

GEOMETRIA DELLE MASSE

1. Momento statico, momento d'inerzia, momento centrifugo e momento polare.

Sia assegnato un insieme di masse m_i (di segno qualsiasi) concentrate in punti P_i di un piano (fig. 1-1); le m_i sono quantità scalari generiche, tutte della stessa dimensione fisica [m]. Il termine massa non ha perciò riferimento all'omonimo ente della meccanica.

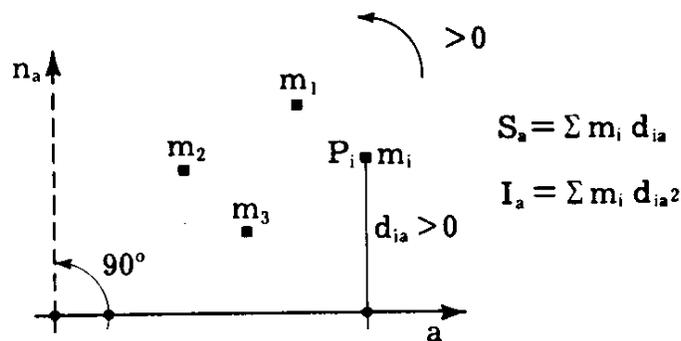


FIG. 1-1

Nel piano sia assegnata una generica retta a orientata, e la sua normale n_a orientata alla sinistra di a , cioè in modo che l'angolo $\widehat{a n_a}$ positivo (antiorario) sia di 90° . La *distanza* d_{ia} tra la massa m_i e la retta a è valutata come ordinata secondo n_a , e risulta quindi positiva se la massa si trova alla sinistra di a , e cioè di chi, camminando sul piano, viaggia nel verso positivo di a .

Si definisce *momento statico* della distribuzione di masse m_i rispetto alla retta a la somma

$$S_a = \sum m_i d_{ia} . \quad (1)$$

Si osserva che S_a cambia segno se cambia il verso di a :

$$S_{-a} = - S_a ; \quad (a)$$

si osserva pure che massa positiva a sinistra di a offre momento statico positivo.

Si definisce *momento d'inerzia assiale*, o più semplicemente *momento d'inerzia*, rispetto alla retta a la somma

$$I_a = \sum m_i d_{ia}^2 . \quad (2)$$

Scrivendo

$$I_a = \sum (m_i d_{ia}) d_{ia} = \sum s_{ia} d_{ia}$$

si riconosce che il momento d'inerzia I_a non è altro che il momento statico rispetto alla retta a delle masse

$$s_{ia} = m_i d_{ia} ,$$

(pari ai momenti statici delle singole masse m_i rispetto alla retta a) concentrate negli stessi punti P_i delle masse m_i .

Risulta evidente che il segno di I_a non dipende dal verso della retta a . Date (fig. 1-2) due rette orientate qualsiasi a e b nel piano delle masse,

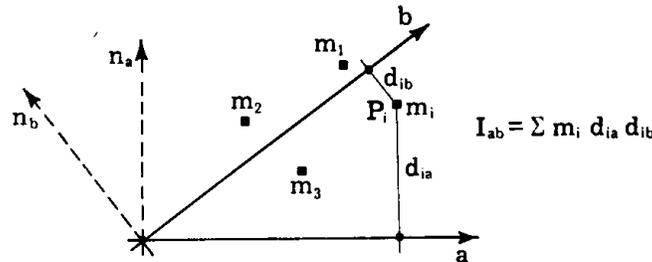


FIG. 1-2

con le rispettive normali n_a ed n_b orientate come già detto, si definisce *momento centrifugo* rispetto alle due rette a e b la somma

$$I_{ab} = \sum m_i d_{ia} d_{ib} . \quad (3)$$

Scrivendo

$$I_{ab} = \sum (m_i d_{ia}) d_{ib} = \sum (m_i d_{ib}) d_{ia}$$

si riconosce che il momento centrifugo I_{ab} non è altro che il momento statico rispetto alla retta b delle masse s_{ia} concentrate nei punti P_i , o il momento statico rispetto alla retta a delle masse

$$s_{ib} = m_i d_{ib} ,$$

(pari ai momenti statici delle singole masse m_i rispetto alla retta b) concentrate negli stessi punti P_i delle masse m_i .

Si può scrivere indifferentemente I_{ab} oppure I_{ba} .

Il segno di I_{ab} dipende dai versi delle rette a e b , e si ha

$$I_{ab} = -I_{a, -b} = -I_{-a, b} = I_{-a, -b} . \quad (b)$$

Dato infine un punto A del piano delle masse (fig. 1-3), si definisce *momento d'inerzia polare*, o più semplicemente *momento polare*, rispetto al punto A la somma

$$I_A = \sum m_i (AP_i)^2 . \quad (4)$$

Date due rette qualsiasi x ed y tra loro ortogonali e passanti per A , è $(AP_i)^2 = d_{ix}^2 + d_{iy}^2$, e quindi

$$I_A = I_x + I_y . \quad (5)$$

La (1-5) assicura che la somma $I_x + I_y$ è la stessa per qualsiasi coppia di rette ortogonali tra di loro e passanti per lo stesso punto A .

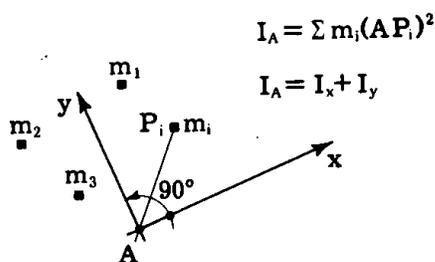


FIG. 1-3

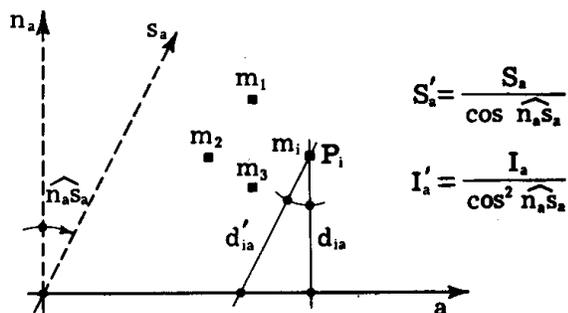


FIG. 1-4

Sovente le distanze dalla retta a sono valutate come ordinate secondo una retta s_a diversa da n_a (fig. 1-4); in tal caso è

$$d'_{ia} = \frac{d_a}{\cos n_a s_a}$$

$$S'_a = \sum m_i d'_{ia} = \frac{S_a}{\cos n_a s_a} \quad (6)$$

$$I'_a = \sum m_i d'_{ia}{}^2 = \frac{I_a}{\cos^2 n_a s_a} .$$

In genere d'_{ia} è positiva se m_i è alla sinistra di a , e quindi il verso di s_a è definito in modo che $\cos \widehat{n_a s_a} > 0$.

Qualche volta il momento centrifugo rispetto a due rette a e b è cal-

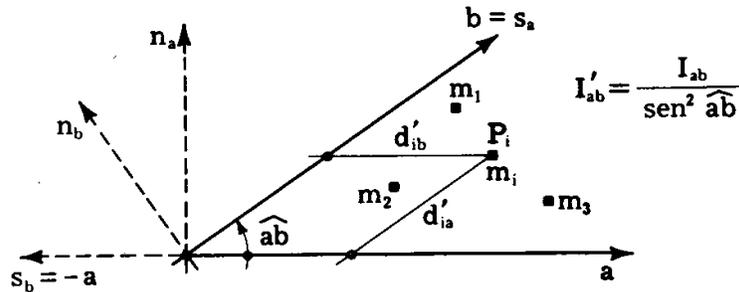


FIG. 1-5

colato valutando le distanze da a nella direzione di b , e le distanze da b nella direzione di a (fig. 1-5). In tal caso è

$$I'_{ab} = \sum m_i d'_{ia} d'_{ib} .$$

In genere la distanza d'_{ia} (e d'_{ib}) è positiva se m_i è ubicata alla sinistra di a (e di b); si ha in tal caso

$$I'_{ab} = \frac{I_{ab}}{\cos^2 \widehat{n_a s_a}} = \frac{I_{ab}}{\cos^2 \widehat{n_b s_b}} = \frac{I_{ab}}{\sin^2 \widehat{a b}} . \quad (7)$$

Le dimensioni fisiche di S sono $[m \ell]$, quelle degli I sono $[m \ell^2]$; il primo è un momento *del primo ordine*, i secondi sono momenti *del secondo ordine*.

Se le masse sono tutte positive, momento statico e centrifugo possono essere ancora positivi, nulli o negativi; il momento polare è invece sempre positivo; solo se si tratta di un'unica massa, e di momento polare calcolato rispetto al punto dove essa è concentrata, questo momento è nullo.

Se le masse sono tutte positive e non allineate, il momento d'inerzia è sempre positivo; per masse allineate su una retta, è nullo rispetto a questa retta, e solo rispetto a questa.

2. Baricentro.

Se a^* è una retta parallela ed equiversa ad a , alla distanza $d_{a^* a}$ ($d_{a^* a} > 0$ se a^* è alla sinistra di a) risulta (fig. 1-6)

$$d_{ia} = d_{ia^*} + d_{a^* a} , \quad (c)$$

e quindi

$$S_a = S_{a^*} + d_{a^* a} \Sigma m_i = S_{a^*} + M d_{a^* a} , \tag{8}$$

dove $M = \Sigma m_i$.

Esiste una retta a_0 , ed una sola, tra le parallele ad a , per cui S è

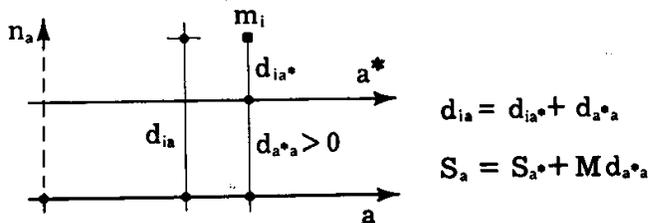


FIG. 1-6

nullo; la sua distanza d_{G_a} da a è fornita da

$$d_{a_0 a} = d_{G_a} = \frac{S_a}{M} . \tag{9}$$

Per ogni direzione a esiste perciò una ed una sola retta a_0 per cui S è nullo; al variare della direzione a , le rette a_0 passano tutte per uno stesso punto G , che è quindi univocamente definito, detto *baricentro* della distribuzione di masse. Infatti se due di queste rette, a_0 e b_0 , definiscono un punto G , per tutte le altre rette per G si ha (*)

$$S = c_a S_{a_0} + c_b S_{b_0} = 0 .$$

(*) Data una retta a qualunque passante per la generica origine A (fig. 1-7)

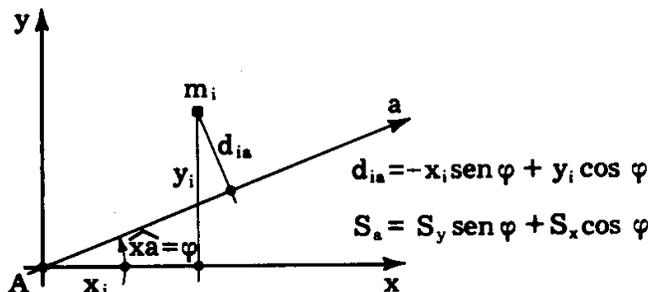


FIG. 1-7

ed inclinata di $\widehat{x a} = \varphi$, è

$$d_{ia} = - x_i \text{sen } \varphi + y_i \text{cos } \varphi$$

e quindi

$$S_a = S_y \text{sen } \varphi + S_x \text{cos } \varphi . \tag{10}$$

Scrivendo la (1-10) per altre due rette b e c , si trae la relazione più generale

$$S_c = c_a S_a + c_b S_b .$$

Se si ha una retta s di simmetria delle masse (simmetria normale o obliqua) rispetto a questa è $S=0$, e quindi s contiene G . Se si hanno due rette di simmetria, il loro incontro definisce G .

Conosciuto G , il momento statico rispetto ad una retta qualsiasi a è fornito (1-9) da

$$S_a = M d_{Ga} \quad (11)$$

dove d_{Ga} è la distanza tra G ed a ; e cioè agli effetti del calcolo del momento statico la massa totale può concentrarsi nel baricentro; oppure ad un gruppo di masse può sostituirsi la loro somma concentrata nel loro baricentro parziale (*Varignon*). Dalla (1-11) si ha che condizione necessaria e sufficiente perchè una retta sia baricentrica è che il momento statico rispetto a questa retta sia nullo; quindi il momento statico è nullo per tutte le rette baricentriche, e solo per esse.

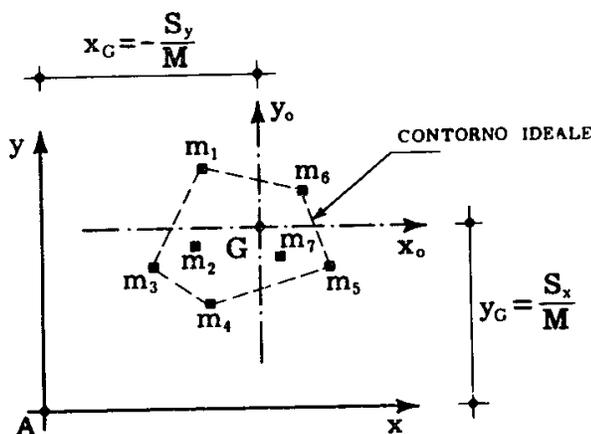


FIG. 1-8

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale Axy ($\widehat{xy} = 90^\circ$) con origine il generico punto A , è

$$S_x = \sum m_i y_i \quad (12)$$

$$S_y = - \sum m_i x_i .$$

Le coordinate $x_G y_G$ del baricentro sono (fig. 1-8)

$$x_G = - d_{Gy} = - \frac{S_y}{M} \quad (13)$$

$$y_G = d_{Gx} = \frac{S_x}{M} .$$

Se le masse sono tutte positive, il baricentro G è interno al *contorno ideale* della distribuzione di masse, poligono convesso racchiuso dalle rette che congiungono a due a due le masse lasciando tutte le altre da una sola parte.

Dalle (1-13) si trae che moltiplicando tutte le masse per la stessa quantità il baricentro non si sposta.

3. Teoremi di trasporto.

Date due rette parallele a ed a^* (fig. 1-6) è

$$\begin{aligned} I_a = \sum m_i d_{ia}^2 &= \sum m_i d_{ia^*}^2 + 2 d_{a^*a} \sum m_i d_{ia^*} + \\ &+ d_{a^*a}^2 \sum m_i = I_{a^*} + M d_{a^*a}^2 + 2 d_{a^*a} S_{a^*}. \end{aligned} \quad (d)$$

Se la retta a^* è baricentrica ($a^* = a_0$), risulta

$$I_a = I_{a_0} + M d_{Ga}^2; \quad (14)$$

e cioè il momento d'inerzia rispetto ad una retta è uguale alla somma di quello relativo alla parallela baricentrica, e del prodotto della massa totale per il quadrato della distanza tra il baricentro e la retta.

Si riconosce che, se le masse sono tutte positive, tra tutte le rette aventi una stessa direzione, quella baricentrica presenta momento d'inerzia minimo.

