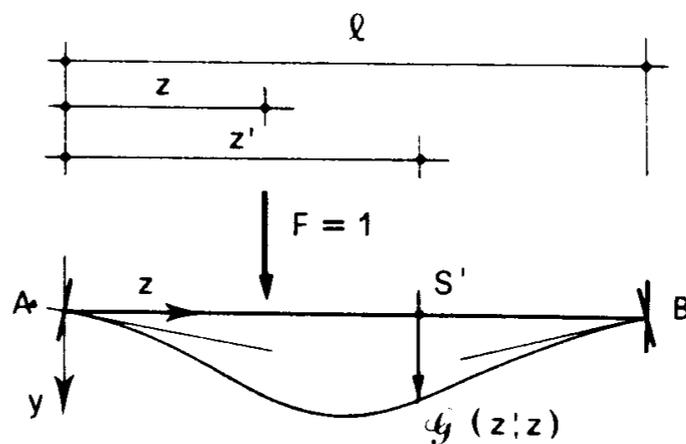


Capitolo quarto  
I sistemi continui.

1. Le funzioni di Green.

Si consideri la trave della fig. 31, vincolata con incastri, in genere



linea d'influenza dell'abbassamento  
nella sezione S'

Figura 31

cedevoli verticalmente ed angularmente. Si ha cioè

$$\begin{aligned}
 R_A &= -k'_A v_A \\
 R_B &= -k'_B v_B \\
 \mathfrak{M}_A &= -k_A \varphi_A \\
 \mathfrak{M}_B &= -k_B \varphi_B .
 \end{aligned}
 \tag{342}$$

Una forza verticale  $F = 1$  agisca all'ascissa  $z$ ; sia

$$v(z') = G(z', z) \quad (343)$$

la funzione che definisce l'abbassamento in  $z'$ . La  $G(z', z)$  gode, per Betti, della proprietà

$$G(z', z) = G(z, z'); \quad (344)$$

essa è la *funzione di Green* degli abbassamenti per effetto di una forza verticale unitaria. La  $G(z', z)$  può essere interpretata in due modi:

- a)  $z$  fisso,  $z'$  variabile: *deformata* per effetto della forza  $F = 1$  agente all'ascissa  $z$ ;
- b)  $z$  variabile,  $z'$  fisso: *linea d'influenza* dell'abbassamento in  $z'$  per una forza  $F = 1$  viaggiante.

Generalmente la funzione di Green è intesa nel secondo aspetto, per cui prende anche nome di *funzione d'influenza*. In questo caso la prima variabile è l'ascissa della sezione in studio, la seconda variabile è l'ascissa della forza agente.

La proprietà (344) è la cosiddetta *proprietà di simmetria*; non tutte le funzioni di Green rispettano questa proprietà.

Spesso la funzione di Green è fornita adimensionalizzando  $z$  e  $z'$ , e cioè sotto l'aspetto

$$G(\xi', \xi)$$

ove

$$\xi' = \frac{z'}{l}$$

$$\xi = \frac{z}{l} .$$

Per sua natura la funzione di Green è fornita da due espressioni, valedoli una a sinistra, e l'altra a destra di  $S'$ . Per esempio, per la trave appoggiata di sezione costante si ha (fig. 32 a)

$$G(\xi', \xi) = \begin{cases} \frac{l^3}{6EI} (1 - \xi') [\xi' (2\xi' - \xi'^2) - \xi^3] & \text{se } \xi \leq \xi' \\ \frac{l^3}{6EI} (1 - \xi) [\xi' (2\xi - \xi^2) - \xi'^3] & \text{se } \xi \geq \xi' ; \end{cases} \quad (345)$$

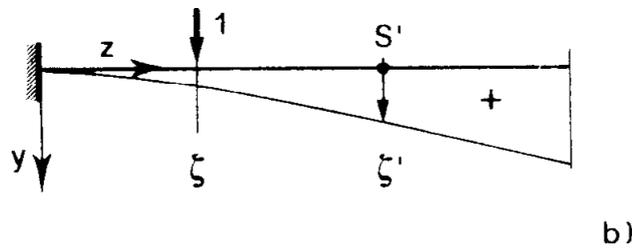
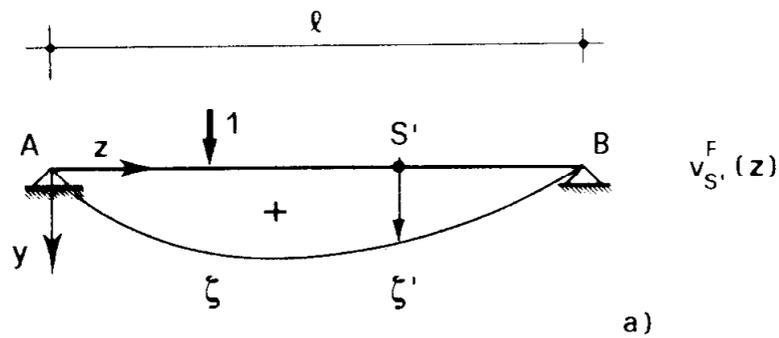


Figura 32

per la trave a mensola (fig. 32 b) è invece

$$G(\xi', \xi) = \begin{cases} \frac{l^3}{6EI} \xi^2 (3\xi' - \xi) & \text{se } \xi \leq \xi' \\ \frac{l^3}{6EI} \xi'^2 (3\xi - \xi') & \text{se } \xi \geq \xi' . \end{cases} \quad (346)$$

Nel primo caso, per esempio, per  $\xi = 0$  la prima espressione fornisce  $G = 0$ , e non la seconda; invece, per  $\xi = 1$  è la seconda che forn-

sce  $G = 0$ , e non la prima. Per  $\zeta = \zeta'$  ambedue danno

$$G(\zeta, \zeta) = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} (\zeta^4 - 2\zeta^3 + \zeta^2)$$

e, per  $\zeta = \zeta' = \frac{1}{2}$ ,

$$G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{l^3}{48EI}.$$

Nel secondo caso, per  $\zeta = 0$  la prima espressione fornisce  $G = 0$ ; la seconda, per  $\zeta = 1$ , fornisce

$$G = \frac{l^3}{6EI} \zeta'^2 (3 - \zeta')$$

che, per  $\zeta' = \zeta = 1$  si traduce in

$$G(1, 1) = \frac{l^3}{3EI}.$$

La  $G(z', z)$ , considerata come funzione della sola  $z$ , è quindi la linea d'influenza

$$v_{S'}^F(z)$$

dell'abbassamento  $v$  in  $S'$  per effetto della  $F = 1$  viaggiante. Considerando due forze  $F$  e  $-F$  alle ascisse  $z$  e  $z + dz$  (fig. 33), si ha

$$v(z') = -FG(z', z + dz) + FG(z', z)$$

e ancora

$$v(z') = -\frac{G(z', z + dz) - G(z', z)}{dz} F dz. \quad (347)$$

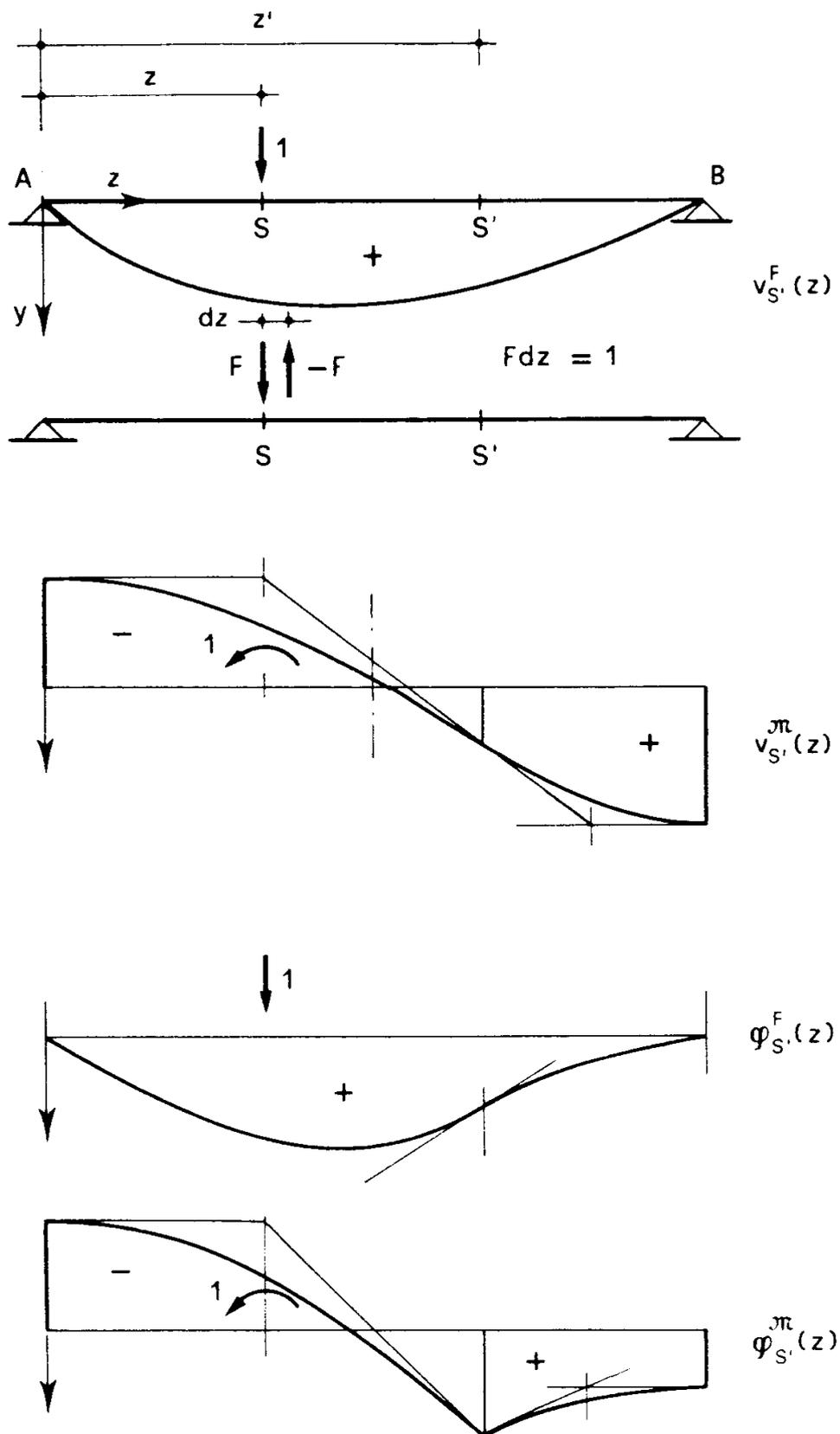


Figura 33

Effettuando il limite per  $dz \rightarrow 0$  ed  $F \rightarrow \infty$ , sotto il vincolo  $Fdz = 1$ , la  $v(z')$  è lo spostamento in  $S'$  per effetto della coppia unitaria all'ascissa  $z$ , e cioè la linea d'influenza

