

Capitolo terzo

Analisi modale dinamica

1. Le vibrazioni libere.

Per semplicità si considera (fig. 19) una struttura piana, ma quanto si dirà è immediatamente estensibile alle strutture spaziali.

Sia n il numero delle coordinate lagrangiane φ_i , p il numero delle masse concentrate m_h . Sia inoltre

$$M_p = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_p \end{vmatrix} \quad (217)$$

la matrice (diagonale) delle masse, di dimensioni $p \times p$, e

$$V = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pn} \end{vmatrix} \quad W = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{p1} & w_{p2} & \dots & w_{pn} \end{vmatrix} \quad (218)$$

le due matrici di conversione, tali da fornire le componenti degli spostamenti delle masse secondo y e z attraverso le relazioni

$$v = V c \tag{219}$$

$$w = W c .$$

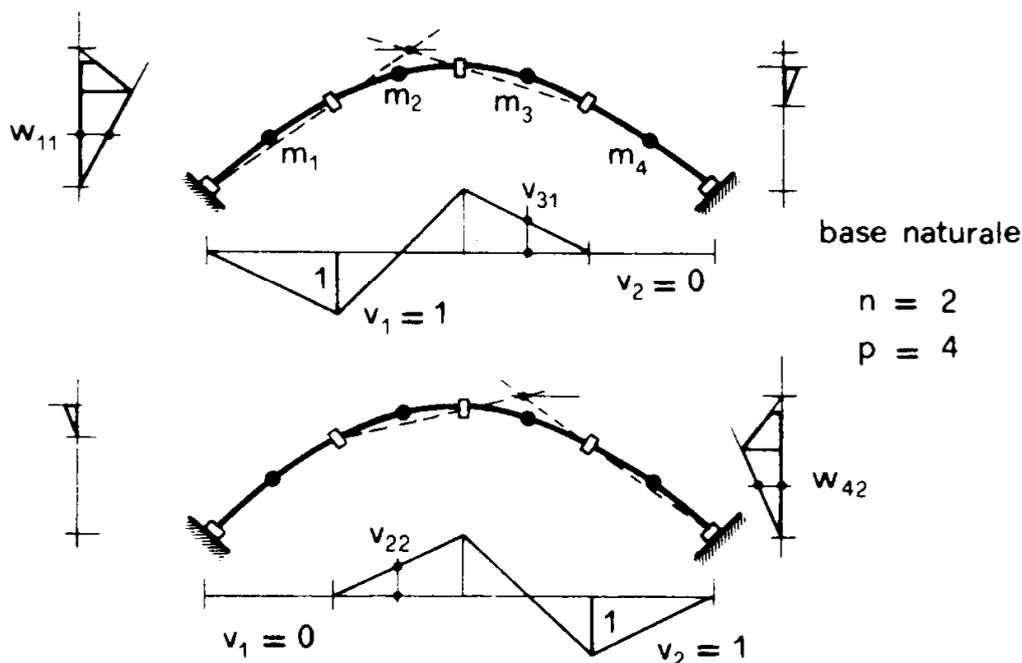


Figura 19

Le matrici V e W hanno dimensione $p \times n$, la matrice colonna c e le matrici colonna v e w rispettivamente n e p .

Il sistema è in moto, e quindi c , v e w sono funzioni del tempo. Le derivate temporali si indicano con il soprassetto a punto; per esempio,

$$\frac{d c}{d t} = \dot{c}$$

$$\frac{d^2 c}{d t^2} = \ddot{c} .$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^p m_h |\dot{s}_h|^2 . \tag{220}$$

Poiché vettorialmente è

$$\dot{\bar{s}}_h = (\dot{\bar{s}}_h)_y \bar{j} + (\dot{\bar{s}}_h)_z \bar{k}$$

e poiché le componenti della derivata di un vettore coincidono con le derivate delle componenti, si ha

$$\dot{\bar{s}}_h = \dot{v}_h \bar{j} + \dot{w}_h \bar{k}$$

e quindi, per il teor. di Pitagora,

$$|\dot{\bar{s}}_h|^2 = \dot{v}_h^2 + \dot{w}_h^2 . \quad (221)$$

Può quindi scriversi

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^p m_h (\dot{v}_h^2 + \dot{w}_h^2)$$

e, matricialmente,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{w}} = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V} \dot{\mathbf{c}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{M}_p \mathbf{W} \dot{\mathbf{c}} ; \end{aligned}$$

in sintesi,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{c}} \quad (222)$$

ove

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{M}_p \mathbf{W} . \quad (223)$$

La matrice \mathbf{M} , di dimensioni $n \times n$, è la *matrice lagrangiana delle masse*. Poiché

$$(\mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V})^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p^T \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_p \mathbf{V} ,$$

la \mathbf{M} è simmetrica. Dalla (222), per essere comunque $T > 0$, come risulta dalla (220), si ha che \mathbf{M} è definita positiva.

Le equazioni del moto – equazioni di Lagrange – sono le seguenti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{c}_i} + \frac{\partial E_t}{\partial c_i} = 0 , \quad (224)$$

e cioè (222), in assenza di forze,

$$\mathbf{K} \mathbf{c} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}} = 0 . \quad (225)$$

Le \mathbf{c} sono le incognite funzioni del tempo. Al sistema differenziale (225) si associa il sistema algebrico

$$\mathbf{K} \mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{c} = 0 , \quad (226)$$

analogo al (162), che di seguito si richiama:

$$\mathbf{K} \mathbf{c} - \lambda \mathbf{B} \mathbf{c} = 0 . \quad (227)$$

Dalla (226), premoltiplicando per \mathbf{M}^{-1} , si trae

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{c} = 0 \quad (228)$$

ove

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} . \quad (229)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ è simmetrizzabile, \mathbf{M}^{-1} e \mathbf{K} sono definite positive. Si hanno n radici reali $\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_n^2$ – che può dimostrarsi essere tutte positive – dell'equazione

$$\det (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{I}) = 0 ; \quad (230)$$

in corrispondenza di esse il sistema (228), o (226), ammette le soluzioni $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ non nulle. Queste sono ortogonali, e cioè per esse può scriversi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i &= 0 \\ \mathbf{e}_j^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i &= 0 \end{aligned} \quad (231)$$

per $i \neq j$.

Si ha, per $i = 1, 2 \dots n$,

$$\mathbf{K} \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_i . \quad (232)$$

Sfruttando la conoscenza della base così determinata, la soluzione $\mathbf{c}(t)$ del sistema di partenza, e cioè del (225), si può porre nella forma

$$\mathbf{c}(t) = \sum_1^n x_i(t) \mathbf{e}_i ; \quad (233)$$

i coefficienti $x_i(t)$ sono determinati, poiché \mathbf{e}_i è una base (teorema fondamentale).

Il (225) si scrive così, premoltiplicando per \mathbf{M}^{-1} ,

$$\ddot{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{c} = 0 \quad (234)$$

e ancora

$$\sum_1^n [\ddot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i(t) \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i] = 0 . \quad (235)$$

Per le (232), il sistema (235) può anche porsi nella forma

$$\sum_1^n [\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t)] \mathbf{e}_i = 0 . \quad (236)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 A_1 \varphi_{11} + \omega_2 A_2 \varphi_{12} + \dots + \omega_n A_n \varphi_{1n} &= \dot{\varphi}_1(0) \\ \dots & \\ \omega_1 A_1 \varphi_{n1} + \omega_2 A_2 \varphi_{n2} + \dots + \omega_n A_n \varphi_{nn} &= \dot{\varphi}_n(0) . \end{aligned}$$

Le vibrazioni libere sono perciò somma di n moti indipendenti; ciascuno di essi è costituito dall'autovettore e_i della (230), la cui componente controvariante varia nel tempo con la *legge armonica* (239), e cioè con *frequenza circolare* ω_i , con *periodo*

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} , \quad (241)$$

e con *frequenza*

$$f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\pi} . \quad (242)$$

Le *ampiezze* delle componenti controvarianti sono definite dal sistema (240):

$$x_{\max}^i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} . \quad (243)$$

Le e_i della (230) sono i cosiddetti *modi di vibrazione*, e lo studio suddetto è l'*analisi modale dinamica*.

2. L'uso preventivo di una base ortonormale .

Se si parte da una base E ortonormale si ha (222)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} \mathbf{x}$$

e cioè

$$T = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}' \dot{\mathbf{x}} \quad (244)$$

dove

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} . \quad (245)$$

E' poi (173), in assenza di forze,

$$E_t = L = \epsilon \sum_1^n (x_i)^2 ;$$

quindi le equazioni di Lagrange (224) si traducono in

$$\mathbf{M}' \ddot{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{x}(t) = 0 . \quad (246)$$

La \mathbf{M}' , ottenuta da una \mathbf{M} simmetrica attraverso la (245), è pur essa simmetrica. Le sue dimensioni fisiche (244) sono $[Flt^2]$.

Al sistema differenziale (246) si associa il sistema algebrico

$$\left(\mathbf{M}' - \frac{\epsilon}{\omega^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{x} = 0 ; \quad (247)$$

le soluzioni non nulle del (247) si hanno per i valori $\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_n^2$ soluzioni dell'equazione

$$\det \left(\mathbf{M}' - \frac{\epsilon}{\omega^2} \mathbf{I} \right) = 0 , \quad (248)$$

valori tutti reali, per la simmetria di \mathbf{M}' . Le soluzioni \mathbf{x}_i del (247) soddisfano le condizioni

$$\mathbf{M}' \mathbf{x}_i = \frac{\epsilon}{\omega_i^2} \mathbf{x}_i . \quad (249)$$

La soluzione del problema nella base \mathbf{E} è

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{E} \mathbf{x}(t) ; \quad (250)$$

si può porre, per l'ortogonalità delle \mathbf{x}_i ,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_1^n C_i(t) \mathbf{x}_i , \quad (251)$$

e quindi le (246) si scrivono

$$\sum_1^n \ddot{C}_i M' x_i + \epsilon \sum_1^n C_i(t) x_i = 0 ,$$

e ancora, per le (249) ,

$$\sum_1^n \frac{\epsilon}{\omega_i^2} \ddot{C}_i x_i + \epsilon \sum_1^n C_i(t) x_i = 0$$

da cui

$$\ddot{C}_i + \omega_i^2 C_i(t) = 0 . \quad (252)$$

Si ha quindi

$$C_i(t) = A_i \text{sen } \omega_i t + B_i \text{cos } \omega_i t$$

e [(250), (251)]

$$\mathbf{c}(t) = \sum_1^n (A_i \text{sen } \omega_i t + B_i \text{cos } \omega_i t) \mathbf{E} x_i . \quad (253)$$

Confrontando con la (239) si riconosce che le ω_i sono le frequenze circolari, ed

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{E} x_i \quad (254)$$

i modi di vibrazione.