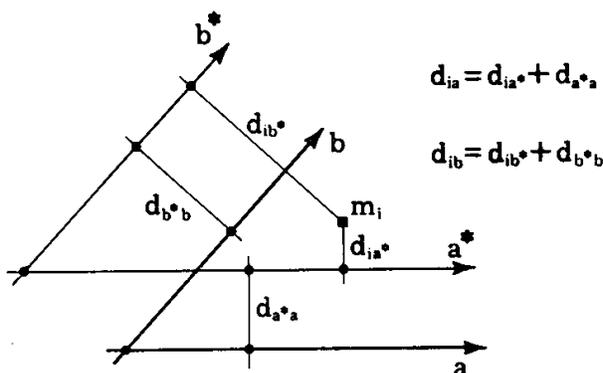


FIG. 1-9

Date due rette a e b e le parallele equiverse a^* e b^* si ha (fig. 1-9)

$$\begin{aligned} I_{ab} = \sum m_i d_{ia} d_{ib} &= \sum m_i d_{ia^*} d_{ib^*} + d_{a^*a} \sum m_i d_{ib^*} + \\ &+ d_{b^*b} \sum m_i d_{ia^*} + d_{a^*a} d_{b^*b} \sum m_i = \\ &= I_{a^*b^*} + d_{a^*a} S_{b^*} + d_{b^*b} S_{a^*} + M d_{a^*a} d_{b^*b}. \end{aligned} \quad (e)$$

Se le rette a^* e b^* sono baricentriche ($a^* = a_0$, $b^* = b_0$) si ha

$$I_{ab} = I_{a_0 b_0} + M d_{Ga} d_{Gb} ; \quad (15)$$

il momento centrifugo rispetto a due rette è uguale alla somma di quello rispetto alle parallele equiverse baricentriche, e del prodotto della massa totale per le distanze tra il baricentro e le due rette.

Se una delle due rette a e b è baricentrica (per es. $a = a_0$) è

$$I_{a_0 b} = I_{a_0 b_0} ; \quad (15')$$

il momento centrifugo rispetto a due rette di cui una baricentrica è uguale a quello rispetto alle parallele baricentriche.

Se a e b sono parallele, ed una è baricentrica, è

$$I_{a_0 b} = I_{a_0} . \quad (15'')$$

I teoremi (1-11), (1-14), (1-15) si enunciano in modo unico dicendo che momento statico, d'inerzia e centrifugo rispetto ad una o due rette qualsiasi sono uguali alla somma di quelli relativi alle baricentriche parallele, e di quelli (*momenti di trasporto*) che si calcolano concentrando la massa totale M nel baricentro.

4. Cerchio di Mohr.

Sia dato un generico punto A , un riferimento cartesiano ortogonale x y per A , ed una coppia qualsiasi di rette a e l ortogonali passanti per A ;

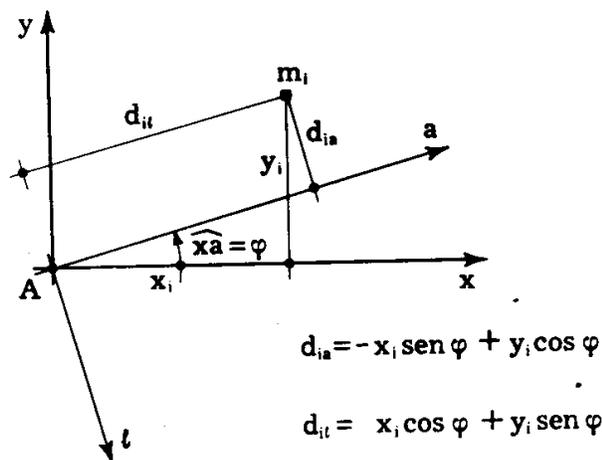


FIG. 1-10

a è inclinata (fig. 1-10) di $\widehat{x\hat{a}} = \varphi$ sull'asse x , l è orientata alla destra di a . Ad ogni retta a , comunque orientata, si associano così un momento

d'inerzia ed un momento centrifugo definiti in valore e segno, I_a ed I_{at} .

Risulta

$$d_{ia} = -x_i \operatorname{sen} \varphi + y_i \operatorname{cos} \varphi \quad (f)$$

$$d_{it} = x_i \operatorname{cos} \varphi + y_i \operatorname{sen} \varphi .$$

Si ha inoltre

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2 \quad (16)$$

$$I_{xy} = - \sum m_i x_i y_i ;$$

per $\varphi = 0$ è $I_{at} = -I_{xy}$, per $\varphi = 90^\circ$ è $I_{at} = I_{xy}$. Si noti che le masse positive dei quadranti $+x +y$ e $-x -y$ danno contributi negativi ad I_{xy} , le masse positive dei quadranti $+x -y$ e $-x +y$ danno invece contributi positivi.

Si può scrivere

$$I_a = \sum m_i d_{ia}^2 = I_y \operatorname{sen}^2 \varphi + I_x \operatorname{cos}^2 \varphi + 2 I_{xy} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi \quad (g)$$

$$I_{at} = \sum m_i d_{ia} d_{it} = (I_x - I_y) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi - I_{xy} (\operatorname{cos}^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

e ancora (*)

$$I_a = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{cos} 2 \varphi + I_{xy} \operatorname{sen} 2 \varphi \quad (17)$$

$$I_{at} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2 \varphi - I_{xy} \operatorname{cos} 2 \varphi$$

da cui

$$\left(I_a - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{at}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 . \quad (18)$$

(*)

$$\operatorname{sen}^2 = \frac{1 - \operatorname{cos} 2 \varphi}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 \varphi = \frac{1 + \operatorname{cos} 2 \varphi}{2} .$$

La (1-18) è l'equazione di un cerchio nel piano $I_a I_{at}$ (fig. 1-11); il centro C di tale cerchio sta sull'asse delle I_a , ed ha ascissa pari ad $\frac{I_x + I_y}{2}$;

il raggio CP è pari a $\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$. Il cerchio si costruisce immediatamente tracciando i punti $P(I_x, I_{xy})$ e $P'(I_y, -I_{xy})$; PP' è un diametro (*).

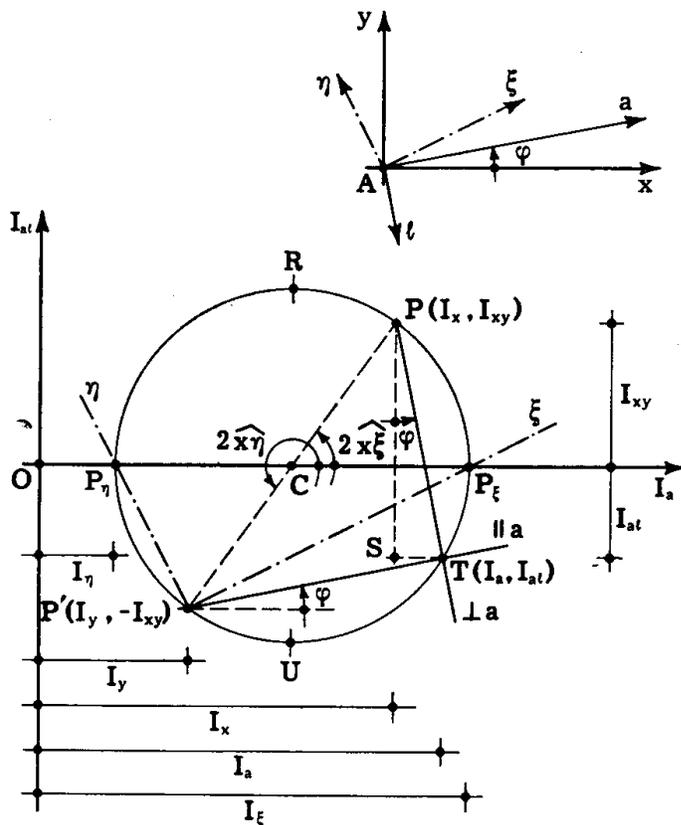


FIG. 1-11

Si osserva che conducendo da P la retta PT inclinata di φ sulla verticale ($\widehat{SPT} = \widehat{\alpha}$), o da P' la retta parallela ad a , se gli assi I_a ed I_{at} sono equiversi ad x ed y , si individua sulla circonferenza il punto T di coordinate I_a, I_{at} . Infatti è

$$\text{tg } \widehat{SPT} = \frac{ST}{SP} = \frac{I_a - I_x}{I_{xy} - I_{at}};$$

(*)- Il punto P è alla sinistra dell'asse delle I_a se $I_{xy} > 0$.

per le (g) si ha

$$I_a = I_y \operatorname{sen}^2 \varphi + I_x - I_x \operatorname{sen}^2 \varphi + 2 I_{xy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$I_{at} = (I_x - I_y) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - I_{xy} \cos^2 \varphi + I_{xy} - I_{xy} \cos^2 \varphi$$

da cui

$$I_a - I_x = (I_y - I_x) \operatorname{sen}^2 \varphi + 2 I_{xy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$I_{xy} - I_{at} = (I_y - I_x) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 2 I_{xy} \cos^2 \varphi$$

e quindi

$$\operatorname{tg} \widehat{\text{SPT}} = \operatorname{tg} \varphi .$$

E' sufficiente perciò, per ogni punto A, conoscere i momenti d'inerzia e centrifugo rispetto a due rette ortogonali per ottenere attraverso il cerchio (1-18) (*cerchio di Mohr*) i momenti d'inerzia rispetto a qualsiasi retta e centrifughi rispetto a qualunque coppia di rette ortogonali, passanti per A. Se il punto A è il baricentro G, il cerchio si chiama *cerchio centrale*.

Per masse tutte positive il cerchio di Mohr è ubicato tutto alla destra dell'asse I_{at} , poichè i momenti d'inerzia sono comunque positivi.

Si riconosce la presenza, per ogni punto A del piano, di due rette ortogonali ξ ed η (*assi principali di inerzia*) rispetto alle quali il momento d'inerzia è massimo (ξ) e minimo (η) ed il momento centrifugo nullo; tra le coppie di rette tra loro ortogonali per A, solo questa presenta momento centrifugo nullo, se il cerchio non degenera in un punto.

Si trae dalla fig. 1-11

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \right\} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ \operatorname{tg} 2 \times \widehat{\xi} &= \operatorname{tg} 2 \times \widehat{\eta} = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} . \end{aligned} \quad (19)$$

Esistono pure due rette per A ortogonali, c e d, parallele alla P'R e alla P'U (ξ ed η sono bisettrici dell'angolo formato da esse) rispetto alle quali il momento d'inerzia è uguale, e pari a (*)

$$\frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_{\xi} + I_{\eta}}{2} ,$$

(*) La somma $I_x + I_y$ è invariante rispetto alla scelta della coppia di rette ortogonali x ed y; si ha conferma così della (1-5).

e quello centrifugo è massimo, in valore assoluto, rispetto a tutte le altre coppie ortogonali, e pari a

$$I_{ct} = \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2} > 0$$

$$I_{dt} = \frac{I_{\eta} - I_{\xi}}{2} < 0 .$$

5. Il centro relativo ad una retta; il raggio di inerzia.

Data una retta a (fig. 1-12) si definisce *centro* C_a *relativo alla retta* a il baricentro delle quantità $s_{ia} = m_i d_{ia}$ concentrate negli stessi punti P_i

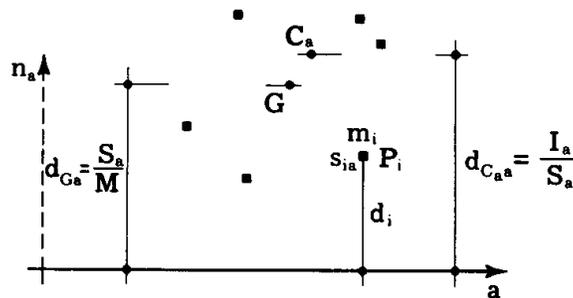


FIG. 1-12

delle masse m_i ; il centro C_a è cioè il baricentro dei momenti statici s_{ia} (*). Dalla (1-9) si trae la distanza $d_{C_a a}$ tra C_a e la retta a :

$$d_{C_a a} = \frac{\sum s_{ia} d_{ia}}{\sum s_{ia}}$$

e cioè

$$d_{C_a a} = \frac{I_a}{S_a} . \quad (20)$$

La posizione di C_a non dipende dal verso di a ; essa non si altera se tutte le masse si moltiplicano per uno stesso fattore.

Per quanto già detto circa il significato di momento d'inerzia come momento statico dei momenti statici (§ 1-1), il momento d'inerzia I_a può calcolarsi concentrando in C_a tutto il momento statico S_a ; si ha quindi

$$I_a = S_a d_{C_a a} ,$$

(*) Per le proprietà del baricentro, C_a è univocamente definito una volta fissata la retta a .

come può ricavarsi del resto dalla (1-20). Dalla relazione suddetta, e dalla (1-9), si ha

$$I_a = M d_{G_a} d_{C_a a} . \quad (21)$$

Si definisce *raggio d'inerzia* ρ_a rispetto alla retta a la distanza da a alla quale occorre concentrare l'intera massa M perchè abbia il momento d'inerzia I_a della effettiva distribuzione di masse:

$$I_a = M \rho_a^2 . \quad (22)$$

Se le masse sono tutte positive, il raggio d'inerzia minimo tra quelli relativi ad un fascio di rette parallele è quello baricentrico.

E' importante osservare che se le masse sono tutte dello stesso segno, ρ_a è reale; in caso contrario, può risultare ρ_a immaginario, e cioè $\rho_a^2 < 0$. Basta, a convincersi di ciò, raffigurare il caso di due masse di segno contrario; rispetto ad una retta che passi per una di esse il momento d'inerzia è di un segno, rispetto ad una retta che passi per l'altra è di segno contrario; poichè M ha un suo segno definito, ρ_a^2 nei due casi deve avere segni opposti. D'ora innanzi si tratterà sempre il caso di masse tutte positive, di più non allineate, salvo esplicito avviso nei casi contrari.

Dalle (1-21) ed (1-22) si trae

$$d_{G_a} d_{C_a a} = \rho_a^2 . \quad (23)$$

Il teorema del trasporto (1-14) porta alla relazione

$$\rho_a^2 = \rho_{a_0}^2 + d_{G_a}^2 ; \quad (24)$$

dalle (1-23) ed (1-24) si ha:

$$d_{C_a a} = d_{G_a} + \frac{\rho_{a_0}^2}{d_{G_a}} . \quad (25)$$

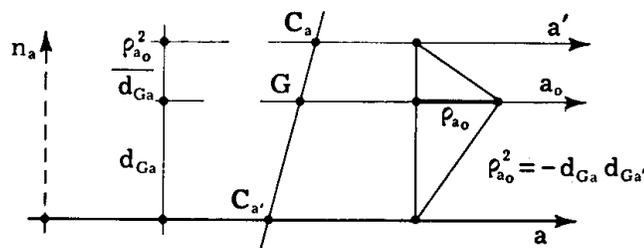


FIG. 1-13

Sia a' (fig. 1-13) la retta parallela ad a passante per C_a ; il teorema del trasporto (1-15) permette di scrivere

$$I_{aa'} = I_{a_0} + M d_{G_a} d_{G_a'} = M \rho_{a_0}^2 + M d_{G_a} d_{G_a'} ;$$

poichè C_a giace su a' , per l'interpretazione del momento centrifugo come momento statico è $I_{a a'} = 0$. Si ha quindi.

$$\rho_{a_0}^2 = -d_{Ga} d_{Ga'} \quad (26)$$

Dalla (1-25), come pure dalla (1-26), si trae che il centro C_a è dalla stessa parte di G rispetto alla retta a , e più distante di G della quantità $\frac{\rho_{a_0}^2}{d_{Ga}}$. Se la retta a è baricentrica ($d_{Ga} = 0$, $\rho_{a_0}^2 > 0$) il centro relativo è improprio (e non giace su a). Se la retta a è quella impropria ($d_{Ga} = \infty$) C_a coincide con G ; e infatti, facendo traslare la retta a in modo che si allontani indefinitamente da G , la proiezione del segmento $C_a G$ sulla normale ad a tende a zero, e poichè ciò accade quale che sia la direzione di a , C_a tende a G .

Conseguenza di quanto sopra è che una retta non può mai contenere il suo centro relativo.

