

CAPITOLO X

LE TRAVI CON SEZIONE RETTA SOTTILE

1. Generalità.

La grande maggioranza delle strutture di rilievo è realizzata con travi a sezione retta sottile, allo scopo di sfruttare al massimo il materiale e, conseguentemente, di ridurre il peso proprio. Un esempio embrionale di cui già si è fatto cenno è quello dei profilati metallici; il concetto però è generale, e domina incontrastato nel campo delle strutture aeronautiche, delle costruzioni navali, dei ponti etc. Perciò le travi a sezione sottile meritano un capitolo a sè anche in una trattazione generale.

Una *sezione sottile* è tale se l'area è addensata lungo una o più curve del suo piano; essa è formata perciò da uno o più segmenti di area in ognuno dei quali una dimensione predomina sulle altre.

In un punto P' qualsiasi del contorno, o di uno dei contorni, si consideri (fig. 10-1) la normale n al contorno; questa incontra lo stesso con-

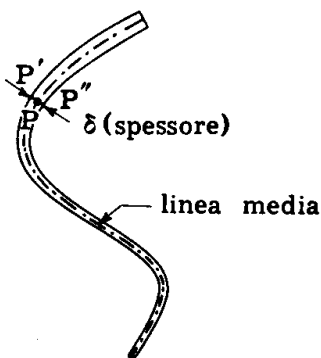


FIG. 10-1

torno, o un altro, in un punto P'' vicino a P' ; con buona approssimazione n è normale al contorno anche in P'' . Il segmento $P'P''$ si chiama *spessore* δ della sezione; il luogo dei punti medi P dei segmenti $P'P''$ si chiama *linea media* della sezione.

Le sezioni sottili si distinguono in *aperte* (fig. 10-1) e *chiuse* (fig. 10-2).

Le prime sono quelle *monoconnesse* (Vol. I, § 1-1), le seconde le *pluriconnesse*.

Si chiama *tratto* una parte di sezione compresa tra due successivi punti di diramazione della linea media, o tra un punto di diramazione ed un estremo. Le sezioni aperte senza diramazioni sono costituite da

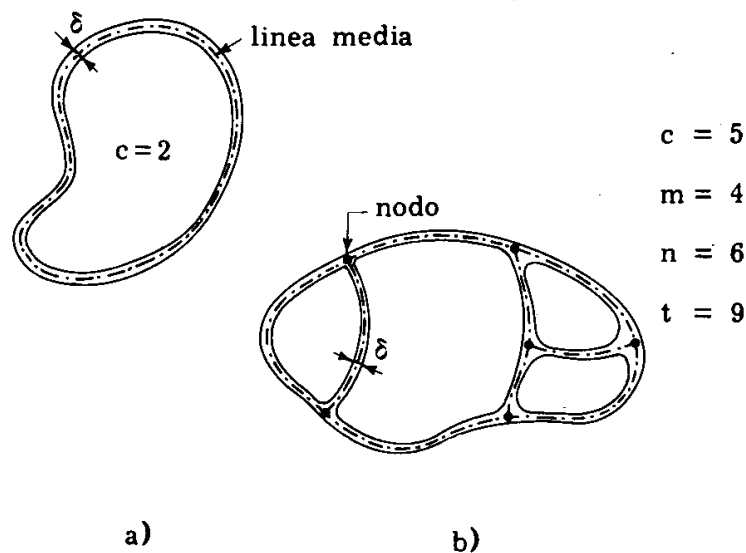


FIG. 10-2

un solo tratto. Il punto di diramazione si chiama anche *nodo*. Possono esserci sezioni aperte con nodi (per es. profilato a I) o sezioni chiuse senza nodi (per es. corona circolare).

Nelle sezioni chiuse si considerano le *maglie*, intendendosi come tale ogni parte chiusa della linea media che non racchiuda all'interno altri tratti.

Il numero m delle maglie è pari al grado di connessione c diminuito di una unità:

$$m = c - 1 .$$

Si scomponga (fig. 10-3) la figura in maglie; sia n il numero dei nodi ed n' il numero dei loro traslati dopo l'operazione di scomposizione, t il numero dei tratti e t' il numero dei loro traslati; è

$$n' = t' .$$

Si ricomponga la figura riaccostando le maglie una alla volta; il numero di tali operazioni è $m - 1$.

In ogni accostamento t' diminuisce di un numero k , n' di $k + 1$; sia n_k

il numero degli accostamenti di ordine k . Risulta

$$\sum_k n_k = m - 1$$

$$t = t' - \sum_k k n_k$$

$$\begin{aligned} n &= n' - \sum_k (k + 1) n_k = \\ &= n' - \sum_k n_k - \sum_k k n_k \end{aligned}$$

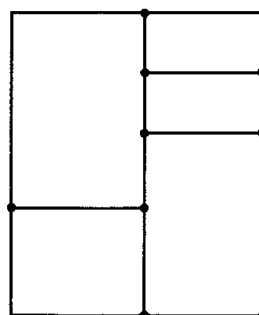
da cui

$$t - n = t' - n' + \sum_k n_k = \sum_k n_k = m - 1$$

e quindi

$$m + n = t + 1.$$

Qualsiasi tipo di trave a sezione sottile deve essere garentita, mediante diaframmi normali all'asse o con altri accorgimenti, nei riguardi dei



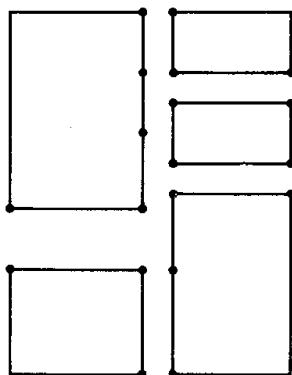
$$m = 5$$

$$n = 8$$

$$t = 12$$

$$m + n = t + 1$$

a)



$$n' = 19$$

$$t' = 19$$

b)

FIG. 10-3

cambiamenti di forma; si deve essere sicuri, cioè, che la sezione retta possa ingobbarsi, ma la sua proiezione sul piano normale all'asse abbia solo spostamenti rigidi, conformemente alla teoria del De Saint-Venant

della torsione e del taglio. Questo equivale a trascurare la deformazione della sezione retta nel proprio piano anche per sforzo normale e flessione, e cioè a supporre il modulo di Poisson $1/m=0$; si ricordi però che la stessa ipotesi si fa nella trattazione approssimata del taglio, che è poi quella seguita quasi sempre.

Spesso ci si trova in presenza di travi composte da più profilati uniti da calastrelli, e cioè da elementi normali all'asse e disposti sulla superficie laterale (fig. 10-4); la sezione retta in questo caso appare come non connessa, ma i calastrelli solidarizzano le sezioni parziali; il comportamento appare evidente se si pensa di sostituire i calastrelli con una lamiera sottilissima (tale quindi da

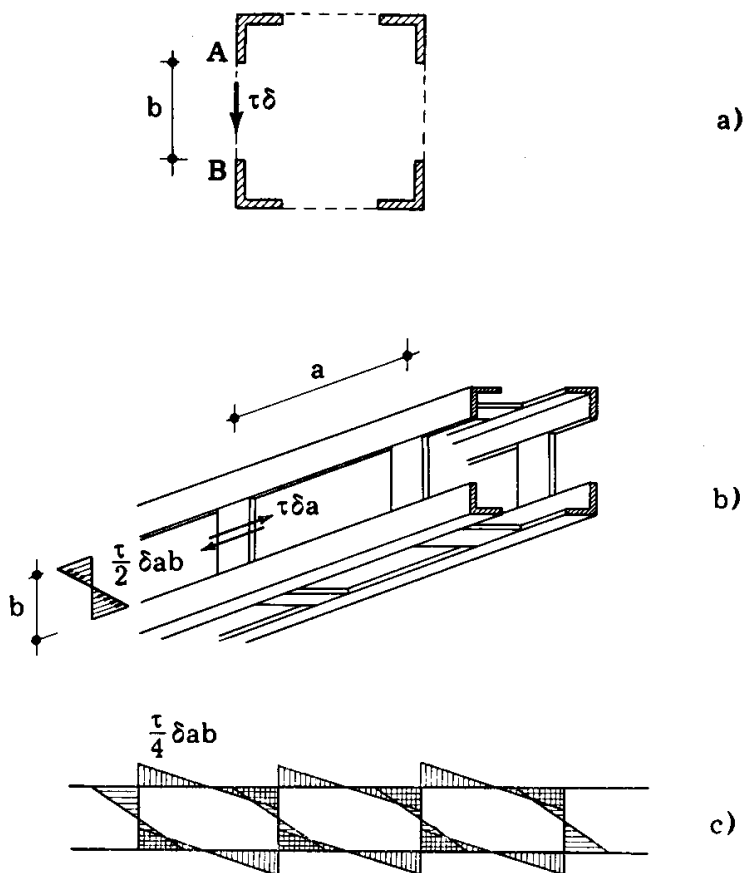


FIG. 10-4

non variare i dati d'inerzia della sezione) estesa a tutta la lunghezza della trave. La sezione retta che così si ottiene può risultare aperta o chiusa, a seconda che la calastrellatura investa o meno la totalità del perimetro esterno. La calastrellatura può sostituire, se abbastanza robusta, i diaframmi trasversali di cui si è già parlato.

Si osserverà che nella lamiera ideale che sostituisce il calastrello (*) il pro-

(*) Si fa riferimento a sezioni chiuse soggette a torsione o taglio o a sezioni aperte soggette a taglio. Nelle sezioni aperte soggette a torsione con sollecitazione sulle basi alla D. S. Venant, i calastrelli non esercitano funzione di collegamento.

dotto $\tau\delta$ è costante, ci sia taglio o torsione; il calastrello è soggetto perciò al taglio costante $\tau\delta a$, se a è la distanza tra due calastrelli successivi, e quindi ad un momento flettente del tipo indicato nella fig. 10-4, nullo al centro, e di valore massimo pari a $\pm \frac{l_1}{2} \tau\delta ab$. Il prodotto $\tau\delta$ è indipendente dallo spessore della lamiera sottile equivalente.

I momenti alle estremità dei calastrelli (con tagli relativi) si risentono nei correnti (fig. 10-4 c); i loro effetti devono essere sommati a quelli ottenuti alla De Saint-Venant. Per questi ultimi si osserva che, mentre le σ possono essere assunte pari a quelle ottenute con il calcolo alla De Saint-Venant di tutta la sezione, le τ nei punti estremi come A e B (fig. 10-4 a) sono in realtà nulle salvo che in corrispondenza dei calastrelli.

Lo studio approssimato delle sezioni sottili soggette a torsione o a taglio è molto semplificato rispetto a quelle delle sezioni ordinarie, e più aderente al vero; d'altra parte, esse sono soggette a tensioni secondarie spesso molto importanti, di cui non può non tenersi il dovuto conto. Un esempio è quello già studiato della sezione rettangolare allungata (§ 8-21). Giova infine ricordare l'insidia relativa alla stabilità dell'equilibrio, mai da sottovalutare, nelle strutture sottili aperte in modo particolare; di essa si tratterà nel quinto volume.

2. La sezione sottile aperta soggetta a torsione: lo stato tensionale.

Sia l'analogia idrodinamica che quella di *Prandtl* assicurano (fig. 10-5) che lungo uno spessore δ la τ (*) può considerarsi con buona approssi-

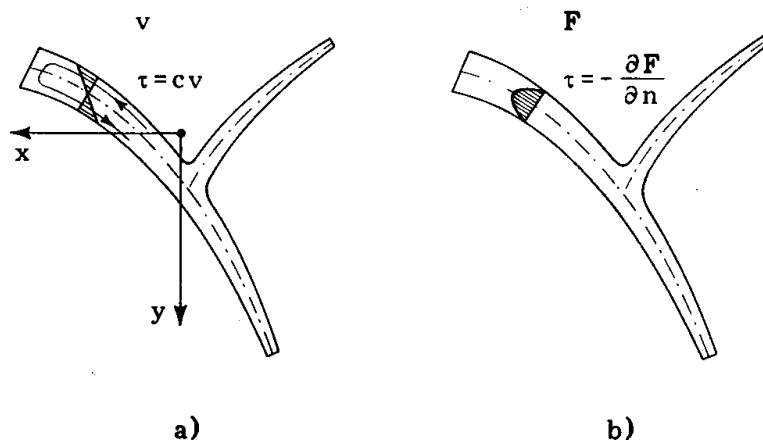


FIG. 10-5

mazione diretta normalmente allo spessore stesso. Ciò si evince anche dal

(*) Nel seguito si useranno per semplicità i simboli σ e τ invece di σ_z e τ_z ; la τ in ogni punto risulta di direzione determinata.

fatto che la componente di τ diretta secondo lo spessore è nulla agli estremi di δ , e, essendo δ piccolo, può considerarsi nulla, rispetto alla τ totale, lungo tutto lo spessore.

