l'equazione più generale della trave soggetta a torsione non uniforme.

## CAPITOLO XI

### UTILIZZAZIONE DEI RISULTATI DEL DE SAINT-VENANT E RELATIVA APPROSSIMAZIONE

#### 1. Estensione dei risultati del De Saint-Venant alle travi.

Si è detto (Cap. I) che i risultati del De Saint-Venant sono validi, per un cilindro corto, solo se le sollecitazioni sulle due basi sono distribuite alla De Saint-Venant. Se il cilindro è lungo, il postulato del De Saint-Venant permette di far dipendere la soluzione del problema dalle sole caratteristiche della sollecitazione sulle due basi, e quindi di conoscere la soluzione relativa a qualsiasi sollecitazione sulle due basi.

Il campo di utilizzazione dei risultati, così faticosamente acquisiti, è ancora però molto limitato: solido cilindrico, senza peso, sollecitato solo sulle basi.

Perchè essi siano resi operanti sul piano applicativo, occorre esaminare se, e con quale approssimazione, essi possono essere accettati per travi, e cioè per strutture monodimensionali, a sezione variabile, ad asse curvilineo, comunque vincolate, dotate di peso proprio, e caricate anche sulla superficie laterale (\*).

Un primo esempio di estensione dei risultati del De Saint-Venant si è svolto con riferimento alla pila di uniforme resistenza (Cap. III, § 2); si vuole adesso trattare questo tema più in generale.

Si consideri perciò un arco (trave ad asse curvilineo) a sezione variabile, comunque vincolato alle due estremità, soggetto ad un peso proprio non trascurabile, e caricato comunque sulla superficie laterale (fig. 11-1).

Ogni sezione retta sia definita dall'ascissa curvilinea  $s$ , misurata lungo l'asse, a partire da uno dei suoi estremi, per esempio A. Si consideri un tronco elementare lungo  $ds$  all'ascissa generica  $s$ , e da ambedue le parti di questo tronco altri due tronchi, lunghi ciascuno quanto la distanza di

---

(\*) Una trave si può pensare generata assegnando prima l'asse AB, e facendo poi percorrere questo da un'area  $S$  (*sezione retta*), che si mantenga sempre con il suo baricentro sull'asse, che sia sempre ortogonale all'asse, e che muovendosi possa variare di dimensioni in funzione dell'ascissa  $s$ .



estinzione  $d_e$  (valutata attraverso le caratteristiche geometriche della sezione retta all'ascissa  $s$ ).

Siano  $S_1$  ed  $S_2$  le estremità del tronco somma dei tre prima considerati. Lo stato di tensione nel tronco  $ds$  dipende soltanto dalle caratteristiche della sollecitazione sulle due sezioni  $S_1$  ed  $S_2$ , e non dalla effettiva distribuzione delle tensioni su di esse. Se poi il tronco  $S_1 S_2$  può assimilarsi nei riguardi della geometria e delle forze ad un solido di De Saint-Venant, può anche dirsi che per il tronco  $ds$  possono essere accettati i risultati del De Saint-Venant; ovviamente, in funzione delle sole caratteristiche in  $S_1$  e  $S_2$ , e cioè in funzione delle sole caratteristiche della sollecitazione relative al tronco  $ds$ . L'approssimazione quindi con cui i risultati del De