3. Le vibrazioni libere sotto carichi assiali fissi.

In questo caso è (161)

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c}$$

e quindi le equazioni di Lagrange si traducono nel sistema (225)

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}} = 0 . \quad (255)$$

vale ancora la (228)

$$(\tilde{\mathbf{K}}_b - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{c} = 0 . \quad (256)$$

ove

$$\tilde{\mathbf{K}}_b = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_b . \quad (257)$$

Il procedimento è identico a quello già seguito, ma sono ovviamente diversi i risultati. La matrice \mathbf{K} si chiama anche matrice lagrangiana delle rigidità *ridotta*.

Conviene però operare sulla base ortonormale \mathbf{E} dei modi statici. Si ha così (173)

$$E_r = \epsilon \sum_1^n (x_i)^2 - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}' \mathbf{x}$$

con

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} .$$

Essendo \mathbf{E} l'insieme dei modi statici, \mathbf{B}' è diagonale (167); poiché poi \mathbf{E} è normalizzata, è (180)

$$\mathbf{B}' = \epsilon \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

e cioè (95)

$$\mathbf{B}' = \epsilon \Lambda^{-1} .$$

Si può allora scrivere

$$E_t = \epsilon \left(\sum_1^n (x_i)^2 - \lambda \mathbf{x}^T \Lambda^{-1} \mathbf{x} \right). \quad (258)$$

La T è (244)

$$T = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}' \dot{\mathbf{x}} .$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono così

$$\mathbf{M}' \ddot{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{x}(t) - \epsilon \lambda \Lambda^{-1} \mathbf{x}(t) = 0 . \quad (259)$$

Al sistema differenziale (259) si associa il sistema algebrico

$$\left[\mathbf{M}' - \frac{\epsilon}{\omega^2} (\mathbf{I} - \lambda \Lambda^{-1}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad (260)$$

e l'equazione secolare

$$\det \left[\mathbf{M}' - \frac{\epsilon}{\omega^2} (\mathbf{I} - \lambda \Lambda^{-1}) \right] = 0 . \quad (261)$$

Se ω_i ed \mathbf{x}_i sono le soluzioni della (261) e del corrispondente (260), la soluzione $\mathbf{c}(t)$ è fornita ancora dalla (253).

Il sistema (260) può anche scriversi, premoltiplicando per $(\mathbf{M}')^{-1}$,

$$[\epsilon (\mathbf{M}')^{-1} (\mathbf{I} - \lambda \Lambda^{-1}) - \omega^2 \mathbf{I}] \mathbf{x} = 0 \quad (262)$$

e la (261) si scrive

$$\det [\epsilon (\mathbf{M}')^{-1} (\mathbf{I} - \lambda \Lambda^{-1}) - \omega^2 \mathbf{I}] = 0 . \quad (263)$$

La (263) si scrive, per esteso,

$$\det \begin{vmatrix} \left[\epsilon m'_{11} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) - \omega^2 \right] & \dots & \dots & \epsilon m'_{1n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon m'_{n1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) & \dots & \dots & \left[\epsilon m'_{nn} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right) - \omega^2 \right] \end{vmatrix} = 0$$

Si osserva che, se $\lambda = \lambda_i$, la i -esima colonna si annulla per $\omega = 0$; e con essa il determinante della matrice dei coefficienti. A tale determinante corrisponde la soluzione

$$x^j \begin{cases} = 0 & \text{se } j \neq i \\ \neq 0 & \text{se } j = i. \end{cases}$$

e cioè

$$\mathbf{c} = k \mathbf{e}_i. \tag{264}$$

Quindi per $\lambda = \lambda_i$ esiste una radice $\omega = 0$, ed il corrispondente modo dinamico coincide con il modo statico \mathbf{e}_i connesso con λ_i . Frequenza nulla, e cioè periodo ∞ , significa che la struttura si allontana dalla sua posizione originaria senza più ritorno.

4. Le vibrazioni forzate .

La struttura sia soggetta a forze applicate di tipo trasversale variabili nel tempo, ed a forze assiali costanti. Risulta

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K}_b \mathbf{c} - \mathbf{f}^T \mathbf{c}$$

dove

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}. \tag{265}$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono perciò come segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}_b \mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t)$$

e, premoltiplicando per \mathbf{M}^{-1} ,

$$\ddot{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{c}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (266)$$

ove (257)

$$\tilde{\mathbf{K}}_b = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_b \quad (267)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}. \quad (268)$$

Dalla (266) si trae che il generico elemento \tilde{f}_i di $\tilde{\mathbf{f}}$ ha le stesse dimensioni fisiche del corrispondente elemento φ_i di \mathbf{c} , moltiplicate per t^{-2} .

Si ponga

$$\mathbf{c}(t) = \sum_1^n x_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \mathbf{x}(t) \quad (269)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \sum_1^n a_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \mathbf{a}(t)$$

ove \mathbf{e}_i sono i modi dinamici normalizzati, in presenza delle date forze assiali. Le (269) sono comunque lecite perché le \mathbf{e}_i costituiscono una base (277), ed $\tilde{\mathbf{f}}$ è dimensionalmente equiparabile, a meno di t^{-2} , a \mathbf{c} . Naturalmente le costanti a_i hanno dimensione $[t^{-2}]$. Le (269) consentono di scrivere le (266) come segue :

$$\sum_1^n \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \sum_1^n x_i \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{e}_i = \sum_1^n a_i(t) \mathbf{e}_i ;$$

e, per la (256),

$$\sum_1^n \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \sum_1^n \omega_i^2 x_i \mathbf{e}_i = \sum_1^n a_i(t) \mathbf{e}_i$$

da cui, poiché le \mathbf{e}_i sono indipendenti, le n equazioni dissociate

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = a_i(t) . \quad (270)$$

Se le forze variano con la stessa legge temporale, e cioè se

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 g(t) , \quad (271)$$

la (268) si scrive

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 g(t) = \tilde{\mathbf{f}}_0 g(t) . \quad (272)$$

Analogamente alla seconda delle (269), si può porre

$$\tilde{\mathbf{f}}_0 = \sum_1^n a_{oi} \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \mathbf{a}_0 \quad (273)$$

ove quindi

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 .$$

Dalle (269) e (272) si trae

$$\sum_1^n a_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_1^n a_{oi} g(t) \mathbf{e}_i$$

da cui

$$a_i(t) = a_{oi} \cdot g(t) .$$

Se la legge temporale è sinusoidale, e cioè

$$g(t) = \text{sen } \omega_q t ,$$

la (270) si scrive

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i(t) = a_{0i} \text{sen } \omega_q t . \quad (274)$$

La (274) ammette l'integrale particolare

$$x_i = x_{0i} \text{sen } \omega_q t ;$$

sostituendo infatti nella (274) si ha

$$-\omega_q^2 x_{0i} \text{sen } \omega_q t + \omega_i^2 x_{0i} \text{sen } \omega_q t = a_{0i} \text{sen } \omega_q t$$

da cui

$$x_{0i} = \frac{a_{0i}}{\omega_i^2 - \omega_q^2} \quad (275)$$

Con dimostrazione identica a quella già fatta nella trattazione dei modi statici, si considerino due autovalori distinti del sistema (255)

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{c} = 0 ,$$

e cioè

$$\mathbf{K}_b \mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{c} = 0 .$$

Per essi può scriversi

$$\mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{K}_b \mathbf{e}_j = \omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_j .$$

Premoltiplicando la prima per \mathbf{e}_j^T e la seconda per \mathbf{e}_i^T si ha

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{e}_j^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_j = \omega_j^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_j \quad ;$$

trasponendo la seconda e sottraendo dalla prima si trae

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{e}_j^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

da cui

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i = 0. \quad (276)$$

Poiché è

$$\mathbf{M} \mathbf{e}_i = \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i$$

la (276) si traduce nell'altra

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = 0. \quad (277)$$

Nulla invece può dirsi per il prodotto $\mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i$; e cioè i modi dinamici \mathbf{e}_i sotto carichi assiali sono ortogonali secondo la matrice ridotta \mathbf{K}_b , non secondo quella \mathbf{K} .

Dalla (273) si trae, per la (277),

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{f}}_0 = \sum_{j=1}^n a_{j0} \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_j = a_{0i} \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i$$

da cui

$$a_{0i} = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{f}}_0}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i}. \quad (278)$$

Per la (272) è

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 .$$

D'altro canto è

$$\mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

da cui

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{e}_i ,$$

e trasponendo

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{M}^{-1} = \omega_i^2 \mathbf{e}_i^T . \quad (279)$$

E' perciò

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{f}}_0 = \omega_i^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_0$$

e quindi (278)

$$a_{0i} = \frac{\omega_i^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_0}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i}$$

e ancora (275)

$$x_{0i} = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_q^2} \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_0}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i} .$$

Ponendo

$$r_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_q^2} \quad (280)$$

$$p_i = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_0}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i} , \quad (281)$$

rispettivamente *coefficiente di amplificazione* e *coefficiente di partecipazione* relativi al modo i -esimo, si può scrivere [(239), (269), (275)]

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) = & \sum_1^n (A_i \operatorname{sen} \omega_i t + B_i \operatorname{cos} \omega_i t) \mathbf{e}_i + \\ & + \operatorname{sen} \omega_q t \sum_1^n r_i p_i \mathbf{e}_i . \end{aligned} \quad (282)$$

Ogni modo perciò partecipa al moto secondo la sua frequenza propria ω_i (*moto libero*) e secondo la frequenza ω_q (*moto forzato*). Il moto secondo ω_q ha un'unica configurazione, di valore massimo

$$\mathbf{c}_{q0} = \sum_1^n r_i p_i \mathbf{e}_i . \quad (283)$$

Il prodotto $r_i p_i$ è la componente controvariante di \mathbf{c}_{q0} nella base dei modi dinamici; sia r_i che p_i sono dei numeri puri.

L'effetto di risonanza ($\omega_q = \omega_i$, e quindi $r_i = \infty$) si risente in \mathbf{c}_{q0} , e cioè nel moto secondo ω_q ; l'effetto instabilizzante ($\lambda = \lambda_i$) nel moto secondo le frequenze proprie.