La condizione (8-46)

$$\text{rot } \bar{\tau} = \text{cost} = r = 2 G \vartheta' \quad (1)$$

importa che, detta n la normale alla linea media e t la tangente (fig. 10-5 a), orientate al solito modo, sia

$$\frac{\partial \tau_{zt}}{\partial n} - \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial t} = r ; \quad (a)$$

poichè è $\tau_{zn} = 0$ su tutto δ , dalla (a) si trae

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = r = 2 G \vartheta' . \quad (2)$$

La (10-2) assicura che la τ varia linearmente lungo δ ; per la simmetria rispetto alla linea media (o anche per il teorema della divergenza, o per l'analogia idrodinamica) essa si annulla nel centro di δ . Inoltre dalla (10-2) si ha che l'inclinazione del diagramma delle τ su δ è la stessa per tutti gli spessori, e pari a $2 G \vartheta'$; se è τ^* (s) il valore massimo di τ , fun-

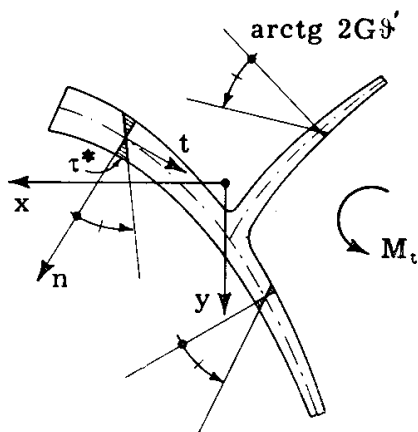


FIG. 10-6

zione dell'ascissa curvilinea s valutata secondo la linea media, si ha perciò, con riferimento a due valori τ^* e δ alla stessa generica ascissa s ,

$$2 \frac{\tau^*}{\delta} = r , \quad (3)$$

e la τ^* (s) aumenta con δ (s), attingendo il massimo valore dove δ è massimo (fig. 10-6).

Poichè l'inclinazione $2 \frac{\tau^*}{\delta}$ del diagramma delle τ non varia con l'ascissa s , τ è, su due spessori diversi, la stessa a parità di n , e quindi

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 ;$$

si verifica cioè

$$\operatorname{div} \bar{\tau} = 0 . \quad (4)$$

Per ottenere i valori di τ^* e ϑ' in funzione di M_t si cominci a considerare il caso, già studiato (§ 8-15), del rettangolo allungato.

In esso, un canale di flusso si presenta come nella fig. 8-30; l'approssimazione consiste del supporlo come nella fig. 10-7. Il momento delle τ

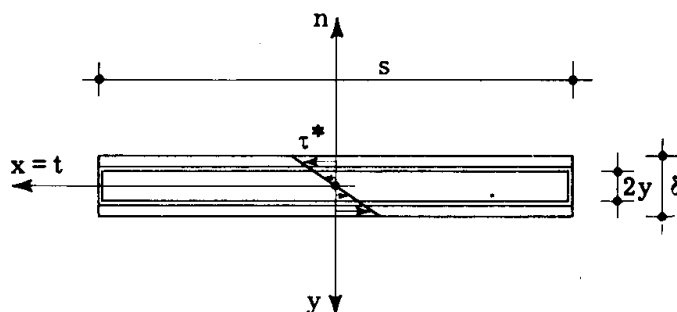


FIG. 10-7

relativo a tale canale è (8-o')

$$dM_t = 2 \cdot 2 \frac{\tau^*}{\delta} y dy \cdot A_y = 8 \frac{\tau^*}{\delta} s y^2 dy \quad (b)$$

e quindi

$$M_t = 8 \frac{\tau^*}{\delta} s \int_0^{\delta/2} y^2 dy = \frac{8}{3} \frac{\tau^*}{\delta} s \frac{\delta^3}{8}$$

e ancora

$$\tau^* = \frac{3 M_t}{s \delta^2} . \quad (5)$$

Dalle (10-2) e (10-3) si trae

$$r = 2 G \vartheta' = 2 \frac{\tau^*}{\delta} = \frac{6 M_t}{s \delta^3}$$

da cui

$$\vartheta' = \frac{3 M_t}{G s \delta^3} . \quad (6)$$

L'approssimazione fatta (τ diretta, su ogni spessore δ , secondo la x) porta alla singolarità di dover supporre tutti i canali elementari chiudentisi sui due bordi corti, mentre essi invece si chiudono lungo la mediana maggiore, tanto più lontano dal bordo corto quanto più sono vicini al baricentro. L'errore che così si commette è tanto minore quanto più piccolo è il rapporto δ/s .

Considerando la sezione sottile come somma di tanti rettangoli di lunghezza s_i e spessore δ_i (l'approssimazione è tanto migliore quanto minore è la variazione di spessore $d\delta/ds$, e quanto minore è il rapporto δ/R tra lo spessore δ ed il corrispondente raggio di curvatura della linea media), si ha per la (10-5)

$$M_t = \frac{1}{3} \sum \tau_i^* s_i \delta_i^2$$

e, per l'invarianza di τ^*/δ con s ,

$$M_t = \frac{1}{3} \frac{\tau_i^*}{\delta_i} \sum s_i \delta_i^3$$

da cui

$$\tau^* = \frac{3 M_t \delta}{\sum s_i \delta_i^3} . \quad (7)$$

Dalle (10-2) e (10-3) si ha poi

$$\vartheta' = \frac{\tau^*}{\delta G} = \frac{3 M_t}{G \sum s_i \delta_i^3} = \frac{M_t}{C_1} , \quad (8)$$

dove la quantità

$$C_1 = G \frac{\sum s_i \delta_i^3}{3} \quad (9)$$

è la cosiddetta *rigidità torsionale* della sezione; le dimensioni fisiche di C_1 sono

$$[C_1] = [F \ell^2] . \quad (10)$$

3. La sezione sottile aperta soggetta a torsione: gli spostamenti da ingobbimento e le aree settoriali.

Si è già visto (§ 8-2) che ogni *fibra* del solido del De Saint-Venant (segmento della generica retta parallela all'asse, compreso tra le due basi) non si deforma nella torsione, ma si limita a spostarsi rigidamente, mentre la *fibra d'origine*, $x=y=0$ (il riferimento è generico) resta giacente sull'asse z . Cambiare il riferimento equivale quindi ad un moto rigido del solido, che riporti in se stessa la fibra inizialmente giacente sull'asse z del nuovo riferimento.

D'altro canto le fibre che impegnano la linea media (caratterizzate, come tutte le altre, da $\sigma=0$, e quindi $\varepsilon=0$; cioè esse non variano di lunghezza) presentano $\tau=0$; ciò significa che, a deformazione avvenuta, esse

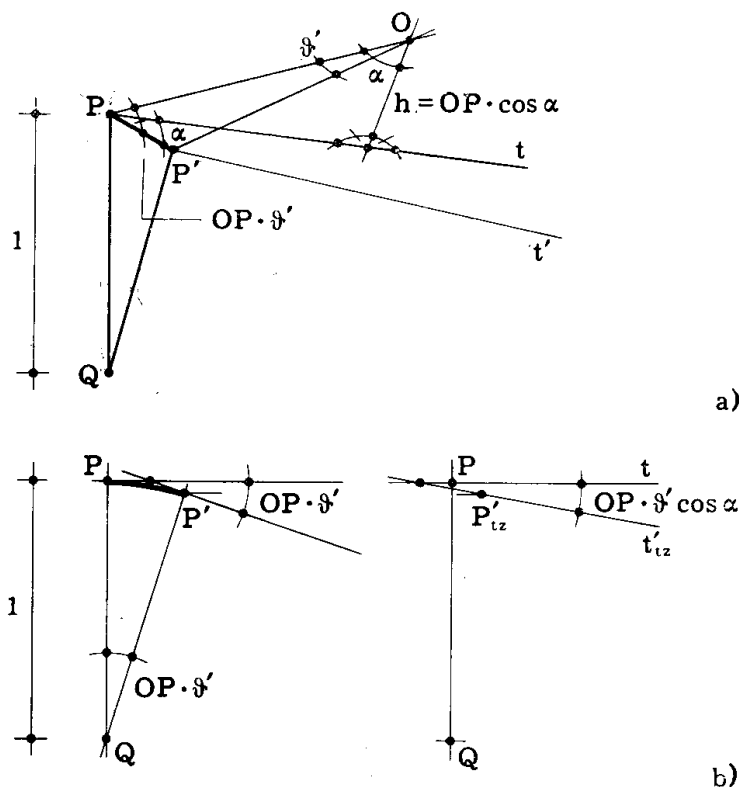


FIG. 10-8 a, b

si conservano ortogonali alla superficie deformata della sezione retta, in particolare alla deformata della corrispondente tangente alla linea media. Gli spostamenti $w(s)$ secondo l'asse z dei punti della linea media caratterizzano l'ingobbimento della sezione retta, per la sottigliezza di quest'ultima.

Si esamini il tronco di lunghezza unitaria (fig. 10-8 a). Considerando fissa la proiezione della base inferiore sul proprio piano originario, la fi-

bra generica PQ ruota intorno a Q dell'angolo $OP \cdot \vartheta'$ nel piano definito da QP e dalla normale al piano OPQ. La tangente t , che ruota solidalmente alla fibra, si porta in t' , inclinata sul piano xy dell'angolo (fig. 10-8 b, c, d)

$$OP \cdot \vartheta' \cos \alpha = h \vartheta' ,$$

dove h è la distanza del centro O dalla retta t .

L'inclinazione sul piano xy della tangente alla linea media deformata, fornita da dw/ds , coincide per piccoli spostamenti con l'angolo; quindi

$$\frac{dw}{ds} = - h \vartheta' . \quad (11)$$

Il segno è giustificato perchè le w sono positive verso l'alto, attesa l'orientazione della coppia xy, e quindi di z (terna destrorsa), e la h è

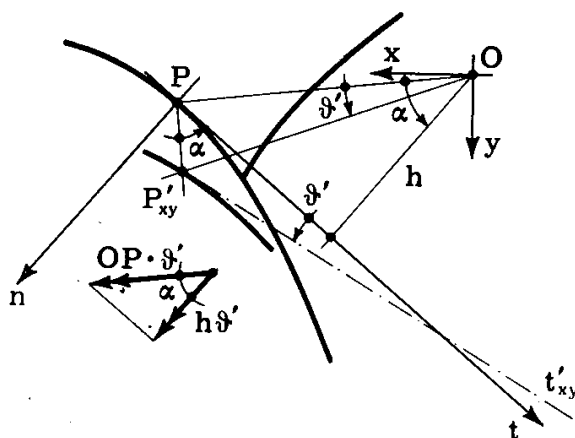


FIG. 10-8 c

positiva se O è alla sinistra di t , come nella fig. 10-8; quindi ad $h > 0$ e $\vartheta' > 0$ (rotazione antioraria) corrisponde una inclinazione verso il basso della t' , e quindi $dw/ds < 0$.

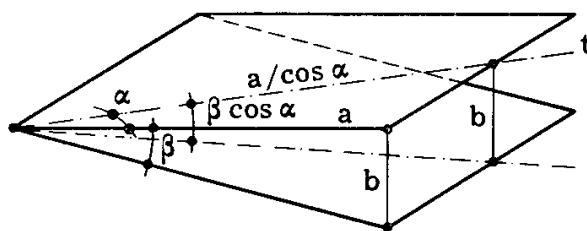


FIG. 10-8 d

Se R è l'origine delle ascisse curvilinee s , e P un punto generico di

ascissa s , è

$$w_P = w_R + \int_R^P \frac{dw}{ds} ds = w_R - \vartheta' \int_R^P h ds . \quad (c)$$

L'integrale

$$\int_R^P h ds = 2 A_s$$

è (fig. 10-9) il doppio dell'area compresa tra i due raggi vettori OR ed OP, e il segmento di linea media tra R e P; tale area, funzione di O, del punto

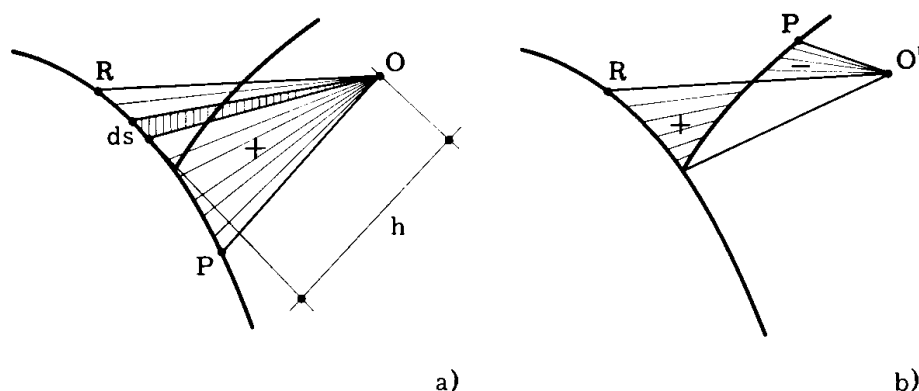


FIG. 10-9

origine R e dell'ascissa s , si chiama *area settoriale*. La (c) porge perciò

$$w_P = w_R - 2 \vartheta' A_s . \quad (12)$$

Si è visto che, procedendo lungo la linea media, la w diminuisce se O è alla sinistra di t , e cioè se il raggio vettore ruota in senso antiorario; quindi nella (10-12) le aree vanno prese positive per quei tratti in cui, percorrendo la linea media, il vettore ruota in senso antiorario, negative per i tratti in cui accade il contrario. Tutto ciò è indipendente dal verso assunto come positivo per s .