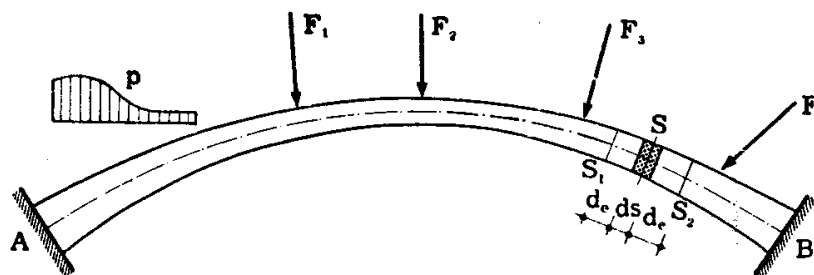


FIG. 11-1

Saint-Venant possono applicarsi al tronco  $ds$  è la stessa con cui il tronco  $S_1 S_2$  può assimilarsi ad un solido di De Saint-Venant. E' necessario perciò innanzitutto che le variazioni (con  $s$ ) di dimensioni della sezione retta non siano troppo rapide, perchè esse devono potersi trascurare in relazione alla lunghezza  $2 d_e$ . Occorre poi che il raggio di curvatura dell'asse sia tale da poter trascurare, in rapporto ad esso, la lunghezza  $2 d_e$ . Queste due ipotesi consentono di considerare il tronco  $S_1 S_2$  come prismatico; esse escludono dai casi di applicabilità dei risultati del De Saint-Venant le travi con sezione rapidamente variabile, e le travi a grande curvatura.

Per quel che riguarda le forze, è necessario che le forze relative alla massa e quelle agenti sulla superficie laterale siano trascurabili in rapporto alle caratteristiche della sollecitazione sulle due basi  $S_1$  ed  $S_2$ . Fissate le dimensioni delle sezioni rette, i valori delle caratteristiche della sollecitazione provocate dal peso proprio aumentano con la luce, mentre il peso proprio del tronco  $S_1 S_2$  non varia; perciò è necessario che la trave AB sia abbastanza lunga in rapporto alle dimensioni delle sezioni rette. Così pure, fissato il valore delle forze  $p$  distribuite sulla superficie laterale, le caratteristiche della sollecitazione provocate dalle forze  $p$  aumentano con la luce, mentre la forza agente sul tronco  $S_1 S_2$  è invariata. Anche per quel che riguarda le forze superficiali distribuite è necessario

perciò che la trave sia abbastanza lunga rispetto alle dimensioni delle sezioni rette.

Le forze o le coppie concentrate possono essere dello stesso ordine di grandezza delle caratteristiche della sollecitazione; in tal caso esse non possono impegnare il tronco  $S_1, S_2$  se si vuole ancora considerare quest'ultimo come un solido di De Saint-Venant. E' per questo motivo che i risultati del De Saint-Venant non sono accettabili ad una distanza minore di  $d_e$  dalle forze concentrate di una certa entità, e quindi anche dai vincoli. In corrispondenza di queste zone è necessario prendere dei provvedimenti locali; di questi si è già fatto un esempio, trattando delle pile ad uniforme resistenza, nella gabbia che si prevede per le costruzioni in c.a. in corrispondenza dei rulli di appoggio. In genere i provvedimenti locali si calcolano ad abundantiam, facendosi guidare dall'esperienza, e chiedendo all'intuito informazioni sommarie sull'andamento delle linee isostatiche; le armature

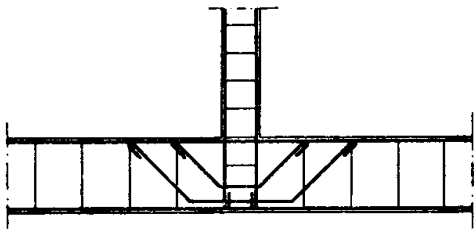


FIG. 11-2

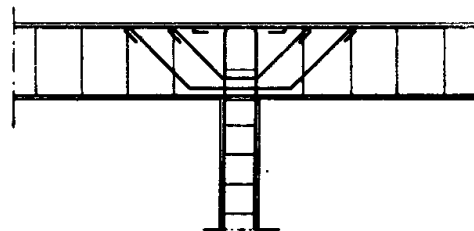


FIG. 11-3

supplementari nel c.a. si dispongono seguendo grosso modo tali linee, prevalentemente secondo quelle di trazione; così pure nelle costruzioni metalliche si prevedono cantonali o piatte o lastre di rinforzo che garantiscono con ampia sicurezza le zone di comportamento incerto. Nella figura

