CAPITOLO SECONDO

VIBRAZIONI

Sia P_j (fig. a) un insieme di punti di un sistema olonomo; in ciascuno di essi sia concentrata la massa m_j, eventualmente nulla, e siano applicate le forze X_j (t), Y_j (t), Z_j (t), eventualmente nulle. Il principio di d'*Alembert* permette di dire che, date le funzioni φ_i (t) (parametri lagrangiani, per

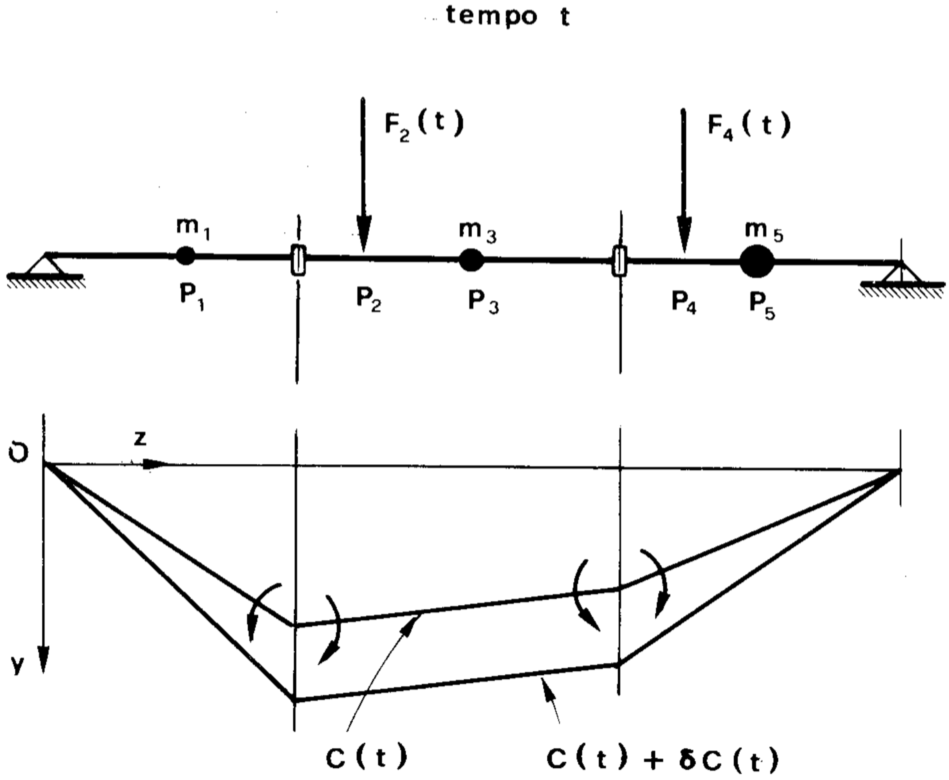

Fig. a

$i = 1, 2, \dots n$), e quindi le x_j (t), y_j (t), z_j (t), esse esprimono un moto del sistema se e solo se ad ogni istante è verificata la condizione di *Lagrange:*

$$\Sigma_j \left[(X_j - m_j \ddot{x}_j)\, \delta_1 x_j + (Y_j - m_j \ddot{y}_i)\, \delta_1 y_j + \right. \tag{1}$$

$$\left. + (Z_j - m_j \ddot{z}_j)\, \delta_1 z_j \right] = 0 \cdot$$

Ed infatti, condizione necessaria e sufficiente perchè al generico tempo t le forze applicate e le forze d'inerzia siano in equilibrio sulla configurazione $C\ (t)$ è che sia nullo il lavoro del primo ordine da esse compiuto per qualsiasi variazione δC rispettosa dei vincoli al tempo t. Le $\delta_1 x_j$, $\delta_1 y_j$, $\delta_1 z_j$ sono le parti del primo ordine nelle $d\varphi_i$ che definiscono la δC.