Se la linea media presenta diramazioni, come nella fig. 10-9, ogni tratto si considera come se gli altri non esistessero; la presenza degli altri tratti si risente solo nel valore di ϑ' , a parità di M_t . Il valore di w_R della (10-12) è imprecisato; si pone $w_R = 0$, ottenendosi così

$$w = - 2 \vartheta' A_s . \quad (13)$$

Se il punto O è il punto improprio di una retta n , le w risultano proporzionali alle distanze dei punti della linea media dalla retta stessa; si ricade così nella legge della conservazione delle sezioni piane, classica della flessione. Questo è però un caso limite per $\vartheta' \rightarrow 0$, se si vuole che le w siano finite.

Nella fig. 10-11 sono riportate, in scale diverse, gli A_s (e quindi i w) per una sezione a $\square$, per varie posizioni del centro O di rotazione sul-

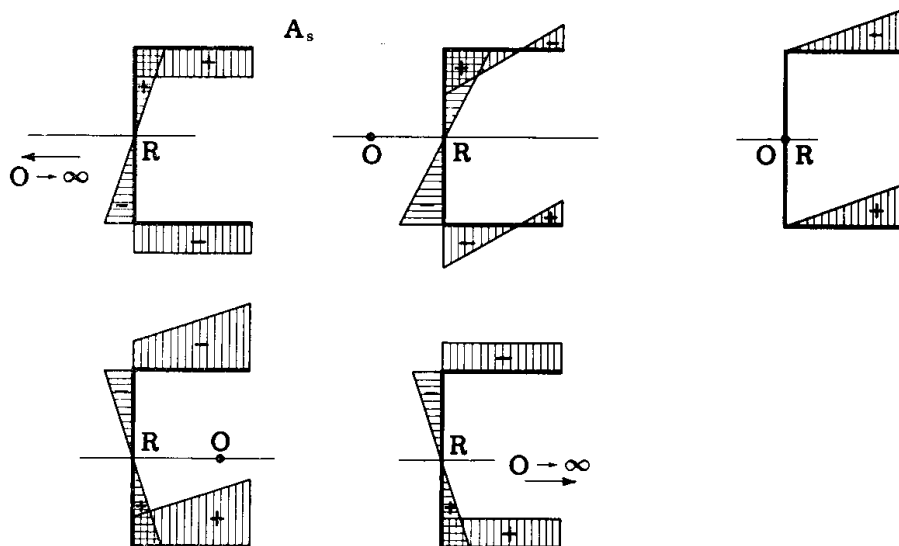


FIG. 10-11

l'asse di simmetria; il punto R , per il rispetto della (10-14), deve essere il punto medio dell'anima.

Non è male ricordare le tre ipotesi su cui poggia la teoria delle aree settoriali; proiezione di forma inalterata della sezione sul suo piano originario, tensione tangenziale nulla lungo la linea media, fibre rettilinee dopo la deformazione (e quindi piccoli valori di ϑ).

4. La sezione sottile chiusa soggetta a torsione: lo stato tensionale.

Il comportamento a torsione della sezione chiusa è profondamente diverso da quello della sezione aperta. Si può sempre supporre, per la esiguità dello spessore δ , che la componente di τ secondo lo spessore sia nulla lungo tutto lo spessore; ma, in più, sia l'analogia idrodinamica che quella di *Prandtl* rendono lecito porre la τ costante lungo lo spessore, e quindi funzione della sola ascissa s (fig. 10-12) (*). L'approssimazione è dello

(*) Per il rispetto della (10-2) occorrerebbe considerare una piccola inclinazione del diagramma; di ciò si parlerà nel § (10-8).

stesso ordine di quella secondo cui si può dire che la velocità del liquido è costante lungo un generico spessore del canale (fig. 10-12 a), o la pendenza della lamina costante per tutti i punti di uno spessore generico (fig. 10-12 b).

a) *Sezione due volte connessa.*

Nella sezione due volte connessa (fig. 10-12) il prodotto $\tau\delta$ è costante con l'ascissa. Ciò si deduce dal teorema della divergenza; considerati in-

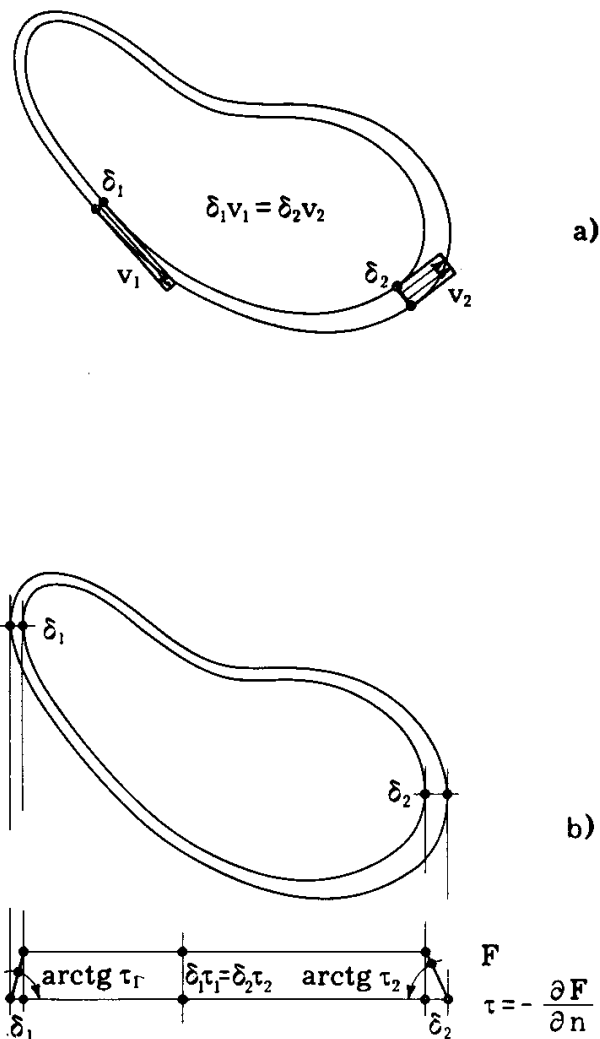


FIG. 10-12

fatti due spessori δ_1 e δ_2 e l'area compresa tra i due contorni e questi spessori (fig. 10-13 a), l'integrale della divergenza di $\bar{\tau}$ esteso a quest'area è pari al flusso di $\bar{\tau}$ uscente dal contorno dell'area stessa. Poichè sui contorni la $\bar{\tau}$ è tangente al contorno stesso, il flusso è pari a $\tau_2 \delta_2 - \tau_1 \delta_1$, e quindi, essendo la divergenza nulla,

$$\tau_2 \delta_2 - \tau_1 \delta_1 = \int_{s_1}^{s_2} \text{div } \bar{\tau} \cdot \delta \, ds = 0$$

da cui

$$\tau_2 \delta_2 = \tau_1 \delta_1 . \quad (15)$$

Il suddetto ragionamento traduce la condizione di equilibrio insita nella relazione $\text{div } \tau = 0$ (§ 8-9); la (8-15) può essere, del resto, tratta direttamente con un elementare ragionamento in relazione all'equilibrio alla traslazione secondo l'asse z di una fetta di solido compresa tra due sezioni rette a qualsiasi distanza (in particolare unitaria), ottenuta ta-

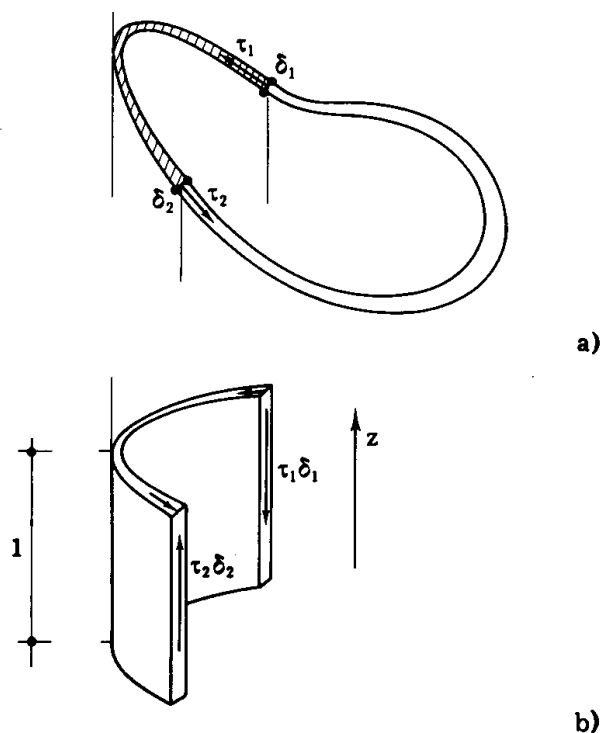


FIG. 10-13

gliando il solido con due piani paralleli a z e contenenti δ_1 e δ_2 (fig. 10-13 b).

Alla (10-15) si perviene pure dall'analogia idrodinamica, considerando che la portata del liquido lungo il canale definito dai due contorni è costante (fig. 10-12 a) o dall'analogia di *Prandtl*, osservando che il valore della costante attinta da F sul contorno interno è dato dal prodotto $\tau \delta$ (fig. 10-12 b).

Ogni elemento di area δds sopporta la forza $\tau \delta ds$ diretta secondo la tangente alla linea media in ds (fig. 10-14). Poichè $\tau \delta$ è costante, le forze agenti sui vari elementi lunghi ds sono proporzionali a ds ; quindi il poligono delle forze $\tau \delta ds$ coincide con la linea media, e l'equilibrio alla traslazione secondo x ed y è senz'altro soddisfatto, essendo chiusa la linea media. L'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse z si scrive, calcolando i momenti rispetto ad un punto P qualunque del

piano xy ,

$$M_t = \int_m \tau \delta \, ds \, h = \tau \delta \int_m h \, ds . \quad (d)$$

Il prodotto $h \, ds$ è il doppio dell'area dA_m del triangolo di vertice P e base ds (fig. 10-14); chiamando perciò A_m l'area compresa nella linea media, la (d) si scrive

$$M_t = 2 A_m \tau \delta$$

da cui

$$\tau = \frac{M_t}{2 A_m \delta} . \quad (16)$$

E' questa la formula di *Bredt*; una osservazione immediata è che la τ è inversamente proporzionale allo spessore, mentre nelle sezioni aperte

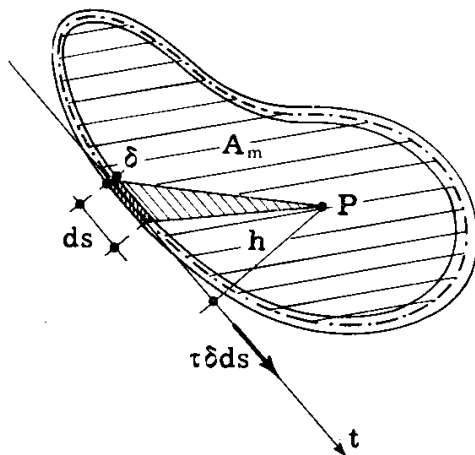


FIG. 10-14

la τ è ad esso direttamente proporzionale; nelle sezioni chiuse quindi la massima τ si verifica dove δ è minimo, nelle sezioni aperte dove δ è massimo.