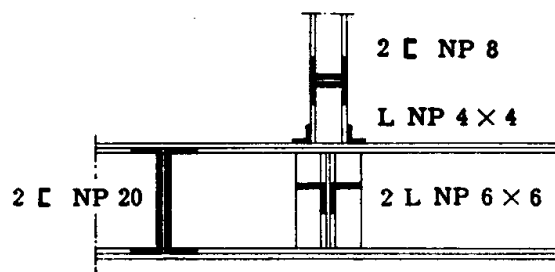


FIG. 11-4

11-2, è riportato il particolare del collegamento di un pilastro su una trave in c.a.; i ferri sagomati seguono approssimativamente l'andamento delle linee isostatiche di trazione. Nella fig. 11-3 è disegnato il particolare dell'attacco di un tirante ad una trave in c.a. Nella fig. 11-4 è tracciato un

particolare analogo a quello della fig. 11-2, per una struttura metallica.

Se il tronco  $S_1 S_2$  è tale da consentire l'uso dei risultati del De Saint-Venant per il tronco  $ds$ , si calcolano le tensioni relative alla sezione retta  $S$  di  $ds$  attraverso le (3-2), (5-2), (8-6) e le prime due delle (9-9) (\*); la terza delle (9-9) non si considera, perchè il tronco  $ds$  è di lunghezza elementare, e le tensioni normali fornite dalla terza delle (9-9) sono trascurabili in rapporto con quelle relative allo sforzo normale ed alle due flessioni rette. Le caratteristiche  $N T_x T_y$  che entrano nelle suddette relazioni si ottengono per una trave compresa tra due vincoli  $A$  e  $B$  (esterni o interni), (fig. 11-5) considerando la normale  $z$  alla sezione  $S$  nel suo baricentro, (e

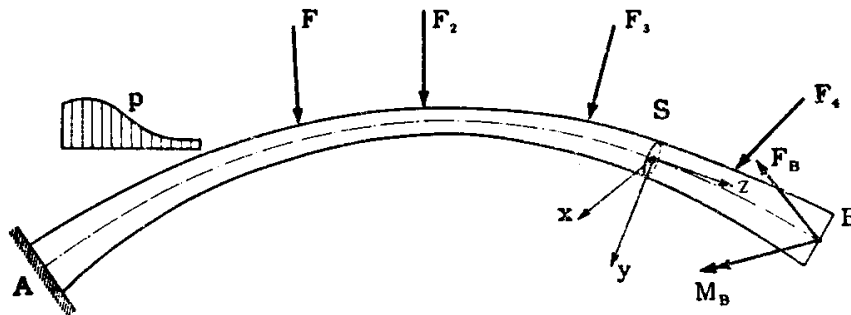


FIG. 11-5

cioè la tangente all'asse della trave in  $S$ ), e i due assi principali di inerzia  $x$  ed  $y$  di  $S$ , e proiettando su questi tre assi tutte le forze agenti su una delle due parti in cui la trave è divisa da  $S$ , ivi comprese le reazioni vincolari, di vincolo esterno o interno; le caratteristiche  $M_x M_y M_t$  si ottengono calcolando i momenti delle stesse forze rispetto agli assi  $x$  ed  $y$ , ed alla parallela all'asse  $z$  condotta per il centro di taglio  $C$  della sezione  $S$ .

Orientata la terna  $x y z$  su una delle due facce risultanti da un taglio in  $S$  in modo che  $z$  sia diretta verso l'esterno del corpo (e cioè come nella fig. 11-5, ove  $S$  è considerata appartenente alla parte  $AS$ ) le sei caratteristiche, (calcolate in relazione alle forze agenti sulla parte asportata, e cioè sulla parte  $SB$ ) sono positive se dirette come gli assi.

