$$\det \begin{vmatrix} -1{,}0964\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} - 3{,}303 & -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} \\ \\ -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} & 0{,}1118\,\dfrac{2ma^2\omega^2}{k} \end{vmatrix} = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$\omega_1^2 = -9{,}6929\,\frac{k}{ma^2}$$

$$\omega_2^2 = 0$$

Per $\alpha = 0$ la (154) si scrive

$$\omega^4 - 31{,}71\,\omega^2\,\frac{k}{ma^2} + 26{,}247\,\frac{k^2}{m^2a^4} = 0$$

le cui soluzioni

$$\omega_1^2 = 0{,}85\,\frac{k}{ma^2}$$

$$\omega_2^2 = 30{,}8\,\frac{k}{ma^2}$$

riproducono le (59).

Problema n. 8.

La trave rigido elastica della fig. 8 è a due gradi di libertà, i due conci elastici hanno la stessa rigidità flessionale k. Si vogliono studiare le vibrazioni libere, e quindi, essendo nulle le forze applicate, è $P = 0$. Si ha poi

$$\Delta\varphi_B = -2\varphi_1 - \varphi_2$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 + 2\varphi_2\,.$$

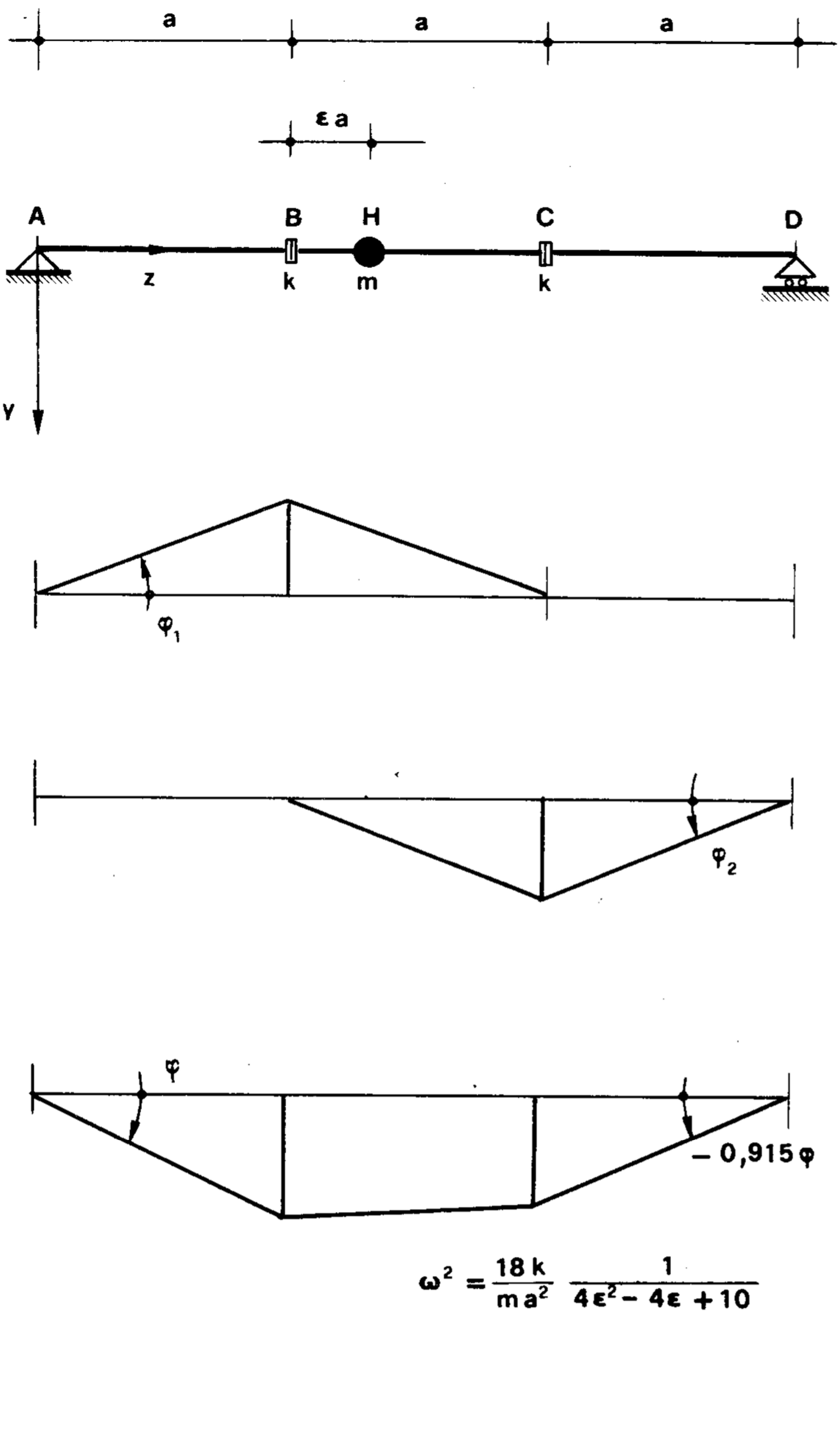
a
a
a
ε a
A
B
H
C
D
z
k
m
k
y
φ_1
φ_2
φ
$-0,915\,\varphi$
$\omega^2 = \dfrac{18\,k}{m\,a^2}\ \dfrac{1}{4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 10}$

Figura 8

e quindi

$$L = \frac{k}{2} (\Delta \varphi_B)^2 + \frac{k}{2} (\Delta \varphi_C)^2 =$$

$$= \frac{k}{2} (5 \varphi_1^2 + 5 \varphi_2^2 + 8 \varphi_1 \varphi_2) .$$

D'altro canto è pure

$$v_H = - a \varphi_1 (1 - \epsilon) + a \varphi_2 \epsilon =$$

$$= - a (\varphi_1 - \varphi_1 \epsilon - \varphi_2 \epsilon)$$

da cui

$$T = \frac{m \dot{v}_H^2}{2} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1 \epsilon - \dot{\varphi}_2 \epsilon)^2 .$$

Si ha perciò

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1 \epsilon - \dot{\varphi}_2 \epsilon)^2 - \frac{k}{2} (5 \varphi_1^2 + 5 \varphi_2^2 + 8 \varphi_1 \varphi_2)$$

e le (10) si scrivono

$$ma^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_1 \epsilon - \ddot{\varphi}_2 \epsilon) (1 - \epsilon) + \frac{k}{2} (10 \varphi_1 + 8 \varphi_2) = 0$$

$$- ma^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_1 \epsilon - \ddot{\varphi}_2 \epsilon) \epsilon + \frac{k}{2} (8 \varphi_1 + 10 \varphi_2) = 0 .$$

Si tenti con una soluzione del tipo (48)

$$\begin{aligned} \varphi_1 (t) &= \varphi_1 \, sen \, \omega t \\ \varphi_2 (t) &= \varphi_2 \, sen \, \omega t . \end{aligned} \qquad (156)$$

La posizione (156) fa scrivere le (155) come segue:

$$sen\ \omega t \left[- ma^2 \omega^2 \ (\varphi_1 - \varphi_1 \epsilon - \varphi_2 \epsilon)\ (1 - \epsilon) + \frac{k}{2} (10 \varphi_1 + 8 \varphi_2) \right] = 0$$

$$sen\, \omega t \left[\ ma^2 \omega^2 \ (\varphi_1 - \varphi_1 \epsilon \quad \varphi_2 \epsilon) \qquad + \frac{k}{2} \ (8 \varphi_1 + 10 \varphi_2) \right] = 0$$