$$v_{S'}^m(z);$$

d'altro canto la frazione della (347) diviene la derivata di  $G$  rispetto a  $z$ . Quindi può porsi

$$v_{S'}^m(z) = - \frac{\partial G(z', z)}{\partial z} . \quad (348)$$

Si può poi scrivere, sotto la forza  $F = 1$  agente in  $S$ ,

$$\frac{v(z' + dz') - v(z')}{dz'} = \frac{G(z' + dz', z) - G(z', z)}{dz'} ;$$

effettuando il limite per  $dz' \rightarrow 0$  il primo termine fornisce la rotazione in  $S'$  cambiata di segno, ed il secondo termine la derivata di  $G$  rispetto a  $z'$ . Quindi

$$\varphi_{S'}^F(z) = - \frac{\partial G(z', z)}{\partial z'} . \quad (349)$$

Sotto la coppia  $\pi = 1$  in  $S$ , si scriva (346)

$$\frac{v(z' + dz') - v(z')}{dz'} = \frac{- \frac{\partial G(z' + dz', z)}{\partial z} + \frac{\partial G(z', z)}{\partial z}}{dz'} ;$$

effettuando il limite per  $dz' \rightarrow 0$  il primo termine fornisce la rotazione in  $S'$ , cambiata di segno, ed il secondo termine la derivata seconda di  $G$  rispetto a  $z$  e  $z'$ , cambiata di segno. Quindi

$$\varphi_{S'}^m(z) = \frac{\partial^2 G(z', z)}{\partial z \partial z'} . \quad (350)$$

Dalle (345) si ottiene, derivando,

$$v_{S'}^m(z) = \begin{cases} \frac{l^2}{6EI} [\zeta'^3 - 3\zeta'^2 + \zeta'(3\zeta^2 + 2) - 3\zeta^2] & \text{se } \zeta \leq \zeta' \\ \frac{l^2}{6EI} [\zeta'^3 + \zeta'(3\zeta^2 - 6\zeta + 2)] & \text{se } \zeta \geq \zeta' \end{cases} \quad (351)$$

$$\varphi_{S'}^F(z) = \begin{cases} \frac{l^2}{6EI} [\zeta^3 + \zeta(3\zeta'^2 - 6\zeta' + 2)] & \text{se } \zeta \leq \zeta' \\ \frac{l^2}{6EI} [\zeta^3 - 3\zeta^2 + \zeta(3\zeta'^2 + 2) - 3\zeta'^2] & \text{se } \zeta \geq \zeta' \end{cases} \quad (352)$$

$$\varphi_{S'}^m(z) = \begin{cases} \frac{l}{6EI} (3\zeta'^2 - 6\zeta' + 3\zeta^2 + 2) & \text{se } \zeta \leq \zeta' \\ \frac{l}{6EI} (3\zeta^2 - 6\zeta + 3\zeta'^2 + 2) & \text{se } \zeta \geq \zeta' \end{cases} \quad (353)$$

Le dimensioni di  $v_{S'}^F$ ,  $v_{S'}^m$ ,  $\varphi_{S'}^F$ ,  $\varphi_{S'}^m$  sono rispettivamente  $[lF^{-1}]$ ,  $[F^{-1}]$ ,  $[F^{-1}]$ ,  $[l^{-1} F^{-1}]$ . Le  $v_{S'}^m$  e  $\varphi_{S'}^F$  non sono simmetriche; ed infatti lo spostamento in  $S'$  per una coppia  $\pi = 1$  in  $S$  non è uguale allo spostamento in  $S$  per una coppia  $\pi = 1$  in  $S'$ . Invece la  $\varphi_{S'}^m(z)$  è simmetrica; ciò è conforme al principio di Betti, poiché la rotazione in  $S'$  per una coppia  $\pi = 1$  in  $S$  coincide con la rotazione in  $S$  per una coppia  $\pi = 1$  in  $S'$ .

La (353) è la funzione di Green delle rotazioni per effetto di una

coppia unitaria, e si esprime in  $z$  e  $z'$  come segue:

$$K(z', z) = \begin{cases} \frac{1}{6EI} (3z'^2 - 6lz' + 3z^2 + 2l^2) & \text{se } z \leq z' \\ \frac{1}{6EI} (3z^2 - 6lz + 3z'^2 + 2l^2) & \text{se } z \geq z'. \end{cases} \quad (354)$$

La (354) è particolarmente utile nello studio delle situazioni semilineari, e nella ricerca dei moltiplicatori euleriani.

La (354) è riportata come ultimo diagramma della fig. 33. Per  $z'$  costante, le derivate in  $z'$  sono

$$\left( \frac{dK}{dz} \right)_s = \frac{z'}{EI} > 0$$

$$\left( \frac{dK}{dz} \right)_d = \frac{z' - l}{EI} < 0.$$

La  $K(z)$  è perciò discontinua, nella derivata prima, in  $z = z'$ .

## 2. La formulazione differenziale delle situazioni semilineari .

La trave sia soggetta (fig. 34) al carico trasversale  $q(z)$ , ed al carico assiale  $\lambda f(z)$ . Siano  $R_y(z)$  e  $\lambda R_z(z)$  le componenti secondo  $y$  e  $z$  delle forze  $q(z)$  e  $\lambda f(z)$  agenti alla sinistra della generica ascissa  $z$ , ed  $\mathfrak{M}(z)$  il loro momento (positivo se antiorario) rispetto al baricentro della sezione. Si ricordi che, in primo ordine, è

$$R_y(z) = -T(z) \quad (355)$$

$$\lambda R_z(z) = -\lambda N(z);$$

è comunque, invece

$$\pi(z) = -M(z) \quad (356)$$

Il vincolo  $B$  di destra impedisce gli spostamenti secondo  $z$ , mentre il vincolo  $A$  è scorrevole; quindi

$$R_B = -R_z(l). \quad (357)$$

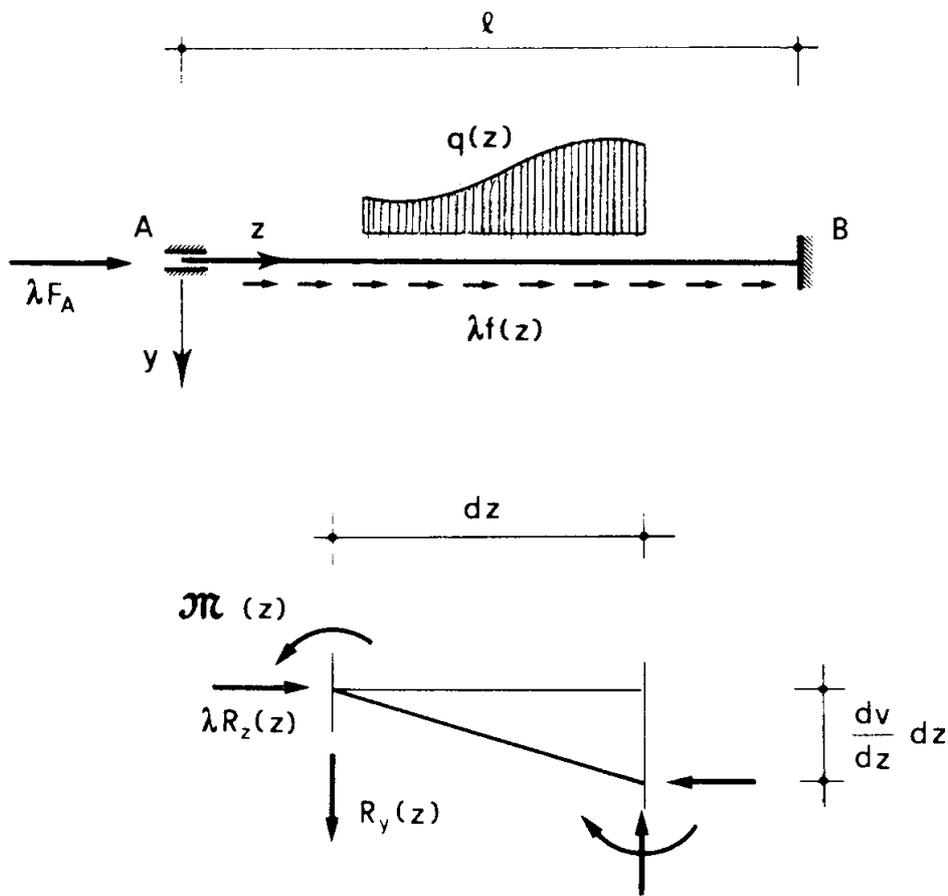


Figura 34

Le tre equazioni di equilibrio del tronco elementare sono

$$\begin{aligned} R_y - (R_y + dR_y) + q dz &= 0 \\ \lambda R_z - (\lambda R_z + \lambda dR_z) + \lambda f dz &= 0 \\ \pi - (\pi + d\pi) + R_y dz - \lambda R_z dv &= 0. \end{aligned} \quad (358)$$

