

## Capitolo sesto

### Il fluage in presenza di carichi assiali.

#### 1. La trave ad asse rettilineo nel caso generale .

Siano

$$q(z) \cdot g(t) \quad (675)$$

i carichi trasversali agenti sulla trave dalla data  $t_c$ , in presenza di carichi assiali fissi cui si accompagna (cap. 4) la risultante  $\lambda R(z)$  delle forze applicate ad ascisse minori di  $z$  (l'ascissa  $z = l$  corrisponde alla sezione di destra, la sola attrezzatura per ricevere la spinta assiale). Siano  $\varphi(z)$  le rotazioni calcolabili in fase elastica, e  $\varphi^*(z)$  le rotazioni dovute ai soli carichi trasversali  $q(z)$ . Le  $\varphi(z)$  sono somma delle rotazioni  $\varphi^*(z)$ , e di quelle generate dai carichi assiali; queste ultime dipendono dalle stesse  $\varphi(z)$ , e possono anche ascriversi a coppie fittizie pari a

$$m^* = \lambda R(z) \varphi(z) . \quad (676)$$

Se  $K(z, z')$  è la funzione di Green della rotazione per coppia viaggiante, si ha quindi

$$\varphi(z, t) = \varphi^*(z) \cdot g(t) + \lambda \int_0^l R(z') K(z, z') \varphi(z', t) dz' .$$

Se  $E$  è costante può perciò scriversi

$$\varphi(z, t) = \varphi^*(z) \cdot g(t) + \varphi^*(z) \int_{t_c}^t g(\tau) \psi(\tau, t) d\tau + \quad (677)$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \int_0^l R(z') K(z, z') \varphi(z', t) dz' + \\
 & + \lambda \int_0^l R(z') K(z, z') \int_{t_c}^t \varphi(z', \tau) \psi(\tau, t) d\tau dz' .
 \end{aligned}$$

Se i carichi trasversali non variano, e se si adotta un nucleo alla Withney, la (677) si scrive

$$\varphi(z, t) = \varphi^*(z) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right] + \tag{678}$$

$$\lambda \int_0^l R(z') K(z, z') \left[ \varphi(z', t) + \alpha \int_{t_c}^t \varphi(z', \tau) e^{-\beta \tau} d\tau \right] dz' .$$

Si può porre  $\varphi(z, t)$  in serie di autofunzioni:

$$\varphi(z, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h f_h(t) \cdot \bar{\varphi}_h(z) ; \tag{679}$$

ove per  $\phi_h$  si assume il coefficiente  $h$ -esimo dello stesso sviluppo in assenza di viscosità (439). Quindi

$$f_h(t_c) = 1 . \tag{680}$$

Anche la  $\varphi^*(z)$  si può sviluppare in serie di autofunzioni:

$$\varphi^*(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^* \bar{\varphi}_h(z) , \tag{681}$$

ove i coefficienti  $\phi_h^*$  sono forniti dalla (407). Sostituendo le (679) e (681) nella (678) si ha

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h f_h(t) \bar{\varphi}_h(z) = \\
& = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^* \bar{\varphi}_h(z) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right] + \quad (682) \\
& + \sum_{h=1}^{\infty} \lambda \phi_h \int_0^l R(z') K(z, z') \bar{\varphi}_h(z') \left[ f_h(t) + \right. \\
& \left. + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta \tau} f_h(\tau) d\tau \right] dz'.
\end{aligned}$$

Per la (413) la (682) si scrive

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h \bar{\varphi}_h(z) f_h(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^* \bar{\varphi}_h(z) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right] + \\
& + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda}{2\epsilon} \phi_h \int_0^l R(z') \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_j(z) \bar{\varphi}_j(z') \right] \bar{\varphi}_h(z') \left[ f_h(t) + \right. \\
& \left. + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta \tau} f_h(\tau) d\tau \right] dz'.
\end{aligned}$$

Per l'ortonormalità delle autofunzioni può ancora scriversi

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h \bar{\varphi}_h(z) f_h(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^*(z) \bar{\varphi}_h(z) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right] + \\
& + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_h} \phi_h \bar{\varphi}_h(z) \left[ f_h(t) + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta \tau} f_h(\tau) d\tau \right],
\end{aligned}$$

e quindi, poiché le  $\bar{\varphi}_h$  costituiscono una base,

$$\begin{aligned} \phi_h f_h(t) = & \frac{\lambda}{\lambda_h} \phi_h \left[ f_h(t) + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta\tau} f_h(\tau) d\tau \right] + \\ & + \phi_h^* \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right]. \end{aligned} \quad (683)$$

In assenza di viscosità, o per  $t = t_c$ , la (683) si riduce alla (439):

$$\phi_h = \phi_h^* \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}. \quad (683)$$

Derivando la (683) rispetto a  $t$  si ottiene

$$\begin{aligned} \phi_h \frac{df_h}{dt} - \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda_h} \frac{\lambda}{\lambda_h} \phi_h \alpha f_h(t) e^{-\beta t} = \\ = \phi_h^* \alpha e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{df_h}{dt} - \frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \alpha e^{-\beta t} f_h(t) = \frac{\phi_h^*}{\phi_h} \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \alpha e^{-\beta t}.$$

Per la (684) si ha ancora

$$\frac{df_h}{dt} - \frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \alpha e^{-\beta t} f_h(t) = \alpha e^{-\beta t}. \quad (685)$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla (685) è

$$f_h(t) = C e^{-\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}};$$

un integrale particolare della completa è

$$f_h(t) = -\frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda} ;$$

la soluzione della (685) è quindi

$$f_h(t) = C e^{-\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} e^{-\beta t_c}} - \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda} . \quad (686)$$