L'energia di deformazione è fornita, attraverso i suddetti valori delle caratteristiche, da

$$L = \int_A^B \frac{N^2 ds}{2 EA} + \int_A^B \frac{M_x^2 ds}{2 EI_x} + \int_A^B \frac{M_y^2 ds}{2 EI_y} + \int_A^B q \frac{M_t^2 ds}{2 G I_p} + \int_A^B \chi_\xi \frac{T_y^2 ds}{2 GA} + \int_A^B \chi_\eta \frac{T_x^2 ds}{2 GA}; \quad (1)$$

(\*) Le tensioni da taglio e torsione si calcolano, in pratica, con i procedimenti già illustrati, validi per i vari casi (sezioni, sottili aperte, chiuse, etc.).

la (11-1) è approssimata, perchè nello scriverla si è supposto che le espressioni del De Saint-Venant siano valide anche in prossimità delle forze e dei vincoli. La (11-1) è ottenuta dalla (9-21); si ricordi che  $M_t$  deve essere valutato rispetto al centro di taglio.

## 2. Espressione della tensione tangenziale da taglio nelle travi a sezione fortemente variabile.

Si esporrà in questo paragrafo un notevole esempio di tensioni secondarie derivanti dalla non assimilabilità del tronco  $S_1 S_2$  ad un solido di De Saint-Venant; si intendono al solito per tensioni secondarie i termini correttivi da affiancare a quelli derivanti dalla trattazione alla De Saint-Venant. Si consideri una trave a sezione fortemente variabile, ed in questa un tronco elementare ottenuto tagliando la trave con due piani ortogonali all'asse e distanti  $dz$  (fig. 11-6). Sia  $x$  l'asse neutro,  $M_x$  la componente del

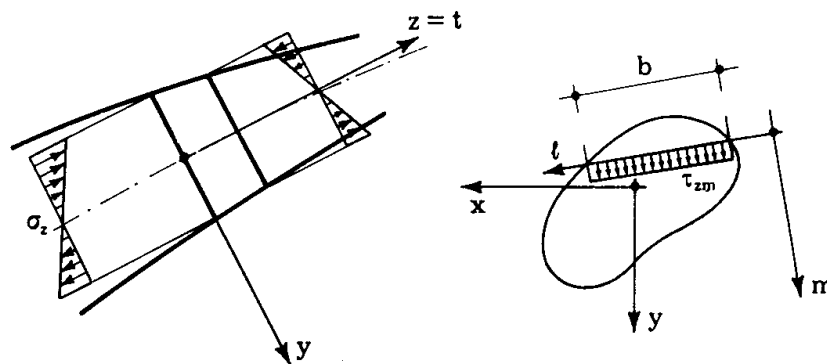


FIG. 11-6

vettore momento secondo quest'asse,  $T_y$  la componente del taglio secondo la normale  $y$  ad  $x$ . Si suppone che la tensione normale  $\sigma_z$  sia ancora fornita dalla formula di Navier (in assenza di sforzo normale)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y . \quad (a)$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $z$  della stessa parte di solido considerata nella trattazione approssimata del taglio (§ 9-6) è la stessa (9-u)

$$\tau_{zm} b dz + \int_{A'} d\sigma_z dA = 0 . \quad (b)$$

Dalla (a) si trae

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = y \left[ \frac{1}{I_x} \frac{dM_x}{dz} + M_x \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{I_x} \right) \right]$$

e quindi, essendo  $T_y dz = dM_x$  (fig. 11-7),

$$d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \frac{T_y}{I_x} y dz + M_x y \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{I_x} \right) dz. \quad (c)$$

La (b) si scrive perciò

$$\tau_{zm} b = - \frac{T_y}{I_x} S_x - M_x \frac{d}{dz} \int_A \frac{y}{I_x} dA = - \frac{T_y}{I_x} S_x - M_x \frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{I_x} \right)$$

da cui

$$\tau_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b} - \frac{M_x}{b} \frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{I_x} \right). \quad (2)$$

Scegliendo le corde  $b$  parallele all'asse neutro, la tensione in corrispondenza dell'asse neutro è fornita da una espressione binomia il cui pri-