La prima e la seconda forniscono le relazioni differenziali

$$q = \frac{dR_y}{dz}$$

$$f = \frac{dR_z}{dz} \quad ;$$
(359)

in primo ordine esse si traducono nelle ben note

$$q = - \frac{dT}{dz}$$

$$f = - \frac{dN}{dz} .$$
(360)

La terza delle (358) si scrive

$$- \frac{d\pi}{dz} + R_y - \lambda R_z \frac{dv}{dz} = 0$$

e ancora

$$- \frac{d^2\pi}{dz^2} + \frac{dR_y}{dz} - \lambda \frac{d}{dz} \left( R_z \frac{dv}{dz} \right) = 0 .$$
(361)

Per le (356) e (359), la (361) si scrive come segue

$$\frac{d^2M}{dz^2} + q - \lambda \frac{d}{dz} \left( R_z \frac{dv}{dz} \right) = 0 .$$
(362)

Poiché nell'ipotesi di piccoli spostamenti si può porre

$$M = -EI \frac{d^2v}{dz^2}$$
(363)

la (363) si scrive

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + \lambda \frac{d}{dz} \left( R_z \frac{dv}{dz} \right) = q$$

e, adottando l'apice come simbolo di derivata,

$$(EI v'')'' + \lambda (R_z v')' = q. \quad (364)$$

La (364) è l'equazione fondamentale delle situazioni semilineari. Per le ipotesi fatte,  $R_z$  è positiva se corrisponde ad una compressione.

Inoltre, se  $F_A$  è la forza assiale concentrata in  $A$  (se essa è positiva, corrisponde ad una compressione), ed  $F_i$  le eventuali forze assiali alle ascisse  $z_i$ , si ha

$$R_z = F_A + \sum_0^z F_i + \int_0^z f(t) dt. \quad (365)$$

Se  $c_A$   $c'_A$   $c_B$   $c'_B$  sono le cedibilità elastiche in  $A$  e  $B$ , ed in relazione alle coppie reattive ed alle reazioni verticali, le condizioni ai limiti in  $A$  sono (fig. 35).

$$\begin{aligned} z = 0 \quad R_A &= -k'_A v_A \\ \mathfrak{M}_A &= -k_A \varphi_A \end{aligned} \quad (366)$$

In  $A$  è

$$T_A = -F_A \operatorname{sen} \varphi_A - R_A \cos \varphi_A. \quad (367)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti si può scrivere

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi_A &= \varphi_A = -v'_A \\ \cos \varphi_A &= 1 \end{aligned} \quad (368)$$

$$T = M' = (-EI v'')',$$

e quindi la (367) diviene

$$-(EIv'')'_A = F_A v'_A - R_A,$$

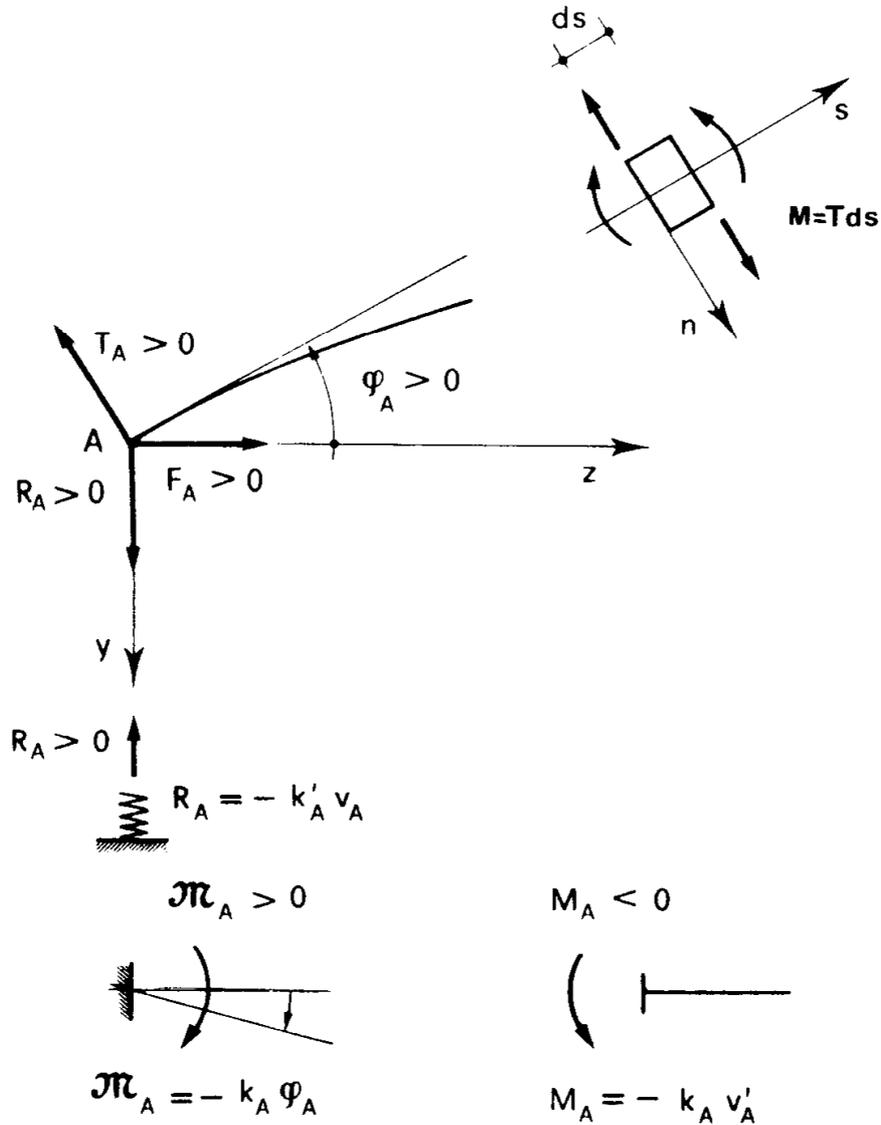


Figura 35

da cui

$$R_A = F_A v'_A + (EIv'')'_A \quad (369)$$

Così pure

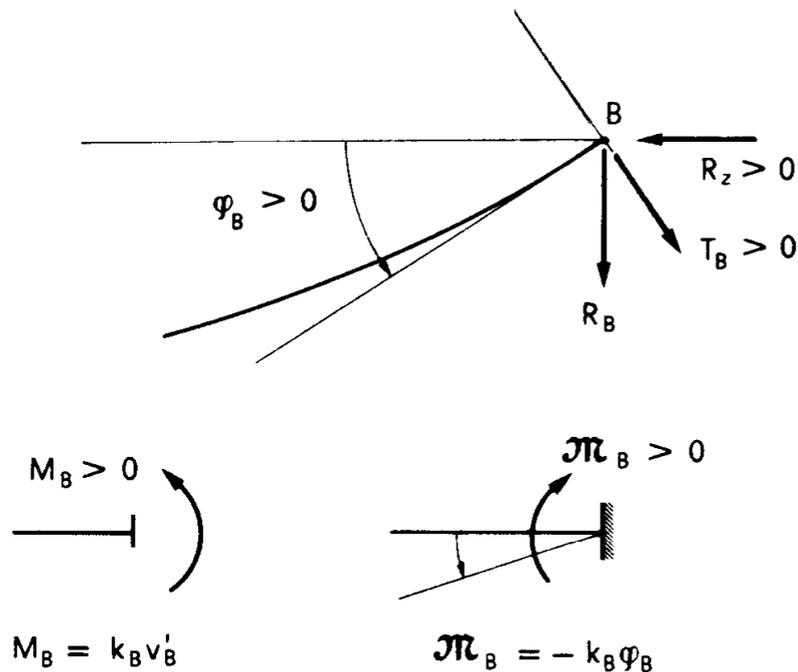
$$\mathfrak{M}_A = - (EI v'')_A \quad (370)$$

Quindi le condizioni (366) si traducono nelle altre

$$z = 0 \quad \begin{cases} k'_A v_A + F_A v'_A + (EI)_A v''_A + (EI)_A v'''_A = 0 \\ k_A v'_A - (EI)_A v''_A = 0. \end{cases} \quad (371)$$

Le condizioni ai limiti in  $B$  sono (fig. 36)

$$z = l \quad \begin{aligned} R_B &= - k'_B v_B \\ \mathfrak{M}_B &= - k_B \varphi_B. \end{aligned} \quad (372)$$



*Figura 36*

In  $B$  è

$$T_B = - R_z \text{ sen } \varphi_B + R_B \text{ cos } \varphi_B$$

e cioè

$$T_B = R_z v'_B + R_B$$

da cui

$$-(EIv'')'_B = R_z v'_B + R_B$$

$$R_B = -R_z v'_B - (EIv'')'_B . \quad (373)$$

Così pure

$$\mathfrak{m}_B = M_B = -(EIv'')_B . \quad (374)$$

La (372) si traducono quindi nelle altre

$$z = l \left\{ \begin{array}{l} -k'_B v_B + R_z v'_B + (EI)'_B v''_B + (EI)_B v'''_B = 0 \\ k_B v'_B + (EI)_B v''_B = 0 . \end{array} \right. \quad (375)$$

Le (371) e (375) sono *omogenee*; esse diventano non omogenee se entrano in gioco i cedimenti anelastici.