Queste sono soddisfatte se e solo se i due fattori di *sen* ωt sono nulli, se cioè

$$[- ma^2 \omega^2 \ (1 - \epsilon)^2 \quad + 5k] \quad \varphi_1 \quad + [\quad ma^2 \omega^2 \quad (1 - \epsilon)\ \epsilon + 4k]\ \varphi_2 = 0$$

$$[\quad ma^2 \omega^2 \ (1 - \epsilon) \quad \epsilon + 4k] \quad \varphi_1 \quad + [- ma^2 \omega^2 \epsilon^2 \qquad + 5k]\ \varphi_2 = 0 \ .$$

Questo sistema si scrive anche

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left[(1 - \epsilon)^2 - \frac{5k}{ma^2 \omega^2} \right] - \varphi_2 \left[\epsilon \ (1 - \epsilon) + \frac{4k}{ma^2 \omega^2} \right] &= 0 \\ - \varphi_1 \left[\epsilon \ (1 - \epsilon) \ + \frac{4k}{ma^2 \omega^2} \right] + \varphi_2 \left[\epsilon^2 \qquad - \frac{5k}{ma^2 \omega^2} \right] &= 0 \end{aligned} \qquad (157)$$

Perchè tale sistema abbia soluzione non banale occorre e basta che il determinante dei coefficienti sia nullo:

$$\det \begin{vmatrix} (1 - \epsilon)^2 - \dfrac{5k}{ma^2 \omega^2} & - \epsilon\ (1 - \epsilon) - \dfrac{4k}{ma^2 \omega^2} \\ - \epsilon\ (1 - \epsilon) - \dfrac{4k}{ma^2 \omega^2} & \epsilon^2 - \dfrac{5k}{ma^2 \omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

E' questa un'equazione del secondo grado in ω^2, che con la posizione

$$A = \frac{k}{2 ma^2 \omega^2}$$

si scrive

$$A^2 - A \frac{4\epsilon^2 - 4\epsilon + 10}{36} = 0 .$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$A = 0$$

$$A = \frac{4\epsilon^2 - 4\epsilon + 10}{36} ,$$

da cui si ottengono le due soluzioni per ω^2:

$$\omega^2 = \infty$$
$$\omega^2 = \frac{18k}{ma^2 (4\epsilon^2 - 4\epsilon + 10)} . \qquad (158)$$

La soluzione $\omega^2 = \infty$, sostituita nel sistema (157), fornisce

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} ;$$

tale risultato però non ha interesse pratico, perchè frequenza infinitamente grande equivale a dire che non possono esistere spostamenti.

La soluzione finita di ω^2 fornisce invece

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\epsilon^2 + 8\epsilon + 16}{\epsilon^2 - \epsilon - 20} ;$$

nella fig. 8 è disegnata la deformata, a meno di una costante, per $\epsilon = 0{,}3$, e quindi $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -0{,}915$. Per quanto già detto, questa è l'unica possibile soluzione.

Per $\epsilon = 0{,}5$, la (158) fornisce

$$\omega^2 = \frac{2k}{ma^2} .$$

Si osservi, a tale proposito, che una forza F nella mezzeria della trave induce uno spostamento $s = \dfrac{Fa^2}{2k}$, e quindi la massa m è soggetta al richiamo elastico $F = - \dfrac{2k}{a^2}\, s = - k's$. L'equazione del moto di m è

$$F - ma = 0$$

e cioè

$$- k's = ma \, .$$

Ponendo

$$s\,(t) = s \; sen \; \omega t$$

si ha

$$- k's \; sen \; \omega t = - m \omega^2 s \; sen \; \omega t$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{k'}{m} = \frac{2k}{ma^2} \, . \tag{159}$$

Vale questa *osservazione generale.* Se il numero p delle masse (vedi prob. 4, punto a) è minore del numero n delle coordinate lagrangiane, la deformata della struttura è definita dagli spostamenti delle masse, poichè si è in presenza di una struttura sulla quale le forze possono agire soltanto in corrispondenza delle masse, e cioè in p punti definiti. Quindi, limitatamente a questo caso particolare, possono essere assunti come parametri lagrangiani gli spostamenti dei p punti suddetti. Ne deriva che la matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ (32) coincide con la matrice $\mathbf{M}$ delle masse (24), e quindi è diagonale.

Nel problema che segue sarà appunto trattato un classico caso in cui $p < n$, ove anzi la struttura è in realtà ad un numero infinito di gradi di libertà.

Problema n. 9.

Si vogliono studiare le vibrazioni libere del telaio della fig. 9; i due traversi sono rigidi, e su di essi sono concentrate le masse del sistema. Si ricordi che in una trave con EI costante, di luce l, uno spostamento relativo δ tra gli estremi non accompagnato da rotazioni degli stessi estremi induce una energia di deformazione pari a $\dfrac{6\,EI}{l^3}\,\delta^2$(*). Quindi nel caso