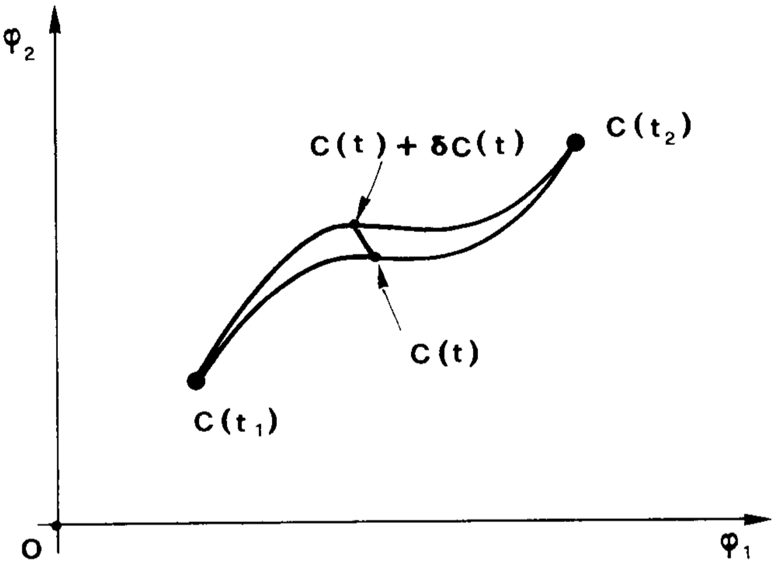

Fig. b

Si consideri adesso un intervallo di tempo $t_1 t_2$, ed il moto reale $C\ (t)$ tra t_1 e t_2 (fig. b). Si definisce *moto variato sincrono* rispetto a $C\ (t)$ nell'intervallo $t_1 t_2$ un qualsiasi moto $C\ (t)\ +\ C^*\ (t)$, ove $C^*\ (t)$ si annulli in $t = t_1$ ed in $t = t_2$; la $C^*\ (t)$ deve rispettare i vincoli al tempo t. Alla $C^*\ (t)$ si associano le variazioni $\delta_1 x(t)$, $\delta_1 y(t)$, $\delta_1 z(t)$, che sono quindi nulle in $t = t_1$ ed in $t = t_2$, e rispettose dei vincoli al tempo t.

Integrando la (1) da t_1 a t_2 si ottiene

$$\Sigma_j\, m_j \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{x}_j\, \delta_1\, x_j\ +\ \ddot{y}_j\, \delta_1\, y_j\ +\ \ddot{z}_j\, \delta_1\, z_j)\ d\,t\ = \tag{2}$$

$$=\ \Sigma_j \int_{t_1}^{t_2} (X_j\, \delta_1\, x_j\ +\ Y_j\, \delta_1\, y_i\ + Z_j\, \delta_1\, z_j)\ dt.$$

Chiamando $f\ (t)$ la funzione e $g\ (t)$ la funzione variata, la variazione è data da

$$\delta f\ (t) = g\ (t)\ -\ f\ (t) = \epsilon\ \psi\ (t)$$

con ϵ numero piccolo nel senso ben noto. Si ha

$$\delta\, df = dg - df = \epsilon\, d\,\psi = d\,(\epsilon\,\psi) = d\,\delta f\ ,$$

proposizione nota come lemma di inversione.

Per la (3) si può scrivere

$$d(\delta_1 x_j) = \delta_1\,(dx_j) = \delta_1\,(\dot{x}\,dt) = \delta_1\,(\dot{x})\,dt\ . \tag{3}$$

E' pure

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}_j\,\delta_1\,x_j\,dt = [\dot{x}_j\,\delta_1\,\dot{x}_j]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_j\,\frac{d\,(\delta_1\,x_j)}{dt}\,dt\ ;$$

e cioè, per essere δx_j nullo in $t = t_1$ ed in $t = t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}_j\,\delta_1\,x_j\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_j\,\frac{d\,(\delta_1\,x_j)}{dt}\,dt\ ,$$

che per la (3) porge

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}_j\,\delta_1\,x_j\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_j\,\delta_1\,(\dot{x}_j)\,dt\ . \tag{4}$$

D'altra parte l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}\,\Sigma_j\,m_j\,(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)\ , \tag{5}$$

e la sua variazione prima è

$$\delta_1\,T = \Sigma_j\,m_j\,(\dot{x}_j\,\delta_1\,\dot{x}_j + \dot{y}_j\,\delta_1\,\dot{y}_j + \dot{z}_j\,\delta_1\,\dot{z}_j)\ .$$

Quindi può scriversi (4)

$$\Sigma_j m_j \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{x}_j \delta_1 x_j + \ddot{y}_j \delta_1 y_j + \ddot{z}_j \delta_1 z_j)\, dt =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \delta_1 T \cdot dt \,.$$

La (2) allora porge

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta_1 T + \Sigma_j (X_j \delta_1 x_j + Y_j \delta_1 y_j + Z_j \delta_1 z_j)]\, dt = 0 \,.$$