5. Il caso dello scuotimento .

Scuotimento è un moto *rigido* del suolo. Sia esso dato da

$$s(t) = s_0 g(t) , \quad (284)$$

e si verifichi in senso orizzontale (fig. 20). Se v_i e w_i sono le componenti degli spostamenti delle masse rispetto al suolo, è da esse che di-

pendono le sollecitazioni interne. L'energia cinetica è (221)

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_1^p m_h [\dot{v}_h^2 + (\dot{w}_h + \dot{s})^2] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_1^p m_h (\dot{v}_h^2 + \dot{w}_h^2) + \\
 &+ \frac{1}{2} \dot{s}^2 \sum_1^p m_h + \dot{s} \sum_1^p m_h \dot{w}_h
 \end{aligned}$$

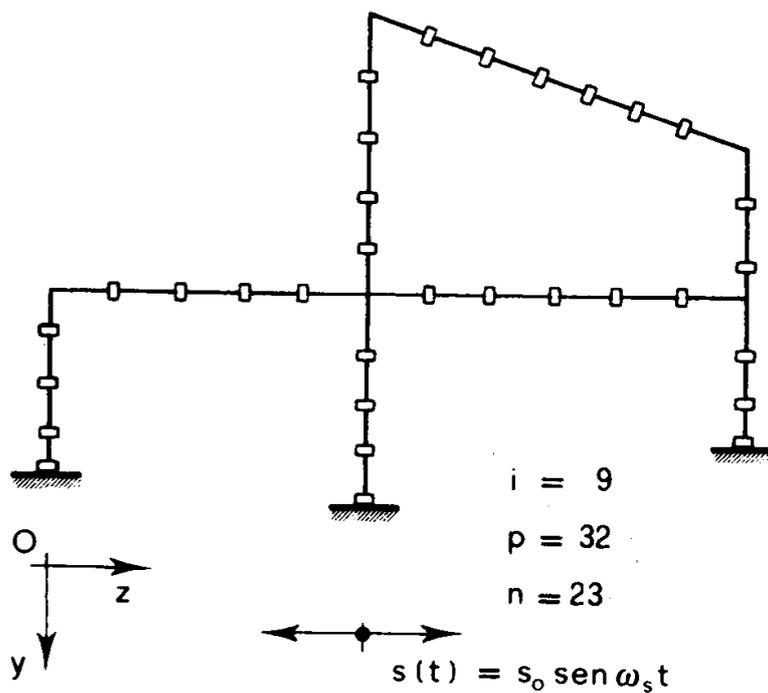


Figura 20

e cioè (223)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{c}} + \frac{1}{2} \dot{s}^2 \sum_1^p m_h + \dot{s} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}$$

ove

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix}$$

è la matrice colonna delle masse. Ed infatti

$$\sum_1^p m_h \dot{w}_h = \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{m} = \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{m} .$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono (225)

$$\mathbf{K}_b \mathbf{c}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{m} = 0 \quad (285)$$

e, premoltiplicando per \mathbf{M}^{-1} ,

$$\tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{c} + \ddot{\mathbf{c}} = -\dot{\mathbf{s}}^T \tilde{\mathbf{m}} = -\dot{\mathbf{g}}^T(t) s_0 \tilde{\mathbf{m}} , \quad (286)$$

ove

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_b &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_b \\ \tilde{\mathbf{m}} &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{m} . \end{aligned} \quad (287)$$

La (286) è formalmente analoga alla (266); da essa si trae che le dimensioni di \tilde{m}_j sono quelle di c_j , moltiplicate per l^{-1} ; quindi $s_0 \tilde{\mathbf{m}}$ è dimensionalmente equiparabile a \mathbf{c} .

Si ponga, se \mathbf{e}_i sono i modi dinamici,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_1^n x_i(t) \mathbf{e}_i \\ \tilde{\mathbf{m}} &= \sum_1^n p_i \mathbf{e}_i . \end{aligned} \quad (288)$$

La (286) si scrive così

$$\sum_1^n \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \sum_1^n x_i \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{e}_i = -\ddot{g}(t) s_0 \sum_1^n p_i \mathbf{e}_i$$

e, per la (256)

$$\sum_1^n \ddot{x}_i \mathbf{e}_i + \sum_1^n \omega_i^2 x_i \mathbf{e}_i = -\ddot{g}(t) s_0 \sum_1^n p_i \mathbf{e}_i$$

da cui, poiché le \mathbf{e}_i sono indipendenti, le n equazioni dissociate

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = -\ddot{g}(t) s_0 p_i. \quad (289)$$

Se $g(t)$ è sinusoidale

$$g(t) = \text{sen } \omega_s t \quad (290)$$

la (289) si scrive come segue

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_s^2 s_0 p_i \text{sen } \omega_s t; \quad (291)$$

un suo integrale particolare è

$$x_i = x_{0i} \text{sen } \omega_s t.$$

Sostituendo infatti nella (291) si ha

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 x_{0i} \text{sen } \omega_s t + \omega_i^2 x_{0i} \text{sen } \omega_s t &= \\ &= \omega_s^2 s_0 p_i \text{sen } \omega_s t \end{aligned}$$

da cui

$$x_{oi} = \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2 - \omega_s^2} s_0 p_i . \quad (292)$$

Dalla (288) si ha

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{m}} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_j = p_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i$$

da cui

$$p_i = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{m}}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i} . \quad (293)$$

La quantità p_i ha dimensioni $[l^{-1}]$, quindi x_{oi} è un numero puro. Si ha (287)

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{m} . \quad (294)$$

D'altro canto è

$$\mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{e}_i \quad (295)$$

e quindi

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i = \omega_i^2 \mathbf{e}_i$$

da cui, trasponendo (vedi pure la 279)

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{M}^{-1} = \omega_i^2 \mathbf{e}_i^T .$$

Dalla (294) si ha perciò

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \tilde{\mathbf{m}} = \omega_i^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m} \quad (296)$$

e quindi si ha l'altra espressione di p_i :

$$p_i = \omega_i^2 \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{K}_b \mathbf{e}_i}$$

e, per la (295) ,

$$p_i = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i} . \quad (297)$$

Si ha quindi [(288), (292)]

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) = & \sum_1^n (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) \mathbf{e}_i + \\ & + s_0 \omega_s^2 \sin \omega_s t \sum_1^n \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} p_i \mathbf{e}_i . \end{aligned} \quad (298)$$

La (298) dice che ogni modo partecipa al moto secondo la frequenza propria (*moto libero*) e secondo la frequenza dello scuotimento (*moto forzato*). Il moto forzato è tale che tutti i modi sono *sincroni* con lo scuotimento, e cioè ha un'unica configurazione, di valore massimo (*ampiezza*)

$$\mathbf{c}_{so} = s_0 \omega_s^2 \sum_1^n \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} p_i \mathbf{e}_i . \quad (299)$$

La quantità p_i è chiamata *coefficiente di partecipazione*, del modo i ; è fornita dalla (297), ed ha, come già detto, dimensioni di lunghezza a -1 .

Se il moto del suolo è in senso verticale, basta nella (297) sostituire \mathbf{W}^T con \mathbf{V}^T .

6. Le sollecitazioni interne generate dallo scuotimento.

Le sollecitazioni interne sono quelle connesse, in regime elastico, con gli spostamenti della struttura relativi al suolo. Ci si limita in genere al moto sincrono, e cioè alla seconda parte della (282), perché almeno a la longue, le oscillazioni libere si smorzano per attrito.

Si consideri (fig. 21a) la componente i -esima del moto forzato, con le sue forze statiche equivalenti, e cioè con le forze F_h^i ($h = 1, 2 \dots p$) che in regime elastico genererebbero gli spostamenti connessi con tale componente. Le F_h^i sono le forze statiche equivalenti connesse al modo i -esimo; esse sono univocamente definite dalle coordinate lagrangiane al tempo t . Si consideri poi (fig. 21b) il modo i -esimo in vibrazione libera, per $\text{sen } \omega_i t = 1$.

Il teorema di Betti consente di scrivere

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^p F_{hy}^i v_h^i + \sum_{h=1}^p F_{hz}^i w_h^i = \\ & = \sum_{h=1}^p m_h \omega_i^2 v_h^i \cdot s_0 \omega_s^2 \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} p_i v_h^i \text{sen } \omega_s t \quad (300) \\ & + \sum_{h=1}^p m_h \omega_i^2 w_h^i \cdot s_0 \omega_s^2 \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} p_i w_h^i \text{sen } \omega_s t \end{aligned}$$

ove v_h^i e w_h^i sono le componenti secondo y e z dello spostamento della massa h -esima nel modo e_i ; può porsi (219)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} e_i \quad (301)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} e_i .$$

Si osservi che se $\text{sen } \omega_i t = 1$ gli spostamenti del modo e_i sono massimi, e con essi le forze

$$F_{hy}^i = - m_h a_y = m_h \omega_i^2 v_h^i$$

$$F_{hz}^i = - m_h a_z = m_h \omega_i^2 w_h^i .$$

$$s_0 \omega_s^2 \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_s^2} p_i \text{sen } \omega_s t \bar{e}_i$$

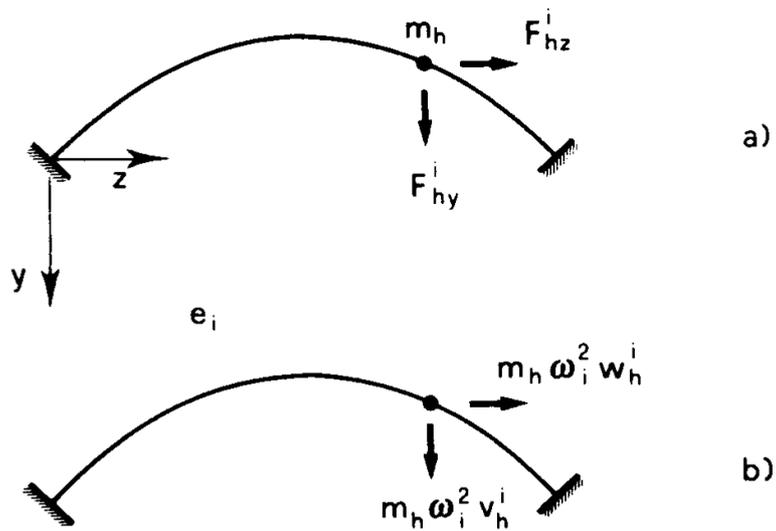


Figura 21

Ponendo

$$r_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_s^2} \tag{302}$$

dalle (300) si ha

$$\sum_{h=1}^p v_h^i (F_{hy}^i - s_0 \omega_s^2 r_i p_i m_h v_h^i \text{sen } \omega_s t) +$$

$$+ \sum_{h=1}^p w_h^i (F_{hz}^i - s_0 \omega_s^2 r_i p_i m_h w_h^i \text{sen } \omega_s t) = 0 .$$