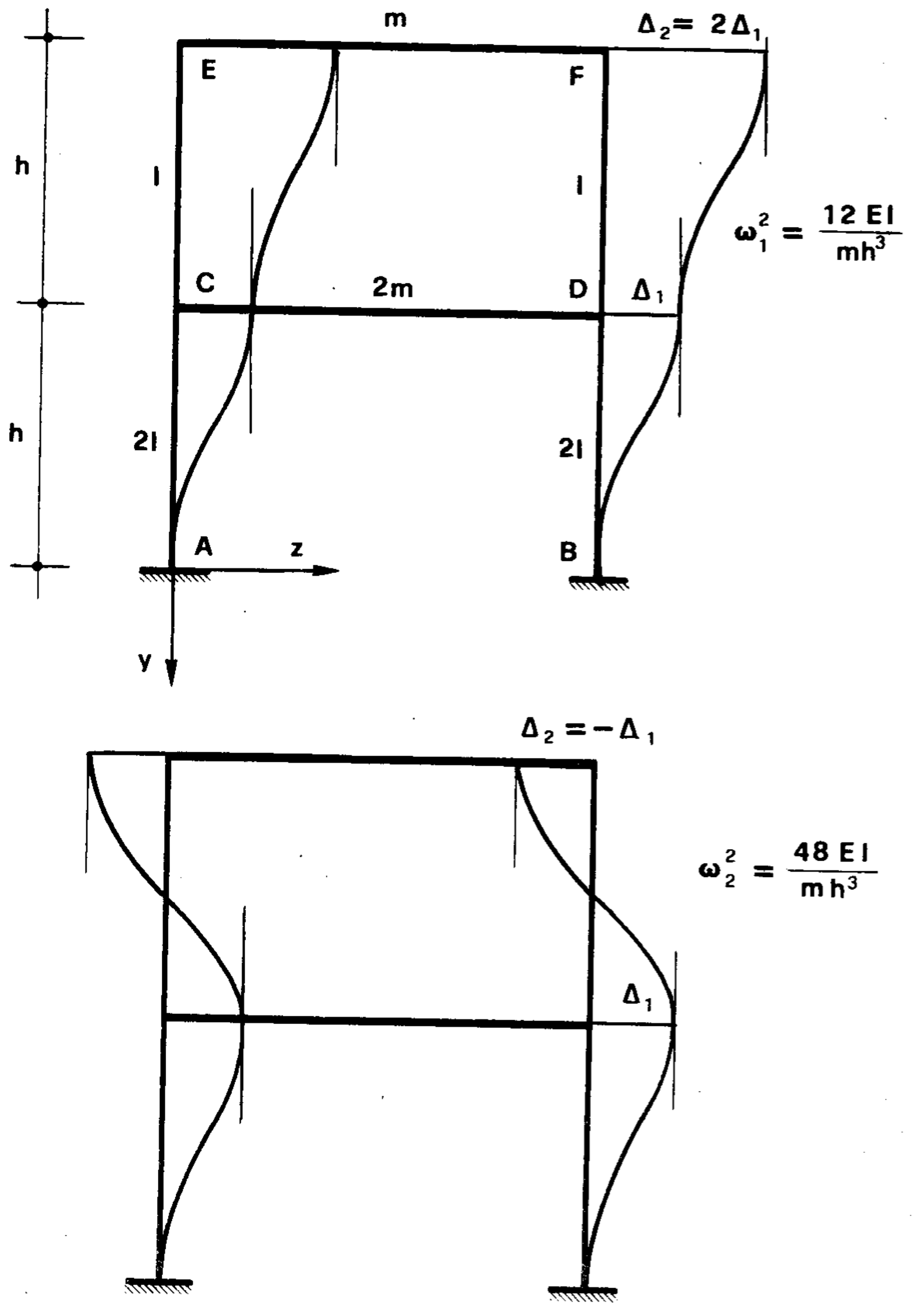

Figura 9.

(*) Se la trave è AB, lo spostamento relativo δ provoca le coppie d'incastro $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = \dfrac{6EI}{l^2}\,\delta$, e quindi

$$L = \frac{1}{2}\;A\,\varphi A + \frac{1}{2}\quad B\,\varphi B = \frac{6EI\delta}{l^2}\;\frac{\delta}{l} = \frac{6EI}{l^3}\,\delta^2\;.$$

$$\begin{vmatrix} sen\ \alpha l & Sh\ \alpha l \\ -\ sen\ \alpha l & Sh\ \alpha l \end{vmatrix} = 0$$

e cioè ancora

$$sen\ \alpha l\ Sh\ \alpha l = 0$$

che è soddisfatta da

$$\alpha l = n\,\pi$$

e quindi da

$$\alpha^4 = \frac{n^4\,\pi^4}{l^4} \quad .$$

Paragonando questa espressione alla (174) risulta

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad , n \in N \, . \tag{177}$$

La (177) fornisce gli *autovalori* della seconda delle (172), ad ognuno dei quali corrisponde la soluzione

$$v^* = A_n\ sen\ \frac{n\pi z}{l}\ , \tag{178}$$

definita a meno di una costante. L'integrale generale della (169) è perciò

$$v = \Sigma\, A_n\ sen\ \frac{n\pi z}{l}\ sen\,(\omega_n t - \varphi_n)\ ; \tag{179}$$

i valori delle A_n e delle φ_n sono fissati se sono date le condizioni *iniziali.*

c) Se la trave è *incastrata in B e libera in A* le condizioni ai limiti sono

$$z = 0\ :\ v^{*''} = 0, \qquad v^{*'''} = 0$$

$$z = l\ :\ v^{*} \ = 0, \qquad v^{*'} \ = 0$$

in esame può scriversi

$$L = 2\,\frac{6E \cdot 2I}{h^3}\,\Delta_1^2 + 2\,\frac{6EI}{h^3}\,(\Delta_2 - \Delta_1)^2 =$$

$$= \frac{12\,EI}{h^3}\,(3\,\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\,\Delta_1\,\Delta_2)\ .$$

dove Δ_1 e Δ_2 sono gli spostamenti dei traversi, scelti come coordinate lagrangiane del sistema. Così pure è

$$T = \frac{1}{2}\,(2m\,\dot{\Delta}_1^2 + m\,\dot{\Delta}_2^2) = m\,\dot{\Delta}_1^2 + \frac{m}{2}\,\dot{\Delta}_2^2\ .$$

La (10) fornisce le due equazioni

$$2m\ddot{\Delta}_1 + \frac{12EI}{h^3}\,(\ \ 6\Delta_1 - 2\Delta_2) = 0$$

$$m\ddot{\Delta}_2 + \frac{12\,EI}{h^3}\,(-\,2\Delta_1 + 2\Delta_2) = 0\ .$$

La posizione tipo (48) consente di scrivere

$$\Delta_1\,(t) = \Delta_1 \cdot sen\,\omega t$$

$$\Delta_2\,(t) = \Delta_2 \cdot sen\,\omega t \tag{160}$$

e conduce al sistema algebrico

$$-\,2m\omega^2\,\Delta_1 + \frac{12EI}{h^3}\,(\ \ 6\Delta_1 - 2\Delta_2) = 0$$

$$m\omega^2\,\Delta_2 + \frac{12EI}{h^3}\,(-\,2\Delta_1 + 2\Delta_2) = 0\ . \tag{161}$$

Posto

$$\frac{m\,\omega^2\,h^3}{12\,EI} = \alpha$$

il sistema (161) si scrive

$$-\;2\alpha\Delta_1 + 6\Delta_1 - 2\Delta_2 = 0$$

$$-\;\alpha\Delta_2 - 2\Delta_1 + 2\Delta_2 = 0$$

ed ordinando

$$\begin{aligned} \Delta_1\,(6-2\alpha) - 2\Delta_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -\,2\Delta_1 \qquad\qquad + \;\Delta_2\,(2-\alpha) &= 0\,. \end{aligned} \tag{162}$$

La condizione di esistenza di soluzioni non banali è

$$\begin{vmatrix} 6-2\alpha & -2 \\ -2 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

equazione di secondo grado in α le cui radici sono

$$\alpha = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

cui corrisponde

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{12\,EI}{m\,h^3} \\ \omega_2^2 &= \frac{48\,EI}{m\,h^3}\,. \end{aligned} \tag{163}$$

Ad $\alpha = 1$ corrisponde la soluzione del sistema (162)

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 2 \ ,$$

ad $\alpha = 4$ la soluzione

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -1 .$$

La stessa struttura della fig. 9 sia sollecitata alla base da una distorsione secondo l'asse z fornita da

$$\Delta(t) = \Delta \, sen \, \omega_q t \ .$$

L'espressione di T diviene

$$T = \frac{1}{2}\left[2m(\dot{\Delta}_1 + \dot{\Delta})^2 + m(\dot{\Delta}_2 + \dot{\Delta})^2\right] =$$

$$= m\dot{\Delta}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{\Delta}_2^2 + 2m\dot{\Delta}_1\dot{\Delta} + m\dot{\Delta}_2\dot{\Delta} + \frac{3}{2}m\dot{\Delta}^2 \ .$$

La (10) porge quindi le due equazioni

$$2\ddot{\Delta}_1 + 2\ddot{\Delta} + \frac{12\,EI}{mh^3}(6\Delta_1 - 2\Delta_2) = 0$$

$$\ddot{\Delta}_2 + \ddot{\Delta} + \frac{12\,EI}{mh^3}(2\Delta_2 - 2\Delta_1) = 0 \ .$$

La posizione (160), e l'altra

$$\alpha_q = \frac{m\,\omega_q^2\,h^3}{12\,EI} \ , \tag{164}$$

conducono al sistema

$$\Delta_1\,(6 - 2\alpha_q) - 2\Delta_2 \qquad\qquad = 2\,\alpha_q\,\Delta$$

$$-\,2\Delta_1 \qquad\qquad + \quad \Delta_2\,(2 - \alpha_q) = \quad \alpha_q\,\Delta\,,$$

la cui soluzione è

$$\Delta_1 = \Delta\,\frac{3\alpha_q - \alpha_q^2}{4 - 5\alpha_q + \alpha_q^2}$$

$$\Delta_2 = \Delta\,\frac{5\,\alpha_q - \alpha_q^2}{4 - 5\alpha_q + \alpha_q^2} \qquad (165)$$

Si verifica che per $\omega_q = \omega_1$ ($\alpha_q = 1$) ed $\omega_q = \omega_2$ ($\alpha_2 = 4$) si ha $\Delta_1 = \Delta_2 = \infty$.