La condizione (680) si scrive

$$C e^{-\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} = \frac{\lambda_h}{\lambda}$$

e quindi

$$C = \frac{\lambda_h}{\lambda} e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} .$$

La (686) si scrive infine come segue:

$$f_h(t) = \frac{\lambda_h}{\lambda} e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} - \frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda} . \quad (687)$$

Per le (684) e (687), la (679) si scrive

$$\varphi(z, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^* \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda_h}{\lambda} (e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} - 1) \right] \bar{\varphi}_h(z) .$$

Per  $t_c = 0, t = \infty$ , si ha

$$\varphi_{\infty o}(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi_h^* \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda_h}{\lambda} \left( e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) \right] \bar{\varphi}_h(z).$$

Confrontando con la (684), si osserva che il generico termine  $\phi_h^*$ , legato al solo carico trasversale, quale che sia, è esaltato per

$$\xi_{ha} = \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \tag{690}$$

dai carichi assiali, attraverso l'autovalore  $\lambda_h$ , e per

$$\xi_{hv} = 1 + \frac{\lambda_h}{\lambda} \left( e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) \tag{691}$$

dalla viscosità.

Per  $\lambda = 0$  è  $\xi_{ha} = \xi_{hv} = 1$ ; per  $\alpha = 0$  è  $\xi_{hv} = 1$ .

Si noti che, quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ , sia  $\xi_{1a}$  che  $\xi_{1v}$  tendono ad  $\infty$ , e  $\xi_{1v}$  attraverso l'esponente. I carichi assiali giocano cioè non solo nel termine elastico, ma anche in quello viscoso, poiché incrementano  $\alpha$ ; naturalmente  $\lambda \leq \lambda_1$ , e quindi  $\lambda < \lambda_h$ , quindi l'effetto viscoso si risente soprattutto sulla prima autofunzione. Si riconosce da quanto sopra l'insidia della viscosità nelle strutture sottili, tanto più forte quanto più giovane il conglomerato è al disarmo.

## 2. La trave di sezione costante.

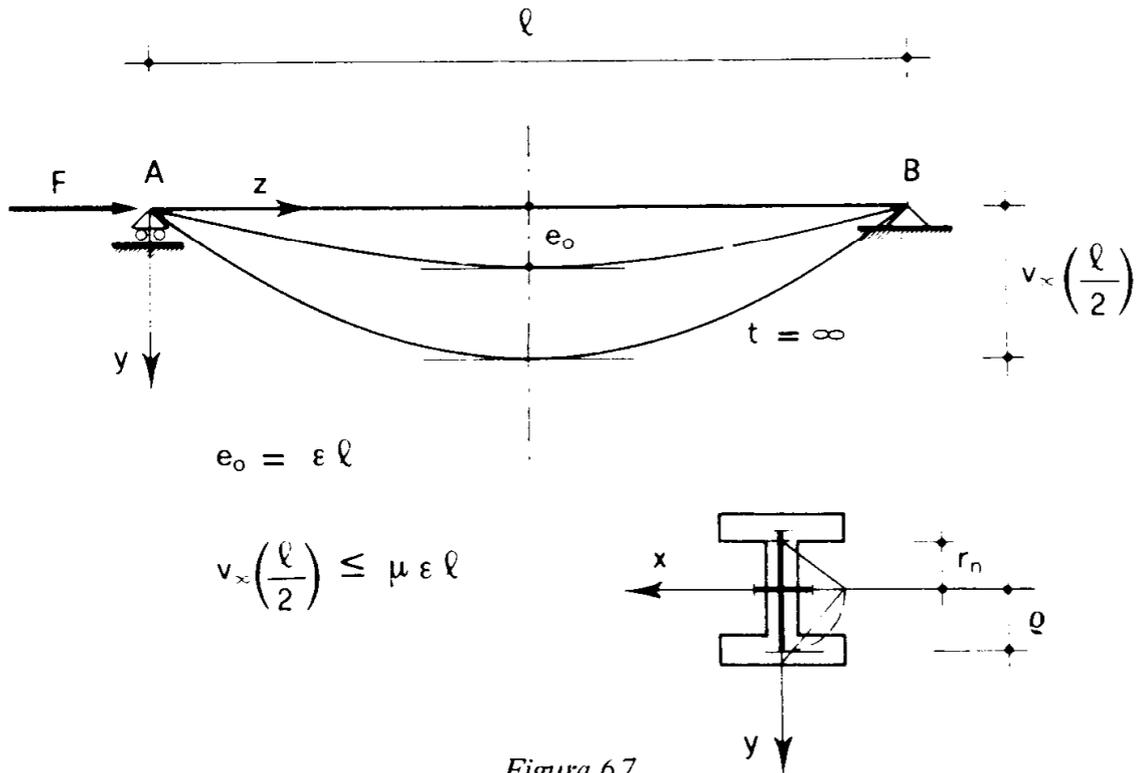
Se si operasse sugli spostamenti invece che sulle rotazioni si otterrebbero gli stessi autovalori, e come autofunzioni  $\bar{v}$  le deformate che possono trarsi per integrazione dalle autofunzioni  $\bar{\varphi}$ . Quindi la (688) può essere anche scritta come segue:

$$v(z, t) = \sum_{h=1}^{\infty} V_h^* \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda_h}{\lambda} \left( e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta}} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right) - 1 \right] \bar{v}_h(z)$$

da cui ( $t = \infty$ )

$$v_{\infty}(z) = \sum_{h=1}^{\infty} V_h^* \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda_h}{\lambda} \left( e^{\frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} - 1 \right) \right] \bar{v}_h(z). \quad (692)$$

