

d'altro canto, lo spostamento dello stesso punto, considerato appartenente al suolo, è (591)

$$s(t) = -c'R_e \left[g(t) + \gamma\beta' \int_{t_c}^t g(\tau) e^{-\beta'(t-\tau)} d\tau \right].$$

Dall'uguaglianza delle due espressioni di $s(t)$ sorge l'equazione

$$g(t) + \int_{t_c}^t g(\tau) \left[\frac{c}{c+c'} \alpha e^{-\beta\tau} + \frac{c'}{c+c'} \gamma\beta' e^{-\beta'(t-\tau)} \right] d\tau = \quad (592)$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\beta t_c}).$$

Si tenga presente, per intendere le precedenti espressioni, che, come detto, R è positiva se diretta verso il basso sulla trave, e quindi verso l'alto sul vincolo.

Per $t = t_c$, la (592) conferma che è $g(t_c) = 1$.

La (592) è un'equazione di Volterra. Se β' è nullo, la (592) si scrive

$$g(t) + \frac{c}{c+c'} \alpha \int_{t_c}^t g(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = 1 - \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\beta t_c}) \quad (593)$$

e derivando rispetto a t

$$\frac{dg}{dt} + \alpha \frac{c}{c+c'} g(t) e^{-\beta t} = \alpha e^{-\beta t}, \quad (594)$$

identica alla (575). La $R(t)$ è quindi quella connessa con un vincolo elasticamente cedevole. Se β' è molto grande, la cedibilità del terreno è così veloce che nella (589) può porsi

$$\Delta t = c'R (1 + \gamma)$$

e quindi (591) risulta $\psi' = 0$ (come si deduce anche dal fatto che $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-cx} = 0$). Non esiste perciò ricordo della deformazione, e si ricade quindi nel caso già trattato del vincolo elasticamente cedevole. La (592) infatti si riduce ancora alla (593).

La reazione R varia nel tempo poiché si è in presenza di un nucleo alla Withney nella struttura, e di un nucleo del ciclo chiuso nel vincolo; quindi cade in difetto il primo teorema.

Se i vincoli cedevoli sono m , si opera sulla struttura ove tali vincoli sono soppressi. Per questa vale il primo teorema, e quindi la (583); le m condizioni di congruenza analoghe alla (592) costituiscono un sistema di equazioni di Volterra nelle m incognite $R_1(t), R_2(t) \dots R_m(t)$.

14. La questione del ritiro.

E' ben noto come in alcune strutture il ritiro possa generare sollecitazioni rilevanti; per esempio, negli archi il cui asse sia funicolare del peso permanente, se il ribassamento è notevole e l'inerzia della sezione non è abbastanza ridotta le sollecitazioni da ritiro e da accorciamento assiale possono superare quelle dovute al carico accidentale. Occorre dire subito che mentre le prime sono decurtate dalla viscosità, come per qualsiasi altra distorsione, quelle da accorciamento assiale non lo sono, poiché non derivano da una distorsione, ma dalle forze costituenti il peso proprio.

Le ϵ_r da ritiro possono essere espresse con la legge

$$\epsilon_r(t) = \epsilon_{r\infty} (1 - e^{-\lambda t}) ; \quad (595)$$

esse sono cioè nulle in $t = 0$, data di maturazione — sia pure convenzionale — del getto, e crescono in modulo a partire da tale data, esponenzialmente, sul valore asintotico $\epsilon_{r\infty}$. La $\epsilon_{r\infty}$, e quindi la $\epsilon_r(t)$, sono le stesse in tutti i punti della struttura.

Un valore indicativo per $\epsilon_{r\infty}$ è

$$\epsilon_{r\infty} = -0,00015 , \quad (596)$$

e cioè quello corrispondente ad una diminuzione di 15° nella temperatura. La velocità di estinzione del fenomeno è tale che esso può reputarsi esaurito dopo 6 mesi dalla maturazione, quindi può assumersi

$$\lambda = 5 \text{ anni}^{-1} . \quad (597)$$

Le norme attuali impongono una $\epsilon_{r\infty}$ variabile da $-0,0002$ a $-0,0004$.

Considerando la struttura isostatica, siano $s_{r\infty i}$ ($i = 1, 2 \dots n$) gli spostamenti generati da $\epsilon_{r\infty}$ in corrispondenza dei vincoli soppressi, C la matrice delle cedibilità elastiche c_{ij} ; le incognite iperstatiche sono fornite dal sistema

$$C X = -s_{r\infty} . \quad (598)$$

Esse si ordinano nel vettore colonna $X_{e\infty}$, e sono le X_i ottenibili in assenza di viscosità, per effetto del ritiro $\epsilon_{r\infty}$.

Si studi ora l'effetto viscoso. Se il ritiro è uniforme, gli spostamenti sulla struttura isostatica sono regolati dalla stessa legge (595):

$$s_r(t) = s_{r\infty} (1 - e^{-\lambda t}) . \quad (599)$$

Nell'intervallo $[0, dt]$ sorgono le reazioni dX_i , tali che gli spostamenti ds_{ix} da esse generate in corrispondenza dei vincoli iperstatici siano uguali e contrari a quelli ds_{ir} dovuti al ritiro, e cioè, per la (599), proporzionali agli $s_{r\infty i}$. Quindi è

$$ds_{ixe} + ds_{ixv} = -k s_{r\infty i} ,$$

ove ds_{ixe} e ds_{ixv} sono lo spostamento elastico e quello viscoso provocati dalle dX_i in corrispondenza del vincolo i -esimo. Si può scrivere perciò

$$ds_x = ds_{xe} + ds_{xv} = -k s_{r\infty} .$$

Se è valido il primo teorema della viscosità lineare, in particolare se il nucleo è uniforme, può porsi (\equiv per proporzionale)

$$ds_{xv} \equiv ds_{xe}$$

e quindi

$$ds_{xe} \equiv ds_x \equiv s_{r\infty}.$$

Le dX_i sono fornite dal sistema

$$Cdx = - ds_{xe}$$

e cioè

$$Cdx = - ks_{r\infty}$$

da cui, per la (598)

$$dx \equiv x.$$

Può quindi scriversi, ripetendo il ragionamento per i dt successivi,

$$X_i = X_{ie\infty} \cdot h(t). \quad (600)$$

Gli spostamenti sulla struttura isostatica dovuti alle $X_i(t)$ sono perciò dati (582) da

$$s_x(t) = -s_{r\infty} \left[\frac{h(t)}{e(t)} + \int_0^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right]. \quad (601)$$

Le (601) sono proporzionali alle (599); per la congruenza sui vincoli soppressi è ovunque $s_x(t) + s_r(t) = 0$, ed anche

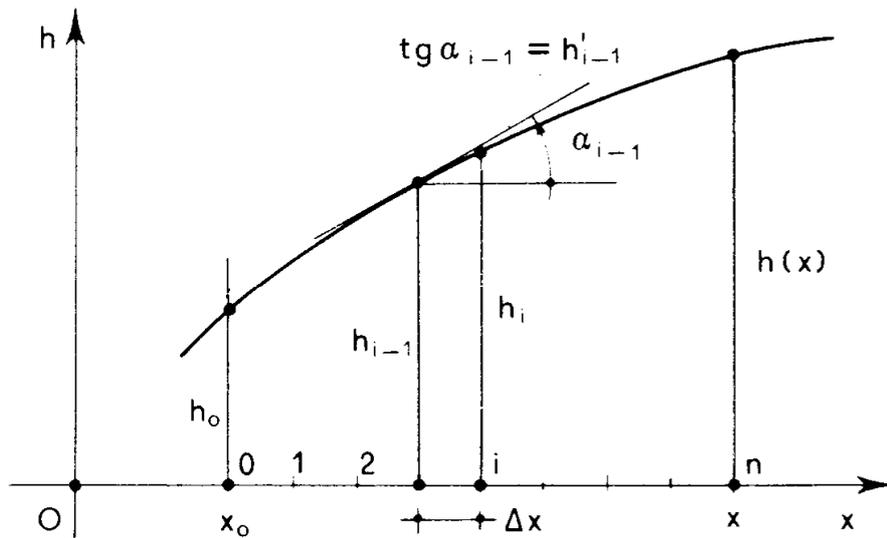
$$\frac{h(t)}{e(t)} + \int_0^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (602)$$

Nel caso si adotti un nucleo alla Withney la (602) si scrive

$$h(t) + \alpha \int_0^t h(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = 1 - e^{-\lambda t} \quad (603)$$

da cui, derivando,

$$\frac{dh}{dt} + \alpha h(t) e^{-\beta t} = \lambda e^{-\lambda t} . \quad (604)$$



$$h_i = h_{i-1} + h'_{i-1} \cdot \Delta x$$

Figura 53

La (604) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti variabili, del tipo

$$a(x) \cdot h(x) + b(x) \frac{dh}{dx} = c(x) \quad (605)$$

con condizione iniziale

$$h(x_0) = h_0 . \quad (606)$$

Essa si risolve numericamente con il metodo di *Runge e Kutta*. Dalla (605) si trae

$$\frac{dh}{dx} = \frac{c(x)}{b(x)} - \frac{a(x)}{b(x)} h(x) ; \quad (607)$$

noto il valore h_0 di $h(x)$ in $x = x_0$, se si vuole il valore di $h(x)$ in x si suddivide (fig. 53) l'intervallo x_0x in n parti, di lunghezza

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n},$$

e si calcolano successivamente i valori

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_0 = \frac{c(x_0)}{b(x_0)} - \frac{a(x_0)}{b(x_0)} h_0$$

$$h_1 = h_0 + \left(\frac{dh}{dx}\right)_0 \Delta x$$

(608)

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_1 = \frac{c(x_0 + \Delta x)}{b(x_0 + \Delta x)} - \frac{a(x_0 + \Delta x)}{b(x_0 + \Delta x)} h_1$$

$$h_2 = h_1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)_1 \Delta x$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{n-1} = \frac{c[x_0 + (n-1)\Delta x]}{b[x_0 + (n-1)\Delta x]} - \frac{a[x_0 + (n-1)\Delta x]}{b[x_0 + (n-1)\Delta x]} h_{n-1}$$

$$h_n = h_{n-1} + \left(\frac{dh}{dx}\right)_{n-1} \Delta x = h(x).$$

L'approssimazione è tanto più buona quanto più elevato è n . Ottenuto un valore di $h(x)$ con un certo valore di n , si ripete il calcolo con un n doppio; il procedimento si itera finché il rapporto tra la differenza dei due valori di $h(x)$ in due stadi successivi, ed il valore di $h(x)$ nello stadio ultimo, è minore di un numero ϵ prefissato.