Così pure per $\omega_q = 0$ ($\alpha_q = 0$) è $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, e ciò è naturale perchè se il moto è lentissimo la struttura è trascinata senza deformarsi. Se invece è $\omega_q = \infty$ ($\alpha_q = \infty$) è $\Delta_1 = \Delta_2 = -\,\Delta$; anche ciò è naturale, poichè se il moto è velocissimo le due masse non si spostano.

Si vuole adesso dare un esempio numerico. Sia $h = 4m$; sia inoltre $P = 15.000\ Kg$ il peso gravante sul traverso superiore (solaio + traverso), da cui

$$m = \frac{P}{g} = 15{,}29\ Kg\ cm^{-1}\ sec^2$$

Il ritto AC sia costituito da un profilato HE 140 B cui corrisponde

$$I = 1509\ cm^4\ .$$

E' allora

$$\omega_1^2 = \frac{12 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1509}{15{,}29 \cdot 16 \cdot 10^6} \qquad = 148{,}03\ sec^{-2}$$

$$\omega_2^2 = 4\,\omega_1^2 \qquad\qquad = 592{,}12\ sec^{-2}$$

da cui

$$\omega_1 = 12{,}16 \; sec^{-1}$$

$$\omega_2 = 24{,}32 \; sec^{-1} \; .$$

E' quindi

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1{,}93 \; sec^{-1}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3{,}86 \; sec^{-1}$$

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 0{,}52 \; sec.$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 0{,}26 \; sec.$$

Problema n. 10.

a) Si voglia determinare l'equazione differenziale del moto della trave AB della fig. 10, ad asse rettilineo, di cui sia assegnata la legge di variazione con z del prodotto EI e della *densità lineare di massa* μ (intendendo per tale una funzione per cui $dm = \mu\,(z)\,dz$, ove dm è la massa del tronco di lunghezza dz all'ascissa z). Le condizioni di vincolo (condizioni ai limiti) possono essere qualsiasi, anche se nella figura 10 sono stati adottati degli appoggi.

Sulla trave agisce un assegnato carico trasversale $q\;(z,\;t)$; inoltre esistono forze assiali dipendenti da un parametro λ, tali da generare uno sforzo normale $\lambda\; N\;(z)$, e applicate in punti solidali all'asse durante il movimento, sì da non generare, per effetto del movimento stesso, coppie *applicate*.

Sulla trave possono anche agire coppie distribuite $m_f\;(z,\;t)$ di tipo flettente.

Si consideri l'equilibrio alla rotazione del tronco di lunghezza dz all'ascissa z; tale tronco è stato disegnato in fig. 10 nella sua posizione deformata, e nell'ipotesi che tutti gli enti siano positivi. Trascurando l'energia cinetica di rotazione, si ha

$$dM - T\,dz + \lambda\,N\,dv + m_f dz = 0$$

da cui, dividendo per *dz*,

$$M' - T + \lambda N v' + m_f = 0 \ . \tag{166}$$

Poichè è

$$T' = -(q - \mu \ddot{v})$$

la (166) può scriversi, derivando una volta,

$$M'' + \lambda (N v')' + q - \mu \ddot{v} + m_f' = 0 \ . \tag{167}$$

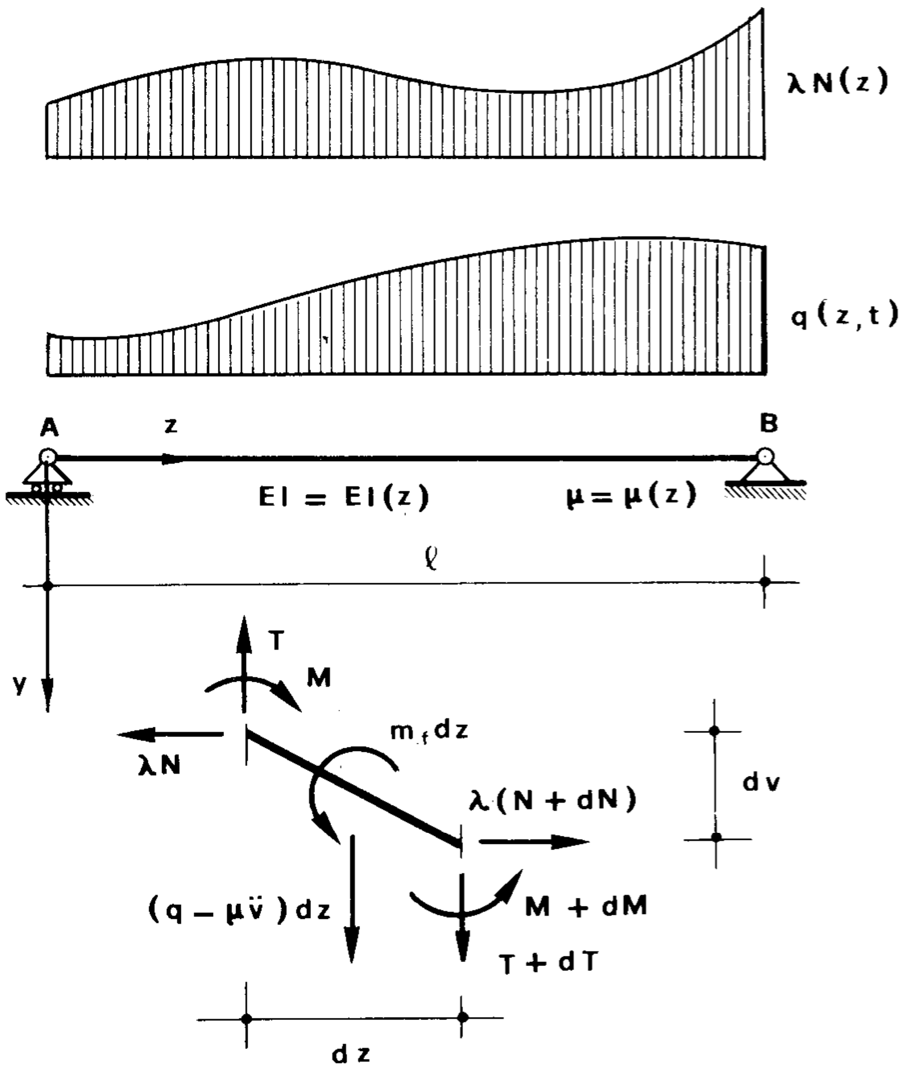

Figura 10.