La (364) è l'*equazione differenziale*, che con le condizioni (371) e (375) costituisce il *problema differenziale*. Se  $q = 0$ , si è in presenza di un *problema omogeneo*.

Dalle (371) e (375) si possono trarre le condizioni ai limiti nei casi di appoggio, incastro, bipendolo o estremo libero ponendo rispettivamente

$$\begin{array}{ll} k'_A = \infty & k_A = 0 \\ k'_A = \infty & k_A = \infty \\ k'_A = 0 & k_A = \infty \\ k'_A = 0 & k_A = 0 . \end{array} \quad (376)$$

### 3. La formulazione integrale delle situazioni semilineari: il problema omogeneo.

L'uso della funzione di Green offre il vantaggio di operare, nei vari casi particolari, senza chiamare in gioco le condizioni ai limiti, delle quali si tiene conto, una volta per sempre, attraverso la suddetta funzione.

Si consideri, innanzitutto, il problema omogeneo; l'equazione differenziale è (364)

$$(EIv'')'' = -\lambda(R_z v')' . \quad (377)$$

D'altro canto (364) l'equazione differenziale della trave soggetta a carichi trasversali è

$$(EIv'')'' = q . \quad (378)$$

Dal confronto fra le (377) e (378) si trae che se sotto un certo valore di  $\lambda$  la (377) ha soluzione non banale, tale configurazione  $v(z)$  è quella generata da un carico trasversale fittizio fornito da

$$q^*(z) = -\lambda \frac{d}{dz} \left[ R_z(z) \frac{dv(z)}{dz} \right] . \quad (379)$$

Quindi la soluzione  $v(z)$  della (377), e solo essa, soddisfa la condizione (343)

$$v(z') = \int_0^l q^*(z) \cdot G(z', z) dz$$

e cioè

$$v(z') + \lambda \int_0^l \frac{d}{dz} \left[ R_z(z) \frac{dv(z)}{dz} \right] G(z', z) dz = 0 . \quad (380)$$

Scambiando  $z'$  con  $z$ , in virtù della (344), può scriversi

$$v(z) + \lambda \int_0^l \frac{d}{dz'} \left[ R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} \right] G(z, z') dz' = 0 . \quad (381)$$

Integrando per parti può scriversi

$$\int_0^l \frac{d}{dz'} \left[ R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} \right] G(z, z') dz' =$$

$$= \left[ R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} G(z, z') \right]_{z'=0}^{z'=l} - \int_0^l R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} \frac{\partial G(z, z')}{\partial z'} dz'$$

Si ricordi che la  $G(z, z')$ , esprimendo un abbassamento, è ovunque continua, con la sua derivata prima rispetto a  $z$  o  $z'$ .

Se la trave è vincolata con incastri non cedevoli verticalmente, se cioè  $v_A = v_B = 0$ , e quindi

$$G(z, 0) = G(z, l) = 0 . \quad (383)$$

la (381) si scrive, per la (382) ,

$$v(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} \frac{\partial G(z, z')}{\partial z'} dz' = 0 . \quad (384)$$

Derivando rispetto a  $z$  la (384) diviene

$$\varphi(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') \varphi(z') \frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z \partial z'} dz' = 0$$

e cioè, per la (350) ,

$$\varphi(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') K(z, z') \varphi(z') dz' = 0 . \quad (385)$$

La  $K(z, z')$  è la funzione di Green della rotazione prodotta da una coppia viaggiante; essa è *simmetrica*, come già detto, nel rispetto del teorema di Betti.

La (385) è una *equazione integrale di Fredholm di seconda specie*,

omogenea, nella funzione incognite  $\varphi(z)$ . Le equazioni di Fredholm di prima specie non contengono il termine  $\varphi(z)$ .

Il prodotto

$$R_z(z') K(z, z') \quad (386)$$

è il *nucleo* della (385),  $\lambda$  il *parametro*; poiché  $K$  è simmetrica, il nucleo si dice *simmetrizzabile*.

Data la struttura, è nota  $K(z, z')$ ; in essa sono contenute le condizioni ai limiti. Le forze sono assiali, ed espresse attraverso la  $R_z(z)$ ; esse sono definite a meno di  $\lambda$ .

La (385) ammetterà soluzioni non banali (*autofunzioni*) soltanto per particolari valori di  $\lambda$  (*autovalori*).

Data una qualsiasi funzione  $m(z)$  definita in  $[0, l]$ , si ha

$$\int_0^l \int_0^l K(z, z') m(z) m(z') dz dz' > 0; \quad (387)$$

ed infatti  $m(z)$  può essere interpretata come una distribuzione di coppie  $m(z)$  agenti sulla trave, cui corrisponde l'energia di deformazione

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^l m(z) \varphi(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l m(z) \left[ \int_0^l K(z, z') m(z') dz' \right] dz, \end{aligned}$$

che è sempre maggiore di zero.

La (387) si esprime dicendo che  $K(z, z')$  è *definita positiva*.

In questo caso, se  $R_z(z)$  è ovunque maggiore di zero in  $[0, l]$ , anche il nucleo (386) si dice *definito positivo*.

Si dimostra che se il nucleo è definito positivo esiste un insieme infinito di valori  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  reali, positivi, ordinabili, tali che per essi, e solo per essi, la (385) ammette soluzione non banale. Ad ogni  $\lambda_i$  corrisponde in genere una sola soluzione  $\bar{\varphi}_i(z)$ , definita in  $[0, l]$  a meno di una costante moltiplicativa. Se ad un  $\lambda_i$  corrispondono  $p$  autofunzioni  $\bar{\varphi}_i^j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) ogni combinazione delle  $\varphi_{ji}$

$$\bar{\varphi}_i(z) = c_j \bar{\varphi}_i^j(z) \quad (388)$$

soddisfa la (385).

Ad ogni autofunzione corrisponde un solo autovalore. Date due autofunzioni  $\bar{\varphi}_h(z)$  e  $\bar{\varphi}_k(z)$ , corrispondenti a due autovalori distinti  $\lambda_h$  e  $\lambda_k$ , la loro energia mutua è nulla. Infatti dalla (385) si ha

$$\bar{\varphi}_h(z) = \lambda_h \int_0^l R_z(z') K(z, z') \bar{\varphi}_h(z') dz' \quad (389)$$

$$\bar{\varphi}_k(z) = \lambda_k \int_0^l R_z(z') K(z, z') \bar{\varphi}_k(z') dz'.$$

La prima delle (389) dice che  $\bar{\varphi}_h(z)$  rappresenta le rotazioni dovute alle coppie distribuite

$$m_h^*(z) = \lambda_h R_z(z) \bar{\varphi}_h(z); \quad (390)$$

la seconda dice che  $\bar{\varphi}_k(z)$  rappresenta le rotazioni dovute alle coppie distribuite

$$m_k^*(z) = \lambda_k R_z(z) \bar{\varphi}_k(z). \quad (391)$$

I lavori mutui relativi alle due condizioni di carico (390) e (391) sono uguali, e cioè

$$\begin{aligned} L_{e12} &= \int_0^l m_h^* \bar{\varphi}_k dz = \lambda_h \int_0^l R_z \bar{\varphi}_h \bar{\varphi}_k dz = \\ &= L_{e21} = \int_0^l m_k^* \bar{\varphi}_h dz = \lambda_k \int_0^l R_z \bar{\varphi}_k \bar{\varphi}_h dz \end{aligned} \quad (392)$$

da cui

$$\lambda_h \int_0^l R_z \bar{\varphi}_h \bar{\varphi}_k dz = \lambda_k \int_0^l R_z \bar{\varphi}_k \bar{\varphi}_h dz ;$$

è quindi

$$(\lambda_h - \lambda_k) \int_0^l R_z \bar{\varphi}_h \bar{\varphi}_k dz = 0$$

da cui, essendo  $\lambda_h \neq \lambda_k$ ,

$$\int_0^l R_z \bar{\varphi}_h \bar{\varphi}_k dz = 0 . \quad (393)$$

Il lavoro mutuo  $L_{e_{12}}$  è perciò nullo; nulla è quindi l'energia di deformazione:

$$L_{12} = \int_0^l M_h \frac{d\bar{\varphi}_k}{dz} dz = 0$$

ed ancora

$$L_{12} = \int_0^l EI \bar{v}_h' v_k'' dz = 0 . \quad (394)$$

La (394) si scrive anche come segue:

$$\int_0^l EI \bar{\varphi}_h' \bar{\varphi}_k' dz = 0 . \quad (395)$$

#### 4. Lo spazio delle funzioni .

Dato l'intervallo  $[0, l]$ , l'insieme delle funzioni  $\varphi(z)$  definite in tale intervallo, e cioè l'insieme delle possibili configurazioni di una trave di luce  $l$ , è uno spazio vettoriale di dimensione  $\infty$ , detto spazio delle funzioni.

Lo spazio delle funzioni  $\varphi(z)$  si può strutturare introducendo il seguente prodotto scalare

$$\varphi_h \cdot \varphi_k = \frac{L_{hk}}{2} \quad (396)$$

e cioè

$$\varphi_h \cdot \varphi_k = \frac{1}{2} \int_0^l EI v_h'' v_k'' dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI \varphi_h' \varphi_k' dz. \quad (397)$$

Sotto tale definizione, le autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sono tra loro *ortogonali*.