Se la condizione iniziale è data nella derivata, e cioè

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=x_0} = h'_0 \quad (609)$$

le (608) partono da (605)

$$h_0 = -\frac{b(x_0)}{a(x_0)} h'_0 + \frac{c(x_0)}{a(x_0)}$$

e, successivamente,

$$h_1 = h_0 + \left(\frac{dh}{dx}\right)_0 \Delta x.$$

Nella fig. 54 è riportato un rudimentale programma, nel caso che

```

10 REM "Programma RUNGE "
20 DEF FNA(X) = 3*EXP(-X)
30 DEF FNB(X) = 1
40 DEF FNC(X) = 0
50 DISP "H0 = ";
60 INPUT H0
70 DISP "X1 = ";
80 INPUT X1
90 DISP "X2 = ";
100 INPUT X2
110 DISP "E = ";
120 INPUT E
130 DISP "N = ";
140 INPUT N
150 T=0
160 PRINT "X(c) = ";X1
170 PRINT "X = ";X2
180 PRINT
190 H=H0
200 FOR I=X1 TO X2 STEP (X2-X1)/
N
210 D=FNC(I)/FNB(I)-FNA(I)/FNB(I)
:H
220 H=H+D*(X2-X1)/N
230 NEXT I
240 PRINT "H = ";H
250 PRINT "N = ";N
260 PRINT
270 PRINT
280 IF ABS((H-T)/H)<E THEN 320
290 T=H
300 N=2*N
310 GOTO 190
320 PRINT "FINE PROGRAMMA"
330 END

```

Figura 54

la condizione iniziale sia del tipo (606), e per le funzioni $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ della (604). Nel caso in esame la (606) si scrive

$$h(0) = 0 ;$$

inoltre è (604)

$$x = t$$

$$a(x) = \alpha e^{-\beta t}$$

$$b(x) = 1$$

$$c(x) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Per $\alpha = 3 \text{ anni}^{-1}$, $\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$, $\lambda = 5 \text{ anni}^{-1}$, il metodo di Runge fornisce i seguenti valori:

| t (anni) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\epsilon_r/\epsilon_{r\infty}$ | 0 | 0,393 | 0,632 | 0,777 | 0,865 | 0,918 | 0,950 |
| $h(t)$ | 0 | 0,341 | 0,473 | 0,503 | 0,486 | 0,450 | 0,408 |

| t | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 20 |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\epsilon_r/\epsilon_{r\infty}$ | 0,993 | 0,999 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $h(t)$ | 0,269 | 0,179 | 0,138 | 0,107 | 0,097 | 0,094 | 0,092 |

Nella fig. 55 sono riportati i diagrammi di $\epsilon_r(t)$, dalla (595), e di $X(t)$; più precisamente, il rapporto $\epsilon_r/\epsilon_{r\infty}$, e quello $X(t)/X_e$, ove $\epsilon_{r\infty}$ è il valore finale del ritiro, ed X_e il valore della generica reazione calcolata, in fase elastica, sotto $\epsilon_{r\infty}$. Il diagramma OB , coincidente con il diagramma OA , rappresenta la $X(t)$ in assenza di viscosità;

si osserva come già dopo sei mesi il ritiro si è quasi esaurito, e la X in assenza di viscosità ha raggiunto il valore $0,95 X_e$. La viscosità attutisce la X , nei primi mesi, e la vanifica, in pratica, nel giro di

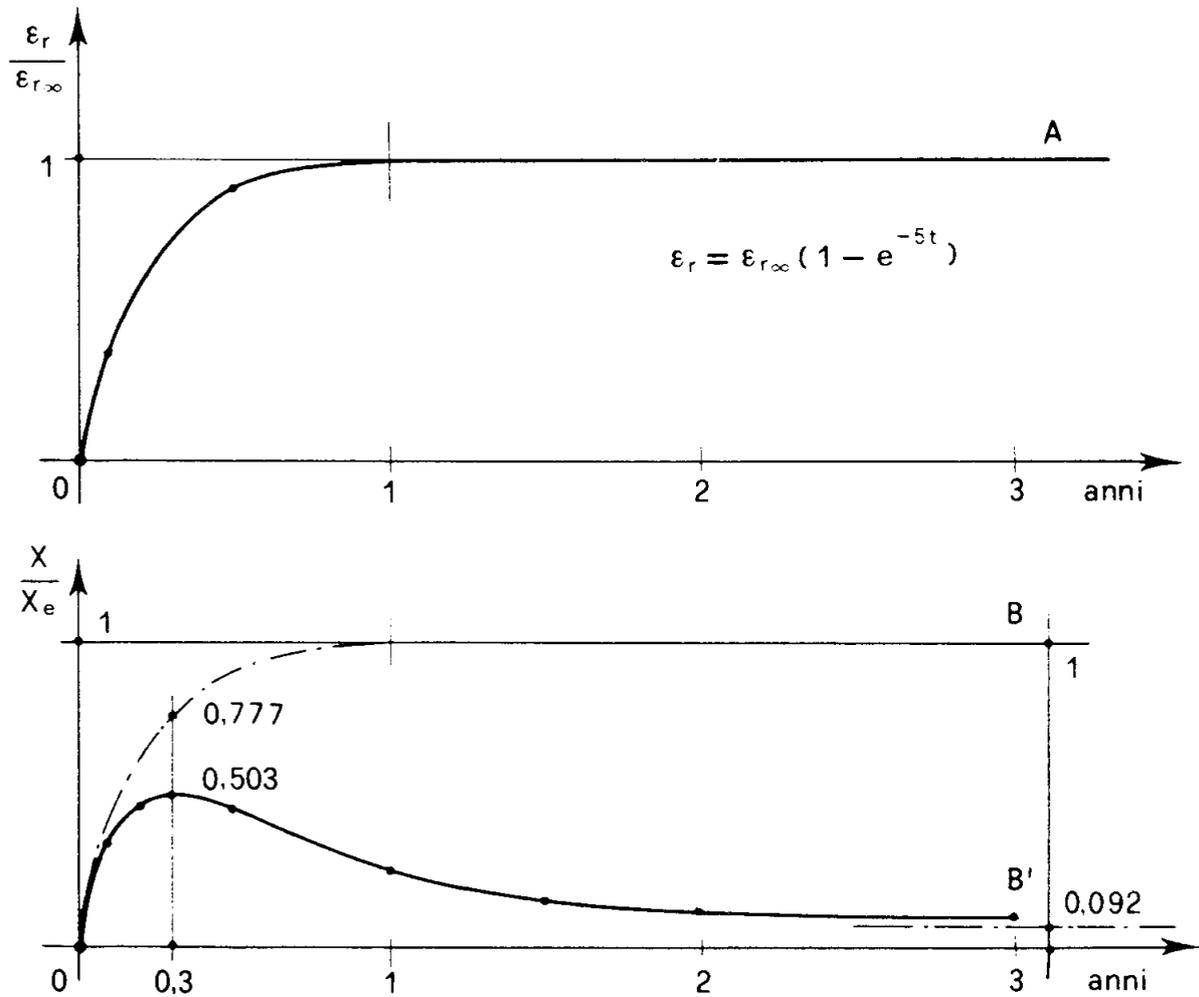


Figura 55

3 anni; a tre anni infatti la X è pari a $0,1 X_e$. L'elevato valore di λ influisce sulla entità del deurtamento; poiché quanto più veloce è lo sviluppo di $\epsilon_r(t)$, tanto più vicine sono le relative distorsioni alla data di maturazione.

Per $\lambda = \infty$, $\lambda e^{-\lambda t} = 0$, e la (604) si riconduce alla (563).

L'influenza della viscosità sul ritiro è fatale, nel senso che è indipendente dalla volontà dell'uomo; in più, si esplica al massimo della sua efficacia, poiché la distorsione agisce dalla data di maturazione. Naturalmente, occorre tener conto che l'effetto viscoso è protratto nel tempo, e quindi il suo beneficio si fa attendere; esso può reputarsi

completo dopo due anni, ma già è notevole a 4 mesi. E' opportuno, da questo punto di vista, che i carichi più impegnativi agiscano quanto più tardi è possibile.

Quanto detto in relazione al ritiro vale anche nel caso più generale di una qualsiasi distorsione, o insieme di distorsioni, che variano nel tempo conservando inalterati i mutui rapporti. In tal caso la generica distorsione è data da

$$\Delta_i(t) = \Delta_{ic} [1 + g(t)] \quad (610)$$

con

$$g(t_c) = 0 ;$$

vale ancora la (600)

$$x(t) = x_{ce} \cdot h(t) \quad (611)$$

ove x_{ce} sono le reazioni sotto le Δ_{ic} in fase elastica. Le (599) e (601) si scrivono rispettivamente, se s_{ec} sono gli spostamenti generati dalle Δ_{ic} in fase elastica,

$$s_c(t) = s_{ec} [1 + g(t)]$$

$$s(t) = -s_{ec} \left[\frac{h(t)}{e(t)} + \int_{t_c}^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right]$$

ed uguagliando a zero la loro somma si ha

$$\frac{h(t)}{e(t)} + \int_{t_c}^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau = 1 + g(t) . \quad (612)$$

Se il tensore elastico si suppone costante, e si adotta un nucleo alla Withney, la (612) si scrive

$$h(t) + \alpha \int_{t_c}^t h(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = 1 + g(t)$$

e derivando rispetto a t

$$\frac{dh}{dt} + \alpha h(t) e^{-\beta t} = \frac{dg}{dt}, \quad (613)$$

che è del tipo (605). La condizione iniziale è

$$h(t_c) = 1.$$

Per $g(t) = 0$ si ricade nella (563).

15. Conglomerato armato ordinario.

Quanto si è detto è valido nell'ipotesi di nucleo omogeneo, e quindi cade in difetto nel caso del conglomerato armato, per la presenza del ferro, il cui nucleo è addirittura di tipo diverso da quello del conglomerato.

Si faccia riferimento ad un tronco di trave, soggetto a sforzo normale baricentrico; questo, pari ad N , sia applicato alla data t_c . A questa data il comportamento è quello in fase elastica; quindi, se N_b^* è la parte di N che impegna il conglomerato, ed N_f^* quella che impegna l'acciaio, si può scrivere

$$N_b^* + N_f^* = N$$

$$\epsilon_b^* = \frac{N_b^*}{E_b A_b} \quad (614)$$

$$\epsilon_f^* = \frac{N_f^*}{E_f A_f}.$$

La condizione

$$\epsilon_f^* = \epsilon_b^* \quad ,$$

e cioè

$$\frac{N_b^*}{E_b A_b} = \frac{N_f^*}{E_f A_f} = \frac{N}{E_b A_b + E_f A_f}$$

porta a scrivere

$$N_b^* = \frac{N}{1 + \frac{E_f A_f}{E_b A_b}}$$

$$N_f^* = N - N_b^* .$$

Ponendo

$$n = \frac{E_f}{E_b} \tag{615}$$

$$\mu = \frac{A_f}{A_b}$$

si ha

$$N_b^* = \frac{N}{1 + n\mu} \tag{616}$$

$$N_f^* = \frac{n\mu}{1 + n\mu} N .$$

E' quindi

$$\frac{N_f^*}{N_b^*} = n\mu = \frac{nA_f}{A_b} ; \tag{617}$$

lo sforzo N si ripartisce tra acciaio e conglomerato nel rapporto tra l'area amplificata nA_f dell'acciaio e quella A_b del conglomerato.