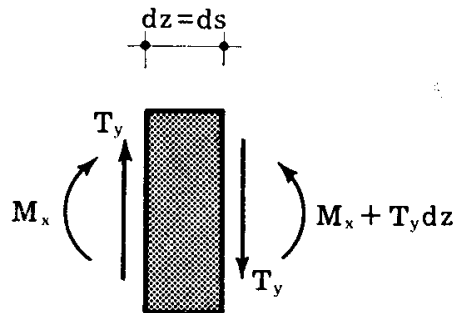


FIG. 11-7

mo termine coincide con la (9-26); poichè in tal caso è  $I_x = -S_x h^*$ , si trae dalla (11-2)

$$\tau_{zyn} = \frac{T_y}{b_n h^*} - \frac{M_x}{b_n h^{*2}} \frac{dh^*}{dz}. \quad (3)$$

Si consideri, per esempio, una trave appoggiata con bordo superiore orizzontale, in cui il braccio  $h^*$  aumenta dall'appoggio alla mezzeria (fig. 11-8 a); se le forze sono verticali, comprese le reazioni, si usa scegliere i piani che definiscono le sezioni rette anch'essi verticali, perchè sia  $N=0$  sulle sezioni che così si considerano. Poichè  $T > 0$ ,  $M > 0$ ,

$dh^*/dz > 0$ , si osserva dalla (11-3) che i due termini della formula sono di segno opposto, e perciò il momento esercita una benefica influenza nei riguardi della tensione tangenziale (\*).

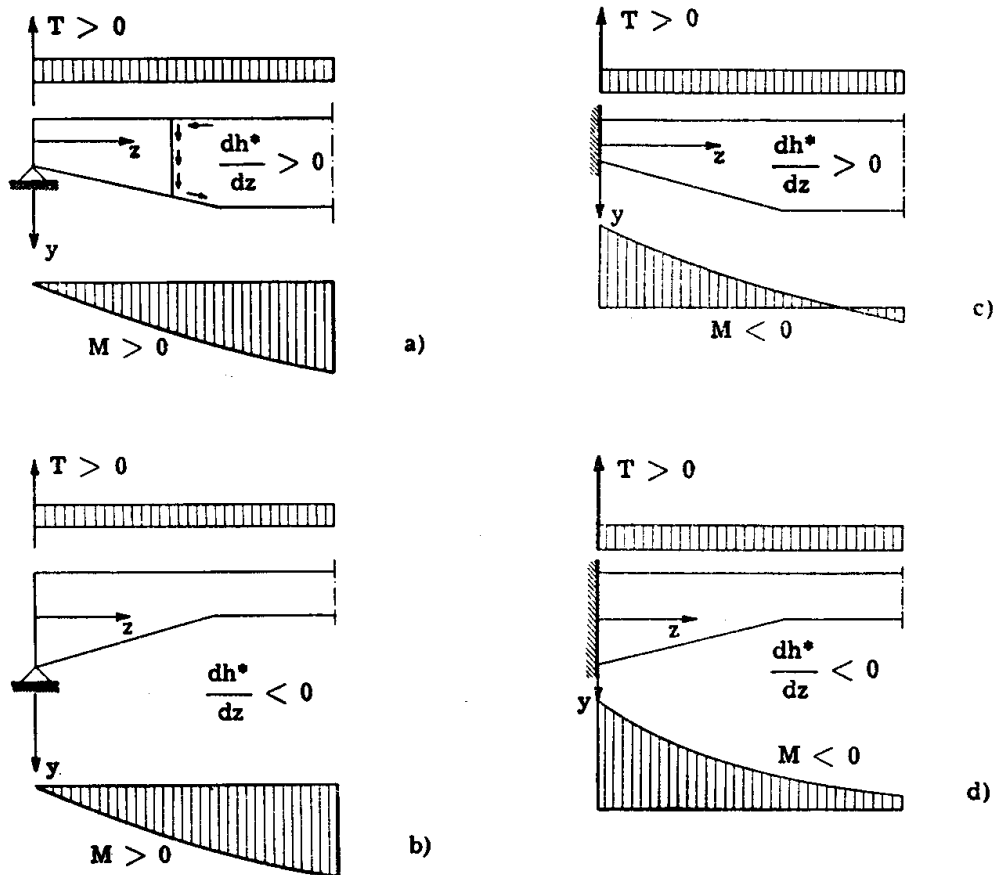


FIG. 11-8

La spiegazione fisica è immediata, non appena si tenga conto del verso delle  $\tau_{zy}$  e delle tensioni sul bordo inferiore, poichè quest'ultime presentano una componente verticale dello stesso segno delle  $\tau_{zy}$ , che perciò con esse collabora all'assorbimento del taglio.