Se alcune forze sono conservative e dipendenti da un potenziale U (l'energia potenziale è $P = - U$), ed altre sono di carattere reattivo, dipendenti cioè da una energia elastica L (e si è visto che δL è contrario al lavoro eseguito dalle forze reattive agenti dal concio elastico sulla struttura) si ha

$$\Sigma_j (X_j \delta_1 x_j + Y_j \delta_1 y_j + Z_j \delta_1 z_j) = - \delta_1 P - \delta_1 L \;;$$

quindi la (6) si scrive, invertendo i simboli di variazione e di integrale,

$$\delta_1 \int_{t_1}^{t_2} (T - E_t)\, dt = 0 \,. \tag{7}$$

Per la (1), la (7), scritta per qualsiasi $C^*(t)$, è condizione necessaria e sufficiente perchè $C(t)$ sia un moto reale. La funzione

$$\mathcal{L} = T - E_t \tag{8}$$

si chiama *funzione di Lagrange*, il funzionale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$$

si chiama *integrale di Hamilton*. La (7) esprime il principio variazionale di Hamilton. In assenza di movimenti, dalla (7) si ricade nel principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale.

Si può scrivere

$$\delta_1 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta_1 \mathcal{L} \cdot dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \dot{\varphi}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i \right) dt \; . \tag{9}$$

D'altro canto si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \dot{\varphi}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \frac{d\,(\delta \varphi)}{dt} \, dt =$$

$$= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \varphi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \varphi_i \, dt =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta \varphi_i \, dt \; ;$$

quindi la (9) si scrive

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(- \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \right) \delta \varphi_i \, dt = 0$$

e cioè, per la scelta arbitraria delle $\delta \varphi_i$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0 \; , \tag{10}$$

per $i = 1, 2, \dots n$.

Sono queste le euleriane del problema variazionale (7); e cioè le cosiddette *equazioni di Lagrange,* necessarie e sufficienti per la realtà del moto. L'effetto di eventuali vincoli mobili si risente sia nella T che nella L. Ed infatti gli spostamenti Δ_k (t) dei vincoli definiscono, per φ_i tutte nulle, le $\Delta\varphi_h$ dei conci elastici; le $\Delta\varphi_h$ sono quindi del tipo

$$\Delta\varphi_h = \sum_k A_k \, \Delta_k \, (t) + \Sigma_i B_i \, \varphi_i \, (t) \, .$$

Lo stesso accade per altri tipi di snodi elastici; perciò L contiene termini del tipo $\varphi_i \, \varphi_j$, $\Delta_h \, \Delta_k$, $\varphi_i \, \Delta_h$.

Così pure gli spostamenti delle masse sono del tipo

$$s = \Sigma_k \, C_k \, \Delta_k \, (t) + \Sigma_i \, D_i \, \varphi_i \, (t) \, ,$$

e quindi T contiene i termini del tipo $\dot{\varphi}_i \, \dot{\varphi}_j$, $\dot{\Delta}_h \, \dot{\Delta}_k$, $\dot{\varphi}_i \, \dot{\Delta}_h$.

Problema n. 1.

La struttura rigido elastica della fig. 1 è ad un grado di libertà; il concio in A ha rigidità flessionale k, ed una massa m è concentrata all'estremo B. Si volgiono studiare i moti in assenza di forze applicate, e cioè le cosiddette *vibrazioni libere;* in tal caso è ovviamente $P = 0$. D'altro canto è già stato ottenuto, per la trave in esame (vedi cap. 1), $L = \dfrac{k\varphi^2}{2}$; quindi è

$$E_t = \frac{k\varphi^2}{2} \, .$$

E' poi

$$T = \frac{m \, \dot{v}_B^2}{2} = \frac{m \, l^2 \, \dot{\varphi}^2}{2} \, ;$$

si ha perciò

$$\mathcal{L} = T - E_t = \frac{m \, l^2}{2} \, \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2} \, \varphi^2 \, .$$