Questa relazione deve essere valida per qualsiasi valore di t ; se ne trae che ogni parentesi è nulla, e quindi

$$F_{hy}^i = s_0 \omega_s^2 r_i p_i m_h v_h^i \text{ sen } \omega_s t \tag{303}$$

$$F_{hz}^i = s_0 \omega_s^2 r_i p_i m_h w_h^i \text{ sen } \omega_s t .$$

Le forze sono perciò sincrone allo scuotimento; i loro valori massimi si ottengono per $\text{sen } \omega_s t = 1$, e sono forniti da

$$F_y^i = s_0 \omega_s^2 r_i p_i M_p V e_i \tag{304}$$

$$F_z^i = s_0 \omega_s^2 r_i p_i M_p W e_i .$$

Nella tabella che segue sono riassunte le espressioni di p_i e delle forze equivalenti nel caso di scuotimento orizzontale e verticale,

	scuot. verticale	scuot. orizz. su z'	scuot. orizz. su z''
p_i	$\frac{e_i^T V^T m}{e_i^T M e_i}$	$\frac{e_i^T W'^T m}{e_i^T M e_i}$	$\frac{e_i^T W''^T m}{e_i^T M e_i}$
F_y^i	$g C r_i p_{iy} M_p V e_i$	$g C r_i p_{iz'} M_p V e_i$	$g C r_i p_{iz''} M_p V e_i$
$F_{z'}^i$	$g C r_i p_{iy} M_p W' e_i$	$g C r_i p_{iz'} M_p W' e_i$	$g C r_i p_{iz''} M_p W' e_i$
$F_{z''}^i$	$g C r_i p_{iy} M_p W'' e_i$	$g C r_i p_{iz'} M_p W'' e_i$	$g C r_i p_{iz''} M_p W'' e_i$

e nel caso più generale di strutture spaziali, in cui si può avere scuotimento secondo due rette ortogonali z' e z'' nel piano orizzontale.

In esse si è indicato con

$$g C = s_0 \omega_s^2 \tag{305}$$

l'accelerazione massima al suolo, posizione che consente di scrivere la (304) come segue

$$\mathbf{F}_y^i = g C r_i p_i M_p \mathbf{V} e_i \tag{306}$$

$$\mathbf{F}_z^i = g C r_i p_i M_p \mathbf{W} e_i .$$

Nel caso, molto interessante sul piano tecnico, dei telai piani (fig. 22) sono presenti solo le componenti orizzontali w . Si ha $n = p$,

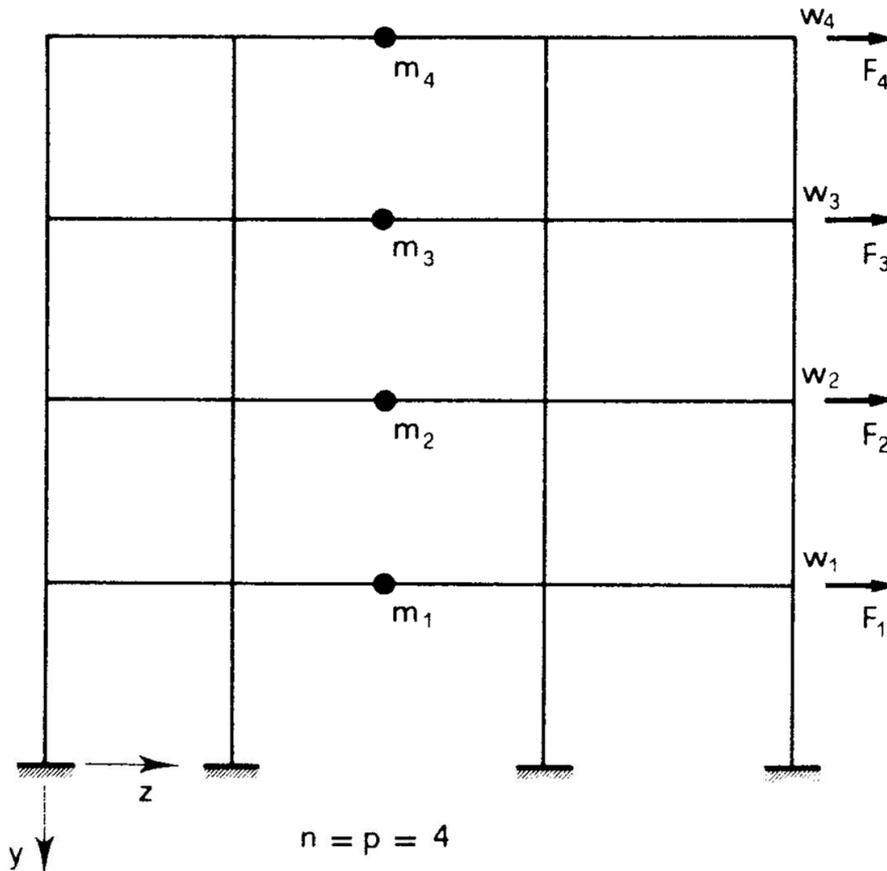


Figura 22

e assumendo come componenti lagrangiane gli spostamenti dei traversi è $V = 0$, e

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (307)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p ,$$

e quindi $p_{iy} = 0$, e $p_{iz} = p_i$. In particolare

$$p_i = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i} = \frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i}$$

e ancora

$$p_i = \frac{\sum_{k=1}^n m_k w_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k w_{ki}^2} . \quad (308)$$

Le forze sono orizzontali, e si ha

$$\mathbf{F}^i = g C r_i p_i \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_i = g C r_i p_i \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

e cioè

$$F_k^i = g C r_i p_i m_k w_k^i , \quad (309)$$

per $k, i = 1, 2, \dots, n$.

7. Il caso del sismo.

Quanto detto nel paragrafo precedente presuppone che il moto rigido del suolo sia sinusoidale, che gli spostamenti siano piccoli, e che siano nulli gli smorzamenti per attrito.

Nel caso del sismo i dati a disposizione sono gli spettri, e cioè i diagrammi (fig. 23) che forniscono le accelerazioni assolute

di più oscillatori semplici sotto sismo, in funzione del loro periodo proprio. Questi diagrammi rappresentano anche la forza equivalente

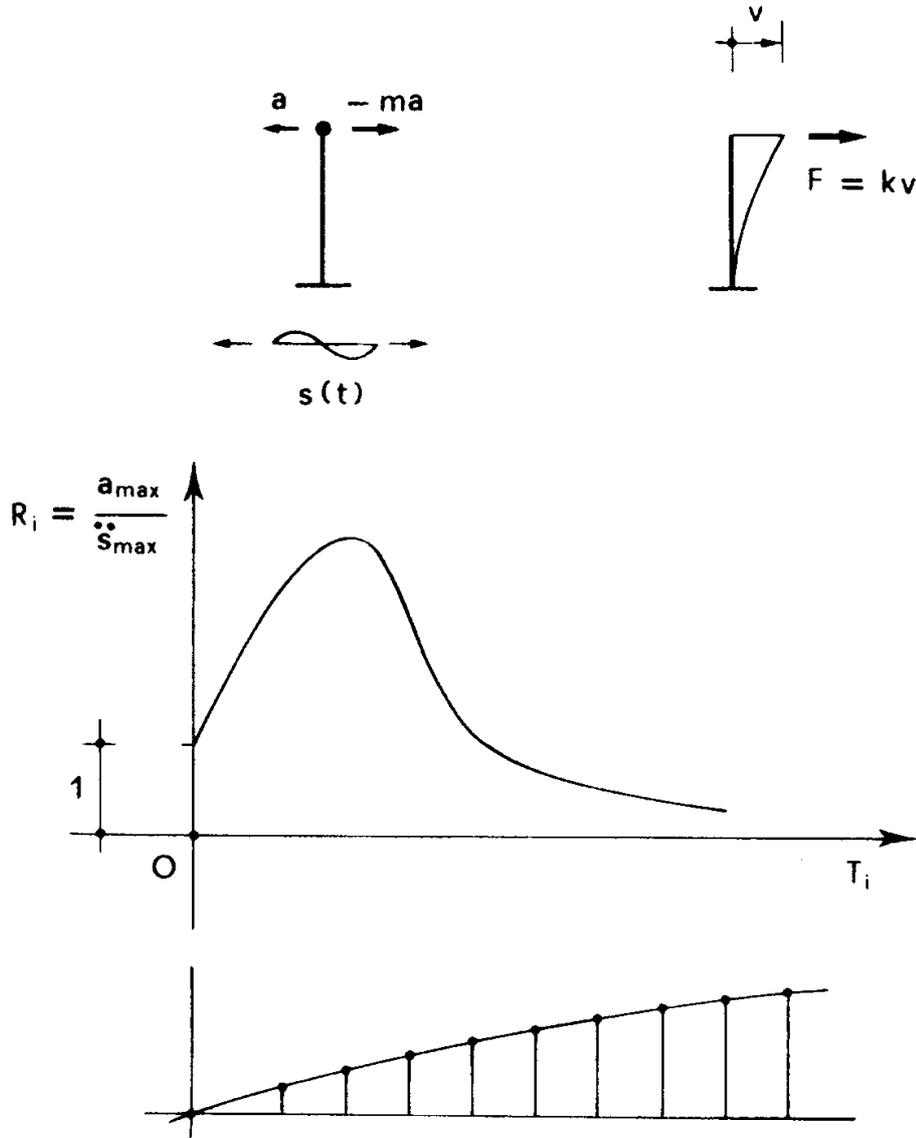


Figura 23

– e cioè il taglio – cui l'oscillatore è soggetto. L'equazione dell'oscillatore è

$$-ma = kv \quad (310)$$

e cioè

$$-m(\ddot{s} + \ddot{v}) = kv$$

da cui

$$\ddot{v} + \omega_i^2 v = -\ddot{s} \quad (311)$$

ove

$$\omega_i^2 = \frac{k}{m} . \quad (312)$$

Il diagramma $a(\omega_i)$ presenta il valore \ddot{s}_{\max}^* per $T_i \rightarrow 0$, e cioè per $\omega_i \rightarrow \infty$, perché (312) $k = \infty$ significa rigidità ∞ dell'oscillatore, che si muove quindi solidalmente al suolo. Esso poi tende a zero per $T_i \rightarrow \infty$, e cioè per $\omega_i \rightarrow 0$, perché $k = 0$ significa che il moto del suolo non trascina la massa.