In virtù della relazione

$$M = - EI\, v''$$

la (167) si scrive infine

$$(EI\,v'')'' - \lambda\,(N v')' - q - m_f' + \mu \ddot{v} = 0\ . \tag{168}$$

La (168) è l'equazione generale del moto; essa è di immediato impiego se $EI = cost$, $\mu = cost$, $N = cost = -F$ (carico assiale F concentrato nell'estremo A). In caso contrario è conveniente adottare la classica strada delle equazioni di Lagrange.

b) Sia $EI = cost$, $\mu = cost$, $F = 0$, $q = 0$, $m_f = 0$; la (168) si scrive in tal caso

$$EI\,v^{IV} + \mu \ddot{v} = 0\ , \tag{169}$$

ed è questa l'equazione delle *vibrazioni libere* di una trave *omogenea di sezione costante*. La posizione

$$v\,(z,\ t) = g\,(t) \cdot v^*\,(z) \tag{170}$$

permette di scrivere la (169) nella forma

$$g \cdot EI\,v^{*IV} + \ddot{g} \cdot \mu\,v^* = 0$$

ed ancora

$$-\frac{g}{\ddot{g}} = \frac{\mu}{EI}\,\frac{v^*}{v^{*IV}}\ . \tag{171}$$

La (171) implica che i due rapporti siano indipendenti sia dal tempo che dall'ascissa; il valore comune di questo rapporto si chiami ω^2. Si ha quindi la coppia di equazioni a variabili separate

$$\begin{aligned} &\ddot{g} + \omega^2 g = 0 \\ &v^{*IV} - \frac{\omega^2 \mu}{EI}\,v^* = 0\ . \end{aligned} \tag{172}$$

La prima assicura che il moto è armonico, di pulsazione ω.
L'integrale generale della seconda è

$$v^* = A \; sen \; \alpha z + B \cos \alpha z + C \; Sh \; \alpha z + D \; Ch \; \alpha z \; , \tag{173}$$

dove

$$\alpha^4 \doteq \frac{\omega^2 \mu}{EI} \; . \tag{174}$$

Occorre, per determinare le quattro costanti (a meno di un comune fattore di proporzionalità) ed α^4, scrivere quattro condizioni; queste sono le condizioni di vincolo (*ai limiti*). Se la trave è *appoggiata agli estremi* si ha

$$\begin{aligned} z = 0 \;&:\; v^* = 0, \qquad v^{*''} = 0 \\ z = l \;&:\; v^* = 0, \qquad v^{*''} = 0 \end{aligned} \tag{175}$$

Tali condizioni, scritte mediante la (173), porgono

$$\begin{array}{rrrrl} & B & & + \; D & = 0 \\ & -\alpha^2 B & & + \alpha^2 D & = 0 \\ A \; sen \; \alpha l \; + & B \cos \alpha l \; + & C \; Sh \; \alpha l \; + & D \; Ch \; \alpha l & = 0 \\ -\alpha^2 A \; sen \; \alpha l \; - & \alpha^2 B \cos \alpha l \; + \alpha^2 & C \; Sh \; \alpha l & + \alpha^2 D \; Ch \; \alpha l & = 0 \end{array}$$

che è un sistema omogeneo algebrico di quattro equazioni nelle quattro incognite $ABCD$. Perchè esso ammetta soluzioni non banali occorre e basta che sia

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 & \alpha^2 \\ sen \; \alpha l & \cos \alpha l & Sh \; \alpha l & Ch \; \alpha l \\ -\alpha^2 \; sen \; \alpha l & -\alpha^2 \cos \alpha l & \alpha^2 \; Sh \; \alpha l & \alpha^2 \; Ch \; \alpha l \end{vmatrix} = 0 \, . \tag{176}$$

La soluzione $\alpha = 0$ è da scartare, poichè porterebbe (173) a

$$v^* = B + D = 0 \; ;$$

la condizione (176), per $\alpha \neq 0$, si scrive

$$\begin{vmatrix} sen\ \alpha l & Sh\ \alpha l \\ -\ sen\ \alpha l & Sh\ \alpha l \end{vmatrix} = 0$$

e cioè ancora

$$sen\ \alpha l\ Sh\ \alpha l = 0$$

che è soddisfatta da

$$\alpha l = n\pi$$

e quindi da

$$\alpha^4 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} .$$

Paragonando questa espressione alla (174) risulta

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad , n \in N . \tag{177}$$

La (177) fornisce gli *autovalori* della seconda delle (172), ad ognuno dei quali corrisponde la soluzione

$$v^* = A_n\ sen\ \frac{n\pi z}{l} , \tag{178}$$

definita a meno di una costante. L'integrale generale della (169) è perciò

$$v = \Sigma\ A_n\ sen\ \frac{n\pi z}{l}\ sen\ (\omega_n t - \varphi_n) \ ; \tag{179}$$

i valori delle A_n e delle φ_n sono fissati se sono date le condizioni *iniziali.*

c) Se la trave è *incastrata in B e libera in A* le condizioni ai limiti sono

$$z = 0 \ : \ v^{*''} = 0, \quad v^{*'''} = 0$$

$$z = l \ : \ v^* = 0, \quad v^{*'} = 0$$

che attraverso la (173) porgono

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & -\alpha^2 B & & & & +\alpha^2\, D. & & = 0 \\
-\alpha^3\, A & & & & +\alpha^3\, C & & & & = 0 \\
A\ sen\ \alpha l & + & B\ cos\ \alpha l & + & C\ Sh\ \alpha l & + & D\ Ch\ \alpha l & & = 0 \\
\alpha\ A\ cos\ \alpha l & - & \alpha\ B\ sen\ \alpha l & + & \alpha\ C\ Ch\ \alpha l & + & \alpha\ D\ Sh\ \alpha l & & = 0\ .
\end{array}
$$

La condizione di esistenza di soluzioni non banali è

$$
\det \begin{vmatrix} 0 & -\alpha^2 & 0 & \alpha^2 \\ -\alpha^3 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ sen\ \alpha l & cos\ \alpha l & Sh\ \alpha l & Ch\ \alpha l \\ \alpha\ cos\ \alpha l & -\alpha\ sen\ \alpha l & \alpha\ Ch\ \alpha l & \alpha\ Sh\ \alpha l \end{vmatrix} = 0
$$

che si riduce alla

$$1 + cos\ \alpha l\ Ch\ \alpha l = 0\ .$$

I primi autovalori sono dati da

n	αl	ω
1	1,8751040	$3{,}5160\ \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$
2	4,6940911	$22{,}0345\ \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$
3	7,8547574	$61{,}6972\ \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$
4	10,9955406	120,9019 "
5	14,1371682	199,8595 "
6	17,2787595	298,5555 "
7	20,4203522	416,9907 "

Problema n. 11.

Si vogliono studiare le vibrazioni libere della trave della fig. 11, con $EI = cost$, $\mu = cost$, soggetta ad una forza F assiale in A (fig. 11). La (168) si scrive

$$EI\, v^{IV} + F v'' + \mu \ddot{v} = 0 \,. \tag{180}$$

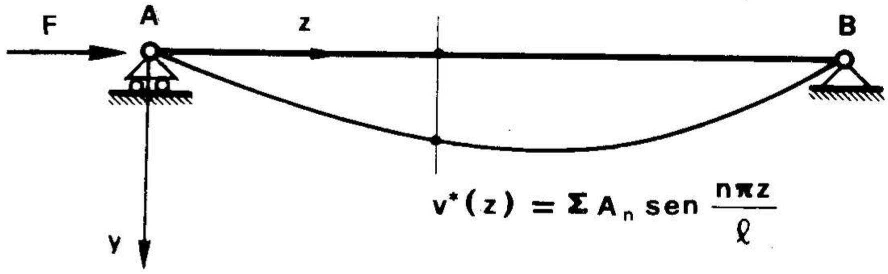

Figura 11.