Il teorema di Stokes fornisce

$$c = \int_m \tau \, ds = r A_m = 2 G \vartheta' A_m$$

da cui

$$\vartheta' = \frac{\int_m \tau \, ds}{2 G A_m}$$

e ancora

$$\vartheta' = \frac{M_t}{4 G A_m^2} \int_m \frac{ds}{\delta} . \quad (17)$$

La rigidità torsionale è quindi

$$C_1 = \frac{4 G A_m^2}{\int_m \frac{ds}{\delta}} . \quad (18)$$

Se δ è costante, ed ℓ_m è la lunghezza della linea media, si ha

$$\vartheta' = \frac{M_t \ell_m}{4 G \delta A_m^2} . \quad (17')$$

L'applicazione del teorema di Stokes, chiamando in causa la condizione $\text{rot } \bar{\tau} = \text{cost}$, equivale a scrivere una relazione di congruenza; ed infatti fornisce ϑ' .

Alla (10-17) si può pervenire anche con considerazioni energetiche; uguagliando il lavoro di M_t all'energia di deformazione si ha infatti, per la (10-16),

$$\begin{aligned} \frac{M_t \vartheta'}{2} &= \frac{1}{2 G} \int_v \tau^2 dV = \frac{1}{2 G} \int_A \tau^2 dA = \frac{M_t^2}{8 G A_m^2} \int_A \frac{dA}{\delta^2} = \\ &= \frac{M_t^2}{8 G A_m^2} \int_m \frac{ds}{\delta} . \end{aligned}$$

Un paragone interessante si ha studiando la sezione a forma di corona circolare, aperta e chiusa. Siano R il raggio della linea media e δ lo spessore (fig. 10-15).

Nel caso della sezione aperta si ha [(10-7), (10-8)]

$$\tau_a = \tau^* = \frac{3 M_t \delta}{2 \pi R \delta^3} = \frac{3}{2 \pi} \frac{M_t}{R \delta^2} \quad (19)$$

$$\vartheta'_a = \frac{\tau^*}{\delta G} = \frac{3}{2 \pi} \frac{M_t}{G R \delta^3} . \quad (20)$$

Inoltre dalla (10-12) si ha

$$w_B - w_A = - 2 \vartheta'_a \pi R^2 = - 3 \frac{M_t}{G \delta^3} R$$

spostamento relativo indipendente, come noto, dal centro O di rotazione; il punto B si sposta verso il basso rispetto al punto A.

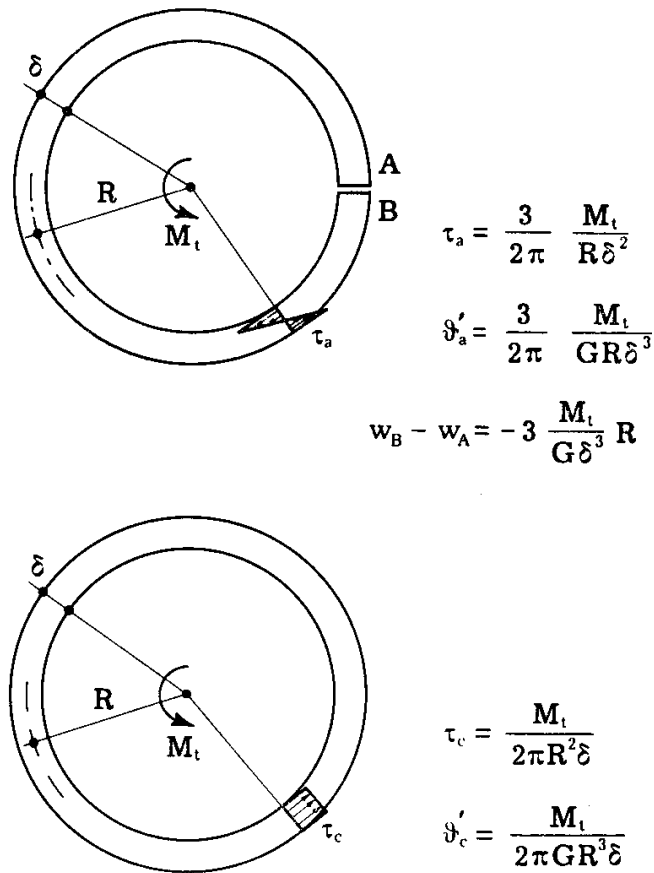


FIG. 10-15

Nel caso della sezione chiusa si ha invece [(10-16), (10-17)]

$$\tau_c = \frac{M_t}{2 A_m \delta} = \frac{M_t}{2 \pi R^2 \delta} \quad (21)$$

$$\vartheta'_c = \frac{M_t 2 \pi R}{4 G \delta \pi^2 R^4} = \frac{M_t}{2 \pi G R^3 \delta} \quad (22)$$

Si verifica, a parità di M_t ,

$$\frac{\tau_a}{\tau_c} = 3 \frac{R}{\delta} \quad (e)$$

$$\frac{\vartheta'_a}{\vartheta'_c} = 3 \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 ; \quad (f)$$

si osserva cioè come la sezione chiusa, a parità di M_t , sia caratterizzata da tensioni e rotazioni molto più basse, e come questa riduzione sia molto più sensibile per le rotazioni che per le tensioni.

b) *Sezione connessa più di due volte.*

Nella sezione connessa più di due volte si possono ancora ammettere, nello stesso ordine di approssimazione, le ipotesi a base della trattazione eseguita per le sezioni biconnesse: tensione normale allo spessore; valore della tensione costante lungo uno spessore generico. Il prodotto $\tau\delta$ è ancora costante con l'ascissa s , ma limitatamente ad ogni tratto; ad ogni tratto quindi corrisponde un diverso valore di $\tau\delta$.

Le incognite in complesso sono perciò $t+1$, e cioè i t valori dei prodotti $\tau_i\delta_i$, e l'angolo specifico di torsione ϑ' .

Per ogni nodo può scriversi un'equazione; fissato per ogni tratto il verso delle ascisse, e quindi quello delle τ positive, si ha in ogni nodo

$$\sum_i \tau_i \delta_i = 0 \quad (23)$$

dove la sommatoria è estesa ai tratti che concorrono nel nodo. Il prodotto $\tau\delta$ va scritto nella (10-23) con il segno $+$ se la τ esce dal nodo, $-$ se entra.

La (10-23), *equazione di nodo* generica, si trae dal teorema della divergenza applicato all'area compresa tra gli spessori che tagliano in una qualsiasi ascissa i tratti concorrenti nel nodo, ed i contorni (fig. 10-16);

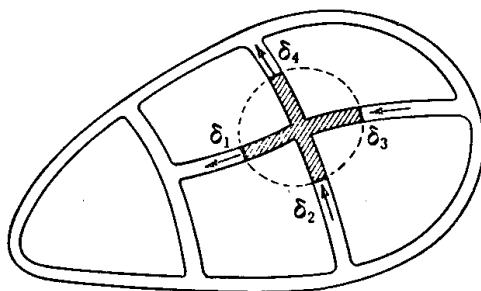


FIG. 10-16

essa è un'equazione di equilibrio, e può pure essere ricavata, come la (10-15), dalla condizione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse z della parte di solido, compresa tra due generiche sezioni rette, ottenuta tagliando il solido con piani paralleli all'asse z e passanti per gli spessori che intervengono nella (10-23) stessa. Altro modo per ottenere la (10-23) è quello dell'analogia idrodinamica, attraverso la costanza della portata.

Per ogni maglia può scriversi un'equazione ottenuta dal teorema di *Stokes*:

$$\int_{mh} \tau ds = 2 G \vartheta' A_{mh} \quad (24)$$

dove l'integrale è esteso alla linea chiusa costituita dalle linee medie dei tratti che formano la maglia, ed A_{mh} è l'area compresa in detta linea media. La circuitazione è positiva se antioraria; i segni con cui le τ vanno scritte nella (10-24) sono perciò da stabilire in relazione al verso assunto positivo nei vari tratti, e sono $+$ se tale verso è concorde con quello antiorario della maglia, $-$ in caso contrario.

La (10-24), *equazione di maglia* generica, è un'equazione di congruenza. Un'ultima equazione, di equilibrio, può scriversi considerando che la risultante delle forze elementari $\tau \delta ds$ è anche in questo caso nulla, poichè sono rispettate le condizioni di equilibrio indefinite ($\text{div } \bar{\tau} = 0$) e quelle ai limiti, e quindi il momento delle $\tau \delta ds$ rispetto ad un punto qualunque P del piano deve essere uguale ad M_t . Se si considera il tratto k -esimo generico, il momento rispetto a P delle $\tau \delta ds$ ad esso relativo è fornito da

$$2 \tau \delta A_{sk} , \quad (g)$$

dove A_{sk} è l'area settoriale (fig. 10-17) definita dal punto P e dalla linea media del tratto k ; ciò risulta da ragionamento analogo a quello già

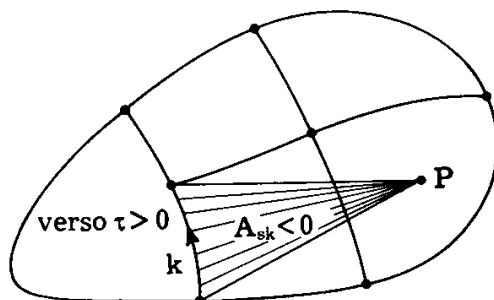


FIG. 10-17

eseguito per le sezioni biconnesse per giungere alla formula della τ . Nella (g) A_{sk} è positiva se, percorrendo il tratto k nel verso delle τ positive, il raggio vettore ruota in senso antiorario; per esempio nella fig. 10-17 essa è negativa. Dalla (g) si trae

$$M_t = 2 \sum_k \tau_k \delta_k A_{sk} , \quad (25)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i tratti della sezione.

Le equazioni dei nodi (10-23) sono in numero di $n-1$, poichè se esse sono soddisfatte in $n-1$ nodi lo sono pure nell'ultimo. Le (10-24) sono in numero di m ; perciò in toto le equazioni disponibili sono $m+n$, pari per la (10-2) al numero delle incognite $t+1$.

c) *Due esempi numerici.*

Si riportano due esempi numerici, studiati da R. Sparacio e F. Maceri con l'aiuto del calcolatore elettronico. Il primo (fig. 10-18) riguarda un

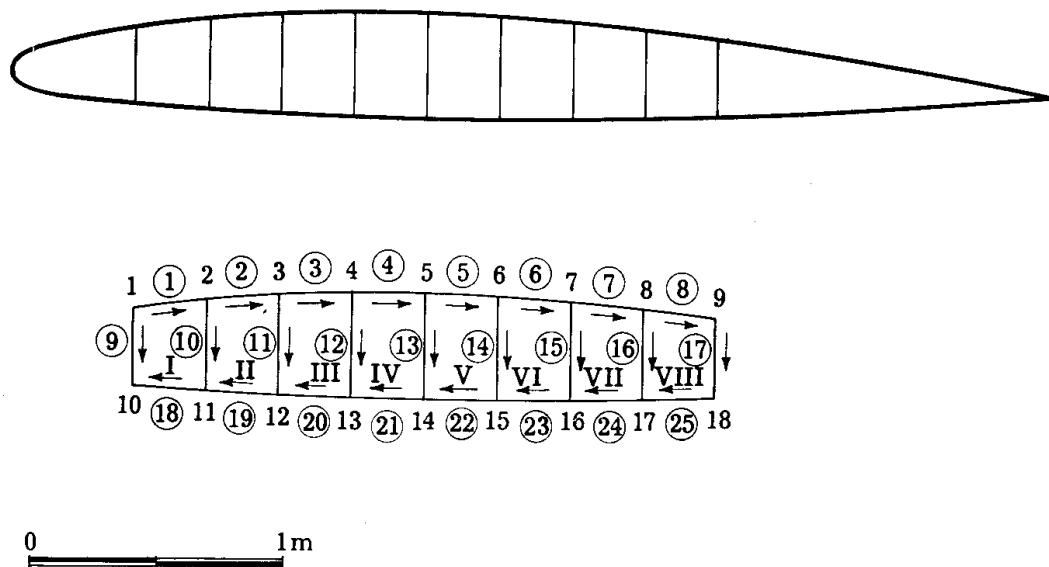


FIG. 10-18

profilo alare (lega di alluminio), dove $n=18$, $m=8$, $t=25$; le equazioni da scrivere sono 26. I versi positivi delle τ sono quelli indicati nella figura; il momento torcente applicato è di 10 tm. Come polo P si sceglie il nodo 1. Nella tabella 1-a sono riportati i tratti con gli spessori δ costanti per ogni tratto, le lunghezze l (ogni tratto è rettilineo nella schematizzazione della fig. 10-18), le distanze h da P; ad h è stato prefisso il segno + se il momento della τ positiva è antiorario.

Nella tabella 1-b sono riportate le maglie con i tratti costituenti, ognuno preso con il segno + se il verso positivo della propria τ è concorde con la circuitazione antioraria. Alla tabella 1-c sono affidati i nodi con i tratti concorrenti, presi con il segno + se la τ positiva esce dal nodo.