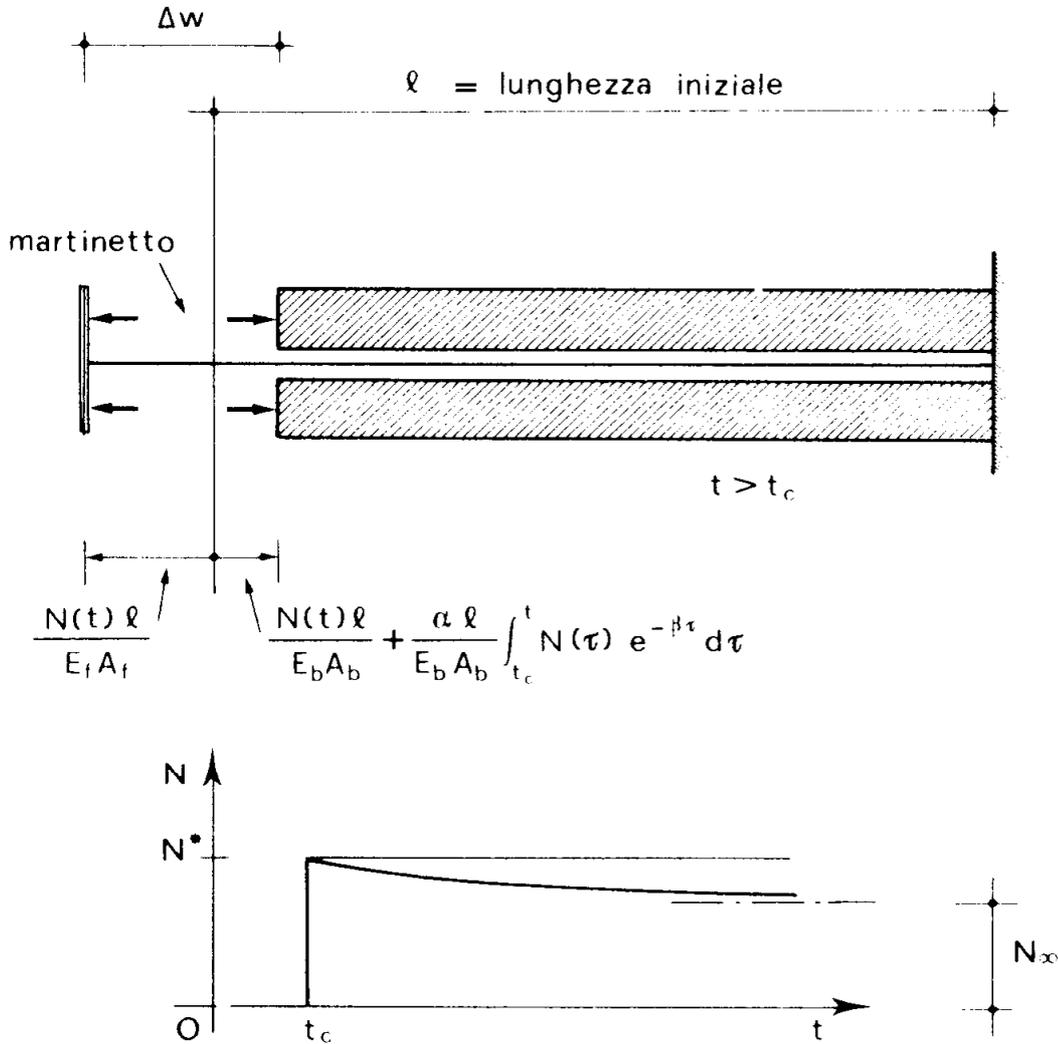


Figura 56

Il rapporto n è il coefficiente di amplificazione, 100μ la percentuale di armatura. Al tempo $t > t_c$ sia $N_b(t)$ la parte di N che impegna il conglomerato; si ha

$$\epsilon_b(t) = \frac{N_b(t)}{E_b A_b} + \frac{\alpha}{E_b A_b} \int_{t_c}^t N_b(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau. \quad (618)$$

La deformazione viscosa del ferro si trascura; di essa si tiene conto.

se si vuole, a parte, sia per l'entità molto minore di quella del conglomerato, sia per la velocità, che invece è molto maggiore. Quindi può scriversi

$$\epsilon_f(t) = \frac{N - N_b(t)}{E_f A_f} . \quad (619)$$

Eguagliando le (618) e (619) si ha

$$N_b(t) \left(\frac{1}{E_b A_b} + \frac{1}{E_f A_f} \right) + \frac{\alpha}{E_b A_b} \int_{t_c}^t N_b(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau = \frac{N}{E_f A_f}$$

e, derivando rispetto a t ,

$$\frac{dN_b}{dt} + \gamma \alpha N_b(t) e^{-\beta t} = 0 , \quad (620)$$

ove

$$\gamma = \frac{E_f A_f}{E_b A_b + E_f A_f} = \frac{n \mu}{1 + n \mu} . \quad (621)$$

Dalla (620) si trae

$$\frac{dN_b}{N_b} = -\gamma \alpha e^{-\beta t} dt$$

$$\ln N_b = \frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t} + k$$

$$N_b = e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t} + k} = C e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t}}$$

Per $t = t_c$ è $N = N_b^*$; quindi

$$N_b^* = C e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

$$C = N_b^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

e quindi

$$N_b = N_b^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} . \quad (622)$$

A la longue,

$$N_{b\infty} = N_b^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} . \quad (623)$$

Così pure (616)

$$N_{f\infty} = N - N_{b\infty} = N - \frac{N}{1 + n\mu} e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

e cioè

$$N_{f\infty} = N_f^* \left[1 + \frac{1}{n\mu} (1 - e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}) \right] . \quad (624)$$

E' quindi

$$\frac{N_{f\infty}}{N_{b\infty}} = \frac{N_f^*}{N_b^*} \frac{1 + \frac{1}{n\mu} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}\right)}{e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}}.$$

Per la (617), si può anche scrivere

$$\frac{N_{f\infty}}{N_{b\infty}} = n\mu \frac{1 + \frac{1}{n\mu} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}\right)}{e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}}$$

e quindi

$$\frac{N_{f\infty}}{N_{b\infty}} = n_{\infty} \mu \quad (625)$$

ove

$$n_{\infty} = n \frac{1 + \frac{1}{n\mu} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}\right)}{e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}}. \quad (626)$$

La (626) fornisce il coefficiente di amplificazione *finale* in regime viscoso. Interessante è il coefficiente n_{∞} massimo, $n_{\infty 0}$, ottenuto ponendo $t_c = 0$:

$$n_{\infty 0} = n \frac{1 + \frac{1}{n\mu} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta}}\right)}{e^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta}}}. \quad (627)$$

Per $\alpha = 0$, $n_{\infty o} = n$; per $\alpha = \infty$, $n_{\infty o} = \infty$. Successivamente sono forniti i valori di $n_{\infty o}$ per vari valori di n , di α , di μ , e per $\beta = 1$ anno⁻¹.

$n = 8$

| $\alpha \backslash 100\mu$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 2 |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 16,06 | 16,13 | 16,19 | 16,25 | 16,30 | 16,58 |
| 2 | 24,25 | 24,51 | 24,76 | 25 | 25,25 | 26,42 |
| 3 | 32,58 | 33,16 | 33,73 | 34,30 | 34,88 | 37,73 |

$n = 10$

| $\alpha \backslash 100\mu$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 2 |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 20,10 | 20,19 | 20,29 | 20,38 | 20,47 | 20,88 |
| 2 | 30,40 | 30,79 | 31,18 | 31,56 | 31,93 | 33,74 |
| 3 | 40,90 | 41,80 | 42,70 | 43,59 | 44,49 | 48,92 |

$n = 15$

| $\alpha \backslash 100\mu$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 2 |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 30,22 | 30,43 | 30,64 | 30,83 | 31,02 | 31,87 |
| 2 | 45,85 | 46,76 | 47,62 | 48,46 | 49,28 | 53,12 |
| 3 | 62,02 | 64,04 | 66,06 | 68,07 | 70,07 | 79,89 |

Si osserva che $n_{\infty o}$ aumenta con α e, sia pure molto meno sensibilmente, con μ . Aumenta anche con n ; per $\alpha = 3$, $\mu = 2\%$, si ha

$$n = 8 \quad \frac{37,73}{8} = 4,72$$

$$n = 10 \quad \frac{48,92}{10} = 4,89$$

$$n = 15 \quad \frac{79,89}{15} = 5,33 .$$

La variazione di n è notevole, ed ha come conseguenza uno sgravio nel conglomerato, ed un aggravio nel ferro; ciò è bene accetto, poiché il calcolo elastico a compressione semplice condiziona la crisi alla tensione ammissibile del conglomerato, lasciando la tensione dell'acciaio molto più bassa della ammissibile. Naturalmente, questo inconveniente si risente di più se il conglomerato è scadente e l'acciaio è buono, e porta a far preferire acciai meno pregiati; ciò spiega la tendenza dei produttori di acciai di qualità a far elevare il coefficiente n stabilito dalle norme. La viscosità gioca a loro favore, e già si è visto il valore di n prescritto per legge salire da 8 a 10, e da 10 a 15.

Come esempio, si consideri un pilastro 40×60 armato con $8 \phi 18$, ed $N = -100 t$. Si ha

$$\mu = \frac{20,36}{2400} = 0,848 \cdot 10^{-2} .$$

Per $n = 8$, le (616) forniscono

$$N_b^* = - 93,65 t$$

$$N_f^* = - 6,35 \text{ ''}$$

da cui

$$\sigma_b = - 39 \text{ kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = - 312 \text{ '' ''} .$$

Per $\alpha = 3$ è $n_{\infty o} = 34,44$, e quindi

$$N_{b\infty} = - 77,40 t$$

$$N_{f\infty} = - 22,60 \text{ '' ''}$$

e quindi

$$\sigma_b = - 32,25 \text{ kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_f = - 1110 \text{ '' ''} .$$

L'effetto di redistribuzione sulle tensioni σ_b e σ_f è quindi cospicuo per il ferro, meno per il conglomerato. Per quanto poi attiene al comportamento viscoso del tronco, in assenza di ferro si avrebbe la variazione di lunghezza, sotto N costante,

$$\begin{aligned} dds &= \frac{Nds}{EA} \left(1 + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{Nds}{EA} \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}) \right] , \end{aligned} \quad (628)$$

e cioè quella che si ricava dalla (526). La presenza dell'acciaio invece porta (618) a

$$dds = \frac{N_b(t) ds}{E_b A_b} + \frac{\alpha ds}{E_b A_b} \int_{t_c}^t N_b(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau . \quad (629)$$

Si può considerare N_b costante (mentre, come si è visto, diminuisce in assoluto) e pari ad N_b^* o $N_{b\infty}$ secondo che l'effetto della viscosità giochi in senso sfavorevole o favorevole alla sicurezza; ciò è consentito dalla piccola variazione di N_b . In definitiva, può ancora adot-

Dalle (628) e (630) si trae che nell'ipotesi di tensore elastico costante, e con riferimento ad una trave in conglomerato armato, in un concio elementare qualsiasi, di lunghezza ds , un impulso di sforzo normale $N(\tau) d\tau$ ed un impulso di momento flettente $M(\tau) d\tau$ generano un'impronta viscosa definita da

$$dds(\tau, t) = \frac{Nds}{EA} \psi(\tau, t) d\tau \tag{631}$$

$$d\varphi(\tau, t) = \frac{Mds}{EI} \psi(\tau, t) d\tau ;$$

adottando un nucleo alla Withney, le (631) si scrivono

$$dds(\tau, t) = \frac{Nds}{EA} \alpha e^{-\beta\tau} d\tau \tag{632}$$

$$d\varphi(\tau, t) = \frac{Mds}{EI} \alpha e^{-\beta\tau} d\tau ,$$

ove α , come si è detto, è opportunamente ridotto, tanto più quanto più forte è la percentuale di armatura. In linea di massima α può ridursi nel reparto N_b^*/N , e cioè nel rapporto (616) $1/(1 + n\mu)$.

16. Conglomerato precompresso.

Nel caso del conglomerato precompresso può sorgere il dubbio che le tensioni da precompressione, essendo questa una distorsione, possono vanificarsi, tanto più che per sua natura la precompressione agisce ad una data t_c molto prossima a quella di maturazione.