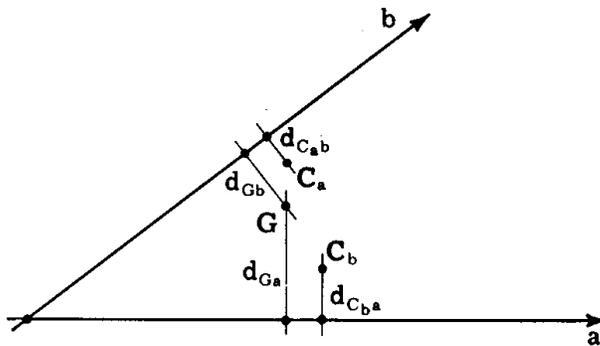


FIG. 1-14

Sempre per il significato del momento centrifugo come momento statico, può porsi (fig. 1-14)

$$I_{ab} = M d_{Ga} d_{C_a b} = M d_{Gb} d_{C_b a} \quad (27)$$

da cui

$$d_{Ga} d_{C_a b} = d_{Gb} d_{C_b a} \quad (28)$$

Del fatto che C_a sia più distante di G dalla retta a si ha conferma dal ragionamento che segue. Siano le masse tutte positive, come già detto ad inizio di paragrafo. Se le masse sono tutte dalla stessa parte di a come nella fig. 1-12, il baricentro C_a delle s_{ia} è più lontano di G dalla a perchè le masse s_{ia} sono esaltate, rispetto alle m_i , in ragione diretta della loro distanza da a . Se invece le masse sono

dalle due parti di a (fig. 1-15), il baricentro G può essere ottenuto ricercando prima il baricentro G_1 delle masse m_{1i} ubicate a sinistra di a , ed il baricentro G_2 delle masse m_{2i} ubicate a destra, e poi il baricentro delle due masse Σm_{1i} concentrata in G_1 e Σm_{2i} concentrata in G_2 (*). Così pure il baricentro C_a delle masse s_{ia} può ottenersi ricercando prima il baricentro C_{a1} delle s_{1ia} a sinistra di a ,

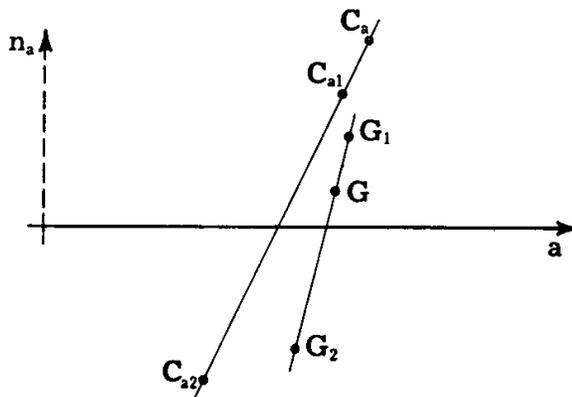


FIG. 1-15

e il baricentro C_{a2} delle s_{2ia} a destra, e poi il baricentro delle due masse Σs_{1ia} concentrata in C_{a1} e Σs_{2ia} concentrata in C_{a2} . Poichè Σs_{1ia} è positiva e Σs_{2ia} è negativa, C_a è al di fuori del segmento $C_{a1} C_{a2}$; se G è a sinistra di a , Σs_{1ia} è maggiore in valore assoluto di Σs_{2ia} , e perciò C_a è alla sinistra di a , più distante da a di C_{a1} , e quindi di G_1 e di G ; altrettanto accade se G è a destra di a .

6. Le involuzioni baricentriche di inerzia.

Sia x_o, y_o un riferimento cartesiano con origine nel baricentro G (fig. 1-16 a) a una retta qualsiasi, e C_a il suo centro relativo; come già detto, C_a è univocamente definito, come baricentro di masse note (masse momenti statici s_{ia}), e non dipende dal verso di a .

Risulta, per le (1-13),

$$x_{C_a} = - \frac{I_{ay_o}}{S_a} \quad (h)$$

$$y_{C_a} = \frac{I_{ax_o}}{S_a} .$$

(*) I momenti statici rispetto a qualsiasi retta delle masse m_i concentrate nei punti P_i , e delle due masse Σm_{1i} e Σm_{2i} concentrate in G_1 e G_2 , sono gli stessi (§ 1-2); le masse sono le stesse; quindi le (1-13) forniscono gli stessi valori per le coordinate del baricentro dei due sistemi. In generale, agli effetti della ricerca del baricentro può sempre concentrarsi un gruppo di masse nel loro baricentro.

Si faccia traslare la retta a in a^* ; il centro C_a si sposta in C_{a^*} .

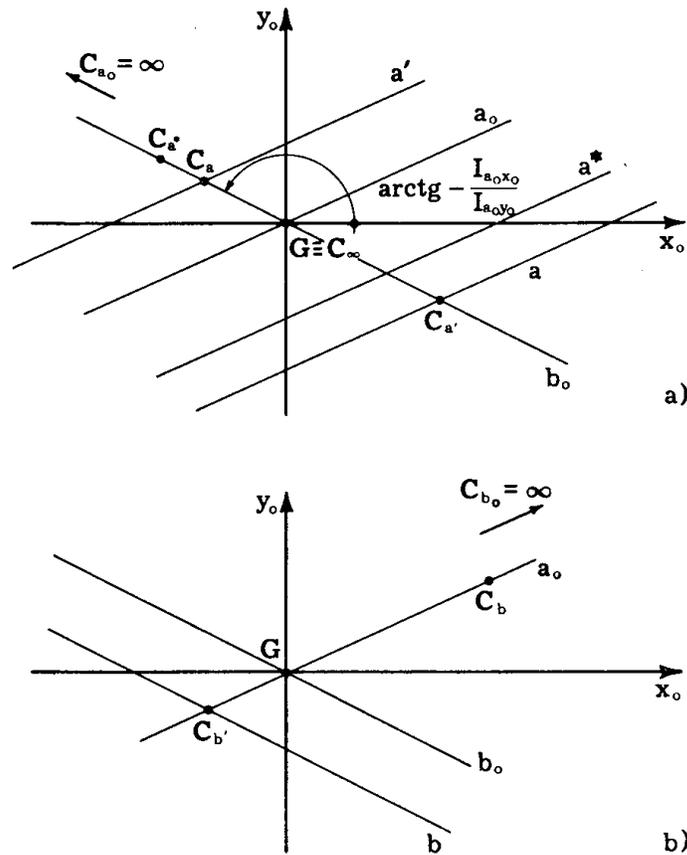


FIG. 1-16

Le componenti del vettore $C_a C_{a^*}$ sono fornite da

$$dx_{C_a} = - \frac{dI_{ay_0} S_a - I_{ay_0} dS_a}{S_a^2}$$

$$dy_{C_a} = \frac{dI_{ax_0} S_a - I_{ax_0} dS_a}{S_a^2} .$$

Poichè x_0 è baricentrica, e così pure y_0 , risulta

$$I_{ax_0} = I_{a^*x_0} = I_{a_0x_0}$$

$$I_{ay_0} = I_{a^*y_0} = I_{a_0y_0} ,$$

da cui si ha quindi $dI_{ax_0} = dI_{ay_0} = 0$, e quindi

$$dx_{C_a} = \frac{I_{ay_0} dS_a}{S_a^2}$$

$$dy_{C_a} = - \frac{I_{ax_0} dS_a}{S_a^2} .$$

Il rapporto

$$\frac{dy_{C_a}}{dx_{C_a}} = - \frac{I_{ax_0}}{I_{ay_0}} = - \frac{I_{a_0x_0}}{I_{a_0y_0}} = - \frac{y_{C_a}}{x_{C_a}} \quad (i)$$

è indipendente dalla posizione di a e di a^* , ed è funzione soltanto della direzione di a (non del verso). Perciò, si può asserire che quando la retta a si sposta parallelamente a se stessa, il centro C_a descrive una retta b_0 passante per il baricentro G ; e che il centro di a deve comunque essere ubicato su b_0 . La retta b_0 è legata alla direzione di a dalla relazione

$$\frac{y}{x} = - \frac{I_{a_0x_0}}{I_{a_0y_0}} . \quad (l)$$

Se a' è la retta parallela ad a e passante per C_a , è, per la (1-27),

$$I_{a a'} = M d_{Ga} d_{C_a a'} = 0 ;$$

poichè è pure

$$I_{a a'} = M d_{Ga'} d_{C_a' a} ,$$

risulta (C_a è più lontano di G dalla a , e perciò $d_{Ga'} \neq 0$), essere nulla $d_{C_a' a}$. Ciò significa che C_a' è l'intersezione di a con b_0 . Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra i punti come C_a e C_a' : se la retta a passa per C_a' il centro è C_a , se la retta passa per C_a il centro è C_a' . In particolare, al punto improprio di b_0 corrisponde il baricentro G , poichè il centro della retta impropria è il baricentro (*); al baricentro, d'altro canto, corrisponde il punto improprio di b_0 , poichè il centro di una retta baricentrica è improprio. La corrispondenza tra i punti C_a e C_a' è perciò una *involutione* sulla retta b_0 , il cui *centro* è G . I punti come C_a e C_a' sono *coniugati* nella suddetta involuzione; l'uno sta sulla retta di cui l'altro è centro.

Si ha

$$G C_a \cdot G C_a' = \text{cost} , \quad (m)$$

e questa costante è la *potenza* dell'involutione. La (m) trova conferma nella (1-26).

(*) Questo fatto, di cui si è già trattato, si spiega anche perchè, se una retta tende alla retta impropria, i rapporti tra i momenti statici delle masse tendono ai rapporti tra le masse stesse, e quindi il centro tende al baricentro.

Una coppia di punti coniugati $C_a C_a'$ è sempre separata da G , perchè il centro è più lontano del baricentro dalla retta; quindi i due punti uniti (punti doppi) sono immaginari. Ciò dipende pure dal fatto che nessuna retta può contenere il proprio centro.

Il centro C_b di una retta b parallela a b_0 deve giacere su a_0 (fig. 1-16 b). Infatti è, per i teoremi del trasporto,

$$I_{a b_0} = I_{a_0 b_0} ,$$

e questo momento è nullo poichè il centro della retta a sta su b_0 ; d'altro canto, sempre per i teoremi del trasporto, è

$$I_{b a_0} = I_{a_0 b_0} = 0 ;$$

quindi dalla (1-27) risulta $d_{C_b a_0} = 0$.

Alla b_0 corrisponde perciò il punto improprio di a_0 , e sulla retta a_0 si istituisce una involuzione ($C_b C_b'$) con centro in G , analoga a quella già posta in evidenza sulla b_0 ; la potenza è, in genere, diversa.

Ad una retta a_0 corrisponde una sola retta b_0 luogo dei centri delle parallele ad a_0 , definita dalla (l); alla b_0 corrisponde a sua volta una sola retta luogo dei centri delle parallele a b_0 , e questa retta, come già detto, è proprio a_0 . Quindi le coppie ($a_0 b_0$) del fascio di centro G costituiscono un'altra involuzione. Anche questa è priva di elementi uniti; infatti, come già detto, nessuna retta può contenere il proprio centro.

Le rette come a_0 e b_0 sono *coniugate* nella involuzione del fascio di sostegno G ; l'una contiene il centro (improprio) dell'altra. Esse si chiamano pure *coniugate baricentriche*.

Per ogni coppia coniugata $a_0 b_0$, e solo per esse (*), è, nel suddetto fascio,

$$I_{a_0 b_0} = 0 . \tag{n}$$

Si è già visto (§ 1-4) che esiste una (e in genere una sola) coppia ortogonale di rette coniugate per G ; esse sono gli *assi baricentrici principali d'inerzia*.

7. L'ellisse centrale di inerzia.

Ad ogni retta a corrisponde un solo centro C_a (ciò è evidente, perchè, come già detto, il baricentro di un sistema di masse è univocamente

(*) Se a_0 e c_0 non sono coniugate, è $I_{a_0 c_0} \neq 0$, e quindi $I_{a_0 c_0} \neq 0$.

definito). Ad ogni punto C_a corrisponde una sola retta a di cui esso è centro. Infatti, data a , sono fissati a_0 , b_0 , $C_{a'}$ e C_a (fig. 1-16 a); dato C_a , sono fissati b_0 , a_0 , $C_{a'}$, a . In particolare, alla retta impropria corrisponde il baricentro, al baricentro la retta impropria. La corrispondenza ($a C_a$) è perciò biunivoca (*reciprocità*).

Si è visto che nessuna retta può contenere il proprio centro; quindi la reciprocità è priva di elementi autocongiugati.

Si ha poi che se la generica retta a contiene il centro C_b della generica retta b , b deve contenere il centro C_a di a ; infatti (fig. 1-14) risulta dalla (1-27) che se

$$d_{C_b a} = 0$$

è pure $I_{ab} = 0$, e quindi

$$d_{C_a b} = 0 .$$

Ciò è vero anche se d_{G_a} e d_{G_b} sono una, o tutte e due, nulle, come si è visto nel paragrafo precedente. Se poi $d_{G_a} = \infty$, e cioè se a è la retta impropria, è $C_a \equiv G$; se b passa per C_a , C_b è improprio, e quindi giace su a . Le rette come a e b che contengono l'una il centro dell'altra sono dette *rette coniugate*; rispetto ad esse è $I_{ab} = 0$. Viceversa, se $I_{ab} = 0$, a e b sono coniugate. In questa classe più ampia rientrano le rette come a_0 e b_0 coniugate nell'involutione baricentrica, di cui si è detto nel paragrafo precedente. Il nome si giustifica perchè nel fascio di rette di sostegno generico C_a (fig. 1-17) le rette come b e b' , che contengono l'una il centro relativo all'altra, sono coniugate in una involuzione.

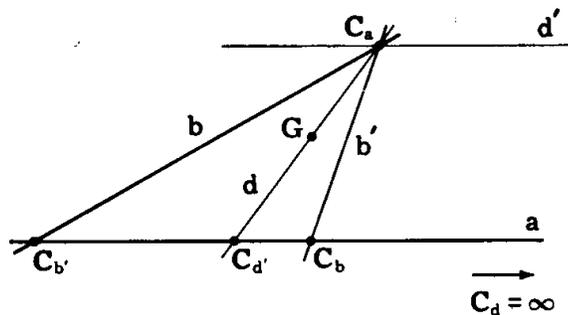


FIG. 1-17

I centri C_b e $C_{b'}$ giacciono sulla a , poichè b e b' passano per C_a ; anche essi sono coniugati in una involuzione, il cui centro è il corrispondente del punto improprio di a , e cioè l'intersezione con a della retta $C_a G$ di cui tale punto improprio è centro. Su ogni retta e in ogni fascio si istituisce così una involuzione, di cui quelle studiate nel paragrafo precedente sono casi particolari.

E' chiaro che tutte le rette passanti per C_b sono coniugate della b , ma solo b' , congiungente C_a e C_b , è coniugata nell'involutione di sostegno C_a ; così pure tutti i punti giacenti su b sono coniugati di C_b (intendendo come *punti coniugati*

due punti tali che l'uno giaccia sulla retta di cui l'altro è centro), ma solo $C_{b'}$, intersezione di a e b , è coniugato nell'involuzione di sostegno a . Tutte le suddette involuzioni sono prive di elementi uniti.

La corrispondenza ($a C_a$) tra rette e centri ad esse relativi è, per quanto sopra, una *reciprocità involutoria*, cioè una *polarità*; il centro di tale polarità, corrispondente della retta impropria, è il baricentro. Il punto C_a si dice anche *polo* della a , la retta a *polare* di C_a .