Se si considera una trave appoggiata, di sezione costante, soggetta



ad una forza assiale  $F$  in un estremo (fig. 67), autovalori ed autofunzioni sono già noti:

$$F_h = h^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$\bar{v}_h = c_h \operatorname{sen} \frac{h \pi z}{l}.$$

Per normalizzare la  $\bar{v}_h$  si scrive

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 dz = \frac{EI c_h^2 h^4 \pi^4}{4 l^3} = \varepsilon$$

da cui

$$c_h = \frac{2l}{h^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon l}{EI}} ;$$

quindi per autofunzione si assumerà la

$$\bar{v}_h = \frac{2l}{h^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon l}{EI}} \operatorname{sen} \frac{h \pi z}{l} . \quad (694)$$

La trave sia priva di carico trasversale, ma presenti l'errore di esecuzione

$$e(z) = e_0 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} ; \quad (695)$$

nella eccentricità iniziale (695) si riassumono gli errori esecutivi, e tutte le altre perturbazioni del modello euleriano. Le  $V_h^*$  della (692) sono quelle derivanti dal momento

$$M^*(z) = F e(z) = F e_0 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} ;$$

si ha quindi

$$v^*(z) = \frac{F e_0 l^2}{\pi^2 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} . \quad (696)$$

Poiché nella (696) compare la sola autofunzione di ordine uno,  $V_h^*$  è diversa da zero solo per  $h = 1$ . La (696) si scrive, operando su autofunzione normalizzata, come segue

$$v^*(z) = \frac{F e_0 l^2}{\pi^2 EI} \frac{\pi^2}{2l} \sqrt{\frac{EI}{\epsilon l}} \cdot \frac{2l}{\pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon l}{EI}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \quad (697)$$

e quindi

$$V_h^* = \begin{cases} \frac{F e_0 l}{2EI} \sqrt{\frac{EI}{\epsilon l}} & \text{se } h = 1 \\ 0 & \text{se } h \neq 1. \end{cases}$$

La (692) si scrive perciò come segue:

$$v_\infty(z) = \frac{F e_0 l}{2EI} \sqrt{\frac{EI}{\epsilon l}} \frac{F_c}{F_c - F} \xi(t_c) \frac{2l}{\pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon l}{EI}} \text{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

e cioè

$$v_\infty(z) = e_0 \frac{F}{F_c - F} \xi(t_c) \text{sen} \frac{\pi z}{l} \quad (698)$$

ove

$$\xi(t_c) = 1 + \frac{F_c}{F} \left( e^{\frac{F}{F_c - F} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} - 1 \right), \quad (699)$$

ed

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

è il carico critico secondo Eulero. La (698) fornisce gli spostamenti totali, e cioè elastici e viscosi, a partire dalla deformata (695); gli spostamenti valutati dalla congiungente  $AB$  si ottengono sommando la (695) e la (698), e cioè

$$v_\infty(z) = e_0 \frac{F_c}{F_c - F} e^{\frac{F}{F_c - F} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} \cdot \text{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

La condizione di sicurezza nei riguardi degli spostamenti può essere data imponendo che il coefficiente di amplificazione delle irregolarità (695) non superi un valore  $\mu$ :

$$\frac{F_c}{F_c - F} e^{\frac{F}{F_c - F} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} \leq \mu . \quad (701)$$

Chiamando  $\lambda$  la snellezza  $\frac{l}{\rho}$ , ove  $\rho$  è il raggio d'inerzia della sezione, si ha

$$\frac{F_c}{F_c - F} = \frac{\pi^2 E}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} ,$$

$$\frac{F}{F_c - F} = \frac{\sigma \lambda^2}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} ,$$

ove  $\sigma$  è un valore assoluto. La (701) si scrive perciò come segue

$$\frac{\pi^2 E}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{\frac{\alpha}{\beta} \frac{\sigma \lambda^2}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{-\beta t_c}} \leq \mu . \quad (702)$$

La (702), scritta come uguaglianza, fornisce  $\sigma$  in funzione di  $\lambda$ . Questa  $\sigma$ , che non può essere superata se si vuole rispettare la (701), è una tensione  $\sigma'_c$  di plafond; se si opera con i valori "di calcolo", nella terminologia del procedimento agli stati limite, deve essere

$$\sigma \leq \sigma'_c (\lambda) . \quad (703)$$

La  $\sigma$  della (703) è data da  $\frac{F}{A}$ , ove  $A$  è l'area della sezione.

Altre verifiche da fare sono però quelle relative alla compressione in 2, ed alla trazione in 1 (fig. 68). Deve aversi cioè, servendosi sempre dei valori assoluti,