La (10) pertanto porge

$$ml^2 \ddot{\varphi} + k\varphi = 0 \; . \tag{11}$$

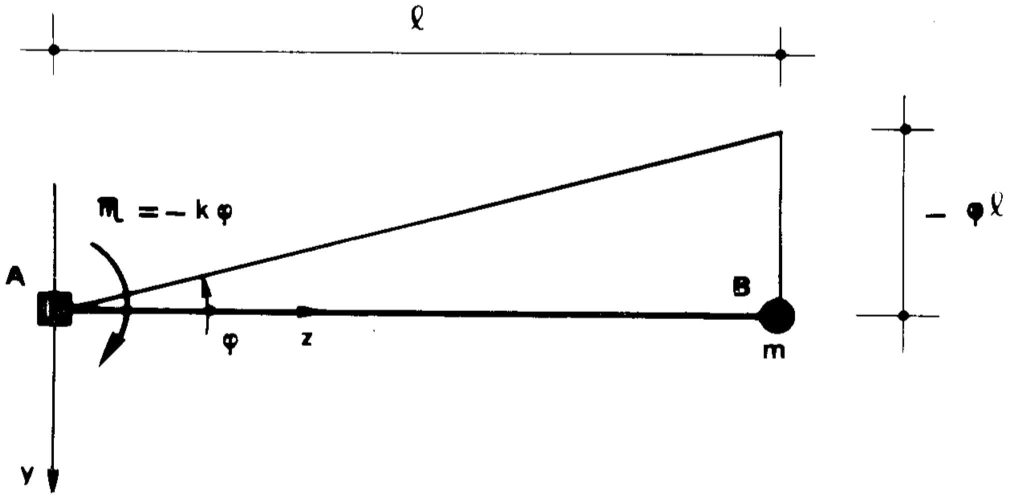

Figura 1.

Alla (11) si arriva pure esprimendo la condizione di equilibrio della forza $-m\ddot{s} = m\,l\ddot{\varphi}$:

$$-m\,l\ddot{\varphi}\cdot l - k\,\varphi = 0 \; .$$

La (11) è l'equazione differenziale del moto; ponendo

$$\frac{k}{m\,l^2} = \omega^2$$

(dove ω prende il nome di *pulsazione propria* o *frequenza circolare*) essa si scrive

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \; . \tag{12}$$

La (12) è la classica equazione del moto armonico, la cui soluzione è fornita da

$$\varphi = A \; sen \, \omega t + B \; cos \, \omega t \; , \tag{13}$$

con A e B costanti da determinare in base alle condizioni iniziali. Il *periodo* di tale moto è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi l \sqrt{\frac{m}{k}} \; ; \tag{14}$$

la *frequenza* è

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi l} \sqrt{\frac{k}{m}} \, . \tag{15}$$

Problema n. 2.

La stessa trave del problema precedente è soggetta ad una forza as-

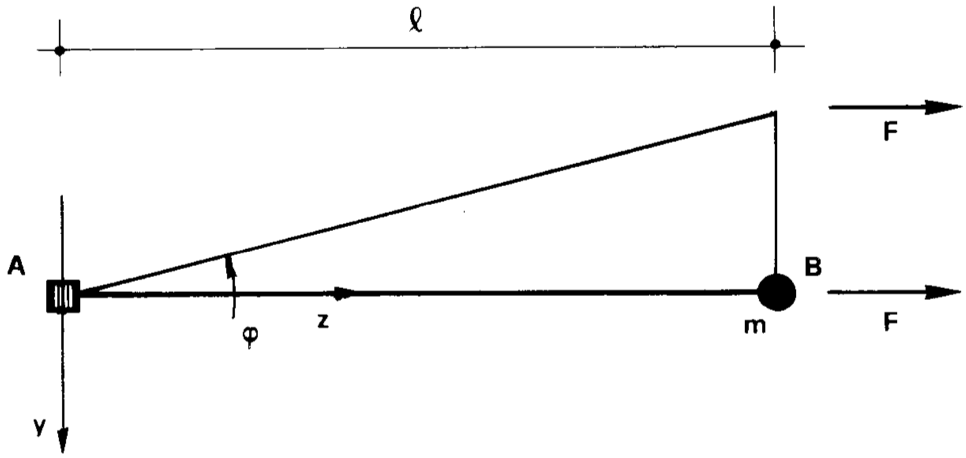

Figura 2.

siale F (fig. 2). Si ha in tal caso

$$P = F \frac{l\varphi^2}{2}$$

e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{Fl}{2} \varphi^2 - \frac{k}{2} \varphi^2 \; ;$$

la (10) porge

$$ml^2 \ddot{\varphi} + (k + Fl) \varphi = 0$$

e ancora

$$\ddot{\varphi} + \frac{k + Fl}{m l^2} \varphi = 0$$

che si scrive

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \ , \tag{16}$$

avendo posto

$$\frac{k + Fl}{m l^2} = \omega^2 \ .$$

Si ha perciò, come già fatto nel problema precedente,

$$f = \frac{1}{2 \pi l} \sqrt{\frac{k + Fl}{m}} \ .$$

Si osserva che per

$$F = - \frac{k}{l}$$

è $f = 0$; inoltre si vede che la frequenza aumenta con la rigidità, e con il modulo di F se questa è di trazione, diminuisce all'aumentare della massa ed all'aumentare del modulo di F, se questa è di compressione.