Nella tabella 2 sono consegnati i valori di ϑ' e delle τ nei singoli tratti.

TABELLA 1 a
MOMENTO TORCENTE APPLICATO $M_t = 10 \text{ tm}$

Tratto	$\delta \text{ (m)}$	$l \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$
1	0,0030	0,265	0
2	0,0030	0,270	— 0,020
3	0,0030	0,270	— 0,050
4	0,0030	0,270	— 0,070
5	0,0030	0,270	— 0,100
6	0,0030	0,270	— 0,135
7	0,0030	0,270	— 0,160
8	0,0030	0,270	— 0,190
9	0,0020	0,300	0
10	0,0005	0,350	— 0,265
11	0,0005	0,380	— 0,535
12	0,0005	0,400	— 0,805
13	0,0005	0,395	— 1,075
14	0,0005	0,380	— 1,345
15	0,0005	0,355	— 1,615
16	0,0005	0,320	— 1,885
17	0,0020	0,285	— 2,155
18	0,0030	0,265	— 0,305
19	0,0030	0,270	— 0,315
20	0,0030	0,270	— 0,325
21	0,0030	0,270	— 0,345
22	0,0030	0,270	— 0,365
23	0,0030	0,270	— 0,380
24	0,0030	0,270	— 0,395
25	0,0030	0,270	— 0,395

TABELLA 1 b

Maglia	$A_m \text{ (m}^2\text{)}$	Tratti costituenti			
1	0,0888	— 1	9	— 18	— 10
2	0,1010	— 11	10	— 19	— 2
3	0,1080	11	— 20	— 12	— 3
4	0,1080	12	— 21	— 13	— 4
5	0,1070	13	— 22	— 14	— 5
6	0,1000	14	— 23	— 15	— 6
7	0,0920	15	— 24	— 16	— 7
8	0,0810	16	— 25	— 17	— 8

TABELLA 1 c

Nodo	Tratti concorrenti		
1	1	9	
2	2	10	— 1
3	3	11	— 2
4	4	12	— 3
5	5	13	— 4
6	6	14	— 5
7	7	15	— 6
8	8	16	— 7
9	— 8	17	
10	— 18	— 9	
11	18	— 10	— 19
12	19	— 11	— 20
13	20	— 12	— 21
14	21	— 13	— 22
15	22	— 14	— 14
16	23	— 15	— 24
17	24	— 16	— 25
18	25	— 17	

TABELLA 2

 τ t/mq
 ϑ' m⁻¹

$$E = 0,7 \cdot 10^7 \text{ t/mq}$$

$$G = 0,26 \cdot 10^7 \text{ t/mq}$$

ϑ'	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
$26 \cdot 10^{-4}$	— 1832	— 2115	— 2279	— 2338	— 2316	— 2206	— 2013	— 1718	2748
τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}
1700	980	358	— 137	— 658	— 1157	— 1772	— 2577	— 1832	— 2115
	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}			
	— 2279	— 2338	— 2316	— 2206	— 2013	— 1718			

Nella fig. 10-19 è disegnata la sezione maestra del transatlantico *France*, ricavata dai dati della Società armatrice. Il momento torcente, pari a 150.000 tm, è calcolato nelle condizioni più gravose. Si ha $n=26$, $m=12$, $t=37$, e le equazioni da scrivere sono 38.

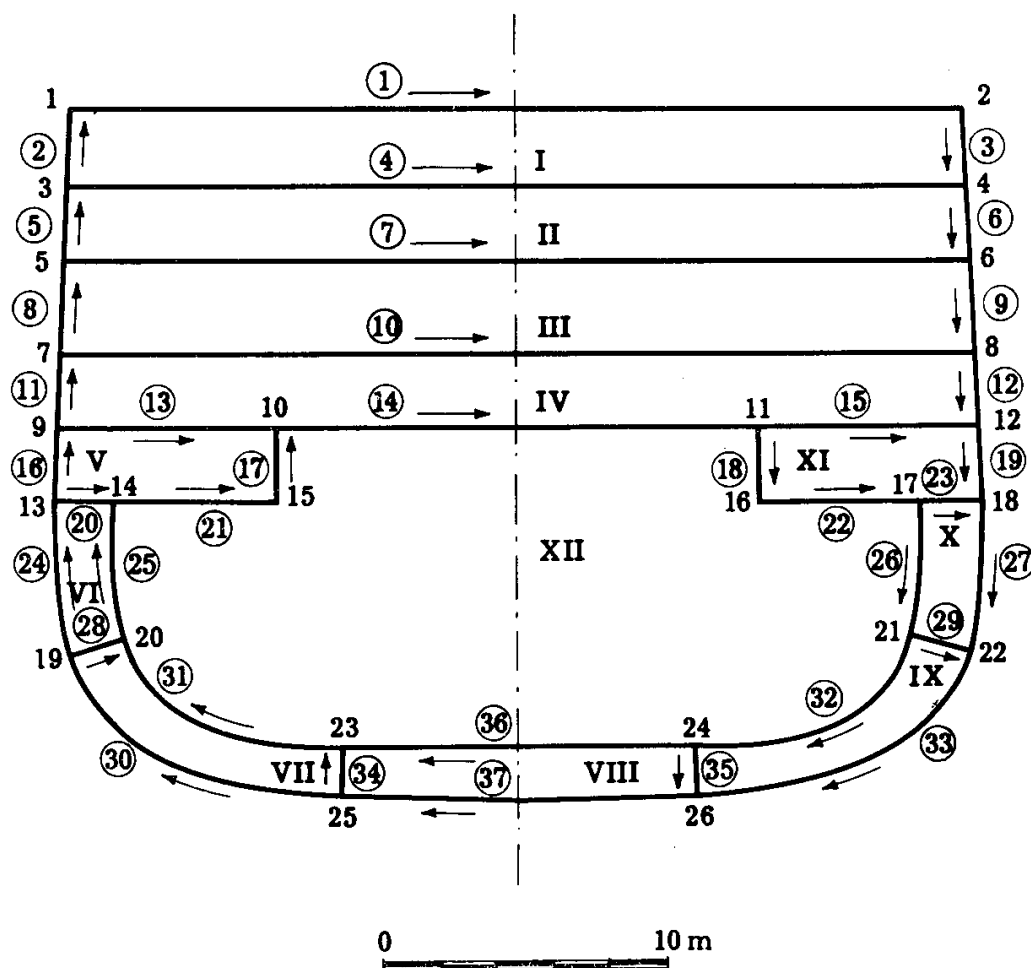


FIG. 10-19

Nella tabella 3 a, b, c sono forniti i dati relativi ai tratti, alle maglie ed ai nodi, avendo preso come polo P il punto medio del tratto 1 (*); nella tabella 4 e nella fig. 10-20 i valori di ϑ' e delle τ .

(*) Per i tratti curvi, al posto di h è riportato un h^* equivalente fornito da

$$h_k^* l_k = \int_k h dl .$$

TABELLA 3 a

MOMENTO TORCENTE APPLICATO $M_t = 150.000 \text{ tm}$

Tratto	$\delta \text{ (m)}$	$\ell \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$
1	0,028	32,00	0
2	0,035	2,75	16,00
3	0,035	2,75	16,00
4	0,023	32,20	— 2,75
5	0,025	2,75	16,00
6	0,025	2,75	16,00
7	0,011	32,40	— 5,50
8	0,025	3,25	16,00
9	0,025	3,25	16,00
10	0,008	32,70	— 8,75
11	0,025	2,60	16,00
12	0,025	2,60	16,00
13	0,008	7,80	— 11,40
14	0,008	17,40	— 11,40
15	0,008	7,80	— 11,40
16	0,025	2,75	16,00
17	0,010	2,75	8,70
18	0,010	2,75	8,70
19	0,025	2,75	16,00
20	0,008	2,10	— 14,10
21	0,008	5,80	— 14,10
22	0,008	5,80	— 14,10
23	0,008	2,10	— 14,10
24	0,025	5,50	16,00
25	0,012	4,90	15,80
26	0,012	4,90	15,80
27	0,026	5,50	16,00
28	0,012	2,10	— 13,20
29	0,012	2,10	— 13,20
30	0,028	11,60	25,00
31	0,018	9,50	23,50
32	0,018	9,50	23,50
33	0,028	11,60	25,00
34	0,018	1,80	6,20
35	0,018	1,80	6,20
36	0,018	12,40	22,80
37	0,028	12,50	24,80

TABELLA 3 b

Maglia	A_m (m ²)	Tratti costituenti
1	80,20	1 3 — 4 2
2	89,00	4 6 — 7 5
3	105,00	7 9 — 10 8
4	85,50	10 12 — 15 — 14 — 13 11
5	21,60	13 — 17 — 21 — 20 16
6	11,40	20 — 25 — 28 24
7	19,80	28 — 31 — 34 30
8	24,00	34 — 36 35 37
9	19,80	— 35 — 32 29 33
10	11,40	23 27 — 29 — 26
11	21,60	15 19 — 23 — 22 — 18
12	133,80	14 18 22 26 32 36 31 25 21 17

TABELLA 3 c

Nodo	Tratti concorrenti
1	1 — 2
2	3 — 1
3	2 4 — 5
4	6 — 2 — 4
5	5 7 — 8
6	— 6 — 7 9
7	8 10 — 11
8	12 — 9 — 10
9	11 13 — 16
10	14 — 13 — 17
11	18 15 — 14
12	19 — 12 — 15
13	16 20 — 24
14	21 — 20 — 25
15	17 — 21
16	22 — 18
17	23 26 — 22
18	27 — 23 — 19
19	28 24 — 30
20	25 — 28 — 31
21	29 32 — 26
22	33 — 27 — 29
23	31 — 34 — 36
24	36 35 — 32
25	30 34 — 37
26	37 — 35 — 33

TABELLA 4

$$\begin{aligned} \tau & \text{ t/mq} & E & = 2,1 \cdot 10^7 \text{ t/mq} \\ \vartheta' & \text{ m}^{-1} & G & = 1,05 \cdot 10^7 \text{ t/mq} \end{aligned}$$

ϑ'	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
$0,23 \cdot 10^{-4}$	2457	1966	1966	1415	4054	4054	728	4374	4374
τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}
— 6	4372	4372	— 668	— 551	— 668	4158	93	93	4158
τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	τ_{26}	τ_{27}	τ_{28}	τ_{29}
— 2595	116	116	— 2595	3263	1808	1808	3263	— 966	— 966
τ_{30}	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}	τ_{34}	τ_{35}	τ_{36}	τ_{37}		
2557	1849	1849	2557	121	121	1729	2635		

d) *Un sistema di equazioni ridotto ed un metodo di successive approssimazioni per il calcolo delle sezioni connesse più di due volte.*

Si prenda in considerazione la sezione fittizia costituita da m sezioni biconnesse, ciascuna coincidente con una maglia della sezione reale. Per ogni tratto comune a due maglie lo spessore appare così due volte, in ciascuna delle due sezioni biconnesse contenenti quel tratto.

Si suddivida il momento M_t in m parti arbitrarie M_h , attribuendone una ad ogni sezione biconnessa. Si può assumere, come criterio di suddivisione, quello della proporzionalità alle rigidità torsionali C_{th} secondo Bredt (10-18). Lo stato tensionale che così si ricava nelle sezioni biconnesse è in equilibrio anche nella sezione reale, poichè sono rispettate le equazioni di nodo (10-23) e quella globale (10-25). In genere però la soluzione non è congruente, perchè i ϑ'_h calcolati su ogni maglia della sezione reale attraverso la (10-24) sono diversi l'uno dall'altro.