$$\frac{F}{A} + \frac{F \cdot v_{\infty, \frac{l}{2}}}{w} \leq \sigma_{pc}$$

$$-\frac{F}{A} - \frac{F \cdot v_{\infty, \frac{l}{2}}}{w} \leq \sigma_{pt} .$$

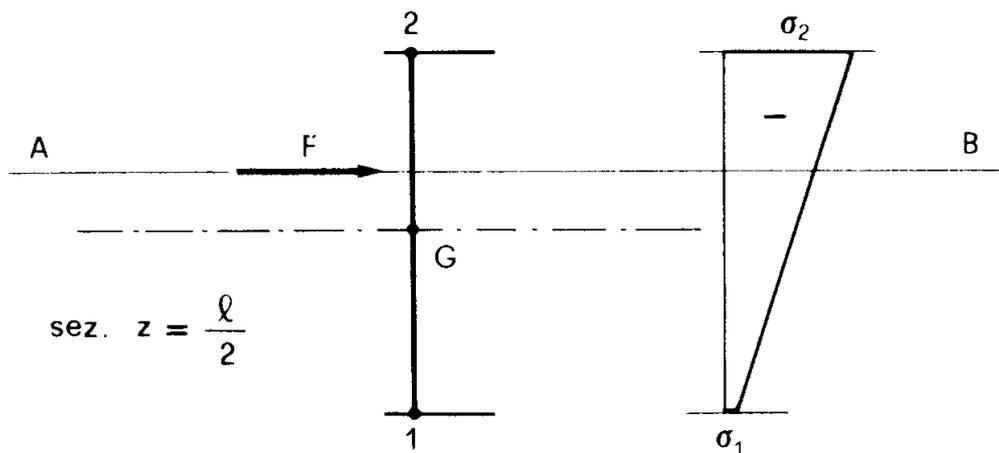


Figura 68

Per la (700), queste relazioni si traducono nelle altre:

$$\sigma \left( 1 + \epsilon \lambda \frac{\rho}{r_n} \frac{\pi^2 E}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{\frac{\alpha}{\beta} \frac{\sigma \lambda^2}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{-\beta t_c}} \right) \leq \sigma_{pc}$$
(704)

$$\sigma \left( -1 + \epsilon \lambda \frac{\rho}{r_n} \frac{\pi^2 E}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{\frac{\alpha}{\beta} \frac{\sigma \lambda^2}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{-\beta t_c}} \right) \leq \sigma_{pt} .$$

Nelle (704)  $\sigma$  è data da  $F/A$ , ed è quindi positiva;  $\sigma_{pc}$  è in valore assoluto;  $r_n$  è il raggio di nocciolo,  $\epsilon$  è il rapporto  $e_0/l$ . Le tensioni  $\sigma_{pc}$  e  $\sigma_{pt}$  sono, a rigore, le tensioni limiti di proporzionalità a compressione ed a trazione.

Ponendo

$$a(\sigma) = \frac{\pi^2 E}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} \quad (705)$$

$$b(\sigma) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sigma \lambda^2}{\pi^2 E - \sigma \lambda^2} e^{-\beta t_c}$$

le (702) e (704) si scrivono come segue

$$a(\sigma) e^{b(\sigma)} \leq \mu \quad (706)$$

$$\sigma \left[ 1 + \epsilon \lambda \frac{\rho}{r_n} a(\sigma) e^{b(\sigma)} \right] \leq \sigma_{pc} \quad (707)$$

$$\sigma \left[ -1 + \epsilon \lambda \frac{\rho}{r_n} a(\sigma) e^{b(\sigma)} \right] \leq \sigma_{pt} \quad (708)$$

La (707) e la (708) forniscono, come uguaglianze, i valori  $\sigma_c''(\lambda)$  e  $\sigma_c'''(\lambda)$  tali che deve essere

$$\sigma \leq \sigma_c''(\lambda) \quad (709)$$

$$\sigma \leq \sigma_c'''(\lambda).$$

Nella fig. 69 sono riportati i valori di  $\sigma_c'$ ,  $\sigma_c''$  e  $\sigma_c'''$  in funzione di  $\lambda$ . È di interesse il valore  $\lambda_{es}$  tale che per  $\lambda > \lambda_{es}$  il valore di  $\sigma_c'$  è il più basso fra i tre; per  $\lambda > \lambda_{es}$  si ha crisi per superamento dei limiti di spostamento. In analogia a quanto si dice nella trattazione ordinaria,  $\lambda_{es}$  può essere chiamata "snellezza limite modificata".

La condizione (708) è in genere sempre rispettata, anche per  $\sigma_{pt} = 0$ . La (707) quindi sostituisce la (706) per  $\lambda < \lambda_{es}$ , campo in cui si ha crisi per superamento del limite di proporzionalità a compressione. In genere quindi il fenomeno è regolato dalla curva

$$\sigma_c = \sigma'_c$$

per  $\lambda \geq \lambda_{es}$ , e dalla curva

$$\sigma_c = \sigma''_c$$

per  $\lambda \leq \lambda_{es}$ . Quest'ultima interseca l'asse delle  $\sigma_c$  ( $\lambda = 0$ ) in  $\sigma_c = \sigma_{pc}$ , mentre per  $\lambda = 0$  deve essere  $\sigma_c = \sigma_{oc}$ , tensione "di calcolo" di crisi