La polarità ($a C_a$) è priva di elementi autoconiugati, quindi la sua conica fondamentale è immaginaria. Si consideri (fig. 1-18) il simmetrico

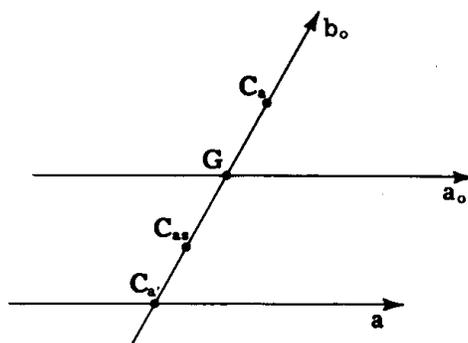


FIG. 1-18

C_{as} di C_a rispetto al baricentro G ; la corrispondenza ($a C_{as}$) è pure essa una polarità con centro G , ma con elementi autoconiugati. Infatti se la retta a , partendo da una posizione per cui $GC_{a'} > GC_a$, trasla avvicinandosi a G , per la (m) il punto C_a si allontana da G ; si allontana da G anche C_{as} , che quindi si avvicina alla a ; la retta a per cui $GC_{a'} = GC_a$ contiene C_{as} , e quindi essa, e la sua simmetrica rispetto a G , sono le rette autoconiugate (e le uniche) tra quelle del fascio avente come sostegno il punto improprio di a . La polarità ($a C_{as}$) è perciò a conica fondamentale reale. Tale conica, a centro proprio (baricentro), non può essere una parabola; non può nemmeno essere una iperbole, perchè la polarità ($a C_{as}$) non può ammettere punti autoconiugati impropri, che lo sarebbero anche nella ($a C_a$). Quindi la conica fondamentale della ($a C_{as}$) è una ellisse reale, con centro G , detta *ellisse centrale d'inerzia* o, più semplicemente, *ellisse d'inerzia*. Rispetto a questa ellisse, retta a e centro relativo C_a si corrispondono come retta e *antipolo*, o come punto e *antipolare*.

Data l'ellisse d'inerzia, le costruzioni delle figg. 1-19 a ed 1-19 b permettono di risalire dal punto generico C_a al simmetrico C_{as} ed alla polare a di C_{as} , retta di cui C_a è centro, o viceversa.

Se a (fig. 1-19 a) taglia l'ellisse, i due punti D ed E di intersezione di a con l'ellisse sono nella ($a C_{as}$) i poli delle tangenti d in D , ed e in E al-

l'ellisse: quindi il punto d'incontro di d ed e è C_{as} , ed il suo simmetrico rispetto a G è C_a . Si noti che D ed E sono punti doppi della involuzione determinata dalla $(a C_{as})$ sulla retta a , ed N , punto medio di DE , il centro; N è ubicato sulla $C_{as}G$.

Se C_a è esterno all'ellisse, la stessa costruzione della fig. 1-19 a permette di avere a .

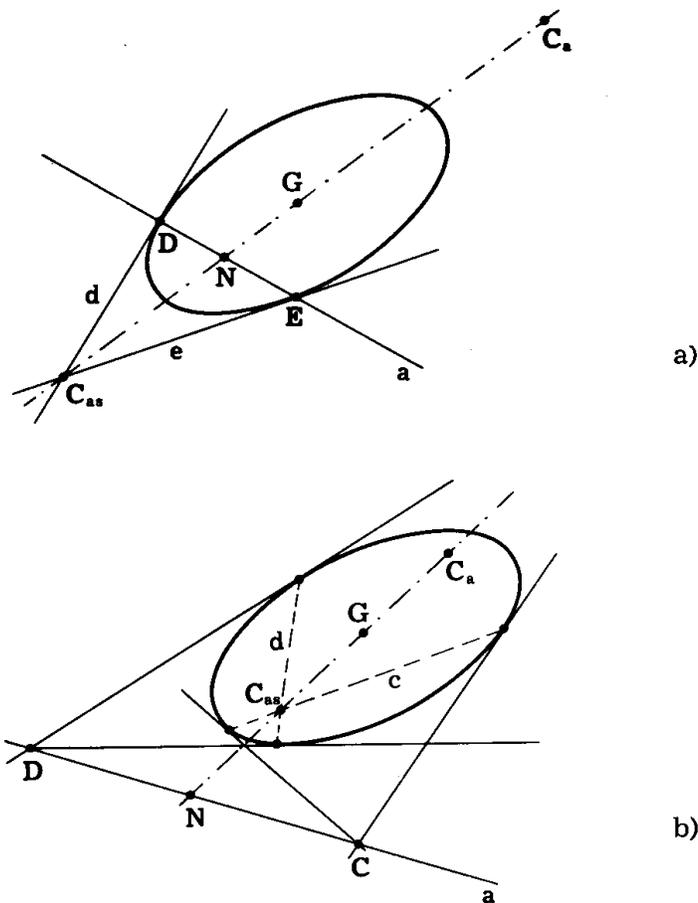


FIG. 1-19

Se a non taglia l'ellisse, vale la costruzione della fig. 1-19 b, di chiaro significato. Si noti che la $(a C_{as})$ determina su a una involuzione con due punti doppi reali D ed E se a taglia l'ellisse, immaginari se a è esterna.

Si osservi che il polo C_{a_0s} di una retta a_0 baricentrica (fig. 1-20) è il punto d'incontro delle due tangenti in B_1 e B_2 ; poichè esso è improprio, coincide con C_{a_0} . Le due tangenti in B_1 e B_2 sono parallele alla b_0 , coniugata baricentrica di a_0 , perchè la b_0 è proprio la GC_{a_0} .

Le coppie di rette baricentriche dell'ellisse reale ottenute come le a_0 e b_0 della fig. 1-20 sono perciò coniugate, oltre che nella $(a C_{as})$, nella $(a C_a)$; i semidiametri relativi (*semidiametri coniugati*) si indicano (fig. 1-20)

$$GA_1 = \rho'_{a_0}$$

quello disteso su b_0 , e

$$G B_1 = \rho'_{b_0}$$

quello disteso su a_0 .

Gli assi dell'ellisse sono ortogonali e coniugati; essi definiscono l'unica coppia di rette baricentriche ortogonali e coniugate, se l'ellisse non è

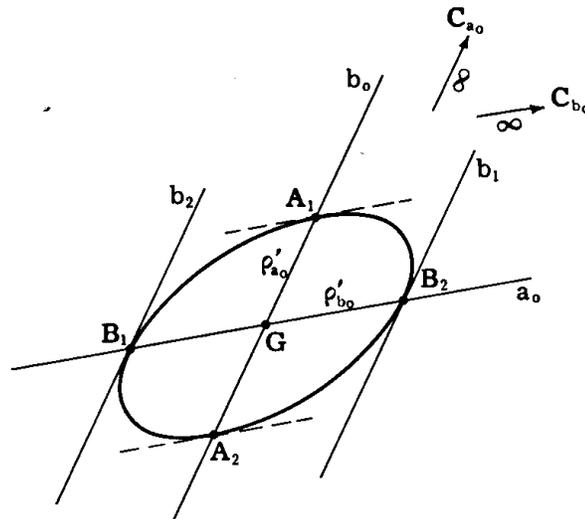


FIG. 1-20

un cerchio. Questi assi coincidono con gli assi principali baricentrici di inerzia ξ ed η forniti dal cerchio di Mohr, come già detto (§§ 1-4 e 1-6).

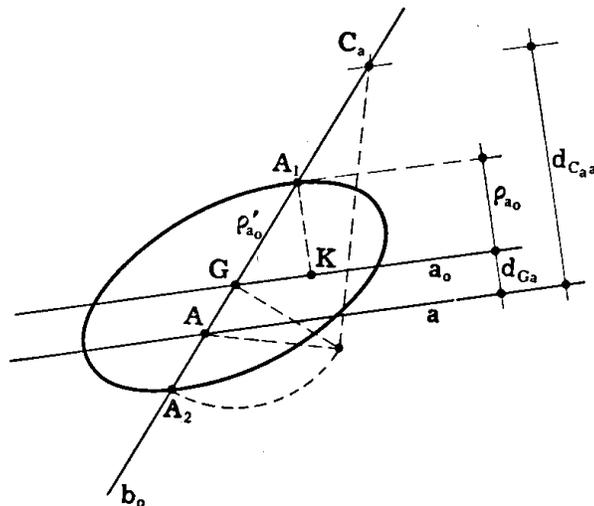


FIG. 1-21

Dalla relazione involutoria sul diametro b_0 coniugato della direzione di a si ha (fig. 1-21).

$$\rho'^2_{a_0} = \overline{GA_1}^2 = GA \cdot GC_a \quad (o)$$

e cioè

$$\overline{A_1 K}^2 = d_{Ga} (d_{C_a a} - d_{Ga}) ,$$

relazione identica alla (1-26). E' quindi

$$A_1 K = \rho_{a_0} . \quad (p)$$

La (p) mostra che la proiezione sulla normale alla retta a_0 baricentrica del semidiametro ρ'_{a_0} coniugato ad a_0 coincide con il raggio d'inerzia ρ_{a_0} relativo alla retta a_0 .

E' questa una proprietà caratteristica dell'ellisse di inerzia; essa permette di calcolare il momento d'inerzia rispetto a qualsiasi retta baricentrica, una volta conosciuta l'ellisse d'inerzia.

La (p) consente pure di disegnare, attraverso il cerchio di Mohr, l'ellisse d'inerzia dopo aver conosciuti il baricentro ed i momenti d'inerzia e centrifugo rispetto a due qualsiasi rette baricentriche ortogonali x_0 ed y_0 (fig. 1-22): ottenuti infatti gli assi baricentrici principali di inerzia ξ ed η

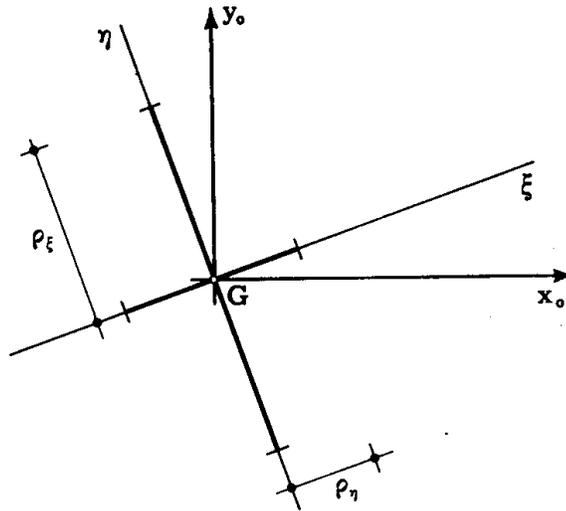


FIG. 1-22

rispetto ai quali I è massimo (I_ξ) e minimo (I_η), i due *semidiametri principali* sono forniti da

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{M}} \quad (29)$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{M}} ;$$

essi vanno distesi ortogonalmente alle rette ξ ed η rispettivamente.

Se esiste una retta t di simmetria nella direzione s (fig. 1-23), t ed s sono coniugate, perchè $I'_{ts} = 0$, e quindi $I_{ts} = 0$ (1-7).

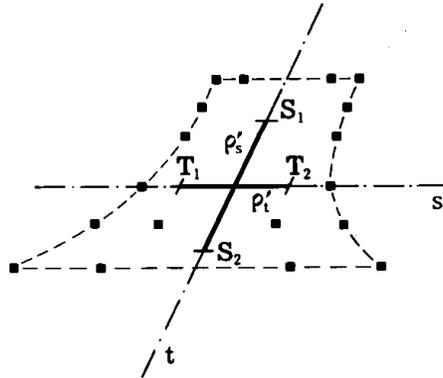


FIG. 1-23

E' importante osservare che l'ellisse d'inerzia dipende dai rapporti tra le masse, non dai loro valori effettivi; se infatti le masse si moltiplicano tutte per uno stesso fattore, le posizioni dei centri relativi non variano.

8. Costruzione del centro relativo ad una retta e viceversa, e della retta coniugata ad una retta baricentrica, quando siano assegnati due diametri coniugati dell'ellisse d'inerzia.

Nella fig. 1-24 è riportata la costruzione del centro C_a di una retta a , o viceversa, una volta assegnati due diametri coniugati A_1A_2 e B_1B_2 , nel caso particolare che a sia parallelo ad uno dei diametri, o che C_a appar-

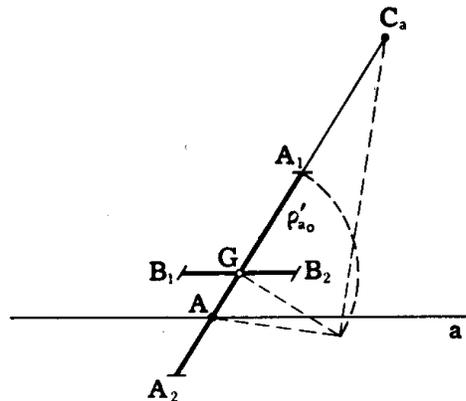


FIG. 1-24

tenga ad uno dei diametri. La costruzione è ovvia, come traduzione grafica della (o), ed è analoga a quella riportata nella fig. 1-21.

Nella fig. 1-25 è fornita la costruzione grafica del centro C_a di una retta a generica, o viceversa; se è data a , si scelgono i due punti C e D in cui a taglia i diametri coniugati assegnati, e si costruiscono come nella fig. 1-24 le rette c e d di cui C e D sono i centri; il loro punto d'incontro fornisce C_a . La costruzione si esegue a ritroso se è dato C_a .

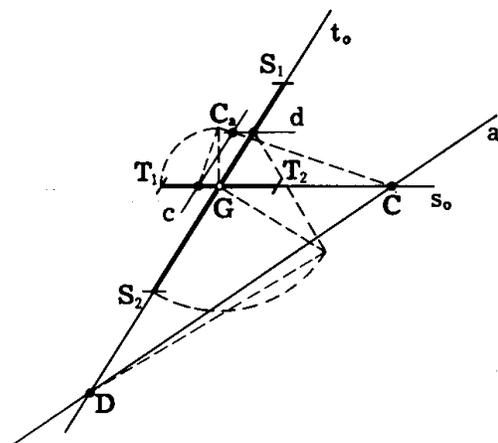


FIG. 1-25

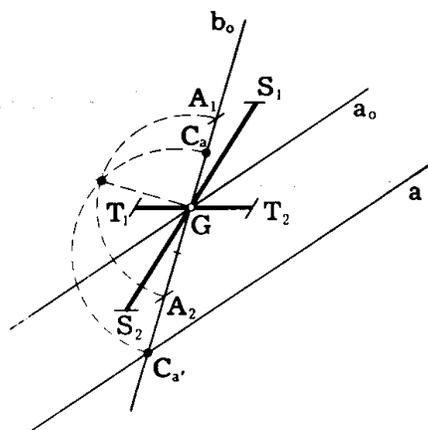


FIG. 1-26

Nella fig. 1-26 è data la costruzione della retta coniugata baricentrica b_o della generica retta a_o baricentrica, e del diametro GA_1 relativo ad essa. Si traccia una parallela a ad a_o , e si disegna come nella fig. 1-25 il centro C_a , ottenendo in $G C_a$ la direzione b_o coniugata di a_o . Convien scegliere a in modo che passi per T_2 (o S_2), per semplificare la costruzione di C_a ; in tal caso infatti si ha immediatamente una delle due rette che definiscono C_a , come parallela per T_1 alla S_1S_2 (o come parallela per S_1 alla T_1T_2).

Ottenuto C_a , la costruzione della media proporzionale tra $G C_a$ e $G C_{a'}$, sempre per la (o) , fornisce il semidiametro $\rho'_{a_o} = G A_1$ relativo alla retta a_o , disteso sulla coniugata di a_o .