All'equazione differenziale (16) si collega l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

e gli integrali particolari indipendenti

$$\varphi_1 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\varphi_2 = e^{\lambda_2 t} \ ,$$

dove λ_1 e λ_2 sono le radici dell'equazione caratteristica. Poichè è

$$\lambda_1 = \omega i$$

$$\lambda_2 = -\omega i$$

si ha che, se ω^2 è positivo, ω è reale, e le combinazioni lineari dei due integrali particolari danno una soluzione del tipo (13), di carattere armonico; se invece ω^2 è negativo, ω è immaginario, e le combinazioni lineari dei due integrali particolari danno una soluzione del tipo (13), ma con funzioni iperboliche, che è divergente nel tempo. Quindi il valore $\omega^2 = 0$, e cioè $f = 0$, è un punto di passaggio dalla stabilità all'instabilità. Si noti che il valore $F = -\dfrac{k}{l}$ per cui ciò accade è anche il carico critico già determinato staticamente (cap. 2).

Problema n. 3.

Ancora la trave del problema 1 è soggetta in B alla forza assiale

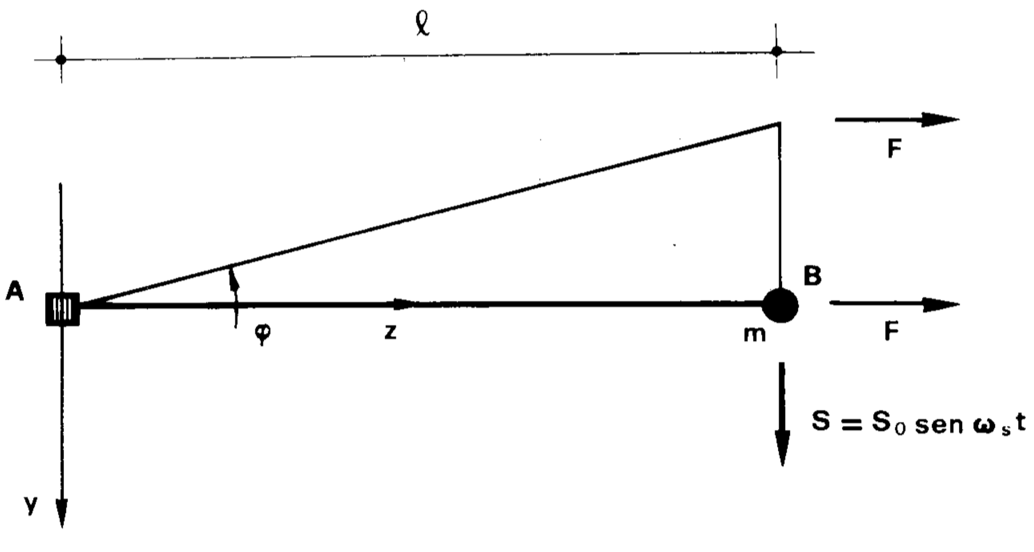

Figura 3.

F ed alla forza trasversale

$$S = S_0 \; sen \; \omega_S t \; .$$

Si ha così

$$P = F \frac{l\varphi^2}{2} + S_0 \, sen \, \omega_S t \cdot l\varphi \, . \tag{17}$$

La (10) nel caso in esame si scrive

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \, . \tag{18}$$

Poichè è

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 \, ,$$

$$L = \frac{k}{2} \quad \varphi^2 \, ,$$

la (18) porge

$$ml^2 \ddot{\varphi} + S_0 l \, sen \, \omega_S t + Fl\varphi + k\varphi = 0 \, . \tag{19}$$

Ponendo

$$\omega^2 = \frac{k + Fl}{ml^2}$$

la (19) si scrive

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = - \frac{S_0}{ml} \, sen \, \omega_S t \, . \tag{20}$$

Un integrale particolare della (20) è

$$\varphi = C \, sen \, \omega_S t \, ;$$

infatti per tale valore di φ la (20) si scrive

$$- C \omega_S^2 \, sen \, \omega_S t + \omega^2 C \, sen \, \omega_S t = - \frac{S_0}{ml} \, sen \, \omega_S t \, ,$$

che è soddisfatta per qualsiasi valore di t se

$$C\,\omega_S^2 + \omega^2 C = -\frac{S_0}{m\,l}\,.$$

e cioè se

$$C = \frac{S_0}{m\,l\,(\omega_S^2 - \omega^2)}\,.$$

Quindi la soluzione generale della (20) è somma dell'integrale particolare ora definito, e dell'integrale generale dell'omogenea associata, già trovato (13):

$$\varphi = A\;sen\;\omega t + B\;cos\;\omega t + \frac{S_0}{ml\;(\omega_S^2 - \omega^2)}\;sen\;\omega_S t\,. \tag{21}$$