Ad una funzione  $\varphi_h(z)$  si associa la *norma*

$$|\varphi_h(z)| = \sqrt{\varphi_h \cdot \varphi_h} = \sqrt{\frac{1}{2} L_{hh}} = \sqrt{L_h}, \quad (398)$$

e cioè

$$|\varphi_h(z)| = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^l EI (\varphi_h')^2 dz}. \quad (399)$$

Data una funzione  $\varphi(z)$ , essa si normalizza moltiplicandola per una costante  $c$  tale che

$$\frac{c^2}{2} \int_0^l EI (\varphi')^2 dz = \epsilon;$$

la  $c$  è quindi fornita da

$$c^2 = \frac{2\epsilon}{\int_0^l EI (\varphi')^2 dz}. \quad (400)$$

Se  $\varphi(z)$  è una autofunzione, la  $c^2$  è anche data, per le (392), da

$$c^2 = \frac{2\epsilon}{\lambda_h \int_0^l R_z \bar{\varphi}_h^2 dz} . \quad (401)$$

### 5. La condizione di Hilbert.

Una funzione  $g(z)$  definita in  $[0, l]$  è *a quadrato sommabile* se l'integrale

$$\int_0^l g^2(z) dz \quad (402)$$

è finito.

Dato l'intervallo  $[0, l]$ , e una funzione di Green  $K(z, z')$  in esso definita, una funzione  $\varphi(z)$  definita in  $[0, l]$  soddisfa la *condizione di Hilbert* se esiste una funzione  $g(z)$ , definita in  $[0, l]$ , e a quadrato sommabile, tale che  $\varphi(z)$  possa esprimersi come segue:

$$\varphi(z) = \int_0^l K(z, z') g(z') dz' . \quad (403)$$

*Teorema:* ogni funzione  $\varphi(z)$  che soddisfi la condizione di Hilbert è esprimibile in serie delle autofunzioni connesse con un nucleo definito positivo  $R_z(z') K(z, z')$ :

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_h \bar{\varphi}_h(z) . \quad (404)$$

Ciò posto, dalla (404), moltiplicando i due membri per  $R_z(z) \bar{\varphi}_k(z)$  ed integrando, si ha

$$\int_0^l \varphi(z) R_z(z) \bar{\varphi}_k(z) dz = \sum_{h=1}^{\infty} x_h \int_0^l R_z(z) \bar{\varphi}_k(z) \bar{\varphi}_h(z) dz$$

e, per l'ortogonalità (395),

$$\int_0^l \varphi(z) R_z(z) \bar{\varphi}_k(z) dz = x_k \int_0^l R_z(z) \bar{\varphi}_k^2(z) dz,$$

da cui

$$x_k = \frac{\int_0^l \varphi(z) R_z(z) \bar{\varphi}_k(z) dz}{\int_0^l R_z(z) \bar{\varphi}_k^2(z) dz}. \quad (405)$$

La condizione di Hilbert garantisce la convergenza della serie (404), la (405) costruisce i coefficienti della (404).

Se si opera su autofunzioni normalizzate, è (392)

$$L_k = \frac{1}{2} \lambda_k \int_0^l R_z \bar{\varphi}_k^2 dz = \epsilon$$

da cui

$$\int_0^l R_z \bar{\varphi}_k^2 dz = \frac{2\epsilon}{\lambda_k}; \quad (406)$$

la (405) si scrive così

$$x_k = \frac{\lambda_k}{2\epsilon} \int_0^l \varphi R_z \bar{\varphi}_k dz. \quad (407)$$

La (406) può anche ottenersi dalla (401), ponendo  $c = 1$ .

Si osservi che la posizione (404) può essere interpretata come il trasferimento al continuo di quanto già detto in tema di sistemi olo-nomi; le  $\bar{\varphi}_k(z)$  sono i vettori di una base ortonormale, ottenuti da una qualsiasi situazione di carico assiale, e le  $x_h$  sono le componenti di qualsiasi vettore  $\varphi(z)$  in tale base. L'analogia è ancor più evidente

per avere scelto come funzione caratterizzante la configurazione la  $\varphi(z)$  invece della  $v(z)$ . Il prodotto scalare

$$\frac{1}{2} \mathbf{c}_h^T \mathbf{K} \mathbf{c}_k$$

del sistema olonomo è sostituito dall'espressione integrale

$$\frac{1}{2} \int_0^l \varphi'_h EI \varphi'_k dz .$$

La base delle autofunzioni è ortogonale, per la (395); se ad un autovalore corrispondono  $p$  autofunzioni (388) si scelgono le costanti  $c_j$  in modo che esse risultino tra loro ortogonali.

#### 6. Espressione della funzione di Green in serie doppia di autofunzioni.

Una qualsiasi deformata  $v(z)$  può essere considerata come prodotta da una distribuzione definita di coppie  $m(z)$ . Ed infatti dalle relazioni

$$T - m = \frac{dM}{dz}$$

$$-q = \frac{dT}{dz}$$

si trae, essendo  $q = 0$ ,

$$T = \text{cost}$$

$$m = - \frac{dM}{dz} + \text{cost}$$

e quindi

$$m = (EIv'')' + \text{cost} \tag{408}$$

Si osservi che una distribuzione uniforme di  $m$  ( $m = \text{cost}$ ) implica che  $M(z)$  sia lineare, e quindi nullo in una trave su due appoggi. Ne segue che le rotazioni agli estremi di tale trave sono nulle, e quindi i momenti d'incastro di una trave comunque vincolata sono nulli. In qualsiasi caso, perciò, una  $m$  costante non induce abbassamenti; la (408) può perciò scriversi come segue:

$$m = (EIv'')' . \quad (409)$$

Nella trave soggetta alle coppie  $m(z)$  è

$$\varphi(z) = \int_0^l K(z, z') m(z') dz' ; \quad (410)$$

la (410) non è altro che la (403), poiché  $m(z)$  soddisfa la (402). Se ne trae che le rotazioni connesse con qualsiasi deformata soddisfano la condizione di Hilbert, e quindi possono essere espresse in serie delle autofunzioni connesse con un nucleo definito positivo  $R_z(z')$   $K(z, z')$ . In particolare, la  $K(z, z')$  è la rotazione in  $z$  per effetto della  $\varkappa = 1$  agente in  $z'$ , e quindi, intesa come funzione di  $z$  ( $z'$  fissa) è la deformata provocata della  $\varkappa = 1$  in  $z'$ . Può quindi porsi (404)

$$K(z, z') = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \bar{\varphi}_h(z) \quad (411)$$

ove (407)

$$b_h = \frac{\lambda_h}{2\epsilon} \int_0^l K(z, z') R_z(z) \bar{\varphi}_h(z) dz . \quad (412)$$

Per la (385) è

$$\bar{\varphi}_h(z') = \lambda_h \int_0^l R_z(z) K(z, z') \bar{\varphi}_h(z) dz ,$$

e quindi la (412) si scrive

$$b_h = \frac{1}{2\epsilon} \bar{\varphi}_h(z')$$

e la (411) assume la forma definitiva

$$K(z, z') = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \bar{\varphi}_h(z) \cdot \bar{\varphi}_h(z'). \quad (413)$$

E' interessante osservare che l'espressione (413) è formalmente indipendente dalla situazione di carico assiale cui le autofunzioni sono collegate.

Dalla (413) si trae

$$\int_0^l R_z(z) K(z, z) dz = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^l R_z(z) \bar{\varphi}_h^2(z) dz, \quad (414)$$

ove  $R_z(z)$  è la situazione di carico assiale da cui derivano le autofunzioni  $\bar{\varphi}_h(z)$ . Poiché queste sono normalizzate, dalla (401) si trae

$$\int_0^l R_z(z) \bar{\varphi}_h^2(z) dz = \frac{2\epsilon}{\lambda_h} \quad (415)$$

e quindi la (414) si scrive

$$\int_0^l R_z(z) K(z, z) dz = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h}, \quad (416)$$

ove  $R_z(z)$  è la situazione di carico assiale da cui derivano gli autovalori  $\lambda_h$ .

Si può scrivere

$$\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h} = \int_0^l R_z(z) K(z, z) dz$$

da cui

$$\lambda_1 = \frac{1}{\int_0^l R_z(z) K(z, z) dz - \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h}} ;$$

essendo tutti i  $\lambda_h$  positivi, se ne trae

$$\lambda_1^* = \frac{1}{\int_0^l R_z(z) K(z, z) dz} < \lambda_1 . \quad (417)$$

La (417) fornisce quindi un prezioso minorante  $\lambda_1^*$  del primo autovalore  $\lambda_1$ .