Per l'oscillatore semplice è quindi, in modulo,

$$F_{\max} = m a_{\max} = m a(T_i) .$$

Chiamando $g C$ l'accelerazione \ddot{s}_{\max}^* , si può scrivere

$$F_{\max} = g C R_i m . \quad (313)$$

L'equazione del modo i -esima sotto \ddot{s}^* è (289)

$$\ddot{x}^i + \omega_i^2 x^i = -p_i \ddot{s}^* , \quad (314)$$

e le forze equivalenti massime, se il moto del suolo è sinusoidale, sono del tipo [(306) e (309)]

$$F_{\max} = g C r_i p_i m v_{\max} \quad (315)$$

Confrontando le (311) e (314) si osserva che l'equazione del moto del modo i coincide con quella dell'oscillatore semplice di pari frequenza propria, purché si assuma come accelerazione del suolo $p_i \ddot{s}^*$ invece di \ddot{s}^* . Si può estendere tale analogia alle forze equivalenti, considerando che l'accelerazione del suolo entra nella (313) attraverso il prodotto $g C R_i$, e nella (315) attraverso il prodotto $g C r_i p_i$;

ciò porta a confondere r_i con R_i . E' ciò che fanno le norme tecniche.

Si deve tener presente che, nel tipo di ragionamento ampiamente empirico che si è fatto, non si è parlato di sincronismo tra i moti dei vari modi, come accade invece quando lo scuotimento è di tipo sinusoidale. Ci si è limitati ad assegnare ad ogni modo la parte $p_i \ddot{s}$ dell'accelerazione; e ad adottare, pur in presenza di un moto del suolo di tipo qualsiasi – noto soltanto attraverso la sua accelerazione \ddot{s} , anzi attraverso le accelerazioni assolute degli oscillatori –, le formule (315) valide per scuotimento sinusoidale. Quindi non è lecito sommare le forze connesse con i singoli modi, e trarne la generica caratteristica interna M ; occorre invece, e tale è il consiglio delle norme tecniche, calcolare i valori M_i di M connessi con gli n modi, e farne la norma:

$$M = \sqrt{\sum_1^n M_i^2} . \quad (316)$$

Le leggi italiane (D.M. 3/3'75) forniscono C sotto la forma

$$C = \frac{S - 2}{100} \quad (317)$$

con S grado di sismicità. La R_i è poi imposta in

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{se } T_i \leq 0,8 \text{ sec} \\ \frac{0,862}{T_i^{2/3}} & \text{se } T_i > 0,8 \text{ sec} , \end{cases} \quad (318)$$

ed è chiamata *coefficiente di risposta*.

Nella fig. 24 è riportato in tratto intero la funzione $R_i(T_i)$; si osserva che esso non è altro che il diagramma R_i dell'accelerogramma a_{\max}/\ddot{s}_{\max} (fig. 23) tagliato alla quota $R_i = 1$.

Se si fa invece riferimento ad un sismo sinusoidale di periodo T_s , le (302) sono esatte, ed il diagramma r_i è riportato nella curva tratteggiata della fig. 24. L'espressione di r_i è

$$r_i = \frac{T_s^2}{|T_s^2 - T_i^2|} ; \quad (319)$$

si è preso il valore assoluto perché, trattandosi di un fenomeno oscillatorio, il segno di r_i non interessa. La (319) presenta il valore 1 in $T_i = 0$, e tende a zero per $T_i \rightarrow \infty$; c'è inoltre un asintoto in $T_i = T_s$. Tenendo conto degli smorzamenti per attrito, la curva si appiattisce, come si osserva nella curva a tratteggio misto; e si avvicina notevolmente al diagramma degli accelerometri, ed al diagramma (318) della normativa.

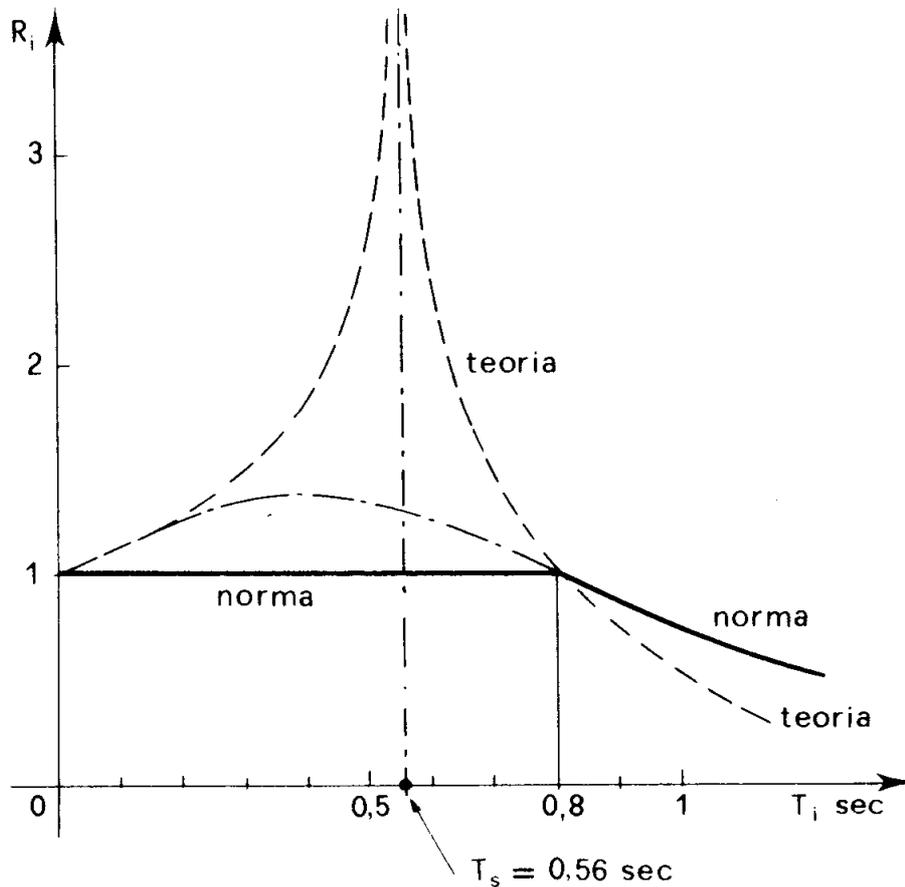


Figura 24

La curva (319) è stata disegnata, nella fig. 24, assumendo $T_s = 0,56$ sec.; così essa taglia la (318) sotto $T_i = 0,8$ sec.. Si ha in tal modo che le due curve (318) e (319) sono abbastanza prossime. Si può così obbedire alle norme senza dover ricorrere alla analo-

gia con l'oscillatore semplice, ma supponendo un sismo sinusoidale di opportuna frequenza.

8. Alcuni esempi.

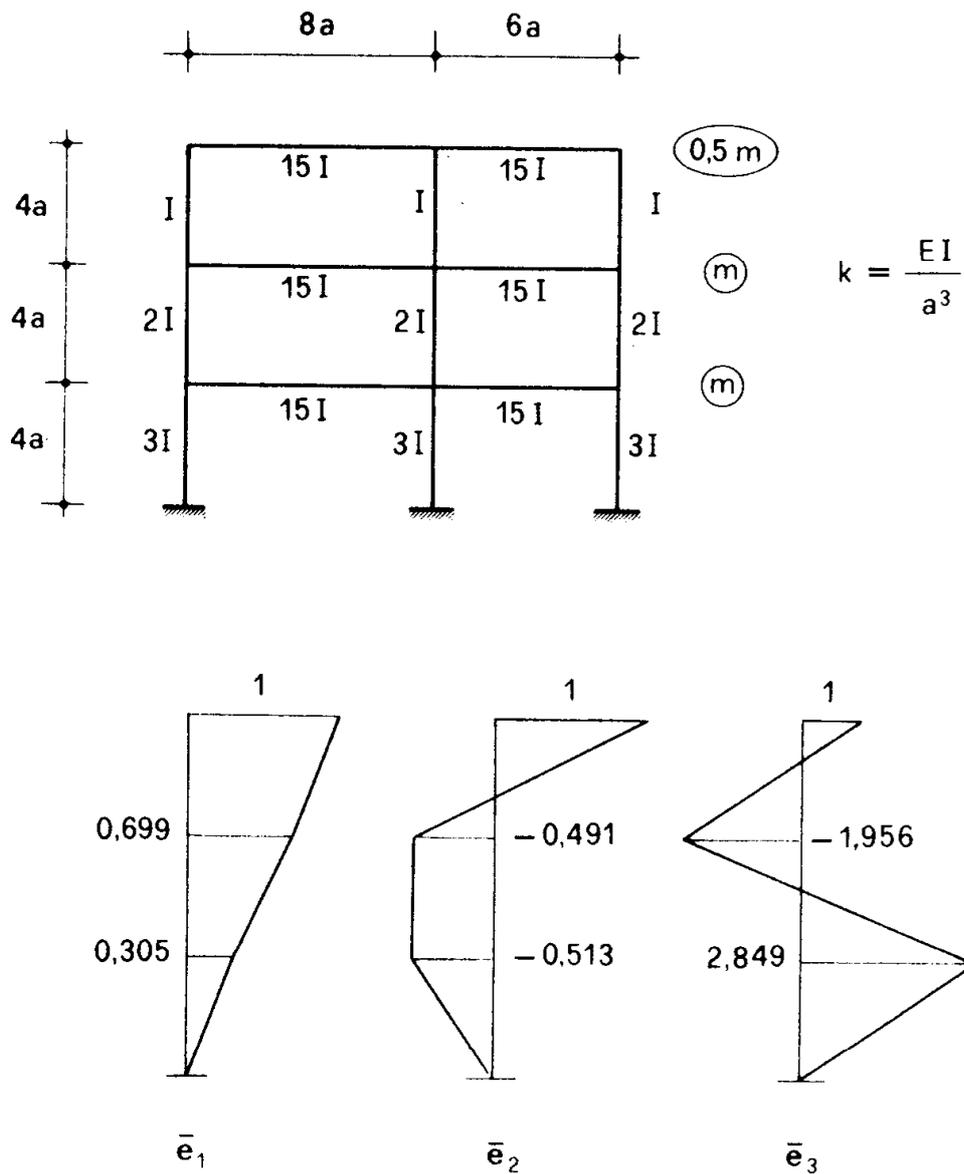


Figura 25

a) Si consideri il telaio dell'esempio 1 – 10b, disegnato nella fig. 6; le masse, m e $0,5 m$ sono concentrate sui traversi (fig. 25).