9. Costruzione analitica dell'ellisse di inerzia.

E' consigliabile costruire l'ellisse di inerzia con l'ausilio del cerchio di Mohr, attraverso il calcolo numerico delle coordinate del baricentro G (1-13), e dei momenti d'inerzia (1-2) e centrifugo (1-3) rispetto a due rette ortogonali $x_o y_o$ per G ; le (1-19) forniscono la posizione degli assi ξ ed η principali ed i momenti d'inerzia relativi, le (1-29) i semidiametri principali.

Il tracciamento del cerchio di Mohr è utile per verifica dei risultati analitici.

Se per uno o più gruppi di masse m_i (fig. 1-27) è già nota la relativa ellisse d'inerzia (ellisse parziale) la (1-1) si scrive (teorema di Varignon, § 1-2)

$$S_a = \sum M_i d_{G_i a} , \quad (30)$$

dove M_i è somma delle masse del gruppo generico, e $d_{G_i a}$ la distanza del baricentro G_i dalla retta a ; la (1-2) si scrive (§§ 1-1 ed 1-2)

$$I_a = \sum M_i d_{G_i a} d_{C_i a} = \sum S_{ia} d_{C_i a} , \quad (31)$$

dove $d_{C_i a}$ è la distanza da a del centro C_{ai} relativo alle masse del gruppo

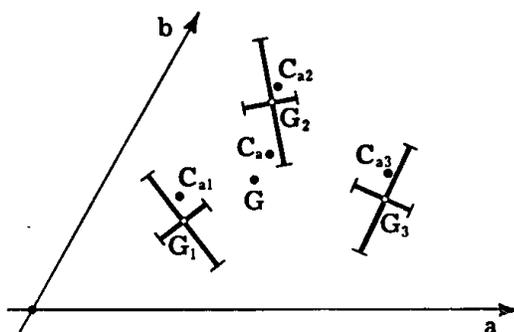


FIG. 1-27

ed all'ellisse d'inerzia del gruppo stesso; la (1-3) si scrive

$$I_{ab} = \sum M_i d_{G_i a} d_{C_i b} = \sum S_{ia} d_{C_i b} , \quad (32)$$

dove $d_{C_i b}$ è la distanza di C_{ai} da b . Cioè il momento statico è quello delle masse M_i concentrate nei baricentri C_i , i momenti d'inerzia I_a e centrifugo I_{ab} sono i momenti statici rispetto alle rette a e b dei momenti statici S_{ia} parziali concentrati nei punti C_{ai} . Si osservi che l'ellisse dipende solo dalla posizione e forma delle ellissi parziali e dai rapporti tra le masse M_i , non dall'effettiva distribuzione delle masse.

Sono anche utili per i calcoli numerici, nel caso di gruppi di masse di caratteristiche d'inerzia note, le seguenti espressioni (1-14 e 1-15)

$$\begin{aligned} I_a &= \sum (I_{ia_0} + M_i d_{G_i a}^2) \\ I_{ab} &= \sum (I_{ia_0 b_0} + M_i d_{G_i a} d_{G_i b}) . \end{aligned} \quad (33)$$

10. Ricerca grafica dei momenti statico e d'inerzia, e costruzione grafica dell'ellisse di inerzia.

La costruzione grafica dell'ellisse d'inerzia è comunque molto interessante, almeno dal punto di vista concettuale. Essa si effettua con il cosiddetto procedimento *dei sei poligoni funicolari*. Occorre premettere delle considerazioni sulla ricerca grafica dei baricentri, e dei momenti del primo e secondo ordine.

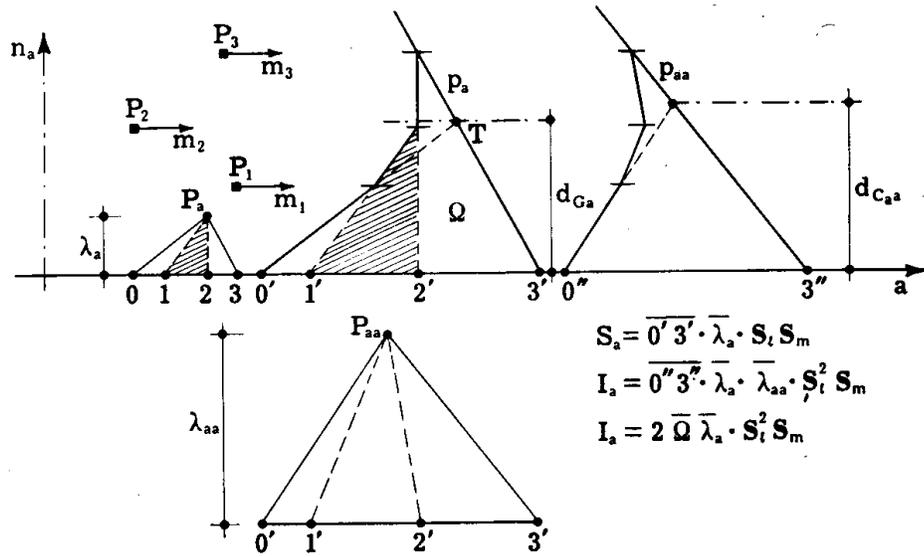


FIG. 1-28

Si facciano agire (fig. 1-28), nei punti P_i , dei vettori paralleli alla retta a , di intensità pari alle masse m_i (vettori masse).

Le intensità sono riportate in segmenti, in un ordine qualsiasi, nella *punteggiata delle masse*, ove il segmento $0 \cdot 1$ rappresenta la massa m_1 , il segmento $1 \cdot 2$ la massa m_2 , e così di seguito; se il segmento $(i - 1) \cdot i$ rappresenta una massa m_i positiva, $i - 1$ precede i nel verso positivo di a .

La *scala delle masse* sia S_m : un segmento η , la cui lunghezza letta direttamente sul disegno è di $\bar{\eta}$ cm, rappresenta $\bar{\eta} S_m$ unità di massa (nei procedimenti grafici si indicheranno in grassetto le scale, e con soprassetto i segmenti letti, in cm, direttamente sul disegno).

La scala S_m è espressa perciò in $\frac{\text{unità di massa}}{\text{cm}}$, ed ha dimensioni

$[m \ell^{-1}]$; moltiplicata per $\bar{\eta}$, che è una lunghezza, fornisce una massa. Se per esempio $S_m = 10 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}}$, ed $\bar{\eta} = 4$ cm, si ha $\eta = 40$ Kg.

Si connettono i suddetti vettori con un poligono funicolare p_a di polo P_a e base polare λ_a ; λ_a è positiva se P_a è alla sinistra di a . La base λ_a è una lunghezza. La scala delle lunghezze sia S_t ; un segmento η la cui lunghezza letta direttamente sul disegno è di $\bar{\eta}$ cm, rappresenta $\bar{\eta} S_t$ unità di lunghezza; la scala S_t è perciò espressa in $\frac{\text{unità di lunghezza}}{\text{cm}}$, ed è un numero puro. Se per esempio $S_t = 20 \frac{\text{m}}{\text{cm}}$, ed $\bar{\eta} = 4$ cm, risulta $\eta = 80$ m.

I due lati del poligono p_a che si intersecano sulla parallela ad a per P_i (lati $i-1$ ed i) determinano su a un segmento $(i-1) \cdot i'$. Risulta, dalla similitudine dei due triangoli tratteggiati nella fig. 1-28,

$$\frac{\overline{(i-1) \cdot i}}{\bar{\lambda}_a} = \frac{\overline{(i-1)' \cdot i'}}{\bar{d}_{ia}}$$

e cioè

$$\bar{\lambda}_a \overline{(i-1)' \cdot i'} = \bar{d}_{ia} \overline{(i-1) \cdot i}.$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per $S_t S_m$ si ha

$$\bar{\lambda}_a \overline{(i-1)' \cdot i'} S_t S_m = m_i d_{ia} = s_{ia} \quad (34)$$

e quindi

$$S_a = \overline{0' n'} \bar{\lambda}_a S_t S_m. \quad (35)$$

Dalle (1-34) e (1-35) appare che la punteggiata $0'1'2' \dots$ rappresenta i momenti statici rispetto ad a (*punteggiata dei momenti statici*) nella scala

$$S_s = \bar{\lambda}_a S_t S_m. \quad (36)$$

Il segno di s_{ia} è fornito dal verso del segmento $\overline{(i-1)' \cdot i'}$; presa $\lambda_a > 0$, se $(i-1)'$ precede i' nel verso positivo di a , s_{ia} è positivo. Così pure il segno di S_a è fornito dal verso del segmento $\overline{0' n'}$; se $\lambda_a > 0$, quando $0'$ precede n' nel verso positivo di a risulta $S_a > 0$.

Le dimensioni fisiche di S_s sono $l \frac{l}{l} \frac{\text{m}}{l}$, e cioè [m]; se S_t è espressa in $\frac{\text{m}}{\text{cm}}$, ed S_m in $\frac{\text{Kg}}{\text{cm}}$, S_s è espressa in $\frac{\text{Kgm}}{\text{cm}}$.

La costruzione del poligono p_a permette pure di individuare la retta parallela ad a che contiene il baricentro G ; essa passa per l'intersezione T tra il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare. Ciò si trae dalla similitudine dei due triangoli $0P_a 3$ e $0'T 3'$ (fig. 1-28).

L'effettiva posizione di G si ottiene ripetendo la stessa costruzione con riferimento ad un'altra retta b ; basta considerare la b ortogonale ad a , e utilizzare il poligono dei vettori $0n$ e la base λ_a già adoperata per costruire p_a . Si opera perciò connettendo le rette per P_i ortogonali ad a con lati ortogonali a quelli corrispondenti di p_a (poligono $\perp p_a$).

I segmenti $(i-1)' \cdot i'$ rappresentano, come detto, i momenti statici s_{ia} nella scala S_s . Se si fanno agire questi s_{ia} come vettori, applicati nei punti P_i e paralleli alla retta a , e si connettono con un poligono funicolare p_{aa} di polo P_{aa} e base λ_{aa} (fig. 1-28), si ottengono su a i segmenti $(i-1)'' \cdot i''$ tali che

$$\bar{\lambda}_{aa} \overline{(i-1)'' \cdot i''} = \bar{d}_{ia} \overline{(i-1)' \cdot i'} .$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per $S_t S_s$ si ha

$$\bar{\lambda}_{aa} \overline{(i-1)'' \cdot i''} S_t S_s = s_{ia} d_{ia} = i_{ia} \quad (37)$$

e quindi

$$\begin{aligned} I_a &= \overline{0'' n''} \bar{\lambda}_{aa} S_t S_s = \\ &= \overline{0'' n''} \bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_{aa} S_t^2 S_m . \end{aligned} \quad (38)$$

Dalle (1-37) ed (1-38) appare che la punteggiata $0''1''2'' \dots$ rappresenta i momenti d'inerzia rispetto ad a (*punteggiata dei momenti di inerzia*) nella scala

$$S_I = \bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_{aa} S_t^2 S_m . \quad (39)$$

Per i segni vale quanto già detto per i momenti statici; circa le dimensioni, se S_t è espressa in $\frac{m}{cm}$, ed S_m in $\frac{Kg}{cm}$, S_I è espressa in $\frac{Kgm^2}{cm}$. Le dimensioni di S_I sono $[ml]$.

Costruendo il poligono $\perp p_{aa}$ si può ottenere C_a come baricentro delle quantità s_{ia} agenti in P_i , e quindi anche la direzione $G C_a$ coniugata di a .

E' questo il metodo di *Culmann* o *dei due poligoni funicolari* per la ricerca grafica di I_a . Il momento I_a può anche ottenersi, però, dal primo poligono p_a (metodo di *Mohr*). Infatti (fig. 1-28) è

$$I_a = \sum s_{ia} d_{ia} = \sum \overline{(i-1)' \cdot i'} \bar{d}_{ia} S_t^2 S_m \bar{\lambda}_a ,$$

e cioè

$$I_a = 2 \bar{\Omega} \bar{\lambda}_a S_t^2 S_m, \quad (40)$$

dove $\bar{\Omega}$ è l'area, misurata direttamente in cm^2 sul disegno, compresa tra il poligono funicolare p_a , i suoi lati estremi e la retta a .

La (1-40) si presta anche al calcolo analitico di I_a , se le ordinate del poligono p_a sono esprimibili analiticamente. Infatti, per la (1-36), la (1-40), si scrive anche

$$I_a = 2 \bar{\Omega} S_t S_s$$

e quindi

$$I_a = 2 \Omega,$$

dove Ω è l'area del poligono ricavabile analiticamente, in base alle dimensioni reali d_i , ed ai valori reali delle ordinate momenti statici. E' quanto si farà nel § 1-13 a, con riferimento al caso semplice del rettangolo.

Il segno di $\bar{\Omega}$ dipende dal segno delle altezze e delle basi dei singoli triangoli come quello tratteggiato nella fig. 1-28. Nel caso della fig. 1-28 (masse tutte positive, ed a sinistra di a) sia le altezze che le basi sono sempre positive, quindi $\bar{\Omega}$ è positivo; e poichè $\lambda_a > 0$, risulta pure $I_a > 0$. Nel caso della fig. 1-29 (masse tutte positive, ma dalle due parti di a)

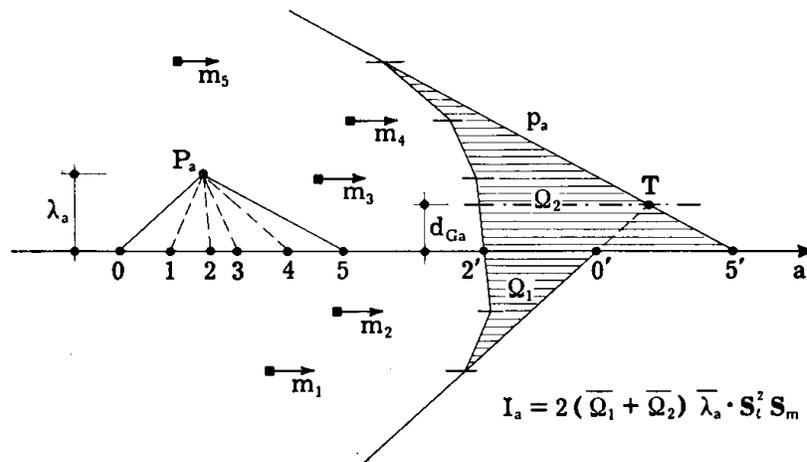


FIG. 1-29

si ha che le masse a destra di a forniscono momenti statici $0'2'$ negativi; poichè le distanze di tali masse da a sono pure negative, altezze e basi dei triangoli sono ambedue negative, e perciò $\bar{\Omega}_1$ risulta ancora positiva. Nella fig. 1-29 si osserva che l'area compresa tra il poligono p_a ed i suoi

due lati estremi fornisce I_{a_0} mentre il triangolo $0'T5'$ fornisce il termine di trasporto della formula (1-14).

Premesso tutto quanto sopra, il procedimento dei sei poligoni funicolari è immediato.