## 7. Ricerca approssimata degli autovettori e relative autofunzioni.

Siano note la funzione di Green e la funzione  $R_z(z)$ . Si ponga l'autofunzione generica nella forma

$$\bar{\varphi}(z) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i(z) \quad (418)$$

ove le  $\varphi_i(z)$  sono funzioni note, soddisfacenti le condizioni ai limiti. Sostituendo la (418) nella (385)

$$\varphi(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') K(z, z') \varphi(z') dz' = 0 ,$$

si ha, nel punto  $z = z_j$ ,

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i(z_j) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \int_0^l R_z(z') K(z_j, z') \varphi_i(z') dz' = 0 .$$

Si può anche scrivere

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i - \lambda \sum_{i=1}^n b_{ji} x_i = 0 \quad (419)$$

dove

$$a_{ji} = \varphi_i(z_j) \quad (420)$$

$$b_{ji} = \int_0^l R_z(z) K(z_j, z) \varphi_i(z) dz. \quad (420)$$

Scrivendo la (419) per  $n$  punti dell'asse ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) si ottiene il sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{x} = 0, \quad (421)$$

algebrico lineare omogeneo nelle  $x_i$ . La solita condizione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) = 0 \quad (422)$$

fornisce gli  $n$  valori di  $\lambda$  per i quali il sistema (421) presenta soluzione non banale. Convienne assumere come funzione  $\varphi_i(z)$  quella rappresentata dalle rotazioni indotte dalla coppia  $\pi = 1$  agente all'ascissa  $z_i$ , e cioè

$$\varphi_i(z) = K(z, z_i). \quad (423)$$

Con la posizione

$$K(z_j, z_i) = K_{ji}$$

si ha

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}; \quad (424)$$

la riga  $j$ -esima di  $\mathbf{A}$  fornisce le rotazioni all'ascissa  $z_j$ , connesse con la coppia  $\mathfrak{M}_j = 1$  agente alle ascisse  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Perciò la  $\mathbf{A}$  si chiama pure *matrice di Green*. Essa è simmetrica, per Betti, e definita positiva; infatti, data una qualsiasi  $n$ -pla di coppie  $\mathfrak{M}_i$  agenti alle ascisse  $z_i$ , l'energia di deformazione ad esse connessa è

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varphi}, \quad (425)$$

dove

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \mathbf{m}. \quad (426)$$

Quindi

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} > 0 \quad \forall \mathbf{m}. \quad (427)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è intrinseca alla struttura; se questa può essere soggetta solo a coppie, agenti solo alle ascisse  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), la struttura si riduce ad un sistema olonomo ad  $n$  parametri di libertà, le  $\varphi_j$  sono le coordinate lagrangiane, ed  $\mathbf{A}$  è la *matrice delle cedibilità*. Dalla (426) si ha

$$\mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{m}$$

e quindi

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varphi}$$

e ancora

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \boldsymbol{\varphi}.$$

Per la simmetria di  $\mathbf{A}$  si ha

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varphi}. \quad (428)$$

La (428) si scrive pure

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \quad (429)$$

ove

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$$

è la *matrice delle rigidità*.

Si ha poi (420) (423)

$$b_{ji} = \int_0^l R_z(z) K(z_j, z) \varphi_i(z) dz = \tag{430}$$

$$= \int_0^l R_z(z) K(z_j, z) K(z, z_i) dz = b_{ij}$$

e quindi la matrice  $\mathbf{B}$  è pur essa simmetrica. La (421) si scrive

$$(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0, \tag{431}$$

e la  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$  è simmetrizzabile. L'equazione secolare classica

$$\det(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \tag{432}$$

o, il che è lo stesso, la (422), ammette quindi  $n$  radici reali; e ad eventuali autovalori di molteplicità  $p$  corrisponde un autovettore dipendente da  $p$  costanti.

La matrice  $\mathbf{B}$  dipende dai carichi assiali attraverso  $R_z(z)$ ; se anche essa è definita positiva, gli  $n$  autovalori sono tutti positivi.

## 8. L'esaltazione degli effetti del carico trasversale.

In presenza di un carico trasversale  $q(z)$  l'equazione differenziale è (364)

$$(EIv'')'' = -\lambda(R_z v')' + q,$$

e quindi la soluzione  $v(z)$  è quella che si avrebbe sotto un carico tra-

sversale fittizio fornito (379) da

$$q^*(z) = -\lambda \frac{d}{dz} \left[ R_z(z) \frac{dv(z)}{dz} \right] + q(z).$$

La soluzione  $v(z)$  soddisfa quindi l'equazione (380)

$$v(z') = -\lambda \int_0^l \frac{d}{dz} \left[ R_z(z) \frac{dv(z)}{dz} \right] G(z', z) dz + \\ + \int_0^l q(z) G(z', z) dz.$$

La quantità

$$v^*(z') = \int_0^l q(z) G(z', z) dz \quad (433)$$

è l'abbassamento in  $z'$  provocato dal carico  $q(z)$  in assenza di carico assiale (soluzione del primo ordine).

Può quindi scriversi, in luogo della (384),

$$v(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') \frac{dv(z')}{dz'} \frac{\partial G(z, z')}{\partial z'} dz' = v^*(z)$$

e, derivando rispetto a  $z$ ,

$$\varphi(z) - \lambda \int_0^l R_z(z') K(z, z') \varphi(z') dz' = \varphi^*(z). \quad (434)$$

La (434) è identica alla (385), in più contiene la funzione nota  $\varphi^*(z)$ . Essa è una *equazione di Fredholm di seconda specie non omogenea*. La sua soluzione può ottenersi in serie di autofunzioni dell'omogenea associata, poiché è assicurata, come già visto, la condizione di Hilbert.

E' quindi (404)

$$\varphi^*(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \bar{\varphi}_h(z), \quad (435)$$

ove le  $x_h^*$  hanno i valori forniti dalla (407); è così pure

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_h \bar{\varphi}_h(z). \quad (436)$$

Sostituendo nella (434) si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} x_h \bar{\varphi}_h(z) &= \lambda \sum_{h=1}^{\infty} x_h \int_0^l R_z(z') K(z, z') \bar{\varphi}_h(z') dz' + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \bar{\varphi}_h(z). \end{aligned}$$

La (413) consente di scrivere

$$\int_0^l R_z(z') K(z, z') \bar{\varphi}_h(z') dz' = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l R_z(z') \bar{\varphi}_k(z) \bar{\varphi}_k(z') \bar{\varphi}_h(z) dz'$$

e, per l'ortonormalità (415),

$$\int_0^l R_z(z') K(z, z') \bar{\varphi}_h(z') dz' = \frac{1}{2\epsilon} \frac{2\epsilon}{\lambda_h} \bar{\varphi}_h(z).$$

La (437) si scrive così

$$\sum_{h=1}^{\infty} x_h \bar{\varphi}_h(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_h} x_h \bar{\varphi}_h(z) + \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \bar{\varphi}_h(z), \quad (438)$$

da cui

$$x_h = \frac{\lambda}{\lambda_h} x_h + x_h^*$$

e quindi

$$x_h = \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} x_h^* . \quad (439)$$

La (436) quindi si scrive

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda} x_h^* \bar{\varphi}_h(z) . \quad (440)$$

L'analogia con i sistemi olonomi (181) è evidente.

### 9. Analisi modale dinamica della trave.

La trave presenta lungo l'asse una distribuzione  $m(z)$  di masse; è  $[m] = [Fl^{-2} t^2]$ . Il problema dinamico si risolve considerando le forze equivalenti alla d'Alembert

$$q(t) = -m \ddot{v} . \quad (441)$$

L'equazione della deformata è perciò la seguente:

$$(EI v'')'' = -m \ddot{v} .$$

Sotto forma integrale si può scrivere

$$v(z, t) = - \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' . \quad (442)$$

Alla (442) si associa l'equazione di Fredholm

$$v(z) - \omega^2 \int_0^l m(z') G(z, z') v(z') dz' = 0. \quad (443)$$

La  $G(z, z')$  è simmetrica, come già detto, e definita positiva; ed infatti, in analogia a quanto già detto per la  $K(z, z')$ , data una qualsiasi funzione  $p(z)$  definita in  $[0, l]$ , questa può essere interpretata come una distribuzione di forze  $p(z)$ , cui corrisponde l'energia di deformazione

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^l p(z) v(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^l p(z) \left[ \int_0^l G(z, z') p(z') dz' \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l G(z, z') p(z) p(z') dz' dz, \end{aligned} \quad (444)$$

che è comunque maggiore di zero.

Il nucleo della (443)

$$m(z') G(z, z')$$

è simmetrizzabile, poiché  $G(z, z')$  è simmetrica. Inoltre  $G(z, z')$  è definita positiva, ed  $m(z')$  è ovunque maggiore di zero. Quindi il nucleo è definito positivo, e la (443) ammette un insieme definito positivo, e la (443) ammette un insieme infinito di valori  $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots$  reali, positivi, ordinabili, per i quali la soluzione è diversa dalla banale. All'autovalore  $\omega_i^2$  corrisponde l'autofunzione  $\bar{v}_i(z)$ .

Date due autofunzioni  $\bar{v}_h(z)$  e  $\bar{v}_k(z)$ , corrispondenti a due autovalori distinti,  $\omega_h^2$  ed  $\omega_k^2$ , la loro energia mutua è nulla. Infatti dalla (443) si ha

$$\bar{v}_h(z) = \omega_h^2 \int_0^l m(z') G(z, z') \bar{v}_h(z') dz' \quad (445)$$

$$\bar{v}_k(z) = \omega_k^2 \int_0^l m(z') G(z, z') \bar{v}_k(z') dz'.$$

La prima delle (445) dice che  $\bar{v}_h(z)$  rappresenta gli spostamenti dovuti ai carichi distribuiti

$$p_h^*(z) = \omega_h^2 m(z) \bar{v}_h(z) ;$$

la seconda dice che  $\bar{v}_k(z)$  rappresenta gli spostamenti dovuti ai carichi distribuiti

$$p_k^*(z) = \omega_k^2 m(z) \bar{v}_k(z) .$$

I lavori mutui relativi a queste due condizioni di carico sono uguali, e cioè

$$\begin{aligned} L_{e_{12}} &= \int_0^l p_h^* \bar{v}_k dz = \omega_h^2 \int_0^l m \bar{v}_h \bar{v}_k dz = \\ &= L_{e_{21}} = \int_0^l p_k^* \bar{v}_h dz = \omega_k^2 \int_0^l m \bar{v}_k \bar{v}_h dz \end{aligned} \quad (446)$$