E' così

$$\mathbf{K} = k \begin{vmatrix} 2,684 & -1,120 & 0,049 \\ -1,120 & 1,555 & -0,555 \\ 0,049 & -0,555 & 0,510 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M} = m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \frac{k}{m} \begin{vmatrix} 2,684 & -1,120 & 0,049 \\ -1,120 & 1,555 & -0,555 \\ 0,098 & -1,110 & 1,020 \end{vmatrix} .$$

L'equazione secolare (230) ammette le tre radici

$$\omega_1^2 = 0,2735 \frac{k}{m} \text{ sec}^{-2}$$

$$\omega_2^2 = 1,5153 \frac{k}{m} \text{ sec}^{-2} \quad (320)$$

$$\omega_3^2 = 3,4701 \frac{k}{m} \text{ sec}^{-2}$$

e corrispondentemente i tre periodi

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 12,010 \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ sec.} \\
 T_2 &= 5,104 \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ sec.} \\
 T_3 &= 3,373 \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ sec.}
 \end{aligned}
 \tag{321}$$

I modi (non normalizzati) connessi ai tre autovalori(320) sono i seguenti, in metri:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} 0,3046 \\ 0,6993 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} -0,5129 \\ -0,4915 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} 2,8488 \\ -1,9558 \\ 1 \end{vmatrix}$$

I coefficienti di partecipazione (308) sono i seguenti

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1,504}{1,082} = 1,390 \text{ metri}^{-1} \\
 p_2 &= \frac{-0,504}{1,004} = -0,502 \text{ metri}^{-1} \\
 p_3 &= \frac{1,393}{12,440} = 0,112 \text{ metri}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{323}$$

I moduli di amplificazione siano calcolati per

$$\frac{m}{k} = 0,001 \text{ sec}^2, \quad T_s = 0,3 .$$

Si ha così (servono i valori assoluti)

$$r_1 = - \frac{274}{165} = - 1,66 \tag{324}$$

$$r_2 = - \frac{1515}{1076} = 1,41$$

$$r_3 = - \frac{3470}{3031} = 1,14 .$$

Le forze equivalenti sono quindi, per $C = 0,1$ (fig. 26 a)

$$\mathbf{F}_1 = gm \begin{vmatrix} - 0,0703 \\ - 0,1614 \\ - 0,1153 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 = gm \begin{vmatrix} 0,0363 \\ 0,0348 \\ - 0,0354 \end{vmatrix} \tag{325}$$

$$\mathbf{F}_3 = gm \begin{vmatrix} 0,0364 \\ - 0,0250 \\ 0,0064 \end{vmatrix}$$

Se si è in zona sismica $S = 12$, è $C = 0,1$; per le norme è $R \leq 1$, e quindi ci si pone in condizioni di sicurezza assumendo comunque $R = 1$. Le forze sono in tal caso le seguenti (fig. 26 b)

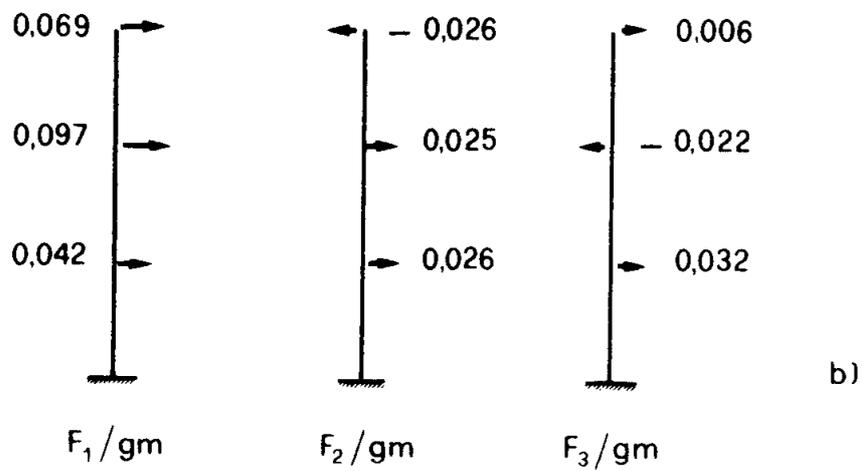
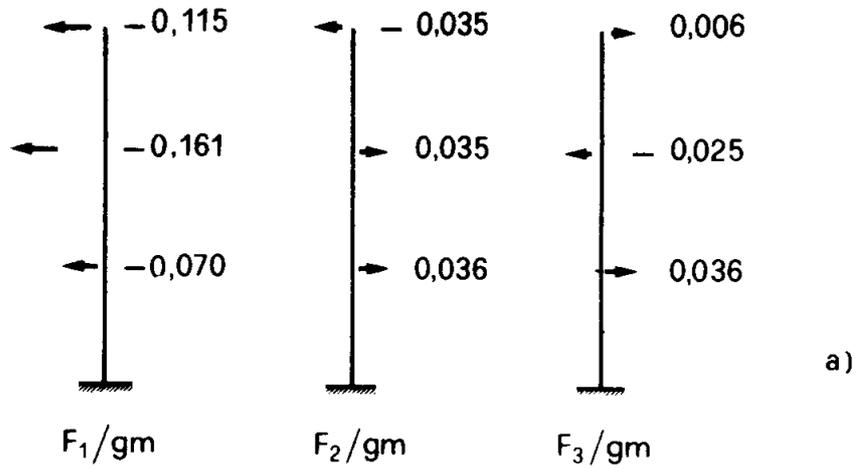


Figura 26

$$F_1 = 0,1 gm \cdot 1,390 \begin{vmatrix} 0,3046 \\ 0,6993 \\ 0,5 \end{vmatrix} = gm \begin{vmatrix} 0,0423 \\ 0,0972 \\ 0,0695 \end{vmatrix}$$

$$F_2 = -0,1 gm \cdot 0,502 \begin{vmatrix} -0,5129 \\ -0,4915 \\ 0,5 \end{vmatrix} = gm \begin{vmatrix} 0,0257 \\ 0,0247 \\ -0,0251 \end{vmatrix}$$

$$F_3 = 0,1 gm \cdot 0,112 \begin{vmatrix} 2,8488 \\ -1,9558 \\ 0,5 \end{vmatrix} = gm \begin{vmatrix} 0,0319 \\ -0,0219 \\ 0,0056 \end{vmatrix}$$

e quindi, in toto,

$$F = gm \begin{vmatrix} 0,100 \\ 0,100 \\ 0,050 \end{vmatrix}. \quad (326)$$

Il risultato (326) significa che le forze equivalenti sono pari al prodotto Cgm dell'accelerazione Cg del suolo per le masse. Ciò si spiega, perché $R_i = 1$ equivale ad $\omega_i = \infty$, e cioè $K = \infty$; in questo caso i movimenti relativi tra la struttura ed il suolo sono nulli.

b) Si consideri adesso l'arco già trattato in 1 - 10c (fig. 9), con le masse $m_1 m_2 m_3 m_4$ concentrate alle ascisse $z = \frac{1}{8}l, \frac{3}{8}l, \frac{5}{8}l, \frac{7}{8}l$ (fig. 27). Per esso si ha $n = 2, p = 4$. Le matrici di conversione sono fornite da

$$V = \frac{l}{4} \begin{vmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} \quad (327)$$

$$W = f \begin{vmatrix} -0,4375 & 0 \\ -0,3750 & -0,1875 \\ -0,1875 & -0,3750 \\ 0 & -0,4375 \end{vmatrix} . \quad (328)$$

La matrice delle masse è

$$M_p = m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} . \quad (329)$$

E' quindi

$$V^T M_p V = \frac{ml^2}{16} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{vmatrix} \quad (330)$$

$$W^T M_p W = \frac{mf^2}{16} \begin{vmatrix} 9,625 & -5,625 \\ -5,625 & 20,125 \end{vmatrix} . \quad (331)$$

Per $\frac{f}{l} = 0,4$ si ha quindi

$$M = \frac{ml^2}{16} \begin{vmatrix} 2,48 & 0,90 \\ 0,90 & 4,72 \end{vmatrix} . \quad (332)$$

Dalla (332) risulta

$$M^{-1} = \frac{16}{m l^2} \begin{vmatrix} 0,4332 & -0,0826 \\ -0,0826 & 0,2276 \end{vmatrix} .$$

Poiché (199)

$$K = \frac{k}{16} \begin{vmatrix} 320 & -240 \\ -240 & 320 \end{vmatrix} .$$

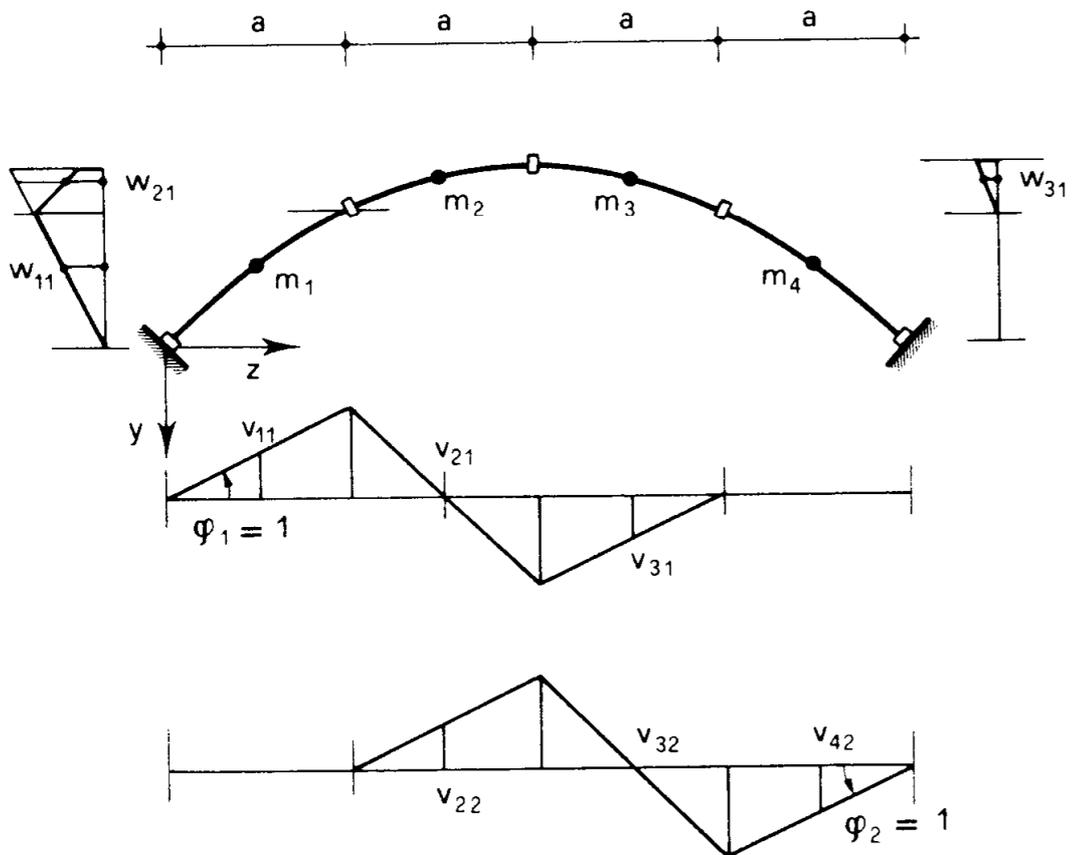


Figura 27

si ha (229)