La posizione (170) traduce la (180) nelle due

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

$$EI\, v^{*IV} + F v^{*''} - \omega^2 \mu v^* = 0 \,.$$

La seconda può scriversi

$$v^{*IV} + \frac{F}{EI} v^{*''} - \frac{\omega^2 \mu}{EI} v^* = 0 \,,$$

ed ancora

$$v^{*IV} + \beta^2 v^{*''} - \alpha^4 v = 0 \tag{181}$$

dove si è posto

$$\beta^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} \,. \tag{182}$$

Una soluzione della (181) è

$$v_n^* = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \; ; \tag{183}$$

sostituendo questo valore nella (181) si ha, dopo eliminazione di $A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}$,

$$\frac{n^4\pi^4}{l^4} - \beta^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} - \alpha^4 = 0$$

da cui

$$\alpha^4 = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\left(1 - \beta^2 \frac{l^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Per la (182) si ha perciò

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}\left(1 - F\frac{l^2}{EI\,\pi^2 n^2}\right)} . \tag{184}$$

Poichè per $n \in N$ la sommatoria delle (183) costituisce, *nel caso in esame*, l'intero sviluppo in serie di Fourier della deformata v^*, le (183) sono le sole autofunzioni del problema, e quindi le (184) sono tutte le possibili pulsazioni.

Le (184) coincidono con le (177), a meno del fattore in parentesi: quindi nella trave a due appoggi la presenza dello sforzo assiale gioca nel senso di aumentare la rigidezza se di trazione, diminuirla se di compressione.

Si osserva che ai valori di F corrispondenti alla successione

$$F_{cn} = n^2\pi^2 \frac{EI}{l^2}, \quad n \in N \tag{185}$$

si associano valori nulli di ω_n; in questo caso la soluzione α non è da scartare, come nel problema precedente, perchè ad essa non si associa $v^* = 0$. Come già fatto osservare nel problema n. 2, frequenza nulla significa passaggio da stabilità ad instabilità.

I valori (185) sono i ben noti carichi critici euleriani; la (184), in funzione di essi, si scrive

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu} \left(1 - \frac{F}{F_{cn}}\right)}. \tag{186}$$

Problema n. 12.

Nel problema n. 10 si è tratta l'equazione generale del moto di una trave; si vuole adesso affrontare lo stesso problema attraverso le equazioni di Lagrange. Il procedimento è in genere approssimato, e consiste nel porre $v\ (z)$ pari alla somma di n funzioni $v_i\ (z)$ soddisfacenti le condizioni di congruenza ai limiti, moltiplicata ciascuna per una costante A_i; così la struttura è assimilata ad un'altra ad n gradi di libertà, e le A_i sono le coordinate lagrangiane.

Si intuisce che tale procedimento fa operare su una struttura più vincolata di quella reale, e quindi conduce sempre a frequenze più alte delle vere; così pure si intuisce che l'approssimazione conseguita migliora aumentando il numero n delle funzioni approssimanti. Del resto, la materiale risoluzione della (168) porta in genere a procedimenti simili, e ad analoghe approssimazioni.

Si ha così, facendo riferimento alla trave appoggiata ai due estremi della fig. 10, ed utilizzando il procedimento di Fourier:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \ sen \ \frac{i\pi z}{l}, \tag{187}$$

da cui

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{v}^2 \, dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_i \dot{v}_j \int_0^l \mu \ sen \ \frac{i\pi z}{l} \ sen \ \frac{j\pi z}{l} \, dz, \tag{188}$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l EI \, (v'')^2 \, dz = \frac{\pi^4}{2\, l^4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 \, v_i v_j \int_0^l EI \ sen \ \frac{i\pi z}{l} \ sen \ \frac{j\pi z}{l} \, dz. \tag{189}$$

L'energia potenziale connessa con il carico trasversale q si ottiene sviluppando prima $q\ (z,\ t)$ in serie di Fourier

$$q\,(z,\ t) = \sum_{i=1}^{n} q_i\,(t)\ sen\ \frac{i\,\pi\,z}{l}\ ; \tag{190}$$

è così

$$P = -\int_0^l q\,v\,dz = -\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} q_i\,v_i \int_0^l sen\ \frac{i\,\pi\,z}{l}\ sen\ \frac{j\,\pi\,z}{l}\ dz.$$

Per la nota relazione

$$\int_0^l sen\ \frac{i\,\pi\,z}{l}\ sen\ \frac{j\,\pi\,z}{l}\ dz = \frac{l}{2}\cdot\delta_i^j \tag{191}$$

può scriversi

$$P = -\frac{l}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\,v_i\ . \tag{192}$$

Così pure l'energia potenziale connessa con le coppie m_f si ottiene prima sviluppando m_f in serie di Fourier

$$m_f\,(z,\ t) = \sum_{i=1}^{n} m_{fi}\,(t)\ cos\ \frac{i\,\pi\,z}{l}$$

e poi scrivendo

$$P = -\int_0^l m_f\,\varphi\,dz = \int_0^l m_f\,v'\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{l}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} j\,m_{fi}\,v_j \int_0^l cos\ \frac{i\,\pi\,z}{l}\ cos\ \frac{j\,\pi\,z}{l}\ dz\ .$$

La (191) è valida anche ponendo *cos* al posto di *sen*, quindi

$$P = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n} i\ m_{fi}\,v_i\ . \tag{193}$$

Per quanto riguarda il carico assiale, si consideri il tronco all'ascissa z, e di lunghezza dz; esso è sollecitato dalla forza assiale $\lambda\, N(z)$ ed i suoi estremi si avvicinano di

$$\frac{\varphi^2}{2}\, dz = \frac{(v')^2}{2}\, dz \;;$$

quindi per esso è

$$dP = \frac{\lambda}{2}\, N\, (v')^2\, dz \;.$$

Si può perciò scrivere

$$P = \frac{\lambda}{2} \int_0^l N(v')^2\, dz \;; \tag{194}$$

sviluppando $N(z)$ in serie di Fourier

$$N(z) = \sum_{i=1}^{n} N_i\, sen\, \frac{i\pi z}{l}$$

risulta

$$P = \frac{F\pi^2}{2l^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j\,k\,N_i v_j v_k \int_0^l sen\, \frac{i\pi z}{l}\, cos\, \frac{j\pi z}{l}\, cos\, \frac{k\pi z}{l}\, dz \;. \tag{195}$$

Dopo aver effettuato le quadrature, risulta così in ogni caso che T è una forma quadratica, in genere completa, delle $\dot{v}_i$, ed L una forma quadratica, in genere completa, delle v_i; P è una forma lineare delle v_i in presenza di carichi trasversali, una forma quadratica in presenza di carichi assiali. Il problema è così integralmente ricondotto a quello dei sistemi ad n gradi di libertà.

Se $EI = cost$ e $\mu = cost$, e se $N(z) = -F$, la faccenda si semplifica. In tal caso infatti le (189) e (188) porgono, per le (191)

$$T = \frac{\mu l}{4} \sum_{i=1}^{n} \dot{v}_i^2 \tag{196}$$

$$L = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum_{i=1}^{\pi} i^4 v_i^2 \tag{197}$$

mentre la (192) fornisce

$$P = - \frac{F}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij\, v_i v_j \int_0^l sen \frac{i \pi z}{l}\, sen \frac{j \pi z}{l}\, dz$$

e quindi ancora

$$P = - \frac{F \pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{n} i^2 v_i^2 \; ; \tag{198}$$

e cioè le forme quadratiche contengono solo i termini canonici.

Se si vogliono le vibrazioni libere, è $P = 0$, e, per le (196) e (197), la (10) fornisce

$$\mu \frac{l}{2} \ddot{v}_i + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2 l^3} v_i = 0 \; . \tag{199}$$

Le n equazioni di Lagrange, contengono quindi ciascuna una sola incognita, e sono perciò risolubili ognuna per suo conto; ciò, oltre a semplificare di molto il problema sul piano numerico, porta anche ad una soluzione esatta del problema stesso, poichè dalla generica (127) si trae il generico termine dello sviluppo completo di $v\ (z,\ t)$ in serie di Fourier.