La (10-24) può porsi, per la maglia generica h , nella forma

$$\vartheta'_h = \frac{c_h}{2 G A_{mh}} = c_{hh} M_h + \sum_j c_{hj} M_j, \quad (26)$$

dove la sommatoria è estesa alle sole maglie adiacenti alla h .

$$M_t = 150000 \text{ tm}$$

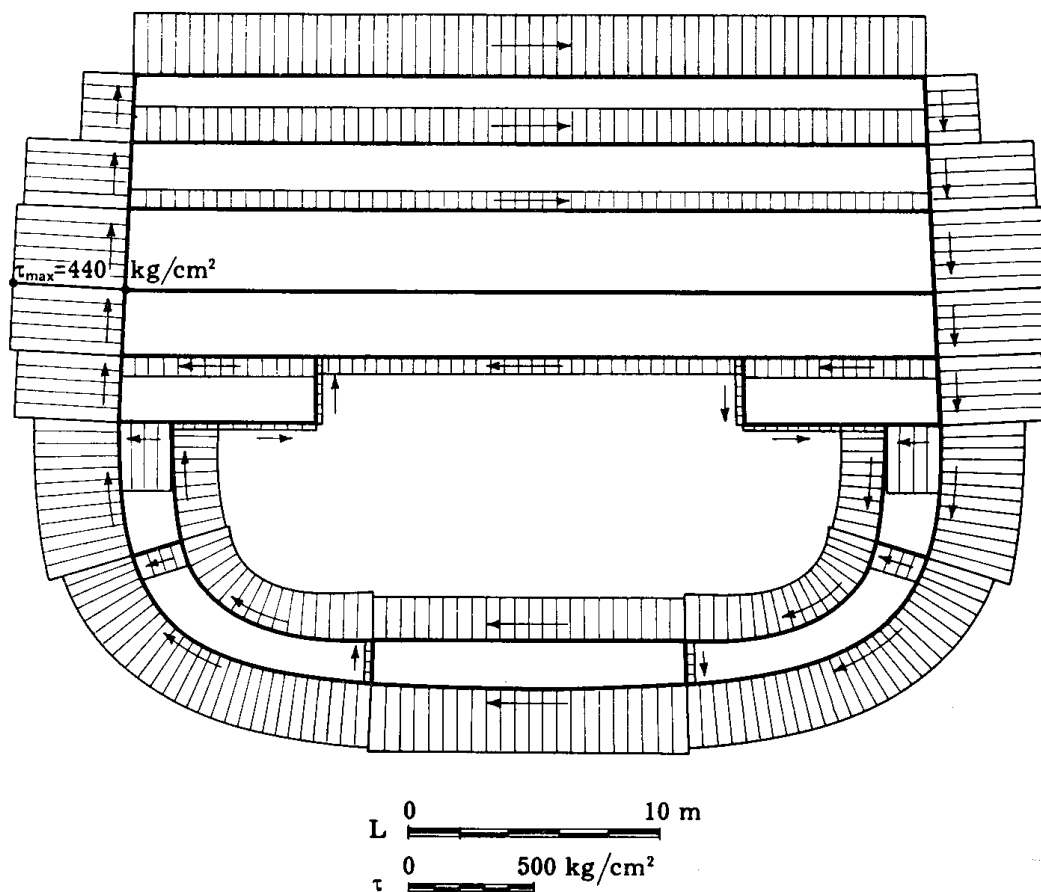


FIG. 10-20

Poichè la soluzione non è congruente, occorre correggere i momenti M_h , con delle variazioni ΔM_h . Le condizioni che forniscono i ΔM_h e l'angolo ϑ' reale sono

$$\begin{aligned} \sum_h \Delta M_h &= 0 \\ c_{hh} \Delta M_h + \sum_j c_{hj} \Delta M_j &= -\vartheta'_h + \vartheta'; \end{aligned} \quad (27)$$

sommando infatti le (10-26) e (10-27) si ha

$$\Sigma_h (M_h + \Delta M_h) = M_t \quad (28)$$

$$c_{hh} (M_h + \Delta M_h) + \Sigma_j c_{hj} (M_j + \Delta M_j) = \mathfrak{F}'.$$

Si può ovviamente operare sulle (10-27) ottenendo i ΔM_h , o direttamente sulle (10-28), ottenendo i momenti complessivi finali $M_h + \Delta M_h$; in un caso o nell'altro il sistema di equazioni si riduce di numero ad $m + 1$.

Il procedimento numerico di successive approssimazioni che di seguito si espone (*Maceri*) evita però del tutto le equazioni. Si imponga perciò che sia

$$\Delta M_h = (-\mathfrak{F}'_h + \mathfrak{F}^{*'}) C_{1h}. \quad (h)$$

Dalla condizione

$$\Sigma_h \Delta M_h = 0$$

si trae

$$\mathfrak{F}^{*'} = \frac{\Sigma_h \mathfrak{F}'_h C_{1h}}{\Sigma C_{1h}}$$

e quindi

$$\Delta M_h = \Sigma_s a_{hs} \mathfrak{F}'_s, \quad (29)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le maglie.

Calcolati i ΔM_h , si torna al calcolo dei $\mathfrak{F}'_h$ attraverso le (10-26); essi in genere saranno diversi da maglia a maglia, e quindi il procedimento si itera.

Esprimendo le $\mathfrak{F}'_s$ della (10-29) attraverso la (10-26), si può ottenere direttamente l'espressione di ΔM_h attraverso i momenti della fase precedente:

$$\Delta M_h = \Sigma_s b_{hs} M_s.$$

Il procedimento converge. Infatti, poichè si passa attraverso soluzioni equilibrate e non congruenti, l'energia di deformazione L è sempre maggiore (si veda, nel Cap. V del III Volume, il teorema di Menabrea) di quella corrispondente alla soluzione equilibrata e congruente. D'altro canto, nello stadio generico del procedimento, la variazione dL dell'energia di deformazione è fornita dalla somma del lavoro $d_1 L$ delle τ connesse con gli M_h per effetto delle $d\gamma$ connesse con i ΔM_h , e del lavoro $d_2 L$ delle $d\tau$ per i $d\gamma$. Il secondo termine si trascura rispetto al primo, che quindi regola il segno del dL . Chiamando, nei tratti comuni a due maglie,

τ_B la τ calcolata alla Bredt nella singola maglia, si ha, per Betti,

$$\begin{aligned}
 d_1 L &= \sum_i d\tau \delta\gamma ds = \sum_h \int_{mh} d\tau_B \delta\gamma ds = \\
 &= \sum_h d\tau_B \delta \int_{mh} \gamma ds = \\
 &= \frac{1}{G} \sum_h d\tau_B \delta \int_{mh} \tau ds = \sum_h 2 d\tau_B \delta \vartheta'_h A_{mh} = \\
 &= \sum_h \Delta M_h \vartheta'_h = \sum_h \Delta M_h (\vartheta'_h - \vartheta^{*'}) + \vartheta^{*'} \sum_h \Delta M_h ;
 \end{aligned}$$

dalla prima delle (10-27) e dalla (h) si trae perciò

$$d_1 L = - \sum_h C_{1h} (\vartheta'_h - \vartheta^{*'})^2 < 0 .$$

Poichè ad ogni operazione L diminuisce, il procedimento non può che tendere al minimo di L , e quindi converge.

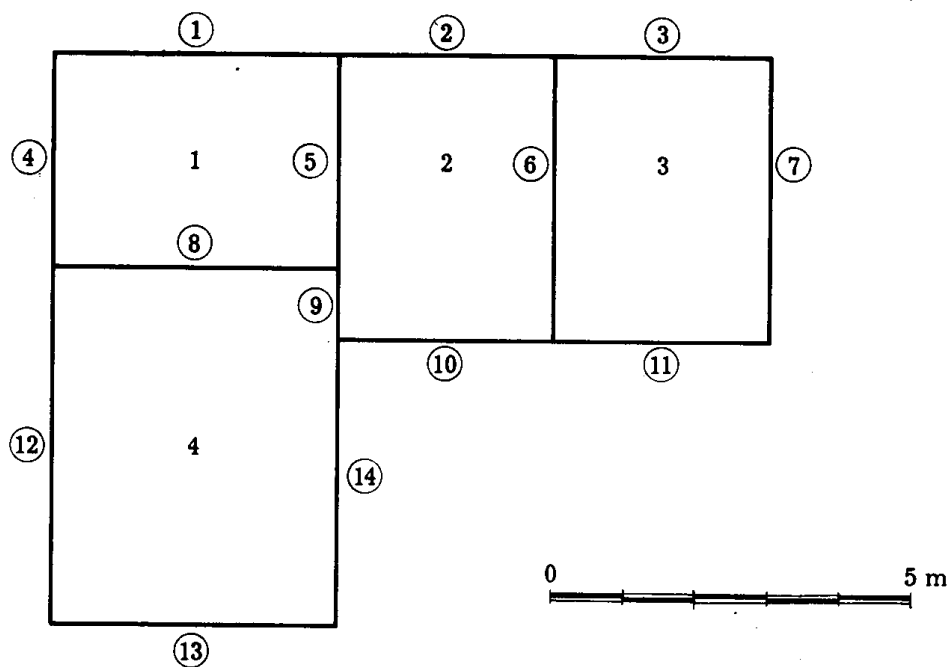


FIG. 10-21

Si avverte che la dimostrazione di congruenza presuppone che i ΔM_h siano piccoli rispetto agli M_h , e quindi che nello stadio iniziale gli M_h siano scelti in modo da soddisfare tale condizione.

Si riportano nel seguito due esempi numerici.

Il primo è relativo alla sezione disegnata nella fig. 10-21, dalla quale si traggono le numerazioni adottate per le maglie ed i lati.

Le caratteristiche geometriche di questi ultimi (lunghezza l e spessore δ) sono affidate alla tabella 5-a, e le aree A_m delle quattro maglie compaiono nella tabella 5-b.

TABELLA 5 a

Tratto	l (m)	δ (m)
1	4	0,020
2	3	0,020
3	3	0,020
4	3	0,020
5	3	0,010
6	4	0,010
7	4	0,015
8	4	0,010
9	1	0,010
10	3	0,015
11	3	0,015
12	5	0,020
13	4	0,015
14	4	0,015

TABELLA 5 b

Maglia	A_m (m ²)
1	12
2	12
3	12
4	20

Esplicitando, la (10-26) si scrive nella forma:

$$\begin{aligned}
 2 G \vartheta'_h &= \frac{M_h}{2 A^2} \int_{mh} \frac{ds}{\delta} - \sum_j \frac{M_j}{2 A_{mh} A_{mj}} \int_{j,h} \frac{ds}{\delta} = \\
 &= c'_{hh} M_h + \sum_j c'_{hj} M_j
 \end{aligned}
 \tag{26'}$$

in cui l' $\int_{j,h}$ è esteso ai tratti comuni alle maglie j ed h , e dove si è posto:

$$c'_{hh} = \frac{1}{2 A_{mh}^2} \int_{mh} \frac{ds}{\delta}$$

$$c'_{hj} = - \frac{1}{2 A_{mh} A_{mj}} \int_{j,h} \frac{ds}{\delta} .$$

Si ha, ad esempio:

$$\int_{m1} \frac{ds}{\delta} = \frac{400}{2} + \frac{300}{2} + \frac{300}{1} + \frac{400}{1} = 1050$$

$$c'_{11} = \frac{1}{2 A_{m1}^2} \int_{m1} \frac{ds}{\delta} = \frac{1050}{2 \times 144} = 3,646$$

$$\int_{1,2} \frac{ds}{\delta} = \frac{300}{1} = 300$$

$$c'_{12} = - \frac{1}{2 A_{m1} A_{m2}} \int_{1,2} \frac{ds}{\delta} = - \frac{300}{2 \times 12 \times 12} = - 1,042 ,$$

ed il quadro completo dei coefficienti c' è riportato nella tabella 6.

TABELLA 6

	M_1	M_2	M_3	M_4
$2 G \vartheta'_1$	3,646	— 1,042	0	— 0,833
$2 G \vartheta'_2$	— 1,042	3,993	— 1,389	— 0,208
$2 G \vartheta'_3$	0	— 1,389	3,530	0
$2 G \vartheta'_4$	— 0,833	— 0,208	0	1,604

Per esplicitare la (10-29), si osservi che è

$$2 G \vartheta^{*'} = \frac{\sum_h 2 G \vartheta'_h C_{1h}}{\sum_h C_{1h}} = \sum_h 2 G \vartheta'_h r_h ,$$

dove

$$r_h = \frac{C_{1h}}{\sum_h C_{1h}}$$

è il *coefficiente di ripartizione* relativo alla maglia h , e dove C_{1h} è espresso dalla (10-18):

$$C_{1h} = \frac{4 G A_{mh}^2}{\int_{mh} \frac{ds}{\delta}}.$$

I coefficienti r_h , che non dipendono da G , valgono rispettivamente, per la sezione in esame:

$$r_1 = 0,1916$$

$$r_2 = 0,1749$$

$$r_3 = 0,1979$$

$$r_4 = 0,4355.$$

La (10-29) assume la forma

$$\begin{aligned} \Delta M_h = (-2 G \vartheta'_h + 2 G \vartheta'^*) \frac{C_{1h}}{2 G} = \sum_{s \neq h} \frac{2 A_{mh}^2}{\int_{mh} \frac{ds}{\delta}} r_s 2 G \vartheta'_s + \\ + (r_h - 1) \frac{2 A_{mh}^2}{\int_{mh} \frac{ds}{\delta}} 2 G \vartheta'_h = \sum_s a'_{hs} 2 G \vartheta'_s, \end{aligned} \quad (29')$$

ed i relativi coefficienti a'_{hs} sono raccolti nella tabella 7.