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{k}{m l^2} \begin{vmatrix} 158,45 & -130,40 \\ -81,06 & 92,66 \end{vmatrix}.$$

L'equazione (230)

$$\det(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{I}) = 0 \quad (333)$$

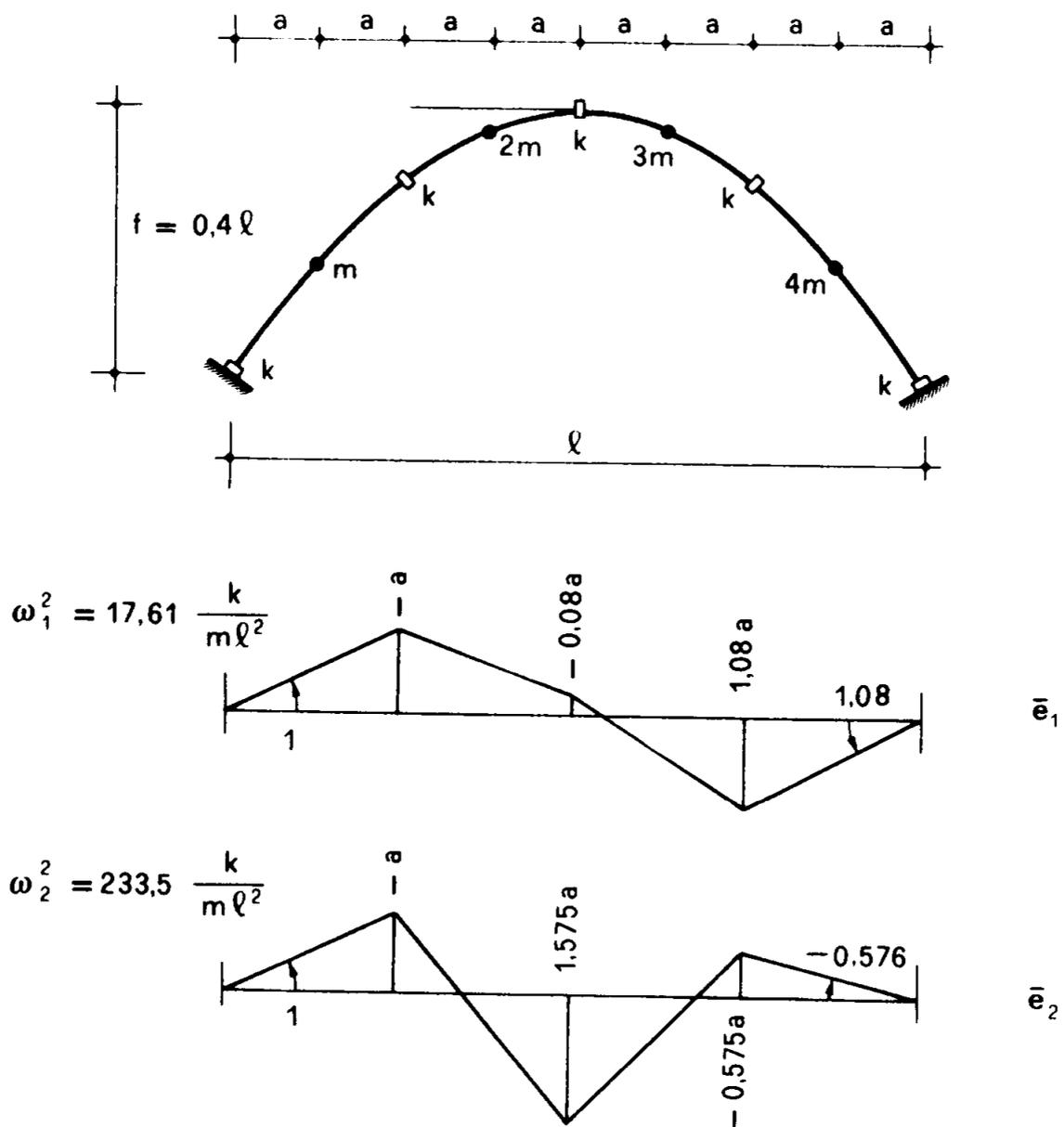


Figura 28

ha le soluzioni

$$\omega_1^2 = 17,61 \frac{k}{ml^2} \text{ sec}^{-2} \quad (334)$$

$$\omega_2^2 = 233,5 \frac{k}{ml^2} \text{ sec}^{-2} \quad (335)$$

cui corrispondono, per il sistema (226)

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{c} = 0 \quad (336)$$

le soluzioni, non normalizzate,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \varphi \\ 1,08 \varphi \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \varphi \\ -0,576 \varphi \end{vmatrix}. \quad (337)$$

La base dei modi dinamici (337) è disegnata nella fig. 28.
I coefficienti di partecipazione (297) sono i seguenti:

scuotimento orizzontale

$$1^\circ \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{M} \mathbf{e}_1} = -3,3904 \frac{1}{l}$$

$$2^\circ \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2} = 0,2594 \frac{1}{l}$$

scuotimento verticale

$$1^\circ \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{M} \mathbf{e}_1} = 0,8380 \frac{1}{l}$$

$$2^\circ \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2} = 0,5636 \frac{1}{l} .$$

Ponendo

$$l = 100 \text{ m}$$

$$m = 100 \text{ t m}^{-1} \text{ sec}^2$$

$$k = 10^6 \text{ tm}$$

si ha, secondo la norma sismica italiana ,

$$1^\circ \text{ modo} \quad T_1 = 1,498 \text{ sec.} \quad R_1 = 0,6584$$

$$2^\circ \text{ modo} \quad T_2 = 0,411 \text{ sec.} \quad R_2 = 1 .$$

Le forze staticamente equivalenti al sismo sono perciò (306) le seguenti :

scuotimento orizzontale

1° modo

forze verticali

$$- 0,6584 \text{ gC} \frac{3,3904}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_1 = \text{gCm} \begin{vmatrix} 0,2790 \\ 0,6027 \\ - 0,8371 \\ - 1,2054 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$- 0,6584 \text{ gC} \frac{3,3904}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_1 = \text{gCm} \begin{vmatrix} 0,3906 \\ 1,0313 \\ 1,5867 \\ 1,6875 \end{vmatrix}$$

scuotimento orizzontale

2° modo

forze verticali

$$gC \frac{0,2594}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_2 = gCm \begin{vmatrix} -0,0324 \\ 0,0374 \\ 0,0973 \\ -0,0747 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$gC \frac{0,2594}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{w} \mathbf{e}_2 = gCm \begin{vmatrix} -0,0454 \\ -0,0554 \\ 0,0089 \\ 0,1038 \end{vmatrix}$$

scuotimento verticale

1° modo

forze verticali

$$0,6584 gC \frac{0,8380}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_1 = gCm \begin{vmatrix} -0,0690 \\ -0,1490 \\ 0,2069 \\ 0,2979 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$0,6584 gC \frac{0,8380}{l} M_p w e_1 = gCm \begin{vmatrix} - 0,0966 \\ - 0,2549 \\ - 0,3922 \\ - 0,4171 \end{vmatrix}$$

scuotimento verticale

2° modo

forze verticali

$$gC \frac{0,5636}{l} M_p v e_2 = gCm \begin{vmatrix} - 0,0705 \\ 0,0812 \\ 0,2114 \\ - 0,1623 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$gC \frac{0,5636}{l} M_p w e_2 = gCm \begin{vmatrix} - 0,0986 \\ - 0,1204 \\ 0,0193 \\ 0,2254 \end{vmatrix}$$

Le forze suddette sono riportate nelle fig. 29, 30, a meno di gCm . Si nota che le forze di tipo antisimmetrico, sia verticali che orizzontali, predominano; e questo sia nel caso della scossa ondulatoria che in quello della scossa sussultoria. La prima dà effetti più grandi della seconda, nel nostro caso nel rapporto di circa 4 ad 1. E' perciò sufficiente, nel caso degli archi, considerare il solo sismo orizzontale; ed occorre tener presente che il carico sismico verticale è notevole,

e cioè dello stesso ordine di quello orizzontale, ma soprattutto è antisimmetrico, e cioè quanto di peggio possa accadere in un arco.