Si osserva subito che φ è somma di un termine armonico di pulsazione ω (*vibrazione naturale*) e di un termine armonico di pulsazione ω_S (*vibrazione forzata*). Per ottenere il primo occorre fissare le *condizioni iniziali.*

Posto per es.

$$t = 0 \rightarrow \varphi = \dot{\varphi} = 0$$

si ha dalla (21)

$$0 = \quad B$$

$$0 = \omega A + \frac{S_0\,\omega_S}{ml\;(\omega_S^2 - \omega^2)}$$

da cui

$$\varphi = -\frac{S_0}{ml\;(\omega_S^2 - \omega^2)}\;\frac{\omega_S}{\omega}\;sen\;\omega t + \frac{S_0}{ml\;(\omega_S^2 - \omega^2)}\;sen\;\omega_S t\,. \tag{22}$$

Il moto naturale e quello forzato non sono in fase, e l'ampiezza di ciascuno cresce al diminuire di $\omega_S^2 - \omega^2$; ciò genera i ben noti *battimenti.*

Per $\omega_S \rightarrow \omega$, le ampiezze dei due moti tendono ad ∞, la differenza di fase a zero, e la loro somma non ha un limite definito. E' questo il fenomeno della *risonanza,* per cui sotto un impulso armonico di pulsazione pari alla pulsazione propria della struttura le ampiezze dello spostamento tendono comunque a superare i valori limiti della tollerabilità.

Problema n. 4.

a) La trave della fig. 4.1 è a due parametri di libertà; come tali si

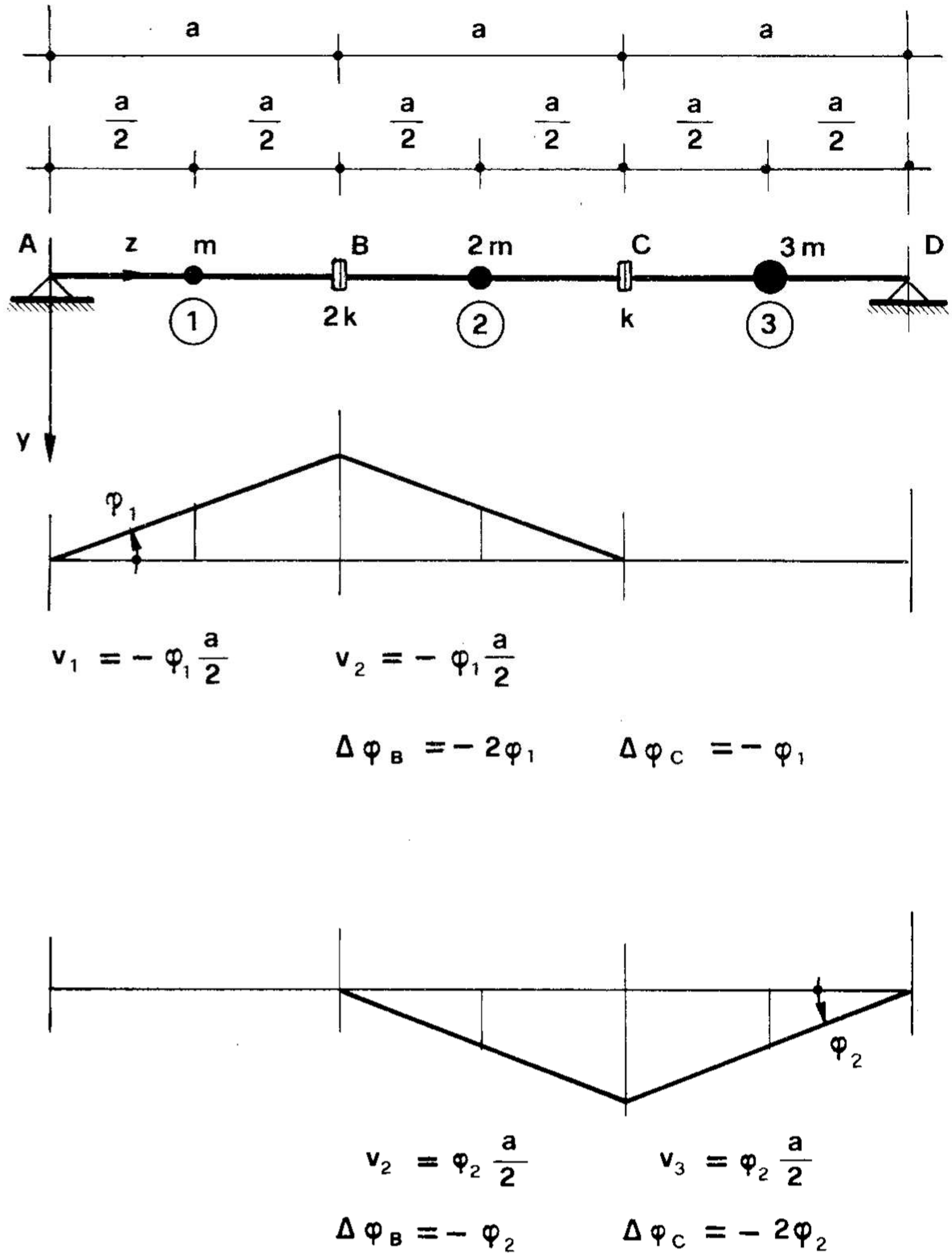

Figura 4.1.