TABELLA 7

	$2 G \vartheta'_1$	$2 G \vartheta'_2$	$2 G \vartheta'_3$	$2 G \vartheta'_4$
ΔM_1	-0,2217	0,0480	0,0543	0,1194
ΔM_2	0,0480	-0,2066	0,0496	0,1090
ΔM_3	0,0543	0,0496	-0,2272	0,1234
ΔM_4	0,1194	0,1090	0,1234	-0,3519

Le (10-26') e (10-29'), ottenute dalle (10-26) e (10-29) assumendo come incognite i prodotti $2 G \vartheta'_h$ anzichè ϑ'_h , permettono di operare a meno di G , e vengono perciò preferite nella pratica applicazione del procedimento iterativo.

La coppia torcente applicata alla sezione, pari a

$$M_t = 10.000 \text{ tm} ,$$

si ripartisce proporzionalmente alle rigidità C_{1h} , e cioè ai numeri r_h

1	<table><tr><td>M_1</td><td>$2G\vartheta'_1$</td></tr><tr><td>1916</td><td>1536</td></tr><tr><td>571</td><td></td></tr><tr><td>2487</td><td>3752</td></tr><tr><td>146</td><td></td></tr><tr><td>2341</td><td>3211</td></tr><tr><td>24</td><td></td></tr><tr><td>2365</td><td>3302</td></tr><tr><td>6</td><td></td></tr><tr><td>2359</td><td>3281</td></tr></table>	M_1	$2G\vartheta'_1$	1916	1536	571		2487	3752	146		2341	3211	24		2365	3302	6		2359	3281	2	<table><tr><td>M_2</td><td>$2G\vartheta'_2$</td></tr><tr><td>1749</td><td>1333</td></tr><tr><td>572</td><td></td></tr><tr><td>2321</td><td>3574</td></tr><tr><td>89</td><td></td></tr><tr><td>2232</td><td>3187</td></tr><tr><td>28</td><td></td></tr><tr><td>2260</td><td>3301</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>2255</td><td>3278</td></tr></table>	M_2	$2G\vartheta'_2$	1749	1333	572		2321	3574	89		2232	3187	28		2260	3301	5		2255	3278	3	<table><tr><td>M_3</td><td>$2G\vartheta'_3$</td></tr><tr><td>1979</td><td>4557</td></tr><tr><td>266</td><td></td></tr><tr><td>1713</td><td>2823</td></tr><tr><td>113</td><td></td></tr><tr><td>1826</td><td>3346</td></tr><tr><td>13</td><td></td></tr><tr><td>1813</td><td>3261</td></tr><tr><td>6</td><td></td></tr><tr><td>1819</td><td>3289</td></tr></table>	M_3	$2G\vartheta'_3$	1979	4557	266		1713	2823	113		1826	3346	13		1813	3261	6		1819	3289
M_1	$2G\vartheta'_1$																																																																
1916	1536																																																																
571																																																																	
2487	3752																																																																
146																																																																	
2341	3211																																																																
24																																																																	
2365	3302																																																																
6																																																																	
2359	3281																																																																
M_2	$2G\vartheta'_2$																																																																
1749	1333																																																																
572																																																																	
2321	3574																																																																
89																																																																	
2232	3187																																																																
28																																																																	
2260	3301																																																																
5																																																																	
2255	3278																																																																
M_3	$2G\vartheta'_3$																																																																
1979	4557																																																																
266																																																																	
1713	2823																																																																
113																																																																	
1826	3346																																																																
13																																																																	
1813	3261																																																																
6																																																																	
1819	3289																																																																
4	<table><tr><td>M_4</td><td>$2G\vartheta'_4$</td></tr><tr><td>4355</td><td>5026</td></tr><tr><td>877</td><td></td></tr><tr><td>3478</td><td>3024</td></tr><tr><td>122</td><td></td></tr><tr><td>3600</td><td>3360</td></tr><tr><td>39</td><td></td></tr><tr><td>3561</td><td>3272</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>3566</td><td>3286</td></tr></table>	M_4	$2G\vartheta'_4$	4355	5026	877		3478	3024	122		3600	3360	39		3561	3272	5		3566	3286																																												
M_4	$2G\vartheta'_4$																																																																
4355	5026																																																																
877																																																																	
3478	3024																																																																
122																																																																	
3600	3360																																																																
39																																																																	
3561	3272																																																																
5																																																																	
3566	3286																																																																

FIG. 10-22

(fig. 10-22); si ha

$$M_1 = 1916 \text{ tm}$$

$$M_2 = 1749 \text{ tm}$$

$$M_3 = 1979 \text{ tm}$$

$$M_4 = 4355 \text{ tm} .$$

Moltiplicando ordinatamente questi valori per ciascuna riga dei coefficienti della tabella 6, si ottiene la prima approssimazione per i $2 G \vartheta'_h$:

$$2 G \vartheta'_1 = 1536 \text{ tm}^{-3}$$

$$2 G \vartheta'_2 = 1333 \text{ tm}^{-3}$$

$$2 G \vartheta'_3 = 4557 \text{ tm}^{-3}$$

$$2 G \vartheta'_4 = 5026 \text{ tm}^{-3} ,$$

riportati al primo posto delle colonne apposite nella fig. 10-22.

Le correzioni ΔM_h si ottengono moltiplicando ordinatamente questo insieme di valori per i coefficienti di ciascuna riga della tabella 7:

$$\Delta M_1 = 571 \text{ tm}$$

$$\Delta M_2 = 572 \text{ tm}$$

$$\Delta M_3 = - 266 \text{ tm}$$

$$\Delta M_4 = - 877 \text{ tm} .$$

I nuovi momenti si ottengono sommando gli incrementi a quelli precedenti, e cioè:

$$M_1 = 2487 \text{ tm}$$

$$M_2 = 2321 \text{ tm}$$

$$M_3 = 1713 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3478 \text{ tm} .$$

L'iterazione è stata ripetuta, come appare dal disegno, fino a ottenere un soddisfacente grado di congruenza, di cui sono prova i piccoli scarti tra i $2 G \vartheta'_h$.

In base ai valori finali degli M_h , si calcolano i prodotti $\tau \delta$ in ogni maglia:

$$(\tau \delta)_1 = \frac{M_1}{2 A_{m1}} = \frac{2359}{24} = 98,29 \text{ t/m}$$

$$(\tau \delta)_2 = \frac{M_2}{2 A_{m2}} = \frac{2255}{24} = 93,96 \text{ t/m}$$

$$(\tau \delta)_3 = \frac{M_3}{2 A_{m3}} = \frac{1819}{24} = 75,79 \text{ t/m}$$

$$(\tau \delta)_4 = \frac{M_4}{2 A_{m4}} = \frac{3566}{40} = 89,15 \text{ t/m}$$

e quelli in ciascun tratto, per differenza tra i valori relativi alle maglie

TABELLA 8

Tratto	τ (Kg/cm ²)	Tratto	τ (Kg/cm ²)
1	491	8	91
2	470	9	48
3	379	10	626
4	491	11	505
5	43	12	446
6	182	13	594
7	505	14	594

cui esso appartiene. Le τ finali, raccolte in tabella 8, sono anche date nel diagramma di fig. 10-23.

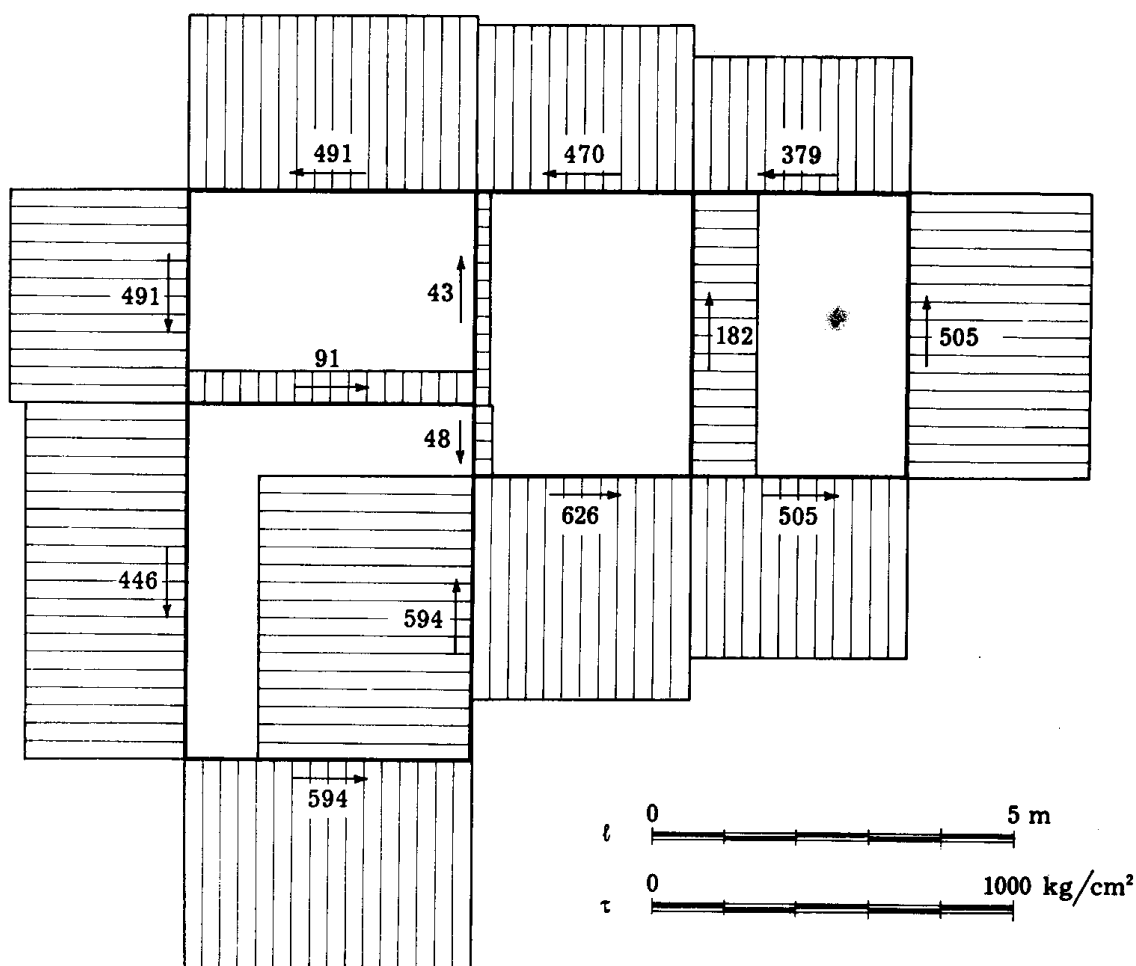


FIG. 10-23

Il secondo esempio di calcolo si riferisce alla sezione da ponte della fig. 10-24; si trascurano, ai fini del comportamento torsionale, gli eventuali marciapiedi a sbalzo.

TABELLA 9 a

Tratto	l (m)	δ (m)
1	3,0	0,02
2	3,0	0,02
3	3,0	0,02
4	1,5	0,02
5	1,5	0,02
6	1,5	0,02
7	1,5	0,02
8	1,5	0,02
9	1,5	$\int \frac{ds}{\delta} = 0$
10	3,0	0,03
11	3,0	0,03
12	3,0	0,03
13	1,5	0,03

TABELLA 9 b

Maglia	A_m (m ²)
1	4,50
2	4,50
3	4,50
4	2,25

TABELLA 10

	M_1	M_2	M_3	M_4
$2 G \vartheta'_1$	0,9877	—0,1852	0	0
$2 G \vartheta'_2$	—0,1852	0,9877	—0,1852	0
$2 G \vartheta'_3$	0	—0,1852	0,9877	—0,3704
$2 G \vartheta'_4$	0	0	—0,3704	1,9753

Infine, in tabella 11 sono consegnati gli a' ; la coppia applicata alla

TABELLA 11

	$2 G \vartheta'_1$	$2 G \vartheta'_2$	$2 G \vartheta'_3$	$2 G \vartheta'_4$
ΔM_1	— 0,7233	0,2893	0,2893	0,1447
ΔM_2	0,2893	— 0,7233	0,2893	0,1447
ΔM_3	0,2893	0,2893	— 0,7233	0,1447
ΔM_4	0,1447	0,1447	0,1447	— 0,4340

semistruttura, pari ancora a 10.000 tm, viene ripartita secondo gli r_h , e dai valori ottenuti si giunge (fig. 10-26) in tre soli cicli a quelli esatti dei momenti M_h .