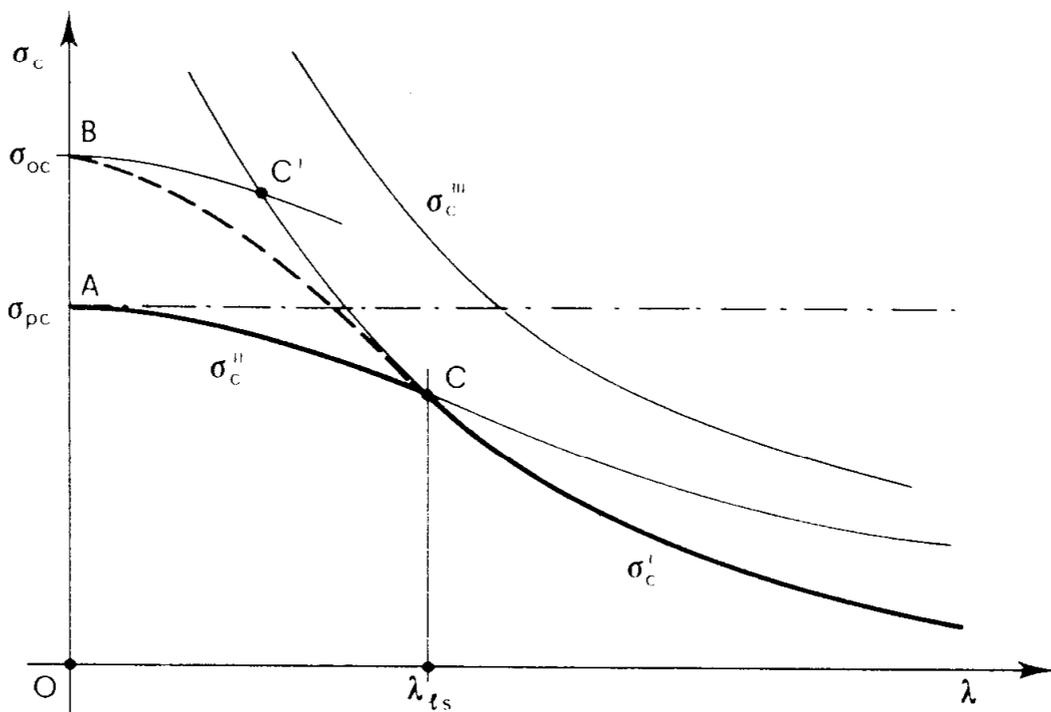


Figura 69

a compressione. L'inconveniente si supera sostituendo la curva  $AC$  della  $\sigma''_c$  con una curva  $BC$  che presenti in  $C$  la stessa tangente della curva della  $\sigma'_c$ . Meno consigliabile sarebbe tracciare la curva  $\sigma''_c$  assumendo come tensione di paragone  $\sigma_{oc}$  invece di  $\sigma_{pc}$ ; si avrebbe così la curva  $BC'$ , che taglia la curva  $\sigma'_c$  in un punto di ascissa minore di  $\lambda_{es}$ , e che comunque fornirebbe valori di  $\sigma_c$  superiori a quelli della  $BC$ . Naturalmente, si pone la questione di quale debba essere il valore di  $\sigma_{pc}$ , che nel caso del conglomerato non è ben definibile; ma essa si pone comunque anche nella trattazione euleriana, e non invalida quindi la trattazione viscosa.

### 3. La correzione dei coefficienti $\omega$ .

Nei paragrafi precedenti si è vista la tensione critica sotto l'aspetto dello stato limite per eccesso di spostamento piuttosto che sotto quello consueto dell'intervento di deformate secondarie in condizioni ideali di carico. Sotto questo aspetto, oltretutto più rispondente alla realtà delle cose, la trattazione è valida anche a prescindere dalla viscosità, e quindi anche per le strutture in acciaio; basta porre nelle formule  $\alpha = 0$ , e cioè  $b(\sigma) = 0$ ,  $e^{b(\sigma)} = 1$ . In presenza di viscosità la trattazione permette poi di tener conto di un fenomeno di vasta portata, come si è visto, che nella visione euleriana è di necessità trascurato. Naturalmente tale fenomeno è tanto più sentito quanto più sollecito è il disarmo.

In tale più moderna visione è opportuno stabilire di quanto devono essere maggiorati i coefficienti  $\omega$ , universalmente usati nella pratica dai progettisti in presenza di strutture di modesta entità.

La tensione critica di tipo euleriano è

$$\sigma_c = \begin{cases} \frac{\pi^2}{\lambda^2} E & \text{se } \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \\ \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_t & \text{se } \lambda \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \end{cases}$$

ove  $E$  è il modulo iniziale, dato dalle norme, convenzionalmente, in funzione della tensione di rottura a compressione  $\sigma_{oc}$ :

$$E = 18000 \sqrt{\sigma_{oc}} \quad , \quad (710)$$

(ove  $E$  e  $\sigma_{oc}$  sono espressi in  $\text{Kg cm}^{-2}$ ), ed  $E_t$  è il modulo tangente.

Se  $s_{imin}$  è il minorante del coefficiente di sicurezza nei riguardi del carico critico, ed  $s_{tmin}$  quello usualmente adoperato per dare la tensione ammissibile  $\sigma_a$  (caso della flessione, o della compressione di solidi tozzi), si può scrivere, per la massima  $F$  tollerata,

$$F = \frac{F_c}{s_{imin}} = \frac{\sigma_c A}{s_{imin}} = \frac{\sigma_{oc} A}{s_{tmin}} \frac{\sigma_c}{\sigma_{oc}} \frac{s_{tmin}}{s_{imin}}$$

e cioè

$$F = \frac{\sigma_a A}{\omega} = \frac{F'}{\omega} \quad , \quad (711)$$

ove

$$\omega = \frac{\sigma_{oc}}{\sigma_c} \frac{S_{imin}}{S_{tmin}} \quad . \quad (712)$$

ed  $F'$  è la massima  $F$  tollerata in semplice compressione.