da cui

$$\omega_h^2 \int_0^l m \bar{v}_h \bar{v}_k dz = \omega_k^2 \int_0^l m \bar{v}_h \bar{v}_k dz$$

e quindi, poiché  $\omega_h^2 \neq \omega_k^2$ , è

$$\int_0^l m \bar{v}_h \bar{v}_k dz = 0 .$$

Il lavoro mutuo  $L_{e_{12}}$  è perciò nullo, e con esso l'energia mutua:

$$L_{12} = \int_0^l EI \bar{v}_h'' \bar{v}_k'' dz = 0 . \quad (447)$$

Le autofunzioni sono così tra loro ortogonali. Esse si normalizzano secondo la condizione

$$\frac{c^2}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dz = \epsilon, \quad (448)$$

o l'altra (446), valevole per le sole autofunzioni della (443),

$$\frac{c^2 \omega_h^2}{2} \int_0^l m \bar{v}_h^2 dz = \epsilon, \quad (449)$$

e cioè moltiplicando  $\bar{v}$  per la costante  $c$  data da

$$c^2 = \frac{2\epsilon}{\int_0^l EI (v'')^2 dz} \quad (450)$$

oppure

$$c^2 = \frac{2\epsilon}{\omega_h^2 \int_0^l m \bar{v}_h^2 dz}. \quad (451)$$

Per il teorema (404) può porsi

$$v(t, z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_h(t) \bar{v}_h(z) \quad (452)$$

ove (407)

$$x_h(t) = \frac{\omega_h^2}{2\epsilon} \int_0^l v(t) m \bar{v}_h dz. \quad (453)$$

Sostituendo la (452) nella (442) si ha

$$\sum_{h=1}^{\infty} x_h(t) \bar{v}_h(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \ddot{x}_h \int_0^l m(z') \bar{v}_h(z') G(z, z') dz' = 0 .$$

Dalla (443) si ha

$$\bar{v}_h(z) = \omega_h^2 \int_0^l m(z') \bar{v}_h(z') G(z, z') dz' ,$$

e quindi la (454) si scrive

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[ x_h(t) \bar{v}_h(z) + \ddot{x}_h \frac{\bar{v}_h(z)}{\omega_h^2} \right] = 0 ,$$

da cui le  $n$  equazioni

$$\ddot{x}_h + \omega_h^2 x_h(t) = 0 . \quad (455)$$

La (455) è la nota, e già incontrata, equazione del pendolo, di soluzione

$$x_h = A_h \text{ sen } \omega_h t + B_h \text{ cos } \omega_h t . \quad (456)$$

Quindi (452) la soluzione della (442) è

$$v(z, t) = \sum_{h=1}^{\infty} (A_h \text{ sen } \omega_h t + B_h \text{ cos } \omega_h t) \bar{v}_h(z) . \quad (457)$$

L'analogia con la (239) è evidente. Ogni *modo*  $\bar{v}_h$  vibra di moto armonico, con frequenza circolare  $\omega_h$ .

Se al tempo  $t = 0$  è

$$v(z, 0) = \sum_{h=1}^{\infty} b_{h0} \bar{v}_h(z)$$

$$\dot{v}(z, 0) = \sum_{h=1}^{\infty} a_{ho} \bar{v}_h(z)$$

la (457) fa scrivere

$$\sum_{h=1}^{\infty} B_h \bar{v}_h(z) = \sum_{h=1}^{\infty} b_{ho} \bar{v}_h(z)$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \omega_h A_h \bar{v}_h(z) = \sum_{h=1}^{\infty} a_{ho} \bar{v}_h(z)$$

da cui

$$A_h = \frac{a_{ho}}{\omega_h}$$

$$B_h = b_{ho} .$$

La (413) si traduce nella

$$G(z, z') = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{h \neq 1}^{\infty} \bar{v}_h(z) \cdot \bar{v}_h(z') \quad (458)$$

e la (417) nella

$$(\omega_1)^2 > \frac{1}{\int_0^l m(z) G(z, z) dz} .$$

## 10. Ricerca approssimata dei modi dinamici.

Si pone l'autofunzione generica nella forma

$$\bar{v}_h(z) = \sum_{i=1}^n x_i v_i(z) , \quad (459)$$

ove le  $v_i(z)$  sono funzioni note, soddisfacenti le condizioni ai limiti. Si osservi che si è pervenuti alla (442) senza dovere ipotizzare  $v = 0$  in  $z = 0$  e  $z = l$ , come si è dovuto invece fare (383) per giungere alla (385).

Sostituendo la (459) nella (443) si ottiene, nel punto  $z = z_j$ ,

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i(z_j) - \omega^2 \sum_{i=1}^n x_i \int_0^l m(z') G(z_j, z') v_i(z') dz' = 0$$

e cioè

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i - \omega^2 \sum_{i=1}^n b_{ji} x_i = 0 \quad (460)$$

dove

$$a_{ji} = v_i(z_j) \quad (461)$$

$$b_{ji} = \int_0^l m(z) G(z_j, z) v_i(z) dz .$$

Scrivendo la (461) per  $n$  ascisse  $z_j$  ( $j = 1, 2 \dots n$ ) si ottiene il sistema

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = 0 \quad (462)$$

algebrico lineare omogeneo nelle incognite  $x_i$ . La condizione ben nota

$$\det (\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) = 0 \quad (463)$$

fornisce gli  $n$  valori di  $\omega^2$  per cui il sistema (462) ammette soluzione non banale. Convien assumere (fig. 37) come funzione  $v_i(z)$  quella rappresentata dagli spostamenti indotti dalla forza  $F = 1$  agente all'ascissa  $z_i$ , e cioè

$$v_i(z) = G(z, z_i) . \quad (464)$$



Con la posizione

$$G(z_j, z_i) = G_{ji}$$

si ha

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{vmatrix}; \quad (465)$$

la riga  $j$ -esima di  $\mathbf{A}$  fornisce gli abbassamenti all'ascissa  $z_j$  connessi con la forza  $F = 1$  agente alle ascisse  $z_1, z_2 \dots z_n$ . Perciò la  $\mathbf{A}$  è la *matrice di Green degli spostamenti*. La  $\mathbf{A}$  è simmetrica, per Betti, e definita positiva. Infatti, data una qualsiasi  $n$ -pla di forze  $F_i$  agenti alle ascisse  $z_i$ , l'energia di deformazione ad esse connessa è

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{v} \quad (466)$$

dove

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (467)$$

Quindi

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f} > 0 \quad \forall \mathbf{f}. \quad (468)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è intrinseca alla struttura; se questa può essere soggetta solo a forze, agenti solo alle ascisse  $z_i$  ( $j = 1, 2 \dots n$ ), la struttura si riduce ad un sistema olonomo ad  $n$  parametri di libertà, le  $v_j$  sono le coordinate lagrangiane, ed  $\mathbf{A}$  è la *matrice delle cedibilità*.

Dalla (467) si ha

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{f}$$

e quindi

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{v}$$

e ancora

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} \quad (469)$$

La (469) si scrive pure

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (470)$$

con

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1} \quad (471)$$

*matrice delle rigidità.*

Si ha poi

$$\begin{aligned} b_{ji} &= \int_0^l m(z) G(z_j, z) v_i(z) dz = \\ &= \int_0^l m(z) G(z_j, z) G(z, z_i) dz = b_{ij} \end{aligned} \quad (472)$$

e quindi  $\mathbf{B}$  è pur essa simmetrica.

La colonna (o riga)  $i$ -esima della  $\mathbf{B}$  rappresenta la deformata  $v_i^*(z)$  per effetto del carico distribuito fittizio

$$p_i^* = m(z) v_i(z), \quad (473)$$

ove  $v_i(z)$  è la deformata dovuta ad  $F = 1$  agente all'ascissa  $z_i$ .

Invece la colonna (o riga)  $i$ -esima della  $\mathbf{A}$  rappresenta la deformata per effetto di una forza  $F = 1$  agente all'ascissa  $z_i$ . È facile riconoscere che, se è ovunque  $m(z) > 0$ , si ha  $v_i(z) > 0 \quad \forall i, z$ , e quindi le  $n$  deformate dovute agli  $n$  carichi (473) coincidono con quelle dovute alla forza  $F = 1$  agente successivamente alle ascisse  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , su una trave con le caratteristiche d'inerzia opportunamente variate. Quindi  $\mathbf{B}$  è, come  $\mathbf{A}$ , definita positiva.

Può quindi dirsi che gli  $n$  autovalori  $\omega_i^2$  sono tutti reali e positivi, e quindi tutte le frequenze  $\omega_i$  sono reali.

In presenza di carichi assiali, basta tenerne conto nell'espressione di  $G(z', z)$ ; finché il moltiplicatore  $\lambda$  dei carichi assiali è inferiore al primo valore critico, **A** e **B** continuano a definirsi positive. Al disopra del primo carico critico ciò non accade più, e qualche  $\omega_i^2$  è negativo (a partire dal più basso, man mano che  $\lambda$  aumenta).

### 11. I carichi pulsanti .

La trave sia soggetta a forze  $q(z, t)$ ; l'equazione (442) diviene

$$v(z, t) + \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' = \int_0^l q(z', t) G(z, z') dz'.$$

Se può porsi

$$q(z, t) = q(z) \cdot g(t)$$

la (474) diviene

$$v(z, t) + \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' = v^*(z) \cdot g(t). \quad (475)$$

La  $v^*(z)$  è

$$v^*(z) = \int_0^l q(z') G(z, z') dz',$$

è cioè la deformata statica sotto il carico  $q(z)$ , e cioè quella che nel par. 8 è stata chiamata soluzione del primo ordine (433).