La solita posizione

$$v_i\,(z,\ t) = v_i^*\,(z) \cdot g_i\,(t)$$

permette di scindere la generica (199) nelle due

$$\begin{aligned} &\ddot{g}_i + \omega_i^2 g_i = 0 \\ &- \omega_i^2 \mu \frac{l}{2} v_i + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2 l^3} v_i = 0 \; . \end{aligned} \tag{200}$$

La prima delle (200) assicura che il moto dell'armonica v_i^* è armonico, di pulsazione ω_i; dalla seconda si ricava

$$\omega_i^2 = \frac{\pi^4 n^4 EI}{\mu l^4} \ .$$

coincidente con la (177).

Se esiste una forza assiale F nell'estremo A, si genera uno sforzo normale $N = -F$; la (10) fornisce (vedi (198))

$$\mu \frac{l}{2} \ddot{v}_i + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2l^3} v_i - \frac{F\pi^2 i^2}{2l} v_i = 0 \ ,$$

e quindi, operando come sopra, si ha

$$-\omega_i^2 \mu \frac{l}{2} v_i + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2l^3} v_i - \frac{F\pi^2 i^2}{2l} v_i = 0$$

da cui

$$\omega_i^2 = \frac{\pi^4 i^4 EI}{\mu l^4} \left(1 - \frac{Fl^2}{i^2 \pi^2 EI}\right) \tag{201}$$

coincidente con la (184).

Se esiste anche un carico trasversale q, la (10) fornisce (vedi (192))

$$\mu \frac{l}{2} \ddot{v}_i + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2l^3} v_i + \frac{F\pi^2 i^2}{2l} v_i = \frac{l}{2} q_i \ . \tag{202}$$

Si faccia l'ipotesi che la q_i varii nel tempo con legge armonica di pulsazione ω_s:

$$q_i(t) = q_{i0} \ sen \ \omega_s t \ ;$$

ciò avviene, per esempio, se il carico q totale varia con legge armonica nel tempo, mantenendo inalterata la forma. In tal caso ω_s è la stessa per tutte le q_i.

Una soluzione della (202) è allora

$$v_i = v_{i0} \ sen \ \omega_s t \ , \tag{203}$$

che sostituita nella (202) fornisce

$$\mu\,\omega_s^2\,\frac{l}{2}\,v_{i0} + \frac{\pi^4 i^4 EI}{2l^3}\,v_{i0} - \frac{F\pi^2 i^2}{2l}\,v_{i0} = \frac{l}{2}\,q_{i0}$$

da cui

$$v_{i0} = \frac{q_{i0}\,l^4}{-\,\omega_s^2\,\mu\,l^4 + \pi^4 i^4 EI - F\pi^2 i^2 l^2}$$

e ancora

$$v_{i0} = \frac{q_{i0}}{\mu\,(\omega_i^2 - \omega_s^2)} \qquad (204)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\dfrac{l^4}{i^4\,\pi^4\,EI}$, e chiamando v_{i0s} il valore in mezzeria della deformata statica prodotta in assenza di F dal carico q_{i0} *sen* $\dfrac{i\pi z}{l}$, la (204) si scrive pure

$$v_{i0} = \frac{v_{i0s}}{\dfrac{\mu l^4}{i^4\,\pi^4 EI}(\omega_i^2 - \omega_s^2)}$$

e infine, per la (201),

$$v_{i0} = \frac{v_{i0s}}{\dfrac{1}{\omega_i^2}\left(1 - \dfrac{F}{F_{ci}}\right)\cdot\,\omega_i^2\left(1 - \dfrac{\omega_s^2}{\omega_i^2}\right)}$$

da cui

$$v_{i0} = \frac{v_{i0s}}{\left(1 - \dfrac{F}{F_{ci}}\right)\left(1 - \dfrac{\omega_s^2}{\omega_i^2}\right)}\,. \qquad (205)$$

Dalla (204) si trae che per $\omega_s \to \omega_i$ è $v_{i0} \to \infty$, e cioè si ha *risonanza* sull'armonica i-esima.

Dalla (205) si trae che per $F \to F_{ci}$, è contemporaneamente $\omega_i \to 0$, e quindi v_{i0} tende ad un limite indeterminato; se contemporaneamente $\omega_s \to 0$, è invece $v_{i0} \to \infty$.

Come applicazione del procedimento di Lagrange si studi la trave AB della fig. 12, in regime di vibrazione libera. La densità di massa μ ed

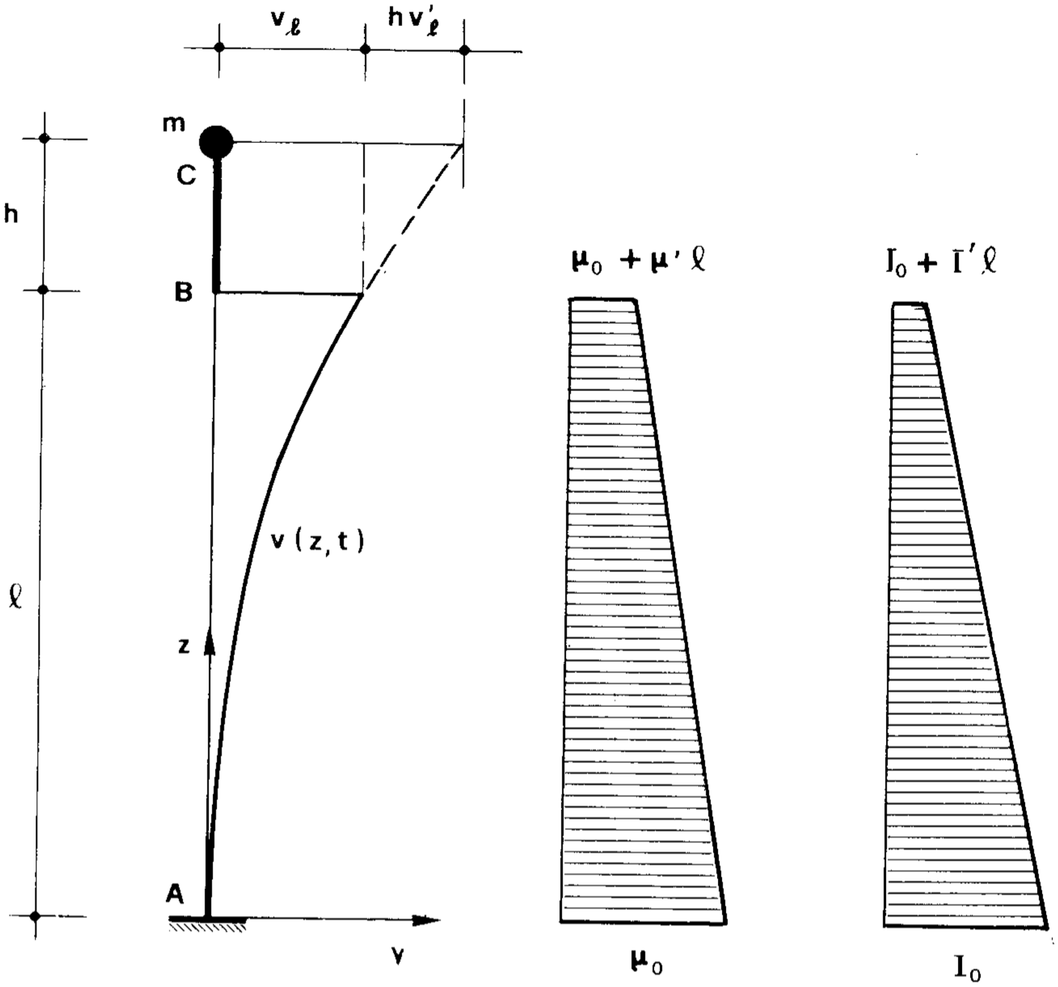

Figura 12.