I risultati del paragrafo 12 sono però condizionati dall'ipotesi di viscosità uniforme; e possono quindi cadere in difetto nel caso del precompresso. E' appunto quanto fortunatamente accade nel caso della precompressione.

Si esamini innanzitutto una trave soggetta a precompressione baricentrica (fig. 56). Il tiro N^* iniziale agisce alla data t_c ; N^* è positivo

se è di trazione nel cavo, e di compressione quindi nella trave. Al tempo t_c si genera quindi una distorsione Δw tra la testata della trave e le estremità dei cavi; la Δw è prodotta dai martinetti, che esercitano appunto le due forze N^* e $-N^*$ sul cavo e sulla trave. La Δw è costante nel tempo (salvo che sia prevista la ricarica, come però ormai non usa più); il martinetto quindi si ritira, una volta bloccati i cavi nella posizione ultima. Nel tempo invece la N^* diminuisce, per l'incremento viscoso dell'accorciamento del beton, e l'identica diminuzione elastica dell'allungamento del cavo. Inizialmente ($t = t_c$) si ha

$$\Delta w = N^* l \left(\frac{1}{E_f A_f} + \frac{1}{E_b A_b} \right). \quad (633)$$

Trascurando, per i motivi già detti, la viscosità dell'acciaio (di cui però si tien conto a parte, reputandosi scontata in un lasso di tempo dell'ordine delle ore), al tempo $t > t_c$ si può scrivere

$$\Delta w = \frac{N(t) l}{E_f A_f} + \frac{N(t) l}{E_b A_b} + \frac{\alpha l}{E_b A_b} \int_{t_c}^t N(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau.$$

Derivando rispetto a t si ha

$$0 = \frac{dN}{dt} \left(\frac{1}{E_f A_f} + \frac{1}{E_b A_b} \right) + \frac{\alpha}{E_b A_b} N(t) e^{-\beta t},$$

che può scriversi come segue:

$$\frac{dN}{dt} + \gamma \alpha N(t) e^{-\beta t} = 0 \quad (634)$$

ove

$$\gamma = \frac{E_f A_f}{E_f A_f + E_b A_b} = \frac{n \mu}{1 + n \mu}. \quad (635)$$

Si noti che γ ha la stessa espressione della (621). L'equazione (634) è identica alla (620), cosicché può porsi anche nel caso in esame

$$N = C e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t}}$$

Analoga è pure la condizione iniziale, e cioè $N = N^*$ per $t = t_c$; quindi si ha, come nella (622),

$$N(t) = N^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})}$$

e quindi

$$N_{\infty} = N^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

$$N_{\infty o} = N^* e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta}} \quad (634)$$

Il tiro varia quindi così come varia, nel conglomerato ordinario, la parte di sforzo assiale che impegna il conglomerato; già questo fatto rassicura, poiché ridimensiona il dubbio sulla possibile vanificazione del quadro tensionale. Gioca anche però la circostanza che nel precompresso il fattore γ è molto più piccolo che nel conglomerato ordinario, essendo molto più piccola la percentuale μ di armatura. A tale proposito si ricorda che proprio per questo le strutture in precompresso si sono sviluppate dopo l'immissione sul mercato degli acciai armonici, che a parità di tiro richiedano un'area del ferro molto minore. Ciò risulta dai seguenti dati numerici, calcolati per $n = 6$ (il conglomerato da precompresso è di qualità molto elevata, e si è supposto perciò $E_b = 350.000 \text{ kg cm}^{-2}$); essi danno il rapporto $N_{\infty o}/N^*$

| $\mu \backslash \alpha$ | 2 | 0,5 | 0,2 |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| 1 | 0,898 | 0,971 | 0,988 |
| 2 | 0,807 | 0,943 | 0,977 |
| 3 | 0,725 | 0,916 | 0,965 |

Nel caso più generale di una eccentricità $e \neq 0$ (fig. 57) si scrive, con riferimento al tronco elementare, ed alla data $t = t_c$,

$$\Delta w_f = \frac{N^* ds}{E_f A_f}$$

$$\Delta w_b = \frac{N^* ds}{E_b A_b} + \frac{N^* e \cdot e}{E_b I_b} ds = \frac{N^* ds}{E_b A_b} \left(1 + \frac{e^2 A_b}{I_b} \right)$$

e quindi, per $t > t_c$,

$$\Delta w = \frac{N(t) ds}{E_f A_f} + \frac{N(t) ds}{E_b A_b} \left(1 + \frac{e^2 A_b}{I_b} \right) + \tag{637}$$

$$+ \alpha \frac{ds}{E_b A_b} \left(1 + \frac{e^2 A_b}{I_b} \right) \int_{t_c}^t N(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau .$$

Derivando la (637) rispetto a t si ha

$$\frac{dN}{dt} + \gamma' \alpha N(t) e^{-\beta t} = 0 \tag{638}$$

ove

$$\gamma' = \frac{E_f A_f}{E_f A_f + E_b A'_b} \tag{639}$$

$$A'_b = \frac{A_b}{1 + e^2 \frac{A_b}{I_b}} . \tag{640}$$

Resta perciò valida la (636), ove γ assume il valore γ' :

$$N_{\infty o} = N^* e^{-\frac{\gamma' \alpha}{\beta}} \quad (641)$$

Per $e = 0$ si ritrova la (635). La presenza della eccentricità riduce A_b , e quindi incrementa γ ; l'effetto della eccentricità è quindi dannoso, perché il calo del tiro risulta maggiore. Come caso limite si consideri quello della sezione a sandwich, e cioè costituita da due aree A concentrate, a distanza h ; per $e = \frac{h}{2}$ si ha

$$e^2 \frac{A_b}{I_b} = \frac{h^2}{4} \frac{2A}{2A \frac{h^2}{4}} = 1.$$

e quindi $A'_b = A_b/2$.

17. La restituzione dei regimi canonici: il caso dei vincoli aggiunti.

Spesso, specialmente nelle grandi strutture, il procedimento di costruzione implica che in fase esecutiva il peso proprio agisca, tutto o in parte su una struttura diversa da quella che si presenta alla fine di tale fase, e cioè durante la sua vita. Ciò succede essenzialmente per evitare una centina classica, costosa, e a volte più impegnativa, per calcolo ed esecuzione, della struttura vera e propria. A volte, invece, ciò accade, più semplicemente, per il desiderio di ridurre alcune sollecitazioni. La viscosità agisce, in tutti questi casi, in modo che si può evidenziare una tendenza di fondo, e cioè quella di ripristinare il regime tensionale che si avrebbe se la struttura fosse disarmata nel suo aspetto di esercizio. Tale regime si usa chiamare *canonico*.

Primo esempio è quello dei vincoli aggiunti.

La struttura isostatica offre, rispetto alla iperstatica, i seguenti vantaggi:

a) è insensibile ai cedimenti delle fondazioni, almeno dal punto di vista delle sollecitazioni;

- b) è insensibile al ritiro;
- c) è insensibile alle variazioni termiche;
- d) è di calcolo più facile, e ciò si verifica specialmente nelle opere in c.a. precompresso. Occorre però pagare con la seguente moneta:
- e) gli snodi – appoggi o cerniere – sono molto costosi, e con il tempo si deteriorano;
- f) occorre trascurare gli attriti, difficilmente valutabili, e comunque costituenti enorme turbativa nei calcoli;
- g) è molto difficile e costoso realizzare appoggi bilaterali, e non sempre basta il peso proprio a renderli tali;
- h) aumentano sensibilmente le sollecitazioni da carico accidentale;
- i) aumenta la deformabilità;
- l) diminuiscono i moltiplicatori critici;
- m) diminuisce la sicurezza alla rottura.

Tenendo conto di quanto sopra, si preferisce a volte realizzare la struttura con snodi provvisori tali da renderla isostatica; disarmarla come tale, in modo che il peso proprio agisca sulla struttura isostatica; fare agire ancora su questa il restante peso proprio; saldare i giunti prima di aprire all'esercizio. Si realizzano così i vantaggi dei punti *a* (per lo meno nei riguardi dei cedimenti al disarmo) e *b*, senza subire gli svantaggi dei punti *e* e seguenti. In più, se si ha a che fare con un arco ad asse funicolare, si scontano gli effetti dell'accorciamento assiale.

Se così si procede, occorre tener conto dell'effetto viscoso sul quadro tensionale connesso con il peso proprio, in particolare su quello inerente all'accorciamento assiale.

Si consideri, per esempio, l'arco della fig. 58. Le tre reazioni iperstatiche, se le cerniere sono in realtà bloccate, sono fornite in regime elastico dal sistema

$$C_X = - \Delta \varphi^\circ ; \quad (642)$$

se l'asse è funicolare del peso proprio, può scriversi

$$c_{ij} = \int_s \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_s \frac{N_i N_j}{EA} ds \quad (643)$$

$$\Delta \varphi_i^\circ = \int_s \frac{N_i N_0}{EA} ds ,$$

ove N_o ed N_i sono gli sforzi normali generati dal peso proprio e dalla $X_i = 1$ sull'arco a tre cerniere, M_i i momenti flettenti generati dalla $X_i = 1$. Il termine in $N_i N_j$ della c_{ij} può trascurarsi.

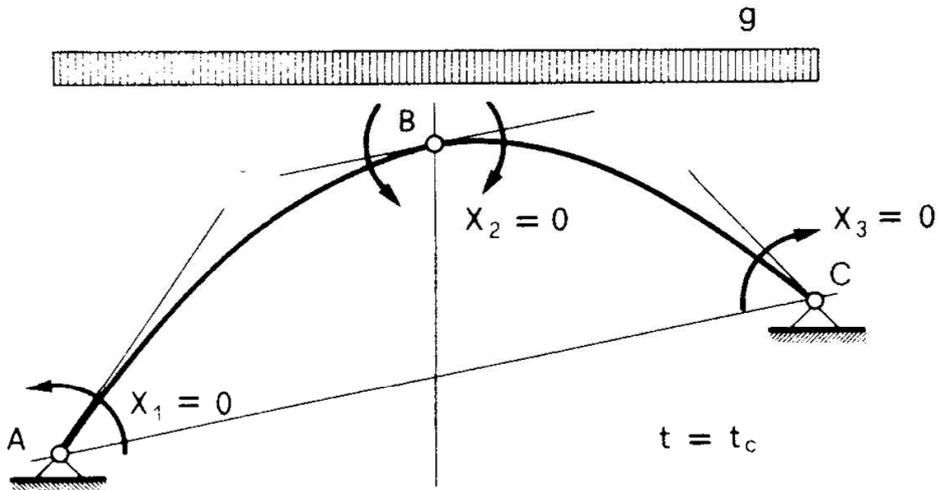


Figura 58

Se il nucleo è lo stesso in tutti i punti, il primo teorema consente di scrivere, per $t > t_c$,

$$C \left[x(t) + \alpha \int_{t_c}^t x(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau \right] = -\Delta\varphi^o \left(1 + \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta\tau} d\tau \right),$$

derivando rispetto a t ,

$$C \frac{dx}{dt} + C\alpha e^{-\beta t} x(t) = -\alpha e^{-\beta t} \Delta\varphi^o. \quad (644)$$

La soluzione del sistema omogeneo è

$$x = c e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}},$$

come è facile verificare, ed un integrale particolare è

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* ,$$

soluzione del (642). Quindi la soluzione del sistema (644) è

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}} + \mathbf{x}^* . \quad (645)$$

In $t = t_c$ è $\mathbf{x} = 0$, e quindi

$$\mathbf{c} e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} = -\mathbf{x}^*$$

da cui

$$\mathbf{c} = -\mathbf{x}^* e^{-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

La (645) si scrive quindi

$$\mathbf{x} = -\mathbf{x}^* e^{-\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} + \mathbf{x}^*$$

ed ancora

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})}) . \quad (646)$$

Le $X_1^* X_2^* X_3^*$ della \mathbf{x}^* rappresentano il regime canonico. Si ha, per $t_c = 0$ e $t = \infty$,

$$\mathbf{x}_{\infty 0} = \mathbf{x}^* (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}}) . \quad (647)$$

In funzione di α , si hanno i seguenti valori di $X_{i\infty o}/X_i^*$:

| α | $X_{i\infty o}/X_i^*$ | |
|----------|-----------------------|-------|
| 1 | 0,632 | |
| 2 | 0,865 | (648) |
| 3 | 0,950 . | |

Il regime canonico può quindi riemergere anche nella sua quasi interezza. Se perciò si esegue il getto in presenza delle tre cerniere per eliminare gli effetti dell'accorciamento assiale, è necessario saldare le cerniere quanto più tardi possibile.