sono scelte le rotazioni dei due tratti estremi φ_1 e φ_2. Le masse, concentrate nelle mezzerie 1, 2 e 3 dei tre tratti, sono *m*, *2m*, *3m*; le rigidità dei due conci elastici B e C sono $2k$ e k. Si ha

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{a}{2}\varphi_1 \\ v_2 &= \frac{a}{2}(-\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_3 &= \frac{a}{2}\varphi_2 \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Data una numerazione alle p masse m_i, si chiama *matrice delle masse* la matrice diagonale $p \times p$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_p \end{vmatrix} \tag{24}$$

nel caso in esame è

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{vmatrix} \tag{25}$$

Se n sono i parametri lagrangiani φ_j, si chiama *matrice di conversione* la matrice $p \times n$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p2} & v_{p2} & \dots & v_{pn} \end{vmatrix} \tag{26}$$

il termine v_{ij} è lo spostamento della massa i-esima nella deformata connessa con $\varphi_j = 1$. Si ha perciò

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\boldsymbol{\varphi} \,. \tag{27}$$

Nel nostro caso è

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} \end{vmatrix} \tag{28}$$

L'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} m_i \dot{v}_i^2 = \frac{m}{2} (\dot{v}_1^2 + 2\dot{v}_2^2 + 3\dot{v}_3^2) \tag{29}$$

e cioè

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} \; ; \tag{30}$$

in funzione delle φ_j è

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

e cioè

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \widetilde{\mathbf{M}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{31}$$

dove

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \tag{32}$$

è la *matrice lagrangiana delle masse*. La $\widetilde{\mathbf{M}}$ è simmetrica ($\widetilde{\mathbf{M}}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M}^T \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \widetilde{\mathbf{M}}$). Poichè poi T è comunque maggiore di zero, dalla (31) si trae che $\widetilde{\mathbf{M}}$ è definita positiva.

In generale, la forma quadratica

$$F = \frac{1}{2} (a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + \ldots + a_{nn}\, x_n^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 + \ldots) = \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

può esprimersi come prodotto matriciale

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x} \tag{34}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{35}$$

è una matrice simmetrica. Se la forma F è *definita positiva*, se cioè

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x} > 0 \qquad\qquad \forall\, \mathbf{x}\,, \tag{36}$$

anche la matrice $\mathbf{A}$ si dice *definita positiva*; anzi, la (36) è la definizione più generale di matrice, anche non simmetrica, definita positiva.

Si ricordi che condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice quadrata $\mathbf{A}$ qualsiasi sia definita positiva è che

$$\alpha_{11} > 0$$

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

....
....

$$\det \mathbf{A} > 0$$

Ne discende che tutti i termini della diagonale principale devono essere > 0.

Nel caso in esame è

$$T = \frac{ma^2}{8} (3\dot{\varphi}_1^2 + 5\dot{\varphi}_2^2 - 4\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) \tag{37}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} ma^2 & -\frac{1}{2} ma^2 \\ -\frac{1}{2} ma^2 & \frac{5}{4} ma^2 \end{vmatrix} \tag{38}$$

Le dimensioni di **M** sono $[Fl^{-1} \; t^2]$; se le coordinate lagrangiane φ_j sono numeri, le dimensioni di $\tilde{\mathbf{M}}$ sono $[ml^2]$, e cioè $[Flt^2]$; se le φ_j sono lunghezze, le dimensioni di $\tilde{\mathbf{M}}$ sono ancora quelle della massa, e cioè $[Fl^{-1} t^2]$.