Effetto benefico il momento esercita anche nelle travi incastrate in cui  $h^*$  diminuisce dall'incastro alla mezzeria, nelle zone in cui  $M$  è negativo (fig. 11-8 d).

Il contrario accade nei due casi illustrati nelle figg. 11-8 b e 11-8 c. Si osservi che i due casi in cui il momento esercita un'azione benefica sono quelli in cui la sezione varia in modo razionale anche nei riguardi delle tensioni normali, perchè  $h^*$  ed  $|M|$  presentano leggi di variazione analoghe.

(\*) Si trae dalla (11-3) che  $\tau_{zyn}$  può addirittura annullarsi; ciò accade se

$$\frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{dz} = \frac{1}{M_x} \frac{dM_x}{dz}$$

In presenza anche di sforzo normale la (a) si scrive

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A}$$

e quindi la (c) si modifica nell'altra

$$d\sigma_z = \frac{T_y}{I_x} y dz + M_x y \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{I_x} \right) dz + \frac{1}{A} \frac{dN}{dz} dz - \frac{N}{A^2} \frac{dA}{dz} dz .$$

La (11-2) diviene

$$\tau_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b} - \frac{M_x}{b} \frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{I_x} \right) - \frac{A'}{Ab} \frac{dN}{dz} + \frac{A'N}{A^2 b} \frac{dA}{dz} . \quad (4)$$

La (11-4) è particolarmente utile negli archi, ove lo sforzo normale è sempre presente, e spesso fortemente variabile assieme alla sezione (fig. 11-9).

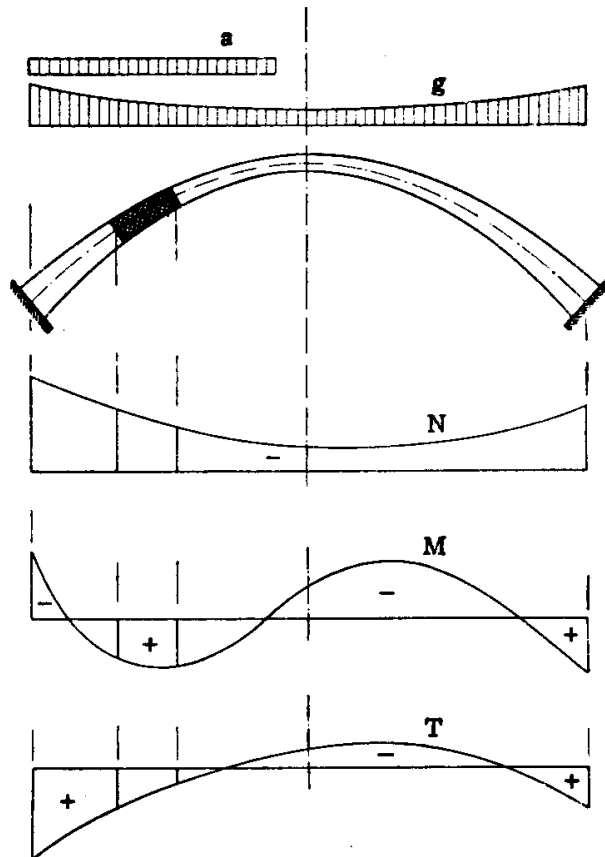


FIG. 11-9

Si osserva dalla (11-4) che se la sezione  $A$  e lo sforzo normale non variano con  $z$ , lo sforzo normale non introduce alcuna variazione nell'espressione della  $\tau_{zm}$ .