18. La restituzione dei regimi canonici: il caso della costruzione a rotoli.

La pratica dei rotoli — termine mutuato dalla configurazione dei vecchi manoscritti — è molto antica; essa fu applicata nella realizzazione delle volte in muratura, e consisteva nel costruire la volta in strati successivi, sì che la centina fosse chiamata a sostenere il peso del solo primo strato. In tal modo il primo strato sostiene il peso dei primi due, il primo ed il secondo assieme il peso dei primi tre, e così via. Si riconosce che così il primo strato è il più penalizzato, e l'ultimo è esente da sollecitazioni; se gli strati sono due, il primo è all'incirca sollecitato al doppio di quanto il regime canonico comporterebbe. Si riconosce pure che le deformazioni viscosse del primo rotolo tendono a raccorciarne l'asse; di ciò il primo rotolo è impedito dal secondo, che subisce deformazioni minori; e così il secondo rotolo è trascinato nel gioco, comprimendosi, e alleviando quindi il primo. E' questo un caso in cui, contrariamente al primo, il ritorno al regime canonico è conveniente. Uno schema teorico è quello della fig. 59, ove i rotoli sono ridotti a veli. Si suppone che lo spessore ds del rotolo generico vari lungo l'ascissa con la stessa legge dello spessore della volta; quindi anche il peso proprio dg del rotolo varia con la stessa legge del peso proprio totale g . Se ne trae che per ogni rotolo, o complessi di rotoli, l'asse è funicolare del peso proprio del rotolo superiore. Il getto del rotolo generico h -esimo induce quindi soltanto sforzo normale nel complesso degli $h - 1$ rotoli inferiori; se il suo spessore si indica con $s \cdot dh$ (s spessore finale della

volta, in genere variabile, ed $0 < h < 1$), la tensione indotta nello strato k -esimo ($0 \leq k \leq h$) è, in regime elastico,

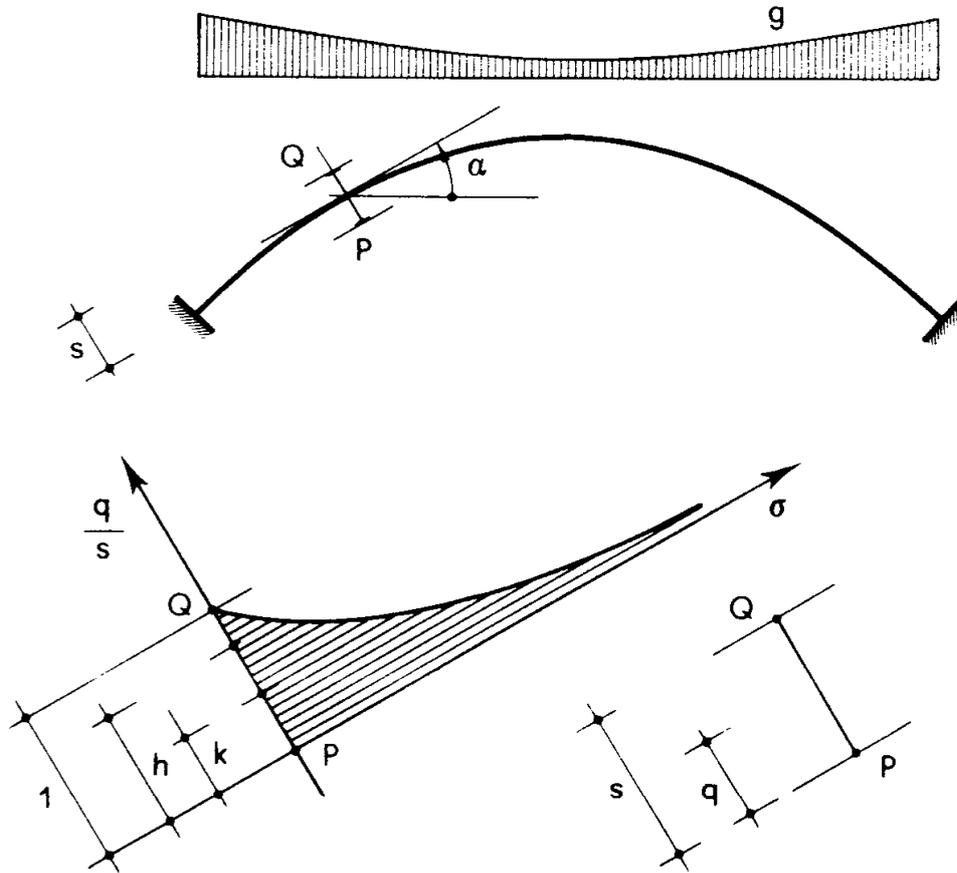


Figura 59

$$d\sigma_k = \frac{dh}{h} \frac{H_g}{A \cos \alpha} = \sigma_c \frac{dh}{h} ,$$

dove A è l'area della sezione finale, α l'angolo di cui la tangente all'asse è inclinata sull'orizzontale, σ_c la tensione in regime canonico. E' quindi

$$\sigma_k = \sigma_c \int_k^1 \frac{dh}{h} = -\sigma_c \ln k . \quad (649)$$

Si osservi che $k < 1$, e quindi σ_k ha lo stesso segno di σ_c . Si osservi

pure che all'intradosso ($k = 0$) è $\sigma_k = \infty$, all'estradosso ($k = 1$) è $\sigma_k = 0$. Si osservi pure che è rispettato l'equilibrio:

$$\int_0^1 \sigma_k dk = -\sigma_c \int_0^1 \ln k \cdot dk = -\sigma_c [k \ln k - k]_0^1 =$$

$$= -\sigma_c \lim_{a \rightarrow 0} [k \ln k - k]_a^1 = \sigma_c .$$

Se i rotoli sono due (fig. 60), in fase elastica si ha $\sigma = 2 \sigma_c$ nel pri-

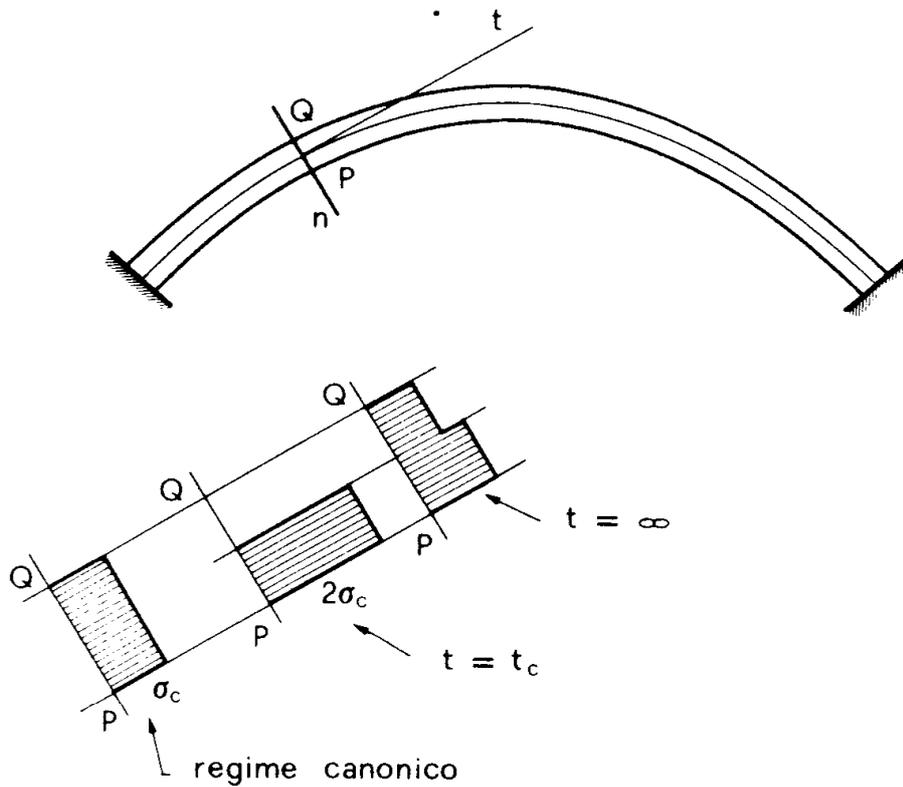


Figura 60

mo, $\sigma = 0$ nel secondo (si suppone che ciascuno sia pari alla metà della volta). Al tempo $t > t_c$ (i tempi sono contati dalla data di maturazione del rotolo inferiore, e t_c è la data di maturazione del rotolo superiore, pari a quella di getto alla quale sia addizionato l'intervallo

di tempo necessario alla maturazione) si ha, se $\sigma''(t)$ è la σ nel rotolo superiore,

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma_c - \sigma''(t)}{E} - \frac{2\sigma_c}{E} \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\beta t_c}) - \frac{\alpha}{E} \int_{t_c}^t \sigma''(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = \\ = \frac{\sigma''(t)}{E} + \frac{\alpha}{E} \int_{t_c}^t \sigma''(\tau) e^{-\beta(\tau - t_c)} d\tau \end{aligned}$$

da cui, derivando rispetto a t ,

$$2 \frac{d\sigma''}{dt} + \alpha \sigma''(t) e^{-\beta t} (1 + e^{\beta t_c}) = 2\sigma_c \alpha e^{-\beta t}. \quad (650)$$

L'omogenea associata alla (650) ha l'aspetto della (563), e quindi il suo integrale generale è (564)

$$\sigma'' = C e^{\frac{\alpha}{2\beta} (1 + e^{\beta t_c}) e^{-\beta t}}.$$

Un integrale particolare della (650) è

$$\sigma'' = \frac{2\sigma_c}{1 + e^{\beta t_c}};$$

quindi l'integrale generale della (650) è

$$\sigma'' = C e^{\frac{\alpha}{2\beta} (1 + e^{\beta t_c}) e^{-\beta t}} + \frac{2\sigma_c}{1 + e^{\beta t_c}}.$$

Per $t = t_c$ è $\sigma'' = 0$; quindi

$$0 = C e^{\frac{\alpha}{2\beta} (1 + e^{-\beta t_c})} + \frac{2\sigma_c}{1 + e^{\beta t_c}}$$

da cui

$$C = - \frac{2\sigma_c}{1 + e^{\beta t_c}} e^{-\frac{\alpha}{2\beta}(1 + e^{-\beta t_c})}, \quad (651)$$

e quindi

$$\sigma'' = \frac{2\sigma_c}{1 + e^{\beta t_c}} \left[1 - e^{\frac{\alpha}{2\beta}(e^{-\beta t} + e^{-\beta(t-t_c)} - e^{-\beta t_c} - 1)} \right].$$