Si scelga (fig. 1-30) una retta a qualsiasi, e si facciano agire i vettori m_i secondo a , connettendoli con un poligono p_a di polo P_a ; si ottiene

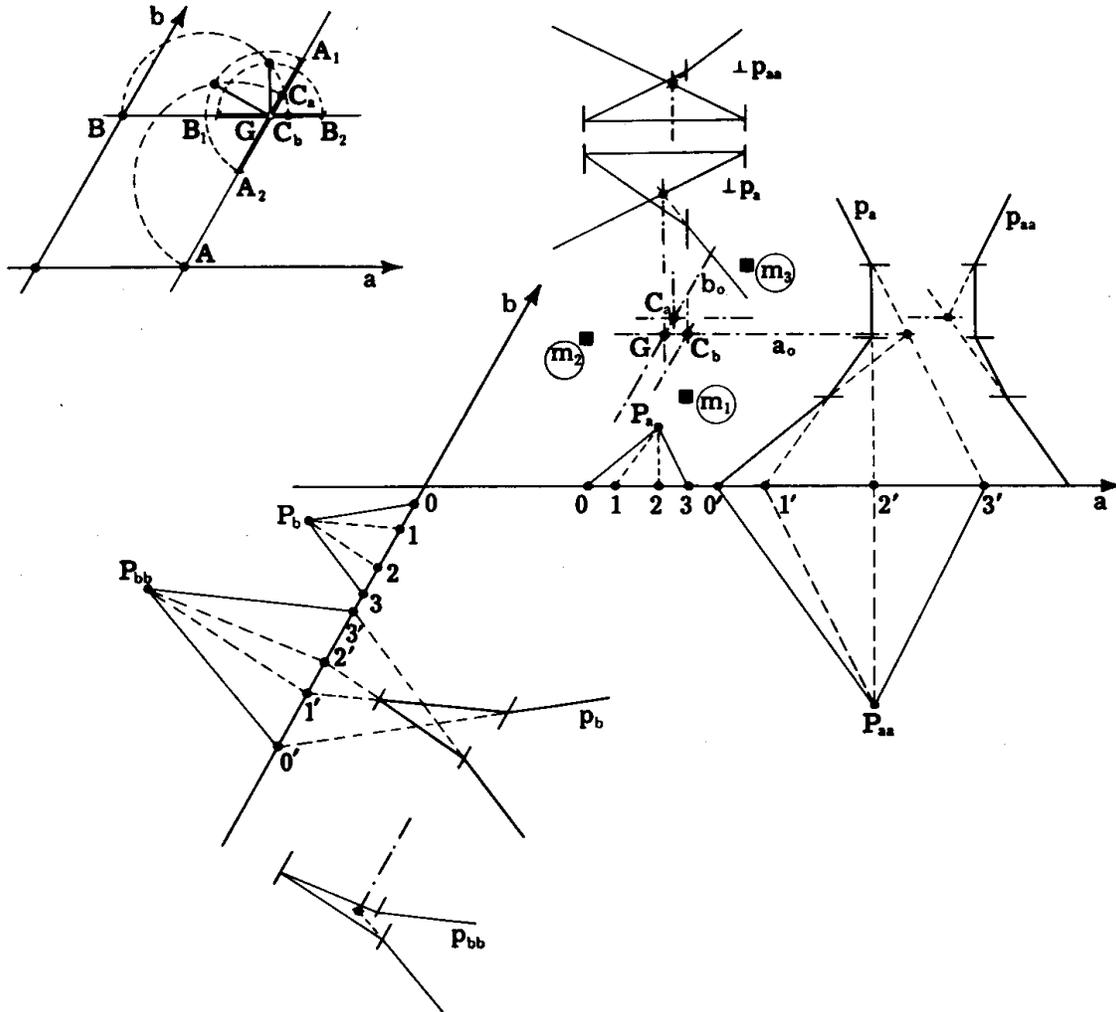


FIG. 1-30

così la retta a_0 parallela ad a su cui giace il baricentro G , ed i vettori s_{ia} su a ; il poligono $\perp p_a$ fornisce G .

Connettendo i vettori s_{ia} agenti in P_1 secondo a con un secondo poligono p_{aa} di polo P_{aa} si ottiene la retta parallela ad a su cui giace C_a ; il poligono $\perp p_{aa}$ fornisce C_a . Sulla $b_0 = GC_a$ giace il semidiametro coniugato di a_0 ; esso è fornito da

$$\rho'_{a_0} = GA_1 = \sqrt{GC_a \cdot GA}.$$

Scelta poi una retta b parallela a b_0 , si fanno agire i vettori m_i in P_i e secondo b , e si connettono con un poligono p_b di polo P_b ; si ottengono così i vettori s_{ib} . Questi si fanno ancora agire in P_i secondo b , e si connettono con un poligono funicolare p_{bb} di polo P_{bb} . La retta parallela a b e passante per l'intersezione dei due lati estremi di p_{bb} contiene C_b ; ma C_b deve giacere anche su a_0 , e quindi è determinato. Si ha così l'altro semidiametro ρ'_{b_0} coniugato di b_0 e disteso su a_0 :

$$\rho'_{b_0} = G B_1 = \sqrt{G C_b \cdot G B}.$$

E' importante osservare che le scale e le basi non giocano alcun ruolo nel procedimento ora esposto; ciò è naturale, perchè, esaltando le masse in un rapporto uguale per tutte, i momenti variano nello stesso rapporto, ma l'ellisse non varia.

Se esistono gruppi di masse di ellisse nota, la costruzione grafica si semplifica operando sulle masse M_i ; in questo caso i poligoni p_a e p_b connettono i vettori M_i applicati nei baricentri G_i , i poligoni p_{aa} e p_{bb} invece connettono i vettori S_{ia} ed S_{ib} applicati nei centri C_{ia} e C_{ib} (*spostamento vettori momenti statici*).

Così pure il calcolo secondo *Culmann* del momento d'inerzia I_a (fig. 1-28) si effettua applicando i vettori S_{ia} nei centri C_{ia} ; il calcolo secondo *Mohr* può ancora effettuarsi correggendo il poligono p_a , nei tratti interessati da ciascun gruppo di masse, per tener conto che il poligono effettivo connette le singole masse.

11. Nocciolo centrale d'inerzia.

Si chiama *nocciolo centrale d'inerzia* (fig. 1-31), o semplicemente *nocciolo*, la figura contenuta nel poligono (*contorno del nocciolo*) luogo dei

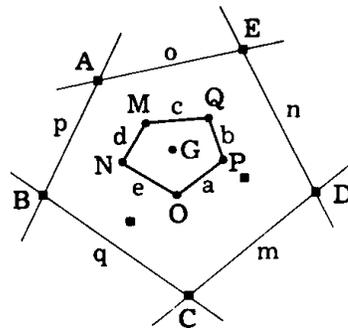


FIG. 1-31

centri relativi a tutte le rette che passano per una massa e lasciano tutte le altre masse da una sola parte.

Se la retta ruota intorno alla massa A, il suo centro percorre l'antipolare a di A rispetto all'ellisse d'inerzia; quindi il nocciolo, nel caso finora trattato di masse concentrate, è un poligono convesso (*), i cui vertici sono gli antipoli delle rette congiungenti due masse e che si lasciano tutte le altre masse da una sola parte.

Il nocciolo dipende non solo dall'ellisse, ma anche dall'effettiva distribuzione delle masse.

Data (fig. 1-32) una retta s_0 per G, le intersezioni N'_1 ed N'_2 di s_0 con il contorno del nocciolo sono gli antipoli delle due rette n^*_1 ed n^*_2 coniu-

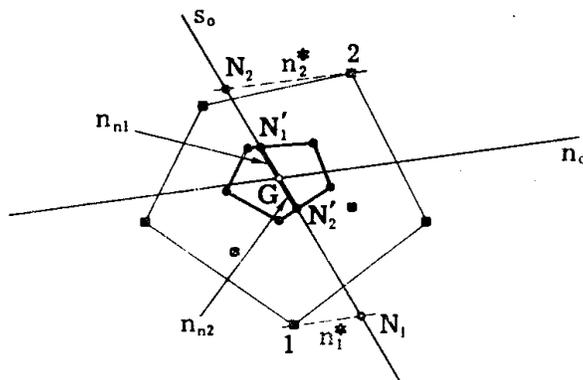


FIG. 1-32

gate di s_0 e passanti per i due punti 1 e 2 corrispondenti alle masse più lontane dalla retta n_0 , coniugata baricentrica di s_0 .

Si chiamano *moduli di resistenza* relativi alla retta n_0 le due quantità

$$W'_{1n} = \frac{I'_{n_0}}{GN_1} \quad (41)$$

$$W'_{2n} = \frac{I'_o}{GN_2}$$

dove I'_{n_0} è il momento d'inerzia rispetto ad n_0 ottenuto prendendo le distanze secondo la sua retta coniugata s_0 , e GN_1 e GN_2 sono le distanze (in valore assoluto) da n_0 , prese secondo s_0 , dei punti 1 e 2.

(*) Poichè il *contorno ideale* della distribuzione di masse (§ 1-2) è convesso, quando la retta AB comincia a ruotare intorno a B, è più lontana da G della sua parallela per A; quindi la retta b , che il suo antipolo percorre, è deviata, rispetto ad a , in modo che i suoi punti prossimi a P ed alla sua destra siano più vicini a G.

Poichè si ha pure dalla (o)

$$\rho'^2_{n_0} = G N_1 \cdot G N'_1 = G N_2 \cdot G N'_2$$

e dalle (1-22) e (1-6)

$$I'_{n_0} = \rho'^2_{n_0} M ,$$

risulta

$$W'_{1n} = \frac{\rho'^2_{n_0} M}{G N_1} = M \cdot G N'_1$$

$$W'_{2n} = \frac{\rho'^2_{n_0} M}{G N_2} = M \cdot G N'_2 ;$$

e cioè, chiamando n_{n1} ed n_{n2} i due *raggi di nocciolo* relativi ad n_0 (ubicati cioè sulla coniugata s_0 di n_0), si ha

$$W'_{1n} = M n_{n1} \tag{42}$$

$$W'_{2n} = M n_{n2} .$$

Si osservi che nella (1-42) i raggi n_{n1} ed n_{n2} sono quelli ubicati dalla parte opposta, rispetto a G , del punto 1 o 2 cui W'_n si riferisce.

Si osservi pure che i punti del nocciolo sono antipoli di rette che non intersecano il contorno ideale della distribuzione di masse, i punti esterni al nocciolo sono antipoli di rette che intersecano il suddetto contorno ideale.

Le suddette proprietà del nocciolo sono preziose nello studio della flessione deviata e della flessione composta.

12. Momento statico, d'inerzia e centrifugo di una superficie piana.

Se si è in presenza di una superficie piana A , questa può scomporsi in elementi dA ; considerando le masse $m_1 = dA$ concentrate nei baricentri degli elementi dA , si ottengono i momenti statico, d'inerzia e centrifugo della superficie rispetto a due rette a e b (fig. 1-33):

$$S_a = \int_A d_a dA \tag{43}$$

$$I_a = \int_A d_a^2 dA \quad (44)$$

$$I_{ab} = \int_A d_a d_b dA \quad (45)$$

Analoga definizione vale per il momento polare.

Le dimensioni di S_a sono $[l^3]$, quelle di I_a ed I_{ab} sono $[l^4]$. Vale tutto quanto detto a proposito di una distribuzione di masse, solo che si sostituiscono gli integrali alle sommatorie.

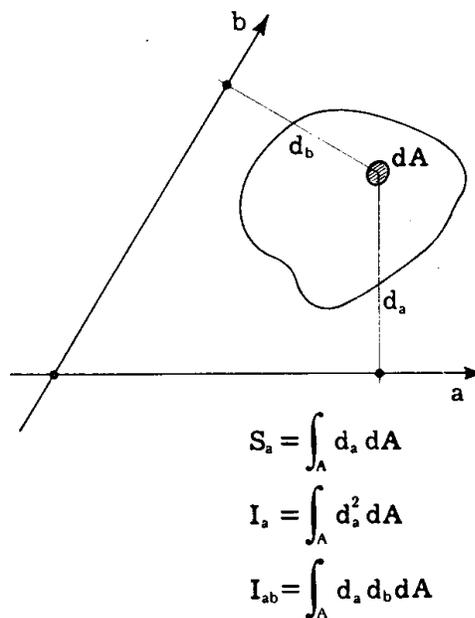


FIG. 1-33

In particolare, si verifica spesso il caso della fig. 1-27, e cioè la superficie può scomporsi in parti A_i la cui ellisse è nota, e ciò semplifica molto i calcoli (§ 1-9). Nella costruzione grafica dell'ellisse (fig. 1-30) tutto resta invariato, salvo applicare i vettori momenti statici S_{ia} ed S_{ib} non nei baricentri G_i delle parti A_i , ma negli antipoli delle rette a e b calcolati rispetto alle ellissi delle A_i (punti C_{ia} e C_{ib}). Così pure nella costruzione del momento d'inerzia con il metodo dei due poligoni funicolari (fig. 1-28) il poligono p_{aa} si costruisce facendo agire i vettori S_{ia} sempre secondo a , ma applicati nei punti C_{ia} .

Se la scomposizione in parti di ellisse nota non è possibile, conviene per calcolare I_a (fig. 1-34) scomporre la superficie A in rettangoli A_i mediante rette parallele ad a , molto vicine, e considerare le aree dei rettangoli A_i come vettori applicati secondo le mediane di tali rettangoli;

per i rettangoli A_i può considerarsi C_{ia} coincidente con G_i , quindi la costruzione non differisce da quella della fig. 1-28.

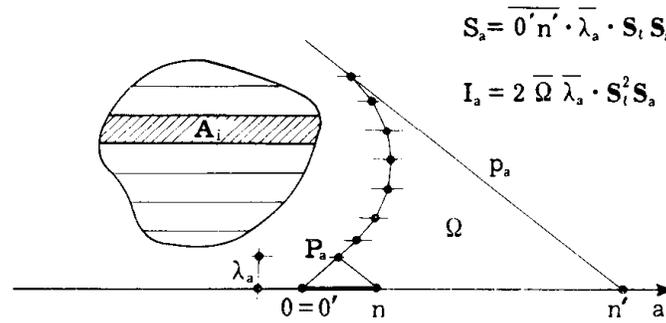


FIG. 1-34

Secondo *Culmann* si ha (la scala delle masse S_m è sostituita da quella delle aree)

$$S_a = \overline{0'n'} \bar{\lambda}_a S_i S_a \tag{46}$$

$$I_a = \overline{0''n''} \bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_{aa} S_i^2 S_a ;$$

secondo *Mohr* invece

$$I_a = 2 \bar{\Omega} \bar{\lambda}_a S_i^2 S_a . \tag{47}$$

Se per un certo tratto la dimensione secondo a è costante, la parte relativa del poligono p_a è una parabola quadratica, e si costruisce con-

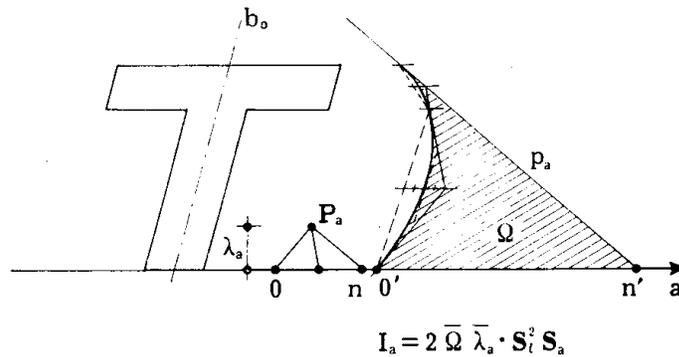


FIG. 1-35

siderando tutta l'area relativa come concentrata a metà del tratto, e poi inserendo la parabola (fig. 1-35).

La costruzione suddetta permette di determinare con il poligono p_a la distanza d_{G_a} e con il poligono p_{aa} la distanza $d_{C_a a}$; se esiste una retta b_0 di simmetria secondo la direzione a , sia G che C_a stanno su b_0 e sono determinati (fig. 1-35). Se tale direzione non esiste, occorre, per ottenere G e C_a , costruire i due poligoni $\perp p_a$ e $\perp p_{aa}$, con i vettori aree e momenti statici applicati nei baricentri G_i . Infatti i centri C_{ia} coincidono con i G_i . Si hanno così b_0 e ρ'_{a_0} .