il momento d'inerzia I variano con legge lineare, ad una quota h dal vertice B esiste una massa concentrata m, collegata al vertice stesso da un braccio rigido; lo spostamento di m è quindi

$$v_l + h\, v_l' \, .$$

Si ponga in prima approssimazione

$$v = A\, z^2 \, , \tag{206}$$

espressione rispettante le due condizioni di vincolo

$$z = 0 \quad : \qquad v = 0 \qquad , \qquad v' = 0 \; .$$

Si ha in tal caso

$$T_\mu \;= \frac{1}{2} \int_0^l \mu \, \dot{v}^2 \, dz = \frac{\dot{A}^2}{2} \int_0^l (\mu_0 + \mu' z) \, z^4 \, dz =$$

$$= \frac{\dot{A}^2}{2} \left(\mu_0 \, \frac{l^5}{5} + \mu' \, \frac{l^6}{6} \right) ;$$

$$T_m \;= \frac{1}{2} \, m \, (v_l + h \, v_l')^{\cdot 2} = \frac{m}{2} \, (A l^2 + 2 A l h)^{\cdot 2} =$$

$$= \frac{m \dot{A}^2}{2} \, (l^4 + 4 l^3 h + 4 l^2 h^2) \; ;$$

$$L = \frac{E}{2} \int_0^l (I_0 + I' z) \, v''^2 \, dz = \frac{E}{2} \int_0^l (I_0 + I' z) \, 4 A^2 \, dz =$$

$$= A^2 E \, (2 I_0 l + I' l^2) \; .$$

La (10), che si scrive al solito

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{A}} + \frac{dL}{dA} = 0 \; ,$$

fornisce

$$\ddot{A} \left(\mu_0 \, \frac{l^5}{5} + \mu' \, \frac{l^6}{6} \right) + m \ddot{A} \, (l^4 + 4 l^3 h + 4 l^2 h^2) +$$

$$+ \, 2 A E \, (2 I_0 l + I' l^2) = 0$$

e cioè

$$\ddot{A} + \omega^2 A = 0$$

E' perciò

$$A\,(t) = A_1\, sen\, \omega t + A_2 \cos \omega t$$

dove

$$\omega = \frac{(4I_0 l + 2I' l^2)\,E}{\mu_0 \dfrac{l^5}{5} + \mu' \dfrac{l^6}{6} + m\,(l^4 + 4l^3 h + 4l^2 h^2)}\,. \tag{207}$$

Ponendo, al posto della (206),

$$v = A z^2 + B z^3 \tag{208}$$

si ha

$$T_\mu = \dot{A}^2 \left(\mu_0 \frac{l^5}{10} + \mu' \frac{l^6}{12}\right) + \dot{B}^2 \left(\mu_0 \frac{l^7}{14} + \mu' \frac{l^8}{16}\right) +$$

$$+ \dot{A}\dot{B} \left(\mu_0 \frac{l^6}{6} + \mu' \frac{l^7}{7}\right);$$

$$T_m = \frac{m\dot{A}^2}{2}(l^4 + 4l^3 h + 4l^2 h^2) + \frac{m\dot{B}^2}{2}(l^6 + 6l^5 h + 9l^4 h^2) +$$

$$+ m\dot{A}\dot{B}\,(l^5 + 5l^4 h + 6l^3 h^2)\,;$$

$$L = A^2\,(2EI_0 l + EI' l^2) + B^2 \left(6EI_0 l^3 + \frac{9}{2} EI' l^4\right) +$$

$$+ AB\,(6EI_0 l^2 + 4EI' l^3)\,.$$

La (10) fornisce quindi il sistema

$$\ddot{A}\left[\mu_0 \frac{l^5}{5} + \mu' \frac{l^6}{6} + m\,(l^4 + 4l^3h + 4l^2h^2)\right] +$$

$$+ \ddot{B}\left[\mu_0 \frac{l^6}{6} + \mu' \frac{l^7}{7} + m\,(2l^5 + 10\,l^4h + 12\,l^3h^2)\right] +$$

$$+ A\,(4EI_0\,l + 2EI'l^2) + B\,(6EI_0\,l^2 + 4EI'l^3) = 0 \qquad (209)$$

$$\ddot{A}\left[\mu_0 \frac{l^5}{6} + \mu' \frac{l^6}{7} + m\,(2\,l^4 + 10\,l^3h + 12\,l^2h^2)\right] +$$

$$+ B\left[\mu_0 \frac{l^6}{7} + \mu' \frac{l^7}{8} + m\,(l^5 + 6l^4h + 9l^3h^2)\right] +$$

$$+ A\,(6EI_0l^2 + 4\,EI'l^2) + B\,(12\,EI_0l^2 + 9\,EI'l^3) = 0\ .$$

La posizione

$$v\,(z,\ t) = g\,(t)\ \cdot\ v^*(z) = g\,(t)\ [A^*z^2 + B^*z^3]$$

conduce all'equazione

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

ed al sistema algebrico

$$A^*\,(-\,\omega^2\,c_{m\,11} + c_{k\,11}) + B^*\,(-\,\omega^2\,c_{m\,12} + c_{k\,12}) = 0$$

$$A^*\,(-\,\omega^2\,c_{m\,21} + c_{k\,21}) + B^*\,(-\,\omega^2\,c_{m\,22} + c_{k\,22}) = 0 \qquad (210)$$

dove $c_{m\,11}$ $c_{k\,11}$ $c_{m\,12}$ $c_{k\,12}$ sono i coefficienti di $\ddot{A}$ A $\ddot{B}$ B nella prima delle (209), ed analogamente $c_{m\,21}$ $c_{k\,21}$ $c_{m\,22}$ $c_{k\,22}$ sono i coefficienti di $\ddot{A}$ A

$\ddot{B}\, B$ nella seconda delle (209).

Perchè il sistema (210) abbia soluzione non banale occorre e basta che

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 c_{m\,11} + c_{k\,11} & -\omega^2 c_{m\,12} + c_{k\,12} \\ -\omega^2 c_{m\,21} + c_{k\,21} & -\omega^2 c_{m\,22} + c_{k\,22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (211)$$

equazione di secondo grado in ω^2 che fornisce i due valori ω_1^2 ed ω_2^2.

Nel caso in cui siano μ ed I costanti ($\mu' = I' = 0$) ed $m = 0$, la (207) fornisce

$$\omega^2 = \frac{20\,EI}{\mu\, l^5}$$

e quindi

$$\omega = 4{,}47 \sqrt{\frac{EI}{\mu\, l^4}}\,,$$

con un errore del 27 % rispetto al valore esatto (prob. 10)

$$\omega = 3{,}516 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}\,.$$

La (211) invece si scrive

$$7{,}9365 \cdot 10^{-4}\,(\omega^2 \mu l^6)^2 - 0{,}97143\, EIl^2 \cdot \omega^2 \mu l^6 + 12\,(EI\, l^2)^2 = 0$$

che fornisce

$$\omega^2 \mu l^6 = \begin{cases} 12{,}478 \; EIl^2 \\ 1211{,}4 \; EIl^2 \end{cases}$$

e cioè

$$\omega_1 = 3{,}532\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

$$\omega_2 = 34{,}80\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

con errori rispettivamente dello 0,45 % e del 58 % rispetto ai valori esatti (prob. 10).