Può scriversi perciò ($t_c = 0, t = \infty$)

$$\sigma''_{\infty,0} = \sigma_c (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}}). \quad (652)$$

Per $\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$, si hanno perciò i seguenti rapporti $\sigma'_{\infty,0}/\sigma_c$ e $\sigma''_{\infty,0}/\sigma_c$:

| α | $\sigma'_{\infty,0}/\sigma_c$ | $\sigma''_{\infty,0}/\sigma_c$ | |
|----------|-------------------------------|--------------------------------|---|
| 0 | 2 | 0 | |
| 1 | 1,368 | 0,632 | |
| 2 | 1,135 | 0,865 | |
| 3 | 1,050 | 0,950 | ; |

per $\alpha = 3$, e se il secondo rotolo è gettato non appena il primo è maturato ($t_c = 28$ giorni) la redistribuzione è pressoché completa. In realtà la (652) è data per $t_c = 0$, e questo non è possibile, perché $t_c \geq 28$ giorni, e cioè $t_c \geq 0,078$ anni. Quindi la (652) si scrive in rigore come segue

$$\sigma''_{\infty,28} = 0,961 \sigma_c [1 - e^{-0,962 \alpha}]$$

e quindi la tabella si modifica nell'altra

| α | $\sigma'_{\infty 28}/\sigma_c$ | $\sigma''_{\infty 28}/\sigma_c$ |
|----------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 1,368 | 0,594 |
| 2 | 1,135 | 0,821 |
| 3 | 1,050 | 0,907 |

19. Le centine Melan.

Nelle strutture in conglomerato armato la centina può essere abolita, facendo funzionare come tale l'armatura metallica. Questa può essere infatti realizzata (fig. 61) a campi triangolari e, se i rinforzi delle aste compresse non risultano troppo onerosi, può essere chiamata così a reggere il peso di una parte della struttura, per esempio quello della soletta inferiore. Si sopprime così la centina, ma si esaltano le tensioni nella soletta inferiore, mentre la superiore risulta scarica.

Il *Melan*, ideatore di questo procedimento, operava in fasi successive, che possono schematizzarsi fundamentalmente in quattro:

- a) Getto della soletta inferiore; il peso, alla fine del getto, è sostenuto dalla sola armatura.
- b) Getto dei timpani; il peso dei timpani è sostenuto dall'insieme armatura + soletta inferiore.
- c) Getto della soletta superiore; il peso della soletta superiore è sostenuto dall'insieme armatura + soletta inferiore + timpani.
- d) Getto della sovrastruttura; il peso della sovrastruttura è sostenuto da tutta la struttura portante.

Per eliminare l'inconveniente del sovraccarico della soletta inferiore, il *Melan* propose poi di inserire altre due frasi prima di *a*, e tra *c* e *d*; di zavorrare, cioè, prima del getto della soletta inferiore, con pesi uguali a quelli della soletta superiore; e di eliminare la zavorra una volta consolidata la soletta superiore. Tale prassi però, pur non essendo notevoli gli incrementi di tensione nelle armature, costringe a sovradimensionarne gli elementi compressi per ragioni di tipo euleriano. Ne deriva un'eccessivo aumento di costo; si ricorda che nell'appalto del ponte di Ammerbach presso Echelsbach la proposta di *Melan* prevedeva 695 *t.* di ferro, mentre un ponte tutto in ferro richiedeva 59 *t.* in meno. Le centine *Melan* furono così abbandonate;

successivamente, però, le loro fortune rinverdirono per l'intuito di G. Krall, che nell'immediato dopo guerra ricostruì con tale sistema, nello schema dell'arco telaio, il "ponte di mezzo", tra "borgo stretto" e "borgo largo", sull'Arno pisano. L'asso nella manica di G. Krall fu proprio la visione della struttura sotto l'aspetto viscoso, che gli

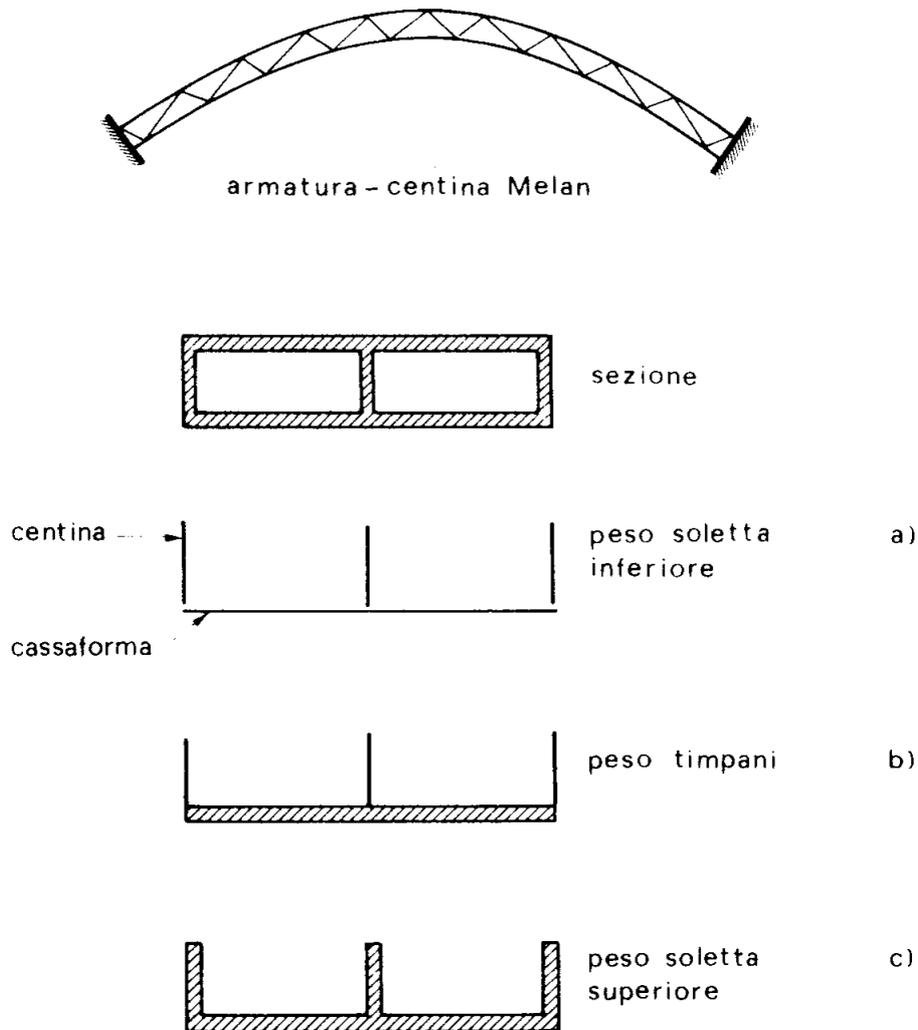


Figura 61

consente di evitare la zavorratura, senza denunziare l'incremento delle tensioni rispetto al regime canonico; e la fiducia, appunto, nelle capacità di recupero di tale regime. Unica difficoltà, lo zelo dei funzionari di controllo, ben radicati nell'idea che "la struttura più tardi si disarmi, e meglio è".

Con lo stesso sistema G. Krall realizzò il ponte di Safartak, sul

Nilo azzurro, e successivamente i ponti sul Gambellato e sul Merizzano, per il tratto appenninico dell'autostrada del sole.

20. Le strutture ad impalcato collaborante.

Nei ponti ad arco di media luce si ravvisa la convenienza di chiamare l'impalcato a dare il suo contributo alla portanza globale; più precisamente, che l'impalcato non serva soltanto a trasmettere i carichi viaggianti all'arco, ma si assuma una parte delle sollecitazioni — per esempio una parte del momento flettente — che altrimenti interesserebbero solo l'arco.

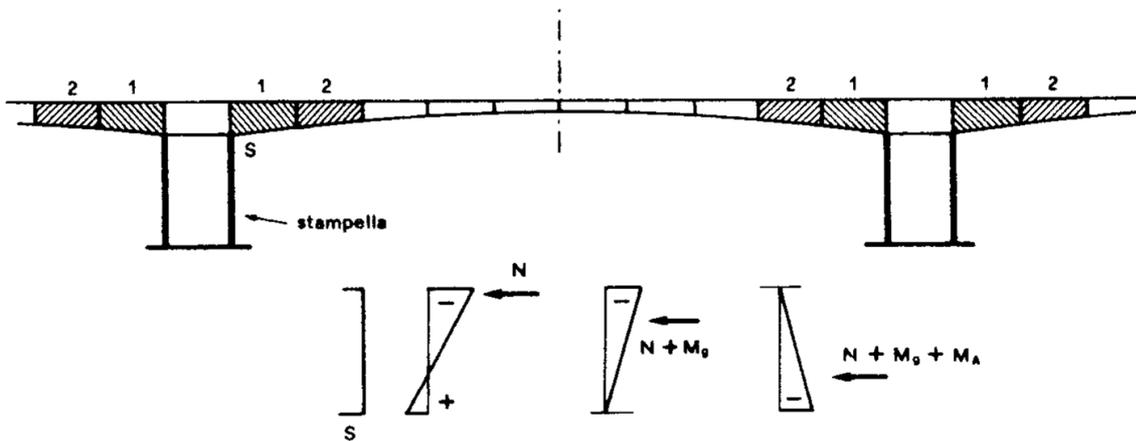


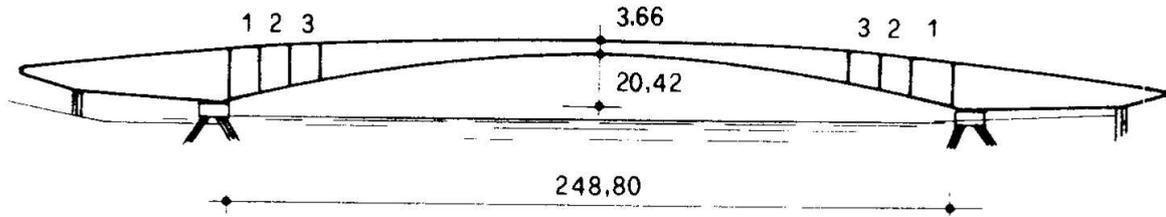
Figura 62

Ciò si realizza in modo totale ma poco limpido nell'arco trave tipo Risorgimento (o Africa), in modo meno drastico ma più chiaro nella volta Maillart e nell'arco Nielsen (o Langer).

E' comune a tutti questi tipi la realizzazione preventiva della volta di intradosso, per il cui solo peso è prevista la centina. La volta, sottile, è però funicolare del peso proprio globale, e quindi sotto tale peso è soggetta a compressione assiale. Ciò significa che essa può sopportare il peso globale subendo tensioni molto contenute; quindi, se la volta è consolidata, può su di essa eseguirsi il getto dell'opera rimanente, il cui peso non grava sulla centina. Questa però non può essere rimossa prima che tutta l'opera sia consolidata, perché la volta da sola entrerebbe in crisi per instabilità euleriana.

Quindi la volta è chiamata a reggere il peso proprio globale, e gli effetti del ritiro, dei primi cedimenti, e dell'accorciamento assiale; e, per la sua sottigliezza, si rivela molto adatta a svolgere il suo

ruolo. La struttura completa, invece, si addossa l'onere dei carichi accidentali, della sicurezza di tipo euleriano, e delle variazioni termiche. Esclusa quest'ultima anche la struttura completa è ben impiegata per le sollecitazioni che deve affrontare.