Per determinare poi la lunghezza del semidiametro ρ'_{b_0} occorre, lasciando la stessa suddivisione di aree, costruire i poligoni p_b e p_{bb} appli-

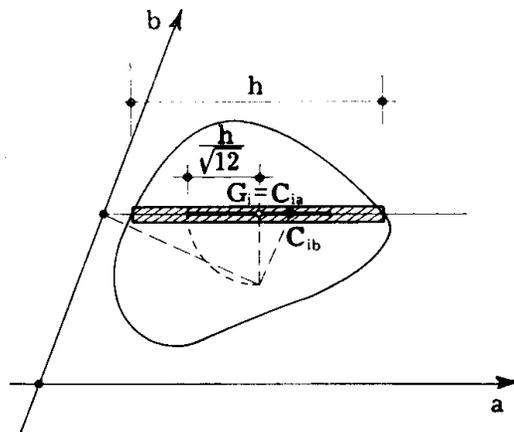


FIG. 1-36

cando le A_i nei G_i e nei centri C_{ib} ; questi ultimi si ricercano conoscendo le ellissi dei rettangoli.

L'ellisse, per rettangolo sottile di dimensioni h , degenera in un segmento di lunghezza $2 \frac{h}{\sqrt{12}}$ (§ 1-13) posto sulla mediana; sulla stessa mediana giace C_{ib} , e la sua posizione è immediatamente calcolabile (fig. 1-36).

13. Studio di figure semplici.

a) Rettangolo.

Siano b e h le due dimensioni del rettangolo; attese le condizioni di simmetria, le due mediane definiscono nel loro incontro il baricentro; inoltre esse sono rette baricentriche coniugate ortogonali, e perciò assi baricentrici principali (ξ ed η) d'inerzia.

Rispetto all'asse ξ parallelo alla dimensione b si ha (fig. 1-37), scom-

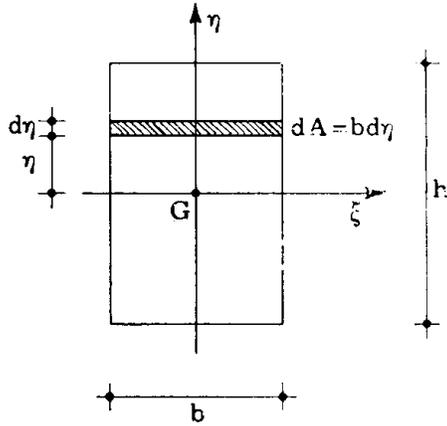


FIG. 1-37

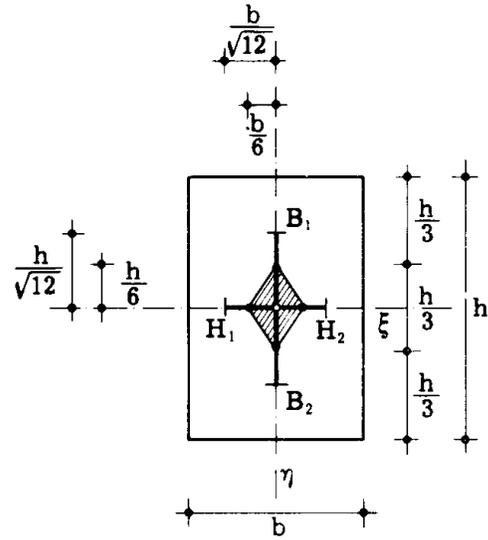


FIG. 1-38

ponendo il rettangolo in rettangoli elementari, come detto nel § 1-12, (fig. 1-34),

$$I_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} b \eta^2 d\eta = \frac{bh^3}{12} . \quad (48)$$

Il relativo raggio d'inerzia è (fig. 1-38)

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} . \quad (49)$$

Analogamente si ha

$$I_{\eta} = \frac{hb^3}{12}$$

$$\rho_{\eta} = \frac{b}{\sqrt{12}} .$$

Rispetto al lato b si ha

$$I_b = I_{\xi} + bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3} . \quad (50)$$

Il momento d'inerzia polare rispetto al baricentro è (1-5)

$$I_G = I_\xi + I_\eta = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) . \quad (51)$$

Il raggio di nocciolo disteso lungo η è dato da

$$n_\xi \frac{h}{2} = \frac{h^2}{12}$$

da cui

$$n_\xi = \frac{h}{6} . \quad (52)$$

Analogamente, il raggio di nocciolo disteso lungo ξ è

$$n_\eta = \frac{b}{6} .$$

Il nocciolo è un rombo, con le diagonali ubicate sulle mediane del rettangolo e lunghe $\frac{h}{3}$ e $\frac{b}{3}$; i due segmenti intercettati dal nocciolo sulle mediane si chiamano i *terzi medi* delle mediane stesse.

Se il rettangolo è sottile ($b \ll h$) l'ellisse degenera nel segmento $B_1 B_2$

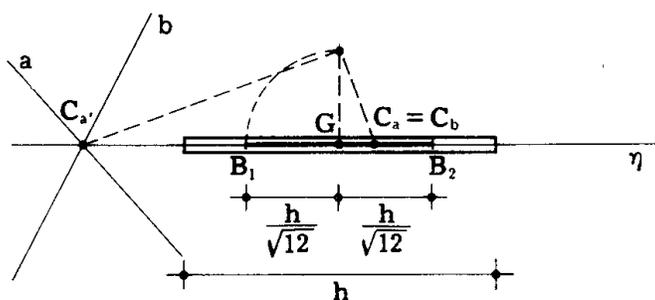


FIG. 1-39

di centro G e lungo $2 \frac{h}{\sqrt{12}}$ (fig. 1-39), disteso sulla mediana η lunga. I

centri C_a di qualsiasi retta a giacciono sulla η ; a tutte le rette passanti per un punto $C_{a'}$ di η corrisponde un solo C_a di η ; C_a e $C_{a'}$ sono coniugati nella involuzione di centro G e punti $B_1 B_2$ corrispondenti. Alla retta η corrisponde qualsiasi punto del piano, al punto G tutte le parallele ad η .

Si ha conferma del metodo di Mohr dalla fig. 1-40; la curva ADF è il poligono p_a , il segmento AB rappresenta il momento statico $\frac{bh^2}{2}$.

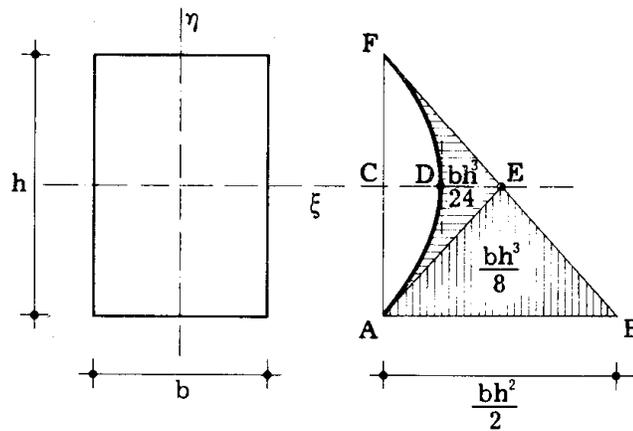


FIG. 1-40

L'area ADFE è fornita da

$$\Omega_{\xi} = \frac{bh^3}{8} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{24},$$

e quindi

$$I_{\xi} = 2 \Omega_{\xi} = \frac{bh^3}{12};$$

l'area AEB è

$$\Omega_b = \frac{bh^3}{8},$$

e perciò risulta

$$I_b = 2 (\Omega_{\xi} + \Omega_b) = \frac{bh^3}{3}.$$

b) *Parallelogramma.*

Siano b ed h' i lati del parallelogramma (fig. 1-41), h l'altezza, α l'an-

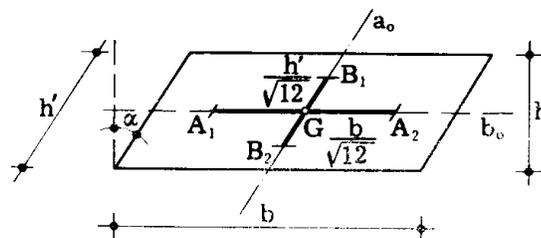


FIG. 1-41

golo tra h ed h' . Le due mediane sono rette di simmetria, l'una nella

e perciò

$$\rho_{a_o}^2 = \frac{hb^3}{48} \cos^2 \alpha \frac{2}{bh} = \frac{b^2}{24} \cos^2 \alpha$$

e ancora

$$\rho'_{a_o} = \frac{b}{\sqrt{24}}. \quad (61)$$

Il centro C_b giace su a_o , ed è fornito da

$$G C_b \frac{h'}{3} = \frac{h'^2}{18}$$

da cui

$$G C_b = \frac{h'}{6}; \quad (62)$$

il punto C_b divide perciò la mediana a_o in due parti uguali, ed il nocciolo è un triangolo i cui vertici sono i punti medi delle mediane; questo triangolo è omotetico al contorno del triangolo dato, di centro G e rapporto 1 : 4.

Rispetto alla retta di vertice (b^*) parallela alla base è (fig. 1-43)

$$I_{b^*} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \frac{4}{9} h^2 = \frac{bh^3}{4}. \quad (63)$$

d) *Corona circolare sottile.*

La corona circolare (fig. 1-44) abbia spessore δ e raggio R . Il momento

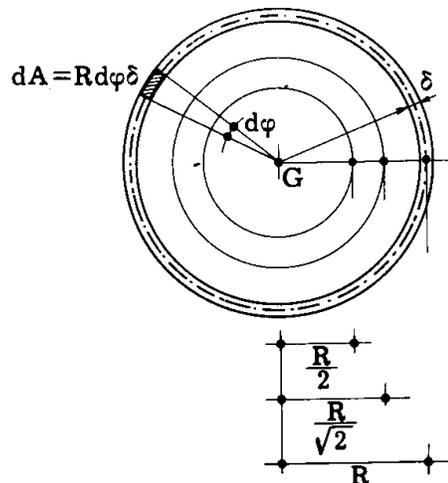


FIG. 1-44

d'inerzia polare I_G rispetto al baricentro è

$$I_G = \int_0^{2\pi} R d\phi \delta R^2 = 2 \pi R^3 \delta. \quad (64)$$

L'ellisse è una circonferenza di raggio ρ , per simmetria, e qualsiasi coppia di rette ortogonali per G è coniugata. Per la (1-5) quindi si ha che il momento d'inerzia I_d rispetto ad un diametro è

$$I_d = \pi R^3 \delta . \quad (65)$$

Poichè l'area è $A = 2 \pi \delta R$, si ha pure

$$\rho^2 = \frac{\pi R^3 \delta}{2 \pi R \delta} = \frac{R^2}{2}$$

e quindi

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}} . \quad (66)$$

Il nocciolo è un cerchio, il cui raggio ρ_n è dato da

$$\rho_n R = \rho^2 ,$$

e quindi

$$\rho_n = \frac{R}{2} . \quad (67)$$

e) *Cerchio.*

Il raggio del cerchio sia R (fig. 1-45). Anche nel caso in esame l'el-

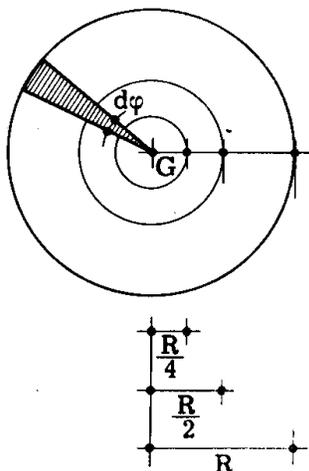


FIG. 1-45

lisse e il contorno del nocciolo sono circonferenze. Si ha, per la (1-63), che il momento polare, rispetto al baricentro G del cerchio, di un set-

tore elementare largo $d\varphi$, assimilato ad un triangolo, è

$$R d\varphi \frac{R^3}{4}$$

e quindi

$$I_G = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2} . \quad (68)$$

Allo stesso risultato si giunge integrando rispetto a r , da 0 ad R , la (1-64):

$$I_G = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} .$$

Si ha perciò

$$I_d = \frac{\pi R^4}{4} \quad (69)$$

$$\rho^2 = \frac{\pi R^4}{4 \pi R^2} = \frac{R^2}{4}$$

da cui

$$\rho = \frac{R}{2} ; \quad (70)$$

e ancora

$$\rho_n R = \frac{R^2}{4}$$

da cui

$$\rho_n = \frac{R}{4} . \quad (71)$$

14. Esempi di ricerca dell'ellisse d'inerzia.

a) *Sezione formata da un insieme di profilati.*

La sezione è consegnata nella fig. 1-46; essa è la sezione retta di una trave costituita dall'insieme di più profilati collegati discontinuamente con calastrelli lungo l'asse.

Per le due sezioni NP ad L 10/20/16 ed HE 300 B, si ha rispettivamente

$$A_1 = 45,7 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 149,1 \text{ cm}^2 ;$$

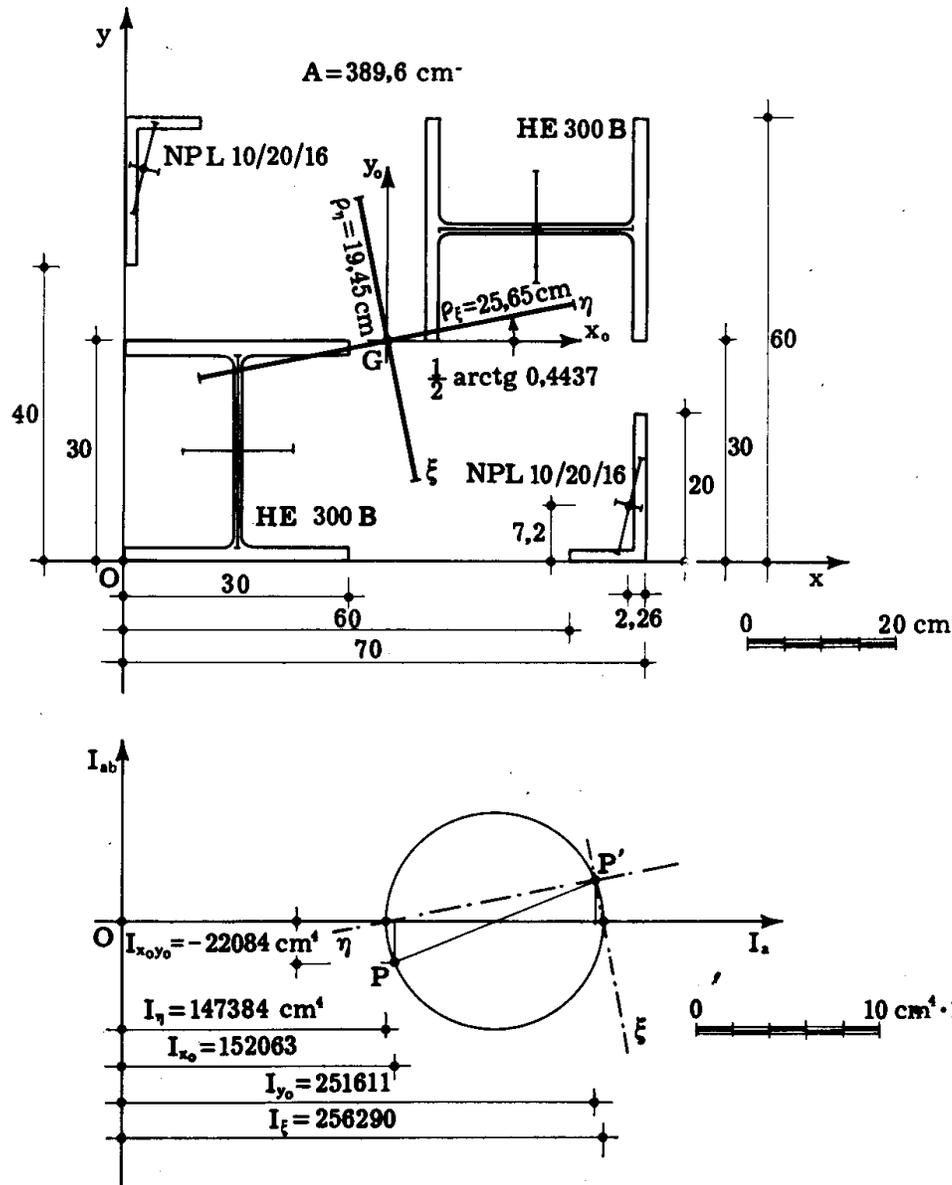


FIG. 1-46

con le notazioni della fig. 1-46, si ottiene (1-13)

$$y_G = \frac{S_x}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 (52,8 + 7,2) + A_2 (15 + 45)}{2 (A_1 + A_2)} = 30 \text{ cm}$$

$$x_G = - \frac{S_y}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 (2,26 + 67,74) + A_2 (15 + 55)}{2 (A_1 + A_2)} = 35 \text{ cm} .$$

Ciò poteva anche dedursi, per semplice ispezione, osservando che il baricentro parziale del sistema costituito dai due soli ferri d'angolo coincide, per la disposizione adottata, con quello del rettangolo di vertici $O(0;0)$, $P_1(0;60)$, $P_2(70;60)$, $P_3(70;0)$, e così pure quello dei due profilati HE, il cui contorno è quadrato.