Secondo il metodo agli stati limiti, se  $F_c$  è il carico critico calcolato con il valore “di calcolo”  $\frac{E}{\gamma_m}$ , ed  $F$  la forza di esercizio, deve essere

$$\gamma_f F = \pi^2 \frac{E}{\gamma_m} \frac{I}{l^2} \quad . \quad (713)$$

La (713) si può scrivere

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{\gamma_m \gamma_f} \quad . \quad (714)$$

I termini  $F$ ,  $A$ ,  $\sigma_a$ ,  $E$  sono, sia nella (711) che nella (714), quelli “caratteristici”, quelli cioè forniti dalle prescrizioni, dai capitoli, e dalle prove sperimentali (“caratteristici”, o “di esercizio”). Se  $\gamma'_f$  e  $\gamma_f$  sono i due coefficienti moltiplicativi delle forze nella verifica locale ed in quella agli spostamenti, la (714) può scriversi come segue

$$F = \frac{F_c}{\gamma_m \gamma_f} = \frac{\sigma_c A}{\gamma_m \gamma_f} = \frac{\sigma_{oc} A}{\gamma_m \gamma'_f} \frac{\sigma_c}{\sigma_{oc}} \frac{\gamma'_f}{\gamma_f}$$

e cioè

$$F = \frac{F'}{\omega} \quad , \quad (715)$$

ove

$$F' = \frac{\sigma_{oc} A}{\gamma_m \gamma_f'}$$

è la massima  $F$  tollerata in regime di semplice compressione — e cioè per solidi tozzi — e

$$\omega = \frac{\sigma_{oc}}{\sigma} \frac{\gamma_f}{\gamma_f'} . \quad (716)$$

Le (711) e (712) coincidono con le (715) e (716). Il valore di  $\omega$  può essere calcolato sia con i valori “caratteristici” di  $E$  e  $\sigma_{oc}$ , che con quelli “di calcolo”. Nella visione “progressiva” del fenomeno — contrapposta così a quella “istantanea” di Eulero — le formule da adoperare sono le (706), (707), (708).

Nella fig. 70 è riportato un possibile programma; i DATA (frase 1120) sono nell'ordine.

- $S_0$  resistenza caratteristica a 28 giorni in  $Kg\ cm^{-2}$ ;
- $B$  coeff. viscoso  $\beta$  in  $anni^{-1}$  (in genere  $\beta = 1\ anno^{-1}$ );
- $R_1$  raggio  $\rho$  di inerzia in cm.;
- $R_2$  raggio  $r_n$  di nocciolo in cm.;
- $E_1$  coeff.  $\epsilon = \frac{e_0}{l}$  (per es.  $\epsilon = 0,001$ );
- $M_1$  coeff.  $\mu$  tollerato per l'amplificazione di  $\epsilon$  (per es.  $\mu = 3$ );
- $TO$  data  $t_c$  in cui la forza assiale è applicata, in anni, a partire dalla data di maturazione;
- $M$  errore tollerato nella risoluzione (per es. 0,001) ,

Il modulo  $E$  è calcolato, attraverso la (710), dalla frase 210.

Il looping 150 ÷ 530 ripete i calcoli per  $\alpha = 1, 2, 3\ anni^{-1}$ ; il looping interno 310 ÷ 480 per  $\lambda = 10, 20 \dots 150$ .

L'array  $A$  (frase 190) contiene i valori di  $\sigma_c'$  e  $\sigma_c''$  calcolati per i vari valori di  $\lambda$ ; esso successivamente vale per  $\alpha = 1, 2, 3$ . L'array  $S$  (frase 200) contiene i tre valori di  $\sigma_{c\ min}$  per  $\alpha = 1, 2, 3$  e per i vari valori di  $\lambda$ .

Il segmento 270 ÷ 300 definisce le funzioni  $a(\sigma)$  e  $b(\sigma)$ .

Nelle fig. 71, 72 e 73 sono riportati i valori  $\sigma_c'$  e  $\sigma_c''$  per i seguenti dati (sezione rettangolare  $b \times h$ ).

```

10 DATA 494,1,6,3.4641,.001,3.0
,.001
20 REM Programma KRALL:
30 REM Sigma in Kg/cm2. A e' la c
ostante alfa di WITHNEY.
40 REM Lambda e' il rapporto tr
a lunghezza libera e raggio
d'inerzia.
50 REM S0 resistenza caratteris
tica a 28 giorni.
60 REM B costante beta di WITHN
EY.
70 REM R1 raggio di inerzia.
80 REM R2 raggio di nocciolo.
90 REM E1 epsilon , percentuale
di errore al centro ,calcola
ta sulla lunghezza libera.
100 REM M1 mu , percentuale di m
assimo spostamento al centro
,calcolata sulla lunghezza l
ibera.
110 REM Tale spostamento e' rife
rito alla congiungente le im
poste.
120 REM T0 data azione carichi ,
in anni, a partire dalla matu
razione del getto.
130 REM M errore nella risoluzio
ne delle equazioni.
140 READ S0,B,R1,R2,E1,M1,T0,M
150 FOR A=1 TO 3
160 PRINT "Alfa = ";A
170 PRINT
180 K=0
190 DIM A(15,2)
200 DIM S(15,3)
210 E=18000*S0^.5
220 P=PI^2*E
230 E2=EXP(A/B)
240 E3=EXP(-B*T0)
250 DEF FNA(X)
260 IF K=1 THEN 290
270 FNA=P/(P-X*L^2)*E2^(X*L^2/(P
-X*L^2)*E3)-M1
280 GOTO 300
290 FNA=X*(1+E1*L*R1/R2*P/(P-X*L
^2)*E2^(X*L^2/(P-X*L^2)*E3))
-S0
300 FN END
310 FOR I=1 TO 15
320 L=10*I
330 PRINT "lambda = ";L
340 PRINT
350 X1=0
360 X2=PI^2*E/L^2*.99
370 GOSUB 630
380 PRINT "sigma(s) = ";X
390 A(I,1)=X
400 X1=0
410 K=1