Philippine Sea

Figura 63

Le parti sono quindi ben assegnate. La viscosità non può, in questo caso, giocare che sfavorevolmente. Se il getto della sovrastruttura sulla volta è eseguito troppo presto, non si dà al ritiro il tempo di esaurirsi; ma, soprattutto, riaffiora nel tempo il regime canonico connesso con il peso proprio globale, e cioè i momenti da caduta di spinta che, in presenza della rigidità flessionale di tutta l'opera, possono addirittura paragonarsi ai momenti da carico accidentale e da variazioni termica.

21. La realizzazione a conci successivi.

Attualmente i problemi della centina sono superati in blocco con l'adozione della tecnica cosiddetta "a sbalzo", o "per conci successivi" ("segment by segment" method, o réalisation "en encorbellement", o "par voussoirs successifs"). Inizialmente adottata per le strutture a travata, tale tecnica sembrò aver dato a queste ultime un vantaggio incolmabile rispetto alle strutture ad arco. Naturalmente, dal coro delle celebrazioni funebri in morte dell'arco ci fu chi seppe dissociarsi, esplicitamente rifiutandosi di credere che ragioni tecnologiche potessero influire sulla categoria, per così dire, delle strutture; e cioè su quelle proprietà essenziali, ed addirittura astratte, che le classificano in assoluto. Ed infatti, la stessa tecnica si è dimostrata sufficiente per il ritorno dell'arco sulla scena delle grandi strutture; ritorno che si è fatto attendere forse più del previsto, ma ha portato nel giro di quattro anni al ponte ad arco classico di *Krk*,

di 399 *m* di luce, ed al ponte ad arco-trave tra le isole di Koror e di Babelthuap, sull'arcipelogo delle Palau, di 241 *m* di luce.

La viscosità entra in tale contesto a doppio titolo, oltre quello abbastanza scontato della previsione degli spostamenti per ritrovarsi all'appuntamento in chiave. Innanzitutto, il nucleo è variabile lungo l'asse della struttura, in dipendenza delle diverse date di getto; e di

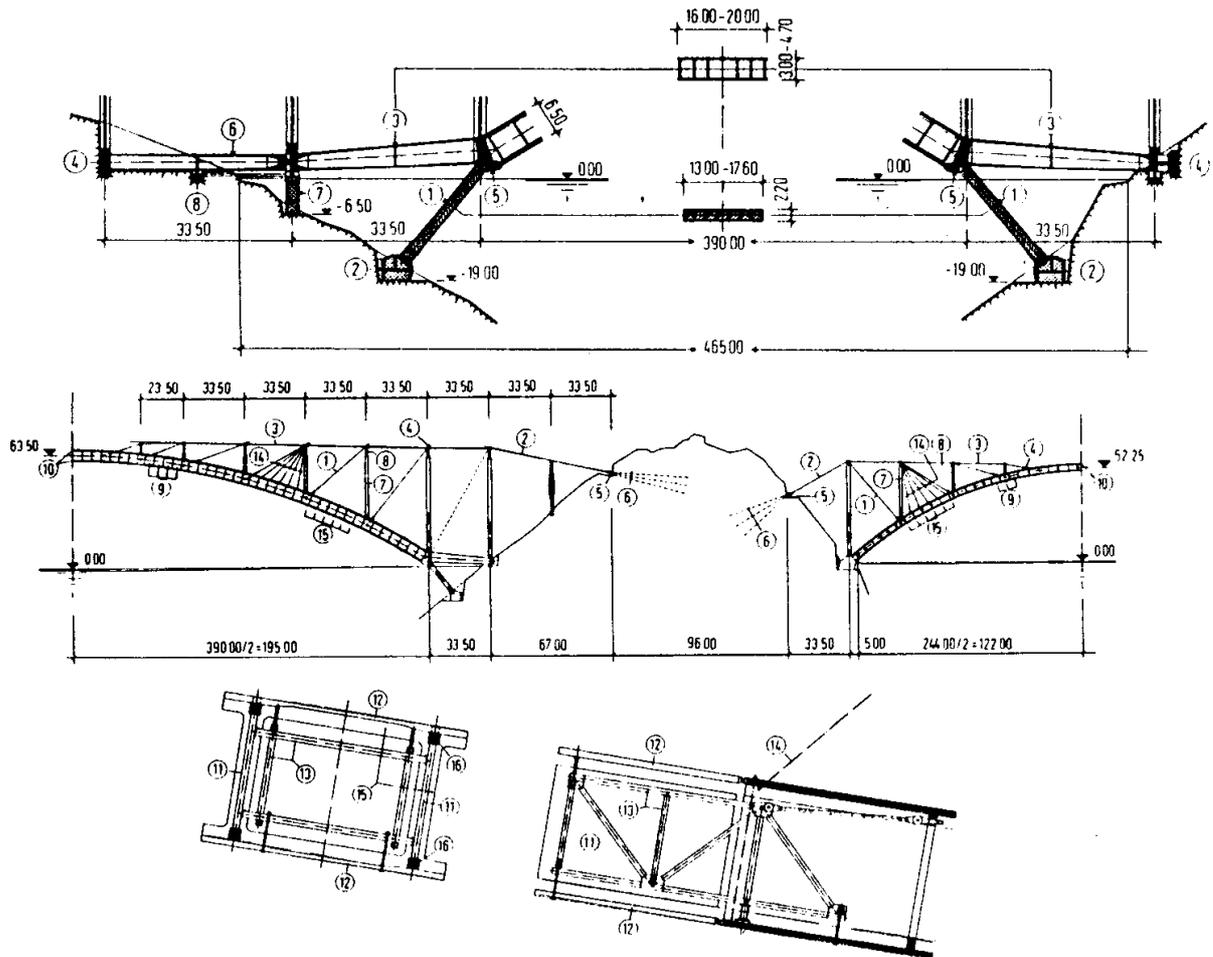


Figura 64

ciò si parlerà nel prossimo paragrafo. In secondo luogo, la saldatura in mezzera definisce la data t_c oltre la quale la struttura prende la sua veste definitiva, sulla quale vanno calcolati i regimi canonici; se questi sono diversi da quelli presenti all'atto della saldatura, occorre conoscere, in relazione alla data t_c , di quanto essi riaffiorano nel tempo. Per esempio, nella trave della fig. 62 la saldatura può farsi con cerniera o incastro; nel primo caso il regime canonico coincide con il precedente, e cioè con quello di doppia mensola, nel secondo

invece è quello di trave incastrata, con alleggerimento delle sezioni di imposta ed aggravio di quella in mezzeria. Nell'arco della fig. 63 (ponte di Palau) comunque si passa [55] dal regime di doppia mensola a quello di arco-trave, con o senza cerniera in chiave. Nell'arco della fig. 64 (ponte di *Krk*) [56], [57], [58]) non c'è invece regime tensionale prima della saldatura, poiché tutta la struttura è retta dai tiranti ancorati al pilone di ormeggio [56], [57], [58].

22. Il problema generale delle strutture viscosamente non omogenee.

Il caso più frequente di nucleo non omogeneo si verifica quando i getti delle varie parti non sono contemporanei. Se si assume come origine dei tempi la data di maturazione del primo getto, il nucleo di questo è

$$\Psi_1 = \Psi(\tau, t). \quad (653)$$

Il secondo getto maturi (fig. 65) alla data t_2 ; è evidente che t_2 non può essere minore di Δt_m , durata della maturazione. Il getto i -esimo maturi alla data t_i ; t_i non può essere minore di $(i-1)\Delta t_m$.

Se un impulso di tensione agisce alla data τ , al tempo t si ha, per il getto i -esimo,

$$d\epsilon_v(\tau, t) = \frac{1}{E} \Psi(\tau - t_i, t - t_i) \sigma(\tau) d\tau$$

e quindi

$$\Psi_i(\tau, t) = \Psi(\tau - t_i, t - t_i). \quad (654)$$

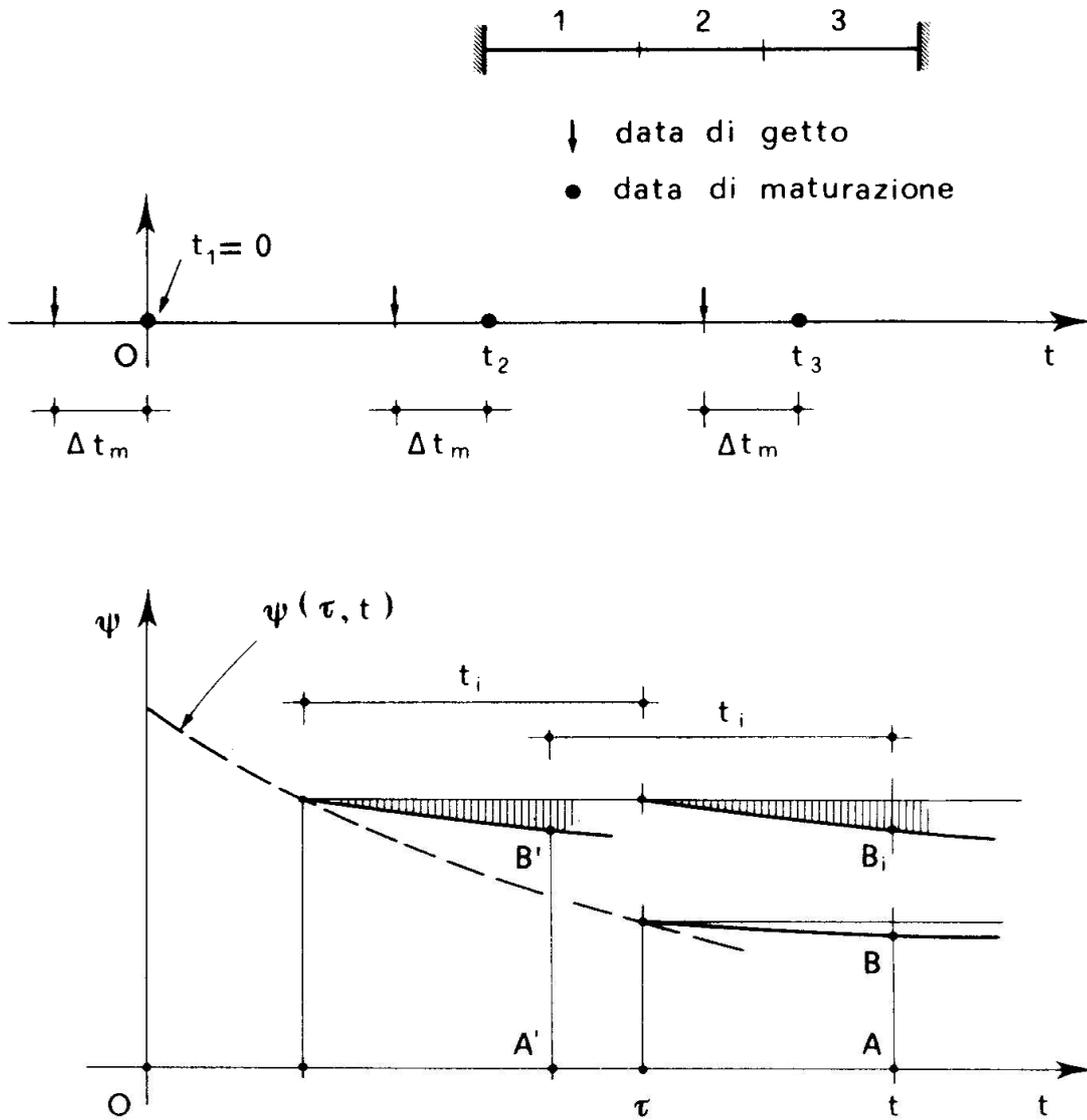
Adottando un nucleo alla Withney, e per $E = \text{cost}$, è

$$\Psi(\tau, t) = \alpha e^{-\beta\tau}$$

$$\Psi_i(\tau, t) = \alpha e^{-\beta(\tau - t_i)} = \alpha e^{\beta t_i} e^{-\beta\tau}, \quad (655)$$

e cioè tutto è riducibile ad una variazione della costante α :

$$\Psi_i(\tau, t) = \alpha_i e^{-\beta\tau} \quad (656)$$



$$AB = \psi(\tau, t)$$

$$AB_i = A'B' = \psi(\tau - t_i, t - t_i) = \psi_i(\tau, t)$$

Figura 65

dove

$$\alpha_i = \alpha e^{\beta t_i} \quad (657)$$

La (655) può porsi sotto la forma

$$\Psi(\tau, t, s) = f(s) \cdot \Psi(\tau, t),$$

e cioè

$$\Psi(\tau, t, s) = f(s) \cdot \alpha e^{-\beta\tau}; \quad (658)$$

tale forma è di grande utilità nei calcoli. Si operi infatti secondo il metodo delle forze (o meglio, delle reazioni). Si consideri quindi la struttura isostatica soggetta alle forze

$$F_h(t) = F_h \cdot g(t), \quad (659)$$

e cioè a forze che conservino inalterati i mutui rapporti, applicate dalla data t_c .