1	M_1 $2G\vartheta'_1$	2	M_2 $2G\vartheta'_2$	3	M_3 $2G\vartheta'_3$	4	M_4 $2G\vartheta'_4$
	$\frac{2857}{-383}$ $\frac{2293}{1886}$		$\frac{2857}{153}$ $\frac{1764}{1957}$		$\frac{2857}{153}$ $\frac{1764}{1858}$		$\frac{1429}{77}$ $\frac{1764}{1860}$
	$\frac{2474}{9}$ $\frac{1886}{1907}$		$\frac{3010}{-63}$ $\frac{1957}{1887}$		$\frac{3010}{37}$ $\frac{1858}{1900}$		$\frac{1506}{17}$ $\frac{1860}{1880}$
	$\frac{2483}{-12}$ $\frac{1907}{1893}$		$\frac{2947}{9}$ $\frac{1887}{1898}$		$\frac{3047}{5}$ $\frac{1900}{1890}$		$\frac{1523}{8}$ $\frac{1880}{1897}$
	$\frac{2471}{2471}$ $\frac{1893}{1893}$		$\frac{2956}{2956}$ $\frac{1898}{1898}$		$\frac{3042}{3042}$ $\frac{1890}{1890}$		$\frac{1531}{1531}$ $\frac{1897}{1897}$

FIG. 10-26

Si ha poi

$$(\tau\delta)_1 = \frac{M_1}{2 A_{m1}} = \frac{2471}{9} = 274,6 \text{ t/m}$$

$$(\tau\delta)_2 = \frac{M_2}{2 A_{m2}} = \frac{2956}{9} = 328,4 \text{ t/m}$$

$$(\tau\delta)_3 = \frac{M_3}{2 A_{m3}} = \frac{3042}{9} = 338,0 \text{ t/m}$$

$$(\tau\delta)_4 = \frac{M_4}{2 A_{m4}} = \frac{1531}{4,5} = 340,2 \text{ t/m}$$

e di qui le τ , raccolte nella tabella 12 e diagrammate in fig. 10-27.

TABELLA 12

Tratto	τ (Kg/cm ²)
1	137,3
2	164,2
3	169,0
4	170,1
5	137,3
6	26,4
7	4,8
8	1,1
9	91,5
10	109,5
11	112,7
12	113,4

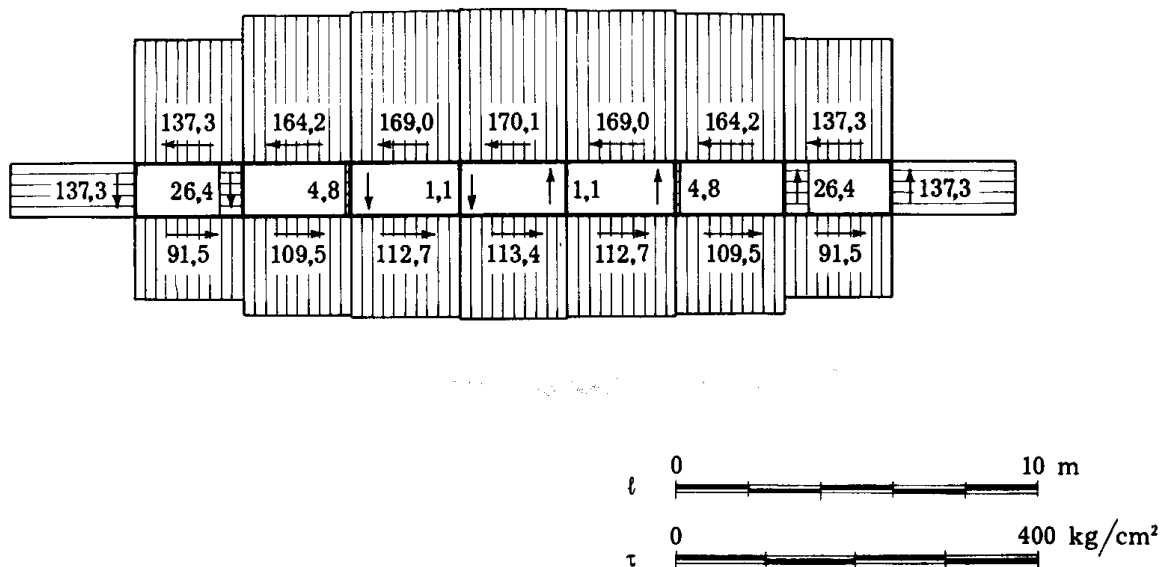


FIG. 10-27

5. La sezione sottile chiusa soggetta a torsione: gli spostamenti da ingobbimento.

L'ingobbimento w può scomporsi in due parti, una w_a calcolata in assenza di scorrimenti sulla linea media e relativa alla sezione resa mo-

noconnessa con m tagli (fig. 10-28), all'angolo ϑ' della sezione effettiva, e quindi ad una parte molto piccola del momento M_t , e l'altra w_b dovuta agli scorrimenti lungo la linea media, calcolati in rapporto alle τ ottenute come nel § 10-4; sono questi scorrimenti che ristabiliscono la congruenza lungo i tagli della fig. 10-28. Si consideri il circuito c_i costituito dai tratti succes-

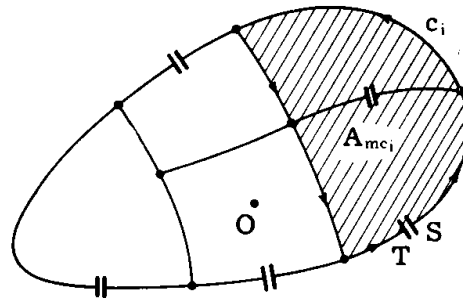


FIG. 10-28

sivi seguendo i quali si può partire da una faccia S di un taglio (fig. 10-28) e giungere, senza incontrare altri tagli, all'altra faccia T del taglio di partenza. Ad ogni taglio è connesso un circuito; quasi sempre un cir-

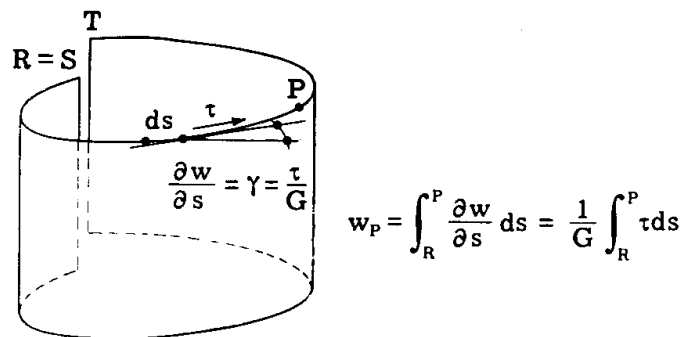


FIG. 10-29

cuito coincide con una maglia. Per la (10-12), ponendo $R=S$ e $w_R=0$, si ha

$$w_a = -2 \vartheta' A_s .$$

L'effetto delle τ lungo la linea media è (fig. 10-29)

$$w_b = \frac{1}{G} \int_R^P \tau ds .$$

Nella fig. 10-30 sono riportati i diagrammi w_a e w_b , e la loro somma w .

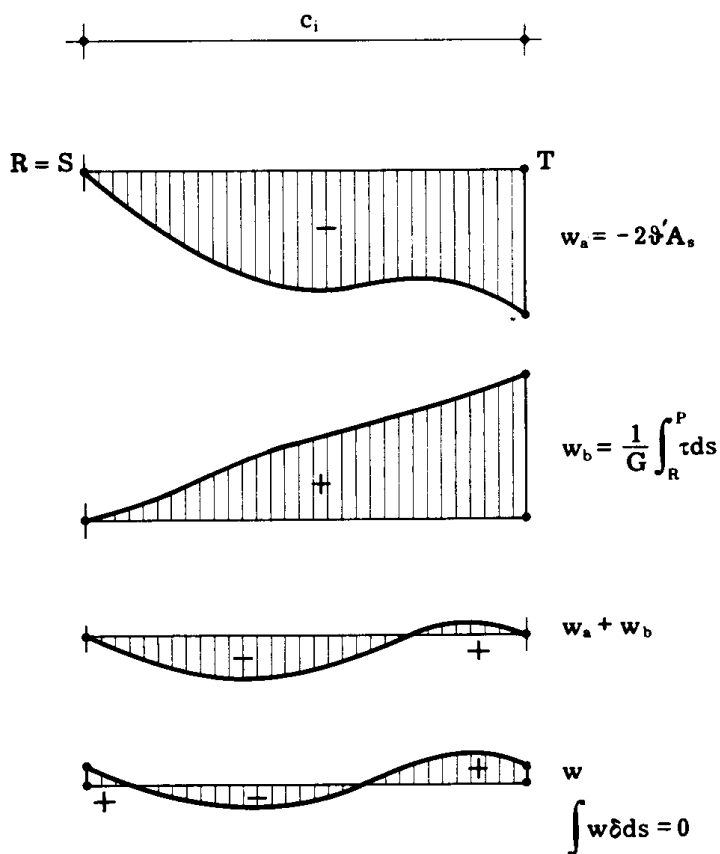


FIG. 10-30

Risulta

$$w_T = w_{aT} + w_{bT} = -2\vartheta' A_{mc_i} + \frac{1}{G} \int_{c_i} \tau ds ;$$

per il teorema di *Stokes* si ha d'altro canto

$$2G\vartheta' A_{mc_i} = \int_i \tau ds ,$$

e quindi $w_T = 0$. Si ha così conferma che le τ ripristinano la congruenza in corrispondenza dei tagli.

Per la sezione chiusa può quindi porsi

$$w = -2\vartheta' A_s + \frac{\vartheta'}{G} \int_R^P \tau_u ds , \quad (30)$$

dove le τ_u sono le τ connesse con $\vartheta' = 1$.

La fondamentale del diagramma delle w si fissa con la condizione

$$\int_m w \delta ds = 0, \quad (31)$$

dove l'integrale è esteso a tutti i tratti.

Variando il centro O , le w_a variano di una quantità lineare in x e y , mentre le w_b restano invariate; l'ingobbimento, quindi, è indipendente da O anche nelle sezioni chiuse.

In un tratto rettilineo w_a varia con legge lineare, e così pure w_b se lo spessore δ è costante nel tratto stesso; l'inclinazione del diagramma w_b dipende da δ , e diminuisce dove δ aumenta; perciò nelle sezioni chiuse con tratti rettilinei di spessore costante, di grandissimo impiego, il diagramma w varia con legge lineare lungo ogni tratto.

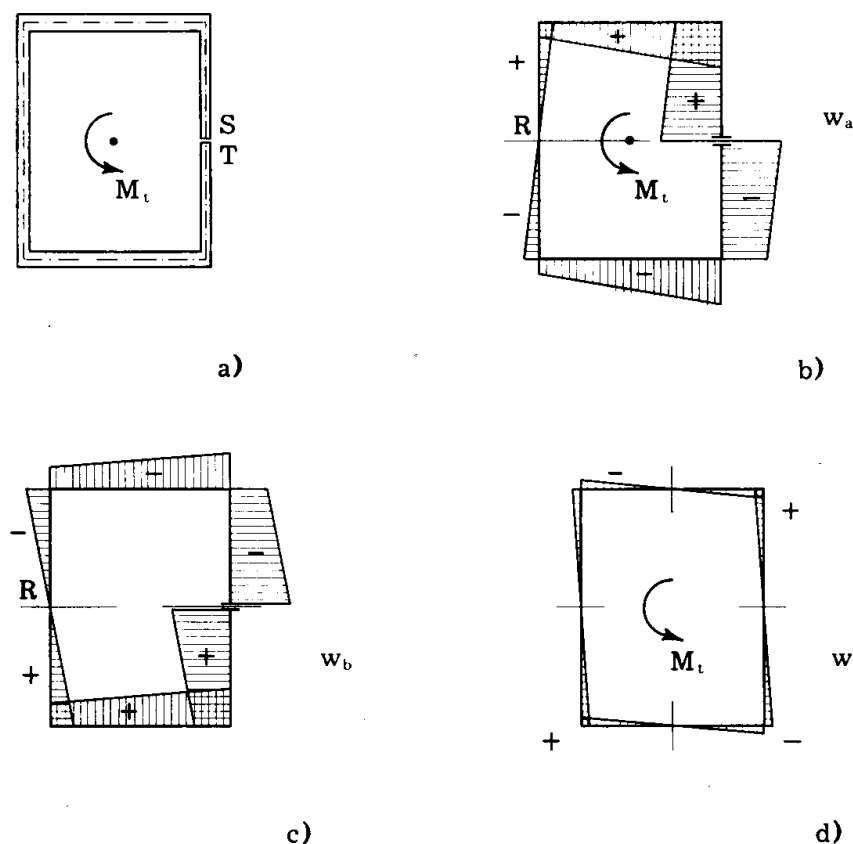


FIG. 10-31

Nella fig. 10-31 è riportato il diagramma w per una sezione rettangolare a cassone biconnessa.