Se il carico è armonico, è cioè

$$q = q(z) \cdot \text{sen } \omega_q t \quad (476)$$

la (475) si scrive

$$v(z, t) + \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' = v^*(z) \text{sen } \omega_q t. \quad (477)$$

Si può porre, sempre per il rispetto della condizione di Hilbert (404)

$$v(z, t) = \sum_{h=1}^{\infty} x_h(t) \bar{v}_h(z). \quad (478)$$

La (477) diviene

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} x_h(t) \bar{v}_h(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \ddot{x}_h \int_0^l m(z') \bar{v}_h(z') G(z, z') dz' = \\ = \text{sen } \omega_q t \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \bar{v}_h(z), \end{aligned} \quad (479)$$

ove (407)

$$x_h^* = \frac{\omega_h^2}{2\epsilon} \int_0^l m(z) v^*(z) \bar{v}_h(z) dz. \quad (480)$$

Per la (445), la (479) può scriversi

$$\sum_{h=1}^{\infty} x_h(t) \bar{v}_h(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_h^2} \ddot{x}_h \bar{v}_h(z) = \text{sen } \omega_q t \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \bar{v}_h(z)$$

da cui

$$\ddot{x}_h + \omega_h^2 x_h(t) = \omega_h^2 x_h^* \text{sen } \omega_q t. \quad (481)$$

La (481) ammette l'integrale particolare

$$x_h = x_{oh} \operatorname{sen} \omega_q t ;$$

sostituendo infatti nella (481), questa si scrive

$$-\omega_q^2 x_{oh} \operatorname{sen} \omega_q t + \omega_h^2 x_{oh} \operatorname{sen} \omega_q t = \omega_h^2 x_h^* \operatorname{sen} \omega_q t$$

che è soddisfatta per

$$x_{oh} = \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_q^2} x_h^* .$$

Dunque un integrale particolare della (477) è

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_q^2} x_h^* \bar{v}_h(z) \cdot \operatorname{sen} \omega_q t . \quad (482)$$

La soluzione della (477) è perciò somma della (482) e dell'integrale generale (457) dell'omogenea associata:

$$\begin{aligned} v(z, t) = & \sum_{h=1}^{\infty} (A_h \operatorname{sen} \omega_h t + B_h \operatorname{cos} \omega_h t) \bar{v}_h(z) + \\ & + \operatorname{sen} \omega_q t \cdot \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_q^2} \bar{v}_h(z) . \end{aligned} \quad (483)$$

Ogni modo  $\bar{v}_h(z)$  si muove con vibrazione libera di frequenza  $\omega_h$ , e con vibrazione forzata sincrona al carico, e cioè di frequenza  $\omega_q$ . La vibrazione forzata — che è quella più interessante, poiché a lungo andare le libere si smorzano per attrito — ha una configurazione unica, di ampiezza massima data da

$$v(z)_{\max} = \sum_{h=1}^{\infty} x_h^* \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_q^2} \bar{v}_h(z) . \quad (484)$$

## 12. Il caso dello scuotimento .

La trave sia soggetta ad uno scuotimento verticale

$$s(t) = s_0 g(t) . \quad (485)$$

Le forze equivalenti (441) sono date da

$$q(z, t) = - m(z) (\ddot{s} + \ddot{v})$$

e cioè

$$q(z, t) = - m(z) \ddot{v} - s_0 m(z) \ddot{g} ,$$

dove  $v(z)$  sono gli spostamenti rispetto al suolo. La (442) perciò si scrive

$$\begin{aligned} v(z, t) + \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' = \\ = - s_0 \ddot{g} \int_0^l m(z') G(z, z') dz' . \end{aligned} \quad (486)$$

Se  $s(t)$  è sinusoidale, e cioè

$$s(t) = s_0 \text{sen } \omega_s t$$

la (486) si scrive

$$\begin{aligned} v(z, t) + \int_0^l m(z') \ddot{v}(z', t) G(z, z') dz' = \\ = \omega_s^2 s_0 \int_0^l m(z') G(z, z') dz' \cdot \text{sen } \omega_s t . \end{aligned} \quad (487)$$

Dal paragone tra la (487) e la (474) risulta che il problema si riduce a quello di un carico equivalente

$$\tilde{q}(z, t) = \omega_s^2 s_0 m(z) \text{ sen } \omega_s t \dots \quad (488)$$

I risultati sono quindi quelli del paragrafo precedente, ove si ponga  $\omega_s$  al posto di  $\omega_q$ , ed  $m_s^2 s_0 m(z)$  al posto di  $q(z)$ . E' quindi

$$v^*(z) = \omega_s^2 s_0 \int_0^1 m(z') G(z, z') dz'$$

$$x_h^* = \frac{\omega_h^2}{2\epsilon} \int_0^1 m(z) v^*(z) \bar{v}_h(z) dz.$$

Si ha così

$$x_h^* = \frac{s_0 \omega_s^2 \omega_h^2}{2\epsilon} \int_0^1 \left[ \int_0^1 m(z) \bar{v}_h(z) G(z, z') dz \right] m(z') dz'$$

e, per la (443),

$$x_h^* = \frac{s_0 \omega_s^2}{2\epsilon} \int_0^1 \bar{v}_h(z) m(z) dz. \quad (489)$$

L'ampiezza massima della vibrazione forzata sincrona allo scuotimento è perciò (484)

$$v(z)_{\max} = \frac{s_0 \omega_s^2}{2\epsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_s^2} \int_0^1 \bar{v}_h(z) m(z) dz \cdot \bar{v}_h(z). \quad (490)$$

Chiamando

$$a = s_0 \omega_s^2 \quad (491)$$

il valore massimo dell'*accelerazione del suolo*,

$$r_h = \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2 - \omega_s^2} \quad (492)$$

il *coefficiente di amplificazione* del modo  $h$ -esimo,

$$p'_h = \frac{1}{2\epsilon} \int_0^l \bar{v}_h(z) m(z) dz \quad (493)$$

il *coefficiente di partecipazione* del modo  $h$ -esimo, la (490) si scrive

$$v(z)_{\max} = a \sum_{h=1}^{\infty} r_h p'_h \bar{v}_h(z). \quad (494)$$

Il coefficiente  $p'_h$  ha dimensioni fisiche  $[l^{-1} t^2]$ , e cioè le inverse dell'*accelerazione*. Ogni modo partecipa al moto secondo il prodotto dei suoi coefficienti di partecipazione ed amplificazione.

Siano  $q_h(z, t)$  le forze equivalenti allo scuotimento connesse con il modo  $h$ -esimo, e cioè le forze che in regime statico sarebbero in equilibrio con il modo  $h$ -esimo delle (494) al tempo  $t$ . Esse sono importanti, perché ad esse sono collegate le caratteristiche della sollecitazione interna (fig. 38 a).

Si scrive poi l'espressione del teorema di Betti per questo sistema, e per il sistema di forze di massa collegate al modo  $h$ -esimo del moto libero, nella sua massima elongazione (fig. 38 b). Si ha

$$\int_0^l q_h(z, t) \cdot \bar{v}_h dz = \int_0^l \omega_h^2 m \bar{v}_h \cdot a r_h p'_h \bar{v}_h \text{ sen } \omega_s t \cdot dz \quad (495)$$

da cui

$$q_h(z, t) = a m(z) r_h \omega_h^2 p'_h \bar{v}_h(z) \text{ sen } \omega_s t.$$

Introducendo il *coefficiente di partecipazione nelle forze* dato da

$$p_h = \omega_h^2 p'_h = \frac{\omega_h^2}{2\epsilon} \int_0^l \bar{v}_h(z) m(z) dz, \quad (496)$$

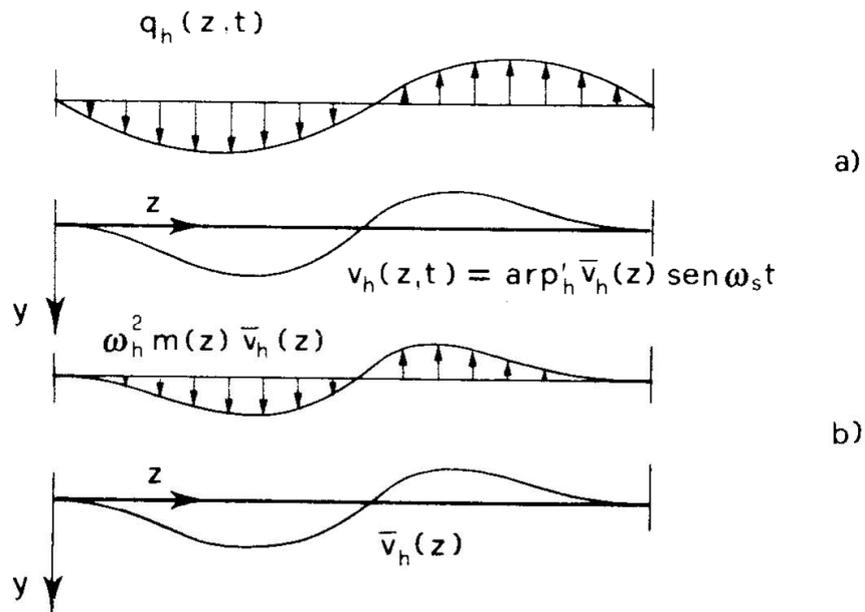


Figura 38

ed avente dimensione fisica  $[l^{-1}]$ , la (495) si scrive come segue:

$$q_h(z, t) = ar_h p_h m(z) \bar{v}_h(z) \text{sen } \omega_s t.$$

L'analogia con le (306) è evidente.