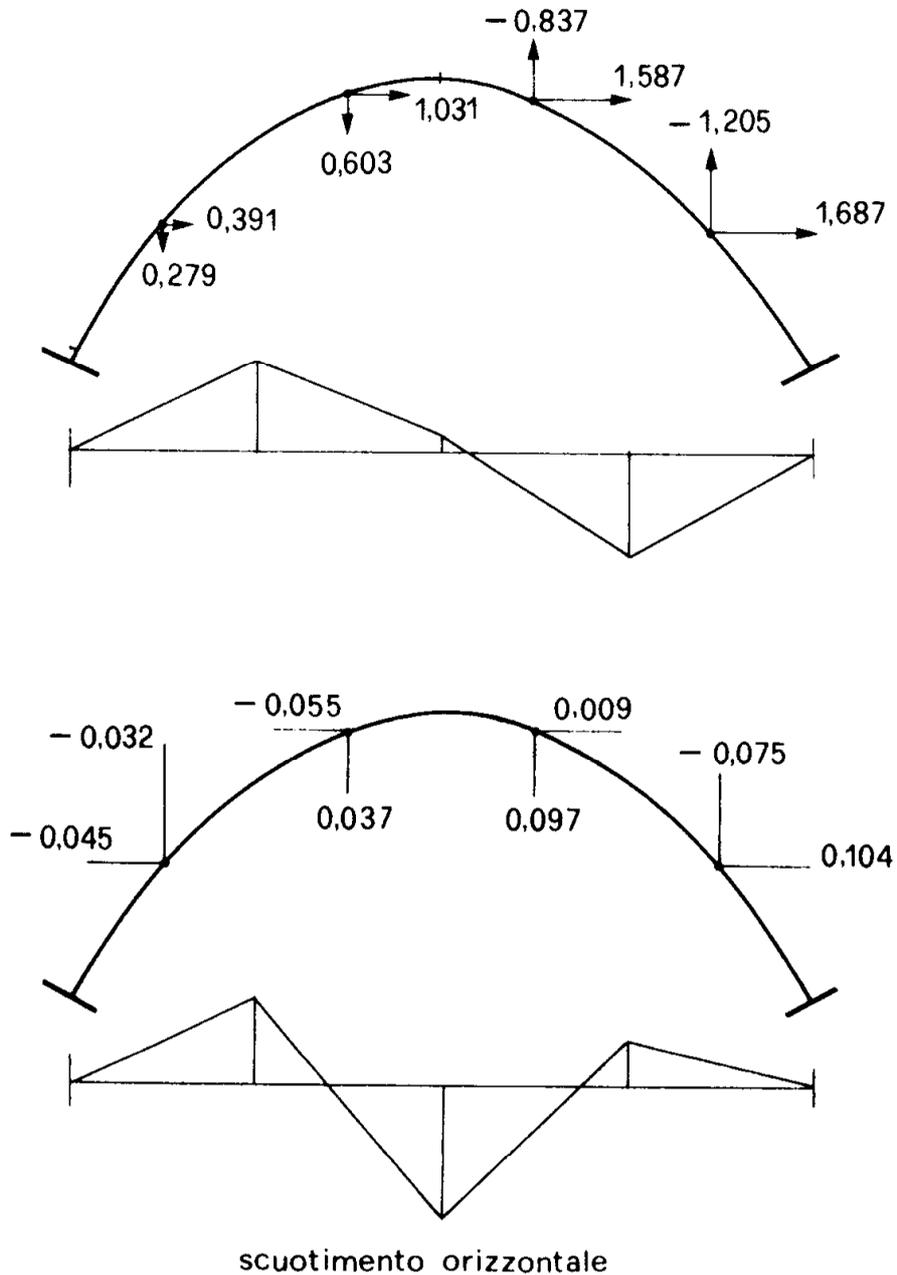


Figura 29

Si osservi pure che i numeri delle fig. 29 e 30 rappresentano le forze a meno di Cgm . Se la struttura fosse molto rigida, se cioè le masse avessero le stesse accelerazioni del suolo, le forze sarebbero,

per le quattro masse, proporzionali ad 1, 2, 3, 4, ma tutte nella stessa direzione del sismo. L'elasticità della struttura quindi decurta il valore delle forze, ma ne peggiora la situazione rispetto alla struttura.

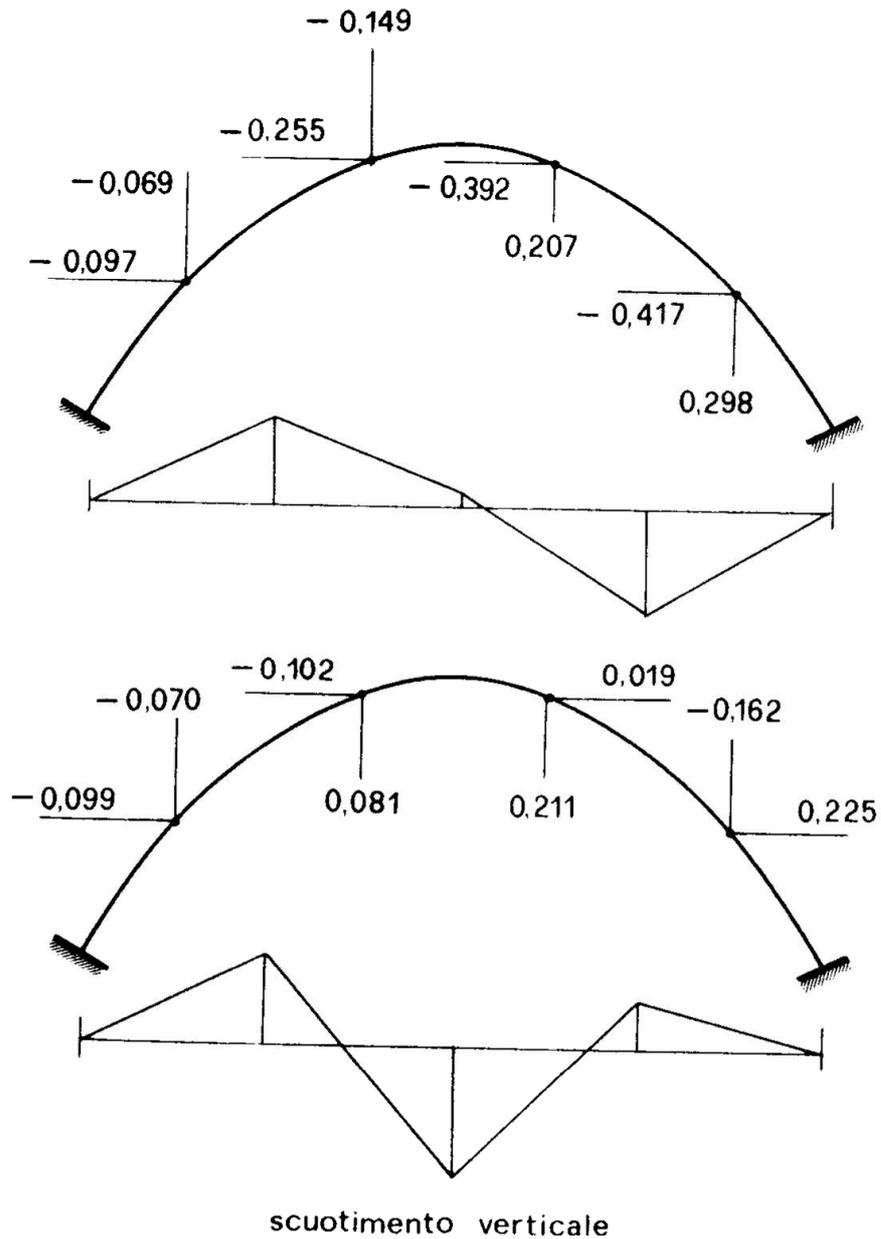


Figura 30

Sull'arco ora studiato agisce un peso proprio g uniformemente

distribuito. Sia $g = 10 \frac{k}{l^2}$, inferiore al valore critico, dato (fig. 17) da $17,78 \frac{k}{l^2}$. In questo caso è (257)

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{B}) ;$$

per il dato valore di g è (200)

$$\mathbf{B} = \frac{10k}{16l^2} \begin{vmatrix} 7fl + 3 \frac{l^3}{f} & -2fl - 2 \frac{l^3}{f} \\ -2fl - 2 \frac{l^3}{f} & 7fl + 3 \frac{l^3}{f} \end{vmatrix}$$

e cioè

$$\mathbf{B} = \frac{10k}{16} \begin{vmatrix} 7 \frac{f}{l} + 3 \frac{l}{f} & -2 \frac{f}{l} - 2 \frac{l}{f} \\ -2 \frac{f}{l} - 2 \frac{l}{f} & 7 \frac{f}{l} + 3 \frac{l}{f} \end{vmatrix} .$$

Per $\frac{f}{l} = 0,4$ \mathbf{B} si scrive

$$\mathbf{B} = \frac{k}{16} \begin{vmatrix} 103 & -58 \\ -58 & 103 \end{vmatrix}$$

e quindi (199)

$$\mathbf{K} - \mathbf{B} = \frac{k}{16} \begin{vmatrix} 217 & -182 \\ -182 & 217 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{k}{ml^2} \begin{vmatrix} 109,04 & -96,77 \\ -59,35 & 64,42 \end{vmatrix}.$$

L'equazione (230) ha le soluzioni

$$\omega_1^2 = 7,73 \frac{k}{ml^2} \text{ sec}^{-2} \quad (338)$$

$$\omega_2^2 = 165,73 \frac{k}{ml^2} \text{ sec}^{-2} \quad (339)$$

cui corrisponde la soluzione

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \varphi \\ 1,047 \varphi \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \varphi \\ -0,586 \varphi \end{vmatrix}. \quad (340)$$

Dal confronto tra le (334) (335) e (338) (339) si osserva come il carico assiale faccia diminuire le frequenze. Con i valori già adottati per l , m e k risulta

$$1^\circ \text{ modo} \quad T_1 = 2,26 \text{ sec} \quad R_1 = 0,2537$$

$$2^\circ \text{ modo} \quad T_2 = 1,54 \text{ sec} \quad R_2 = 0,4510.$$

I coefficienti di partecipazione sono i seguenti:

scuotimento orizzontale

$$1^{\circ} \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{M} \mathbf{e}_1} = -3,4572 \frac{1}{l}$$

$$2^{\circ} \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{W}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2} = 0,3246 \frac{1}{l}$$

scuotimento verticale

$$1^{\circ} \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{M} \mathbf{e}_1} = 0,8584 \frac{1}{l}$$

$$2^{\circ} \text{ modo} \quad \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{V}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2} = 0,5436 \frac{1}{l}$$

Le forze staticamente equivalenti sono

scuotimento orizzontale

1° modo

forze verticali

$$- 0,2537 gC \frac{3,4572}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_1 = gCm \begin{vmatrix} 0,1096 \\ 0,2296 \\ - 0,3289 \\ - 0,4591 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$- 0,2537 gC \frac{3,4572}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_1 = gCm \begin{vmatrix} 0,1535 \\ 0,4009 \\ 0,6106 \\ 0,6428 \end{vmatrix}$$

*scuotimento orizzontale**2° modo**forze verticali*

$$0,4510 \text{ gC} \frac{0,3246}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_2 = \text{gCm} \begin{vmatrix} -0,0183 \\ 0,0214 \\ 0,0549 \\ -0,0429 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$0,4510 \text{ gC} \frac{0,3246}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_2 = \text{gCm} \begin{vmatrix} -0,0256 \\ -0,0310 \\ 0,0057 \\ 0,0600 \end{vmatrix}$$

*scuotimento verticale**1° modo**forze verticali*

$$0,2537 \text{ gC} \frac{0,8584}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{V} \mathbf{e}_1 = \text{gCm} \begin{vmatrix} -0,0272 \\ -0,0570 \\ 0,0816 \\ 0,1140 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$0,2537 \text{ gC} \frac{0,8584}{l} \mathbf{M}_p \mathbf{W} \mathbf{e}_1 = \text{gCm} \begin{vmatrix} -0,0381 \\ -0,0995 \\ -0,1516 \\ -0,1596 \end{vmatrix}$$

scuotimento verticale

2° modo

forze verticali

$$-0,4510 gC \frac{0,5436}{l} M_p \mathbf{V} e_2 = gCm \begin{vmatrix} 0,0306 \\ -0,0359 \\ -0,0919 \\ 0,0718 \end{vmatrix}$$

forze orizzontali

$$-0,4510 gC \frac{0,5436}{l} M_p \mathbf{W} e_2 = gCm \begin{vmatrix} 0,0429 \\ 0,0520 \\ -0,0095 \\ -0,1005 \end{vmatrix}$$

Si riconosce come la presenza dello sforzo assiale valga a ridurre notevolmente le forze equivalenti, soprattutto per effetto dell'aumento del periodo, e quindi della diminuzione del coefficiente di risposta della norma.