```

Figura 70a

```

420 X2=PI^2*E/L^2*.99
430 GOSUB 630
440 PRINT "sigma(c) = ";X
450 A(I,2)=X
460 PRINT @ PRINT
470 K=0
480 NEXT I
490 FOR I=1 TO 15
500 IF A(I,1)>A(I,2) THEN S(I,A)
    =A(I,2) ELSE S(I,A)=A(I,1)
510 NEXT I
520 PRINT @ PRINT @ PRINT
530 NEXT A
540 FOR I=1 TO 15
550 PRINT "lambda = ";10*I
560 PRINT
570 FOR A=1 TO 3
580 PRINT "omega(";A;") = ";S0/S
    (I,A)
590 NEXT A
600 PRINT
610 NEXT I
620 GOTO 910
630 T=X1
640 Y1=FNA(X1)
650 Y2=FNA(X2)
660 IF Y1#0 THEN 690
670 X=X1
680 RETURN
690 IF Y2#0 THEN 720
700 X=X2
710 RETURN
720 IF Y1*Y2<0 THEN 750
730 X2=X2/2
740 GOTO 650
750 I1=0
760 GOTO 780
770 T=X
780 X=(X2+X1)/2
790 Y=FNA(X)
800 I1=I1+1
810 IF ABS((T-X)/X)>M THEN 830
820 RETURN
830 IF Y#0 THEN 850
840 RETURN
850 IF Y*Y1>0 THEN 880
860 X2=X
870 GOTO 770
880 X1=X
890 Y1=Y
900 GOTO 770
910 GCLEAR
920 X1=0
930 X2=15
940 Y1=0
950 Y2=S0/S(15,3)
960 SCALE X1,X2,Y1,Y2
970 XAXIS 0,1
980 FOR A=1 TO 3
990 MOVE 1,S0/S(1,A)

```

*Figura 70b*

```
1000 FOR I=1 TO 15
1010 DRAW I,S0/S(I,A)
1020 NEXT I
1030 NEXT A
1040 MOVE 13,S0/S(15,3)*.05
1050 LABEL "150"
1060 MOVE .5,S0/S(15,3)*.9
1070 LABEL VAL$(IP(S0/S(15,3)*10
0)/100)
1080 XAXIS Y1 @ XAXIS Y2
1090 YAXIS X1 @ YAXIS X2
1100 COPY
1110 END
1120 DATA 494,1,6,3.4641,.001,3,
0,.001
```

*Figura 70c*

```
Alfa = 1
lambda = 10
sigma(s) = 15069.3007872
sigma(c) = 485.231008165

lambda = 20
sigma(s) = 3767.32519676
sigma(c) = 475.687435786

lambda = 30
sigma(s) = 1674.36675413
sigma(c) = 463.658558181

lambda = 40
sigma(s) = 941.831299195
sigma(c) = 447.056718648

lambda = 50
sigma(s) = 602.772031485
sigma(c) = 421.825899168

lambda = 60
sigma(s) = 418.591688532
sigma(c) = 386.779780601

lambda = 70
sigma(s) = 307.536750756
sigma(c) = 342.594771741
```

*Figura 71a*

```

lambda = 80
sigma(s) = 235.457824799
sigma(c) = 295.999862079

lambda = 90
sigma(s) = 186.040750458
sigma(c) = 252.845757113

lambda = 100
sigma(s) = 150.693007872
sigma(c) = 216.257350113

lambda = 110
sigma(s) = 124.539675927
sigma(c) = 185.665862654

lambda = 120
sigma(s) = 104.647922134
sigma(c) = 160.78268467

lambda = 130
sigma(s) = 89.1674602785
sigma(c) = 140.160631041

lambda = 140
sigma(s) = 76.8841876895
sigma(c) = 123.189990403

lambda = 150
sigma(s) = 66.9746701655
sigma(c) = 109.008804512

```

*Figura 71b*

```
Alfa = 2
lambda = 10
sigma(s) = 11003.7309535
sigma(c) = 485.231008165

lambda = 20
sigma(s) = 2750.93473835
sigma(c) = 475.090962512

lambda = 30
sigma(s) = 1222.63766151
sigma(c) = 460.477367308

lambda = 40
sigma(s) = 687.73368459
sigma(c) = 437.513146269

lambda = 50
sigma(s) = 440.149558136
sigma(c) = 401.975268619

lambda = 60
sigma(s) = 305.659415375
sigma(c) = 353.377277272

lambda = 70
sigma(s) = 224.566101091
sigma(c) = 301.304213692
```

*Figura 72a*

```
lambda = 80
sigma(s) = 171.933421148
sigma(c) = 253.35202361

lambda = 90
sigma(s) = 135.848629055
sigma(c) = 213.375426902

lambda = 100
sigma(s) = 110.037389535
sigma(c) = 180.850696591

lambda = 110
sigma(s) = 90.939991351
sigma(c) = 154.668970545

lambda = 120
sigma(s) = 76.4148538435
sigma(c) = 133.477463695

lambda = 130
sigma(s) = 65.1108813815
sigma(c) = 116.216993827

lambda = 140
sigma(s) = 56.141525273
sigma(c) = 102.155177817

lambda = 150
sigma(s) = 48.9055064598
sigma(c) = 90.345816525
```

*Figura 72b*

```
Alfa = 3
lambda = 10
sigma(s) = 8708.5097962
sigma(c) = 485.231008165

lambda = 20
sigma(s) = 2177.12744905
sigma(c) = 473.898015965

lambda = 30
sigma(s) = 967.61219959
sigma(c) = 456.235779584

lambda = 40
sigma(s) = 544.281862265
sigma(c) = 426.776627342

lambda = 50
sigma(s) = 348.340391847
sigma(c) = 381.170280833

lambda = 60
sigma(s) = 241.903049897
sigma(c) = 324.746560134

lambda = 70
sigma(s) = 177.724689718
sigma(c) = 270.141528371
```