Rispetto al riferimento baricentrico riportato in fig. 1-46, si calcolano I_{x_o} , I_{y_o} , $I_{x_o y_o}$. Si ha (1-33)

$$I_{x_o} = \Sigma (I_{i x_{oi}} + A_i d_{G_i x_o}^2)$$

$$I_{y_o} = \Sigma (I_{i y_{oi}} + A_i d_{G_i y_o}^2)$$

$$I_{x_o y_o} = \Sigma (I_{i x_{oi} y_{oi}} + A_i d_{G_i x_o} d_{G_i y_o})$$

dove, al solito, $I_{i x_{oi}}$, $I_{i y_{oi}}$, $I_{i x_{oi} y_{oi}}$ rappresentano i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici del singolo profilato e paralleli ad x_o , y_o ; quantità che, insieme alle A_i , si ottengono dalle tabelle apposite, meno $I_{i x_{oi} y_{oi}}$ che deve calcolarsi tramite la (1-17). Risulta, per le due sezioni HE 300 B

$$I_{i x_{oi} y_{oi}} = 0,$$

e per i due profilati NP ad L 10/20/16 (per la loro posizione, in forza delle (b), i due $I_{i x_{oi} y_{oi}}$ sono uguali)

$$I_{i x_{oi} y_{oi}} = - \frac{I_{i \xi} - I_{i \eta}}{2} \operatorname{sen} 2 \varphi_1 = (I_{i \eta} - I_{i \xi}) \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1},$$

da cui (*)

$$I_{i x_{oi} y_{oi}} = (205 - 1973) \frac{0,2585}{1 + 0,2585^2} = - 425,6 \text{ cm}^4.$$

(*) L'asse y_{oi} è orientato alla sinistra di x_{oi} , e si giustifica, così, il segno —. Infatti è $I_{a t} = - I_{x_{oi} y_{oi}}$, essendo $a = x_{oi}$, $t = - y_{oi}$. Ciò risulta anche dalla costruzione grafica.

Sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= 1863 + 45,7 \cdot \overline{22,8}^2 + 25166 + 149,1 \cdot \overline{15}^2 + \\ &+ 8563 + 149,1 \cdot \overline{15}^2 + 1863 + 45,7 \cdot \overline{22,8}^2 = \\ &= 152063 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_0} &= 315 + 45,7 \cdot \overline{32,74}^2 + 8563 + 149,1 \cdot \overline{20}^2 + \\ &+ 25166 + 149,1 \cdot \overline{20}^2 + 315 + 45,7 \cdot \overline{32,74}^2 = \\ &= 251611 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0} &= 2 (-425,6 + 45,7 \cdot \overline{32,74} \cdot \overline{22,8} - 149,1 \cdot \overline{15} \cdot \overline{20}) = \\ &= -22084 \text{ cm}^4 . \end{aligned}$$

Dall'applicazione della (1-19) si traggono i momenti d'inerzia principali

$$\left. \begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2} = \left\{ \begin{array}{l} 256290 \text{ cm}^4 \\ 147384 \text{ cm}^4 \end{array} \right.$$

e gli angoli $\widehat{x_0 \xi}$ e $\widehat{x_0 \eta}$:

$$\operatorname{tg} 2 \widehat{x_0 \xi} = \operatorname{tg} 2 \widehat{x_0 \eta} = \frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = 0,4437$$

da cui

$$2 \widehat{x_0 \xi} = 2 \widehat{x_0 \eta} = 23^\circ 55' \pm k 180^\circ .$$

Infine

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{\Sigma A_i}} = 25,65 \text{ cm}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{\Sigma A_i}} = 19,45 \text{ cm} .$$

La costruzione grafica col cerchio di Mohr, riportata in fig. 1-46, conferma i valori ottenuti dal calcolo.

b) Sezione sottile

Come secondo esempio, si riporta la determinazione dell'ellisse d'inerzia di fig. 1-47 (profilato sottile). La sezione può pensarsi scomposta in

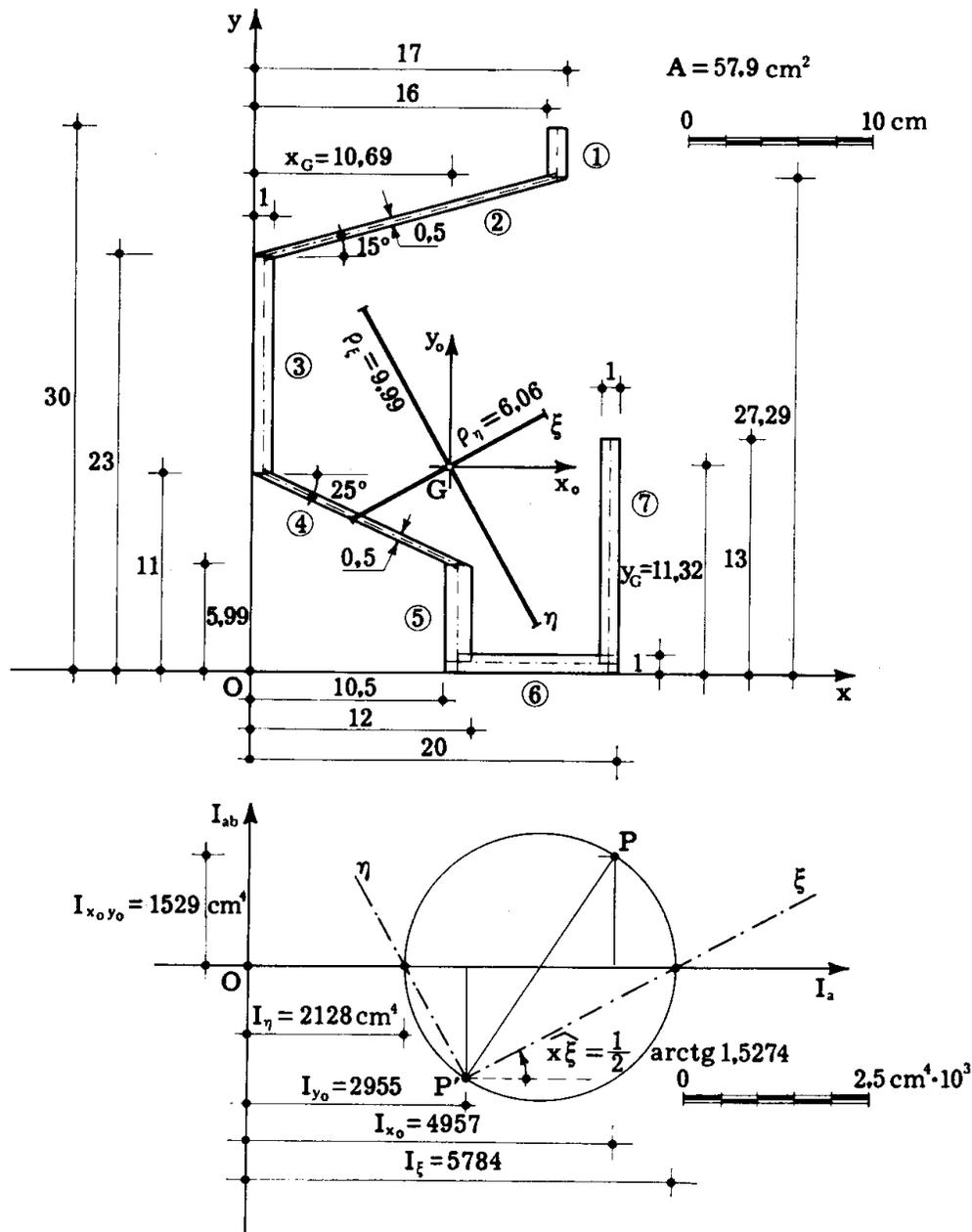


FIG. 1-47

sette rettangoli, come la figura stessa mostra, e per essi risulta, nel riferimento cartesiano x, y (*):

(*) Per i rettangoli 2 e 4 i momenti d'inerzia si calcolano, noti quelli principali, dalle (1-17).

Si ha pertanto

$$x_G = \frac{1}{57,907} (2,714 \cdot 16,5 + 8,282 \cdot 8,5 + 12 \cdot 0,5 + 5,93 \cdot 5,875 + \\ + 8,981 \cdot 11,25 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 19,5) = 10,690 \text{ cm .}$$

$$y_G = \frac{1}{57,907} (2,714 \cdot 28,643 + 8,282 \cdot 25,143 + 12 \cdot 17 + \\ + 5,93 \cdot 8,494 + 8,981 \cdot 2,994 + 8 \cdot 0,5 + 12 \cdot 7) = 11,315 \text{ cm}$$

Rettangolo	x_{G_i} (cm)	y_{G_i} (cm)	A_i (cm ²)	$I_{i x_{oi}}$ (cm ⁴)	$I_{i y_{oi}}$ (cm ⁴)	$I_{i x_{oi} y_{oi}}$ (cm ⁴)
1	16,500	28,643	2,714	1,667	0,226	0
2	8,500	25,143	8,282	12,847	176,683	-47,296
3	0,500	17,000	12,000	144,000	1,000	0
4	5,875	8,494	5,930	12,519	57,131	26,583
5	11,250	2,994	8,981	26,825	1,684	0
6	16,000	0,500	8,000	0,667	42,667	0
7	19,500	7,000	12,000	144,000	1,000	0

E' perciò, rispetto agli assi baricentrici,

$$I_{x_o} = 1,667 + 2,714 \cdot \overline{17,328}^2 + 12,847 + 8,282 \cdot \overline{13,828}^2 + \\ + 144 + 12 \cdot \overline{5,685}^2 + 12,519 + 5,930 \cdot \overline{2,821}^2 + \\ + 26,825 + 8,981 \cdot \overline{8,321}^2 + 0,667 + 8 \cdot \overline{10,815}^2 + \\ + 144 + 12 \cdot \overline{4,315}^2 = 4957 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_o} = 0,226 + 2,714 \cdot \overline{5,81}^2 + 176,683 + 8,282 \cdot \overline{2,19}^2 + \\ + 1 + 12 \cdot \overline{10,19}^2 + 57,131 + 5,93 \cdot \overline{4,815}^2 + \\ + 1,684 + 8,981 \cdot \overline{0,56}^2 + 42,667 + 8 \cdot \overline{5,31}^2 + \\ + 1 + 12 \cdot \overline{8,81}^2 = 2955 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned}
 I_{x_0 y_0} = & -2,714 \cdot 5,81 \cdot 17,328 - 47,296 + \\
 & + 8,282 \cdot 2,19 \cdot 13,828 + 12 \cdot 10,19 \cdot 5,685 + \\
 & - 5,93 \cdot 4,81 \cdot 2,821 + 26,583 + \\
 & + 8,981 \cdot 0,56 \cdot 8,321 + 8 \cdot 5,31 \cdot 10,815 + \\
 & + 12 \cdot 8,81 \cdot 4,315 = 1529 \text{ cm}^4 .
 \end{aligned}$$

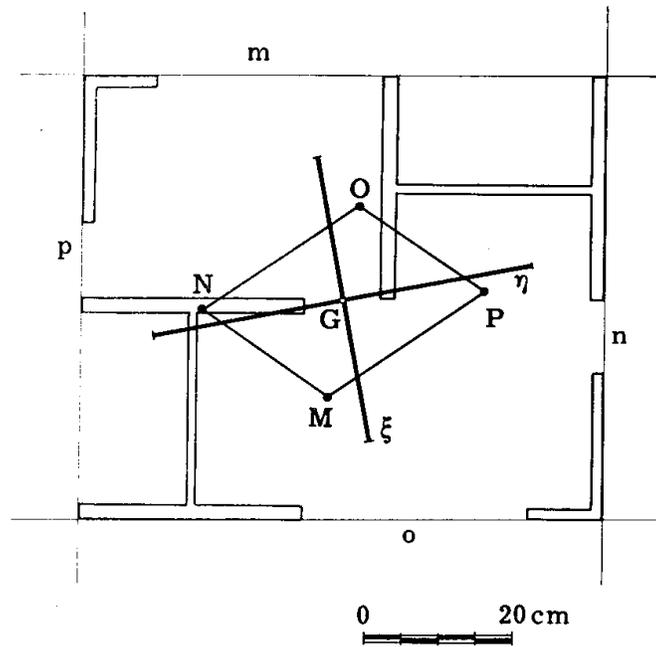


FIG. 1-48

da cui

$$\left. \begin{array}{l} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2} = \left\{ \begin{array}{l} 5784 \text{ cm}^4 \\ 2128 \text{ cm}^4 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} 2 \widehat{x_0 \xi} = \operatorname{tg} 2 \widehat{x_0 \eta} = \frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = 1,5274 ,$$

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{\Sigma A_i}} = 9,994 \text{ cm}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{\Sigma A_i}} = 6,062 \text{ cm} .$$

Nelle figg. 1-48 e 1-49 sono riportati i noccioli relativi alle due sezioni

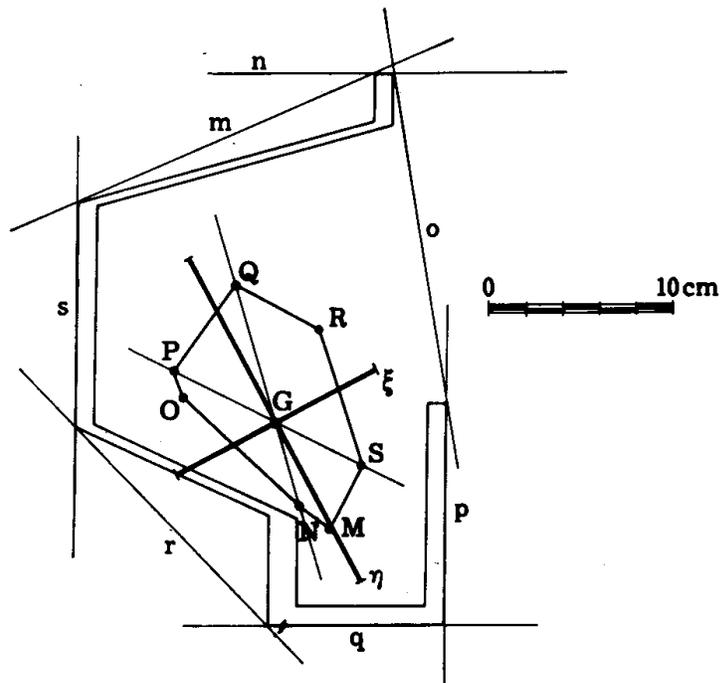


FIG. 1-49

studiate in questo paragrafo.