Naturalmente la (659) non è limitativa, poiché vale il principio di sovrapposizione, ed al limite possono considerarsi le forze separatamente, e sommarne gli effetti al generico tempo t . La struttura isostatica è anche soggetta alle reazioni iperstatiche $X_i(t)$, per $i = 1, 2 \dots n$. Lo spostamento in corrispondenza del vincolo i -esimo per effetto della $X_j(t)$ è dato, per il principio dei lavori virtuali (fig. 66), da

$$1 \cdot v_{ij}(t) = \int_s M_i(s) \cdot d\varphi_j(s, t);$$

nell'ipotesi di E costante si può scrivere

$$d\varphi_j(s, t) = \bar{M}_j(s, t) \frac{ds}{EI} + \frac{ds}{EI} \int_{t_c}^t \bar{M}_j(s, \tau) \Psi(s, \tau, t) d\tau$$

e quindi

$$v_{ij}(t) = \int_s \frac{M_i \bar{M}_j(t)}{EI} ds + \int_s \int_{t_c}^t \frac{M_i \bar{M}_j(\tau)}{EI} \Psi(s, \tau, t) d\tau ds.$$

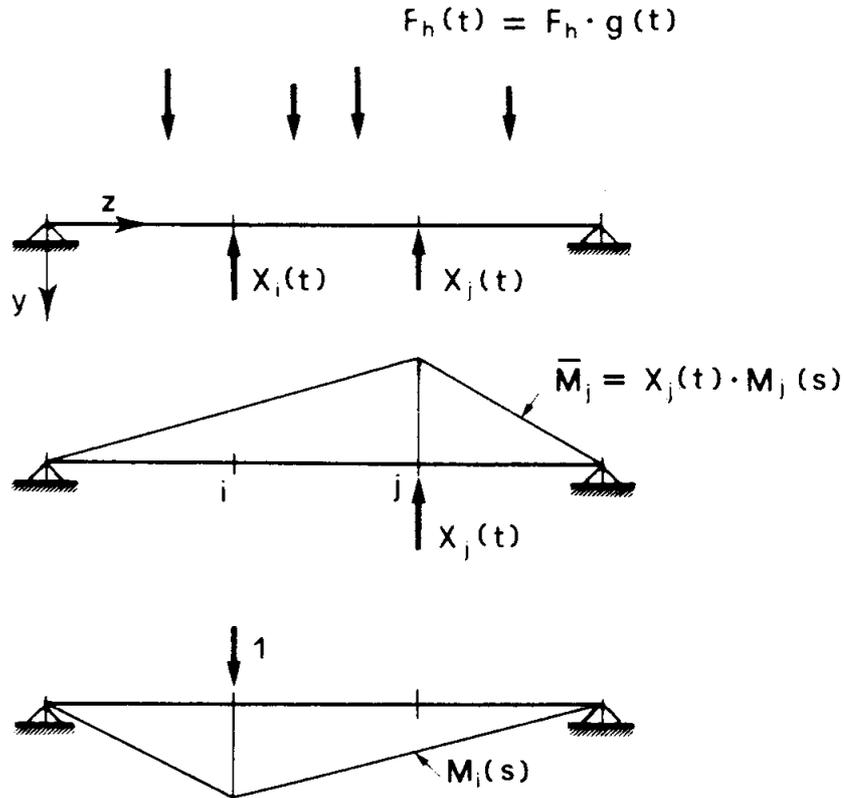


Figura 66

Nella (660) $\bar{M}_j(s)$ è il momento dovuto alla $X_j(t)$, mentre $M_i(s)$ è il momento dovuto ad $X_i = 1$. Chiamando a sua volta $M_j(s)$ il momento dovuto ad $X_j = 1$, si ha

$$\bar{M}_j(s, t) = X_j(t) \cdot M_j(s) \tag{661}$$

e quindi la (660) si scrive

$$v_{ij}(t) = X_j(t) \int_s \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_s \frac{M_i M_j}{EI} \int_{t_c}^t X_j(\tau) \Psi(s, \tau, t) d\tau ds.$$

Lo spostamento in corrispondenza del vincolo i -esimo per effetto delle forze (659) è dato da

$$1 \cdot v_i^\circ(t) = \int_s M_i(s) d\varphi^\circ(s, t),$$

e ancora, se E è costante, da

$$v_i^\circ(t) = \int_s \frac{M_i M^\circ(t)}{EI} ds + \int_s \int_{t_c}^t \frac{M_i M^\circ(\tau)}{EI} \Psi(s, \tau, t) d\tau ds.$$

Poiché è

$$M^\circ(t) = M^\circ \cdot g(t),$$

ove M° è il momento dovuto alle F_h , si ha

$$v_i^\circ(t) = g(t) \int_s \frac{M_i M^\circ}{EI} ds + \int_s \frac{M_i M^\circ}{EI} \int_{t_c}^t g(\tau) \psi(s, \tau, t) d\tau ds.$$

L'integrale

$$c_{ij} = \int_s \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

è il coefficiente d'influenza classico, e cioè l'elemento di posto ij della matrice C delle cedibilità.

L'integrale

$$b_i = \int_s \frac{M_i M^\circ}{EI} ds$$

è lo spostamento indotto in corrispondenza del vincolo i -esimo dalle forze F_h , e cioè l'elemento di posto i del vettore termini noti

così come vien fuori in assenza di viscosità. Le (662) e (663) possono così scriversi come segue:

$$v_{ij}(t) = c_{ij} X_j(t) + \int_s \frac{M_i M_j}{EI} \int_{t_c}^t X_j(\tau) \psi(s, \tau, t) d\tau ds \quad (664)$$

$$v_{i0}^i(t) = b_i g(t) + \int_s \frac{M_i M^0}{EI} \int_{t_c}^t g(\tau) \psi(s, \tau, t) d\tau ds.$$

L'equazione di congruenza relativa al vincolo i -esimo è quindi

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} X_j(t) + \sum_j \int_s \frac{M_i M_j}{EI} \int_{t_c}^t X_j(\tau) \psi(s, \tau, t) d\tau ds = \\ = -b_i g(t) - \int_s \frac{M_i M^0}{EI} \int_{t_c}^t g(\tau) \psi(s, \tau, t) d\tau ds. \end{aligned} \quad (665)$$

Le n equazioni (665) costituiscono un sistema di equazioni integrali nelle n incognite $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$.

Sia possibile scrivere

$$\psi(s, \tau, t) = f(s) \cdot \psi(\tau, t); \quad (666)$$

si chiamino poi con i simboli c'_{ij} e b'_i le quantità

$$c'_{ij} = \int_s f(s) \frac{M_i M_j}{EI} ds \quad (667)$$

$$b'_i = \int_s f(s) \frac{M_0 M_i}{EI} ds. \quad (668)$$

rispettivamente coefficienti di Maxwell, e spostamenti indotti dalle forze in corrispondenza dei vincoli, "corretti" per effetto viscoso. Le (665) si scrivono così

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} X_j(t) + \sum_j c'_{ij} \int_{t_c}^t X_j(\tau) \psi(\tau, t) d\tau = \\ = -b_i g(t) - b'_i \int_{t_c}^t g(\tau) \psi(\tau, t) d\tau. \end{aligned} \quad (669)$$

Le (669) costituiscono un sistema di equazioni integrali di Volterra.

Se può porsi

$$\psi(\tau, t) = e(\tau) \cdot h(t) \quad (670)$$

le (669) si scrivono

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} X_j(t) + \sum_j c'_{ij} h(t) \int_{t_c}^t X_j(\tau) e(\tau) d\tau = \\ = -b_i g(t) - b'_i h(t) \int_{t_c}^t g(\tau) e(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (671)$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} \frac{dX_j}{dt} = - \sum_j c'_{ij} h(t) e(t) X_j(t) - \\ - \sum_j c'_{ij} \frac{dh}{dt} \int_{t_c}^t X_j(\tau) e(\tau) d\tau - \end{aligned} \quad (672)$$

$$\begin{aligned}
 & -b_i \frac{dg}{dt} - b'_i h(t) e(t) g(t) - \\
 & -b'_i \frac{dh}{dt} \int_{t_c}^t g(\tau) e(\tau) d\tau .
 \end{aligned}$$

Il sistema (672) si presta ad una agevole trattazione numerica con un procedimento alla Runge e Kutta.

Se si adotta un nucleo alla Withney, con β costante, è valida la (666), con

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \alpha(s) \\
 \psi(\tau, t) &= e^{-\beta\tau} .
 \end{aligned} \tag{673}$$

In questo caso è valida anche la (670), con

$$\begin{aligned}
 e(\tau) &= e^{-\beta\tau} \\
 h(t) &= 1 ;
 \end{aligned}$$

le (672) si scrivono quindi come segue:

$$\begin{aligned}
 \sum_j c_{ij} \frac{dX_j}{dt} &= - \sum_j c'_{ij} e^{-\beta t} X_j(t) - \\
 & - b_i \frac{dg}{dt} - b'_i g(t) e^{-\beta t} .
 \end{aligned} \tag{674}$$

Il sistema di equazioni di Volterra (669) si traduce in un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine. La sua risoluzione utilizzando il procedimento di Runge e Kutta, analogo a quello già illustrato nel caso di una sola incognita, è ben noto. In questo paragrafo non si è parlato di distorsioni. Di esse si tiene conto immediatamente, sommando, nella seconda delle (664), al termine $b_i g(t)$ dovuto alle forze quello $b_i^* g(t)$ dovuto alle distorsioni, spostamento indotto dalle distorsioni, in corrispondenza del vincolo i -esimo, sulla

struttura isostatica. Questo termine non è influenzato dalla viscosità, poiché la distorsione non induce sollecitazioni interne.

Naturalmente, se le distorsioni seguono una legge temporale diversa da quella delle forze, esse sono trattate separatamente.