*Figura 73a*

sigma(s) = 136.070465567  
sigma(c) = 224.124832598

lambda = 90

sigma(s) = 107.51246662  
sigma(c) = 187.218969271

lambda = 100

sigma(s) = 87.085097962  
sigma(c) = 157.94612288

lambda = 110

sigma(s) = 71.9711553405  
sigma(c) = 134.635355799

lambda = 120

sigma(s) = 60.475762474  
sigma(c) = 116.047189142

lambda = 130

sigma(s) = 51.529643765  
sigma(c) = 101.026337201

lambda = 140

sigma(s) = 44.4311724295  
sigma(c) = 88.667578076

lambda = 150

sigma(s) = 38.7044879832  
sigma(c) = 78.426957021

*Figura 73b*

```
lambda = 10
omega( 1 ) = 1.01807178784
omega( 2 ) = 1.01807178784
omega( 3 ) = 1.01807178784

lambda = 20
omega( 1 ) = 1.03849705255
omega( 2 ) = 1.03980087811
omega( 3 ) = 1.0424183756

lambda = 30
omega( 1 ) = 1.06543919306
omega( 2 ) = 1.07279974017
omega( 3 ) = 1.08277347395

lambda = 40
omega( 1 ) = 1.10500520268
omega( 2 ) = 1.12910892898
omega( 3 ) = 1.15751418506

lambda = 50
omega( 1 ) = 1.17109926388
omega( 2 ) = 1.22893132629
omega( 3 ) = 1.41815308119

lambda = 60
omega( 1 ) = 1.27721257619
omega( 2 ) = 1.61617792599
omega( 3 ) = 2.04214043688

lambda = 70
omega( 1 ) = 1.60631208721
omega( 2 ) = 2.19979773261
omega( 3 ) = 2.77958003913

lambda = 80
omega( 1 ) = 2.09804027716
omega( 2 ) = 2.87320520177
omega( 3 ) = 3.63047188779

lambda = 90
omega( 1 ) = 2.65533222578
omega( 2 ) = 3.63640033349
omega( 3 ) = 4.59481598302

lambda = 100
omega( 1 ) = 3.27818793304
omega( 2 ) = 4.48938312775
omega( 3 ) = 5.67261232474
```

*Figura 74a*

```

lambda = 110
omega( 1 ) = 3.96660739899
omega( 2 ) = 5.43215358459
omega( 3 ) = 6.86386091293

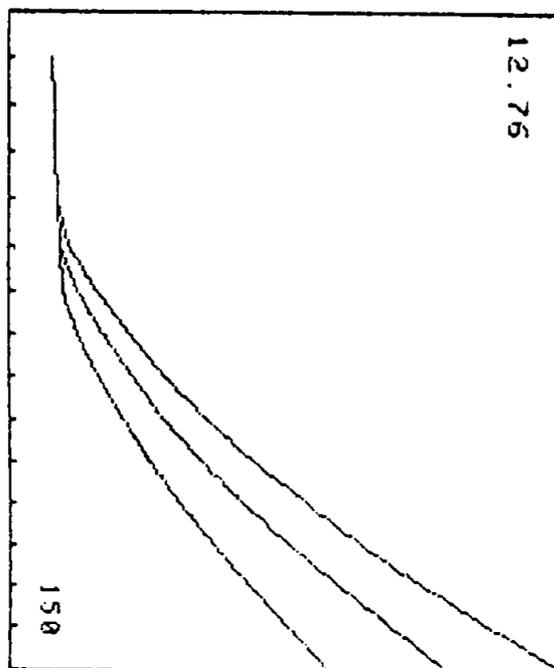
lambda = 120
omega( 1 ) = 4.72059062355
omega( 2 ) = 6.46471170398
omega( 3 ) = 8.16856174757

lambda = 130
omega( 1 ) = 5.54013760689
omega( 2 ) = 7.58705748591
omega( 3 ) = 9.58671482871

lambda = 140
omega( 1 ) = 6.42524834879
omega( 2 ) = 8.79919093038
omega( 3 ) = 11.1183201565

lambda = 150
omega( 1 ) = 7.37592284933
omega( 2 ) = 10.1011120375
omega( 3 ) = 12.7633777306
    
```

*Figura 74b*



*Figura 75*

$$\sigma_{oc} = 494 \text{ kg cm}^{-2} \quad (E = 400.000 \text{ kg cm}^{-2})$$

$$\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$$

$$\rho = c \cdot 6 \text{ (c'è una qualsiasi costante, poiché nelle formule entra il rapporto } \frac{\rho}{r_n} \text{)}$$

$$r_n = c \cdot 3,4641$$

$$\epsilon = 0,001$$

$$\mu = 3$$

$$t_c = 0$$

$$\text{errore} = 0,001$$

Nella fig. 74 sono riportati i valori di  $\omega$ , e nella fig. 75 il diagramma.

Nella tabella sono riportati tali valori, e con essi quelli calcolati per  $\alpha = 0$ , quelli delle norme '72, '74, '76, e quelli consigliati dal

Krall, dati in funzione di  $\lambda' = \frac{l}{b} = \frac{\lambda}{\sqrt{12}}$ .

Risulta come — almeno per  $t_c = 0$  — i valori delle norme siano eccessivamente permissivi, e come quelli suggeriti dal Krall siano aderenti ai valori calcolabili per una modesta viscosità.