L'energia elastica è

$$L = \frac{1}{2} [2k \, (\Delta\varphi_B)^2 + k \, (\Delta\varphi_C)^2] \quad ; \tag{39}$$

dalla

$$\Delta\varphi_B = -(2\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 + 2\varphi_2$$

si trae

$$L = \frac{3k}{2}\,(3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2)\ . \tag{40}$$

In genere, L può porsi nella forma

$$L = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varphi}^T\,\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} \tag{41}$$

dove $\mathbf{K}$ (*matrice lagrangiana delle rigidezze*) è nel nostro caso

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 9k & 6k \\ 6k & 6k \end{vmatrix}\ . \tag{42}$$

La matrice $\mathbf{K}$ è simmetrica. Anche $\mathbf{K}$ è definita positiva, poichè L è comunque > 0. Se le coordinate lagrangiane sono numeri, le dimensioni di $\mathbf{K}$ sono $[Fl]$; se le coordinate lagrangiane sono lunghezze, le dimensioni di $\mathbf{K}$ sono $[Fl^{-1}]$.

b) Le (10) porgono le due equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{ma^2}{8}\,(6\ddot{\varphi}_1 - 4\ddot{\varphi}_2) + \frac{3k}{2}\,(6\varphi_1 + 4\varphi_2) = 0 \\ -&\frac{ma^2}{8}\,(4\varphi_1 - 10\varphi_2) + \frac{3k}{2}\,(4\varphi_1 + 4\varphi_2) = 0\ . \end{aligned} \tag{43}$$

Queste si compendiano nell'unica relazione matriciale

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\,\boldsymbol{\varphi} = 0\ . \tag{44}$$

In generale, posta la matrice $\mathbf{A}$ simmetrica come vettore colonna

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}\ ,$$

dove

$$\mathbf{a}_i = | a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in} | \; ,$$

e data la forma quadratica

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \; ,$$

si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \Sigma_j \, a_{ij} \, x_j = \mathbf{a}_i \, \mathbf{x} \; . \tag{45}$$

Il sistema delle n equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = b_i \tag{46}$$

si scrive matricialmente come segue

$$\mathbf{A x} = \mathbf{b} \; . \tag{47}$$

Si tenti per il sistema (43) una soluzione di tipo armonico:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \, (t) &= \varphi_1 \; sen \; \omega t \\ \varphi_2 \, (t) &= \varphi_2 \; sen \; \omega t \; . \end{aligned} \tag{48}$$

Sostituendo nella (43) si ha

$$\begin{aligned} &- \frac{ma^2 \, \omega^2}{8} \, (3\varphi_1 \; sen \, \omega t \, - \, 2\varphi_2 \; sen \, \omega t) + \frac{3k}{2} \, (3\varphi_1 \; sen \, \omega t \, + \, 2\varphi_2 \; sen \, \omega t) = 0 \\ &\frac{ma^2 \, \omega^2}{8} \, (2\varphi_1 \; sen \, \omega t \, - \, 5\varphi_2 \; sen \, \omega t) + \frac{3k}{2} \, (2\varphi_1 \; sen \, \omega t \, + \, 2\varphi_2 \; sen \, \omega t) = 0 \; . \end{aligned} \tag{49}$$

Il sistema (49) si scrive pure

$$\begin{aligned} &sen\ \omega t \left[\left(-\frac{3}{8}ma^2\omega^2 + \frac{9k}{2}\right)\varphi_1 + \left(\frac{ma^2\omega^2}{4} + 3k\right)\varphi_2\right] = 0 \\ &sen\ \omega t \left[\left(\frac{ma^2\omega^2}{4} + 3k\right)\varphi_1 + \left(-\frac{5}{8}ma^2\omega^2 + 3k\right)\varphi_2\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Il (50) è soddisfatto, per $\omega \neq 0$, e quindi la soluzione (48) è accettabile, se e solo se si verifica

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{3}{8}ma^2\omega^2 + \frac{9k}{2}\right)\varphi_1 + \left(\frac{ma^2\omega^2}{4} + 3k\right)\varphi_2 = 0 \\ &\left(\frac{ma^2\omega^2}{4} + 3k\right)\varphi_1 + \left(-\frac{5}{8}ma^2\omega^2 + 3k\right)\varphi_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{51}$$

A sua volta il (51) ha soluzione non banale se e solo se

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \dfrac{9k}{2} - \dfrac{3}{8}ma^2\omega^2 & 3k + \dfrac{ma^2\omega^2}{4} \\ & \\ 3k + \dfrac{ma^2\omega^2}{k} & 3k - \dfrac{5}{8}ma^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{52}$$

La (52) è un'equazione di secondo grado in ω^2

$$\Delta(\omega^2) = 0$$

che presenta due soluzioni reali positive ω_1^2 ed ω_2^2 (vedi appresso). Si hanno quindi due soluzioni del (51) date da

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = A_1\,\varphi_{11}\ sen\,\omega_1 t \\ \varphi_2(t) = A_1\,\varphi_{21}\ sen\,\omega_1 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = A_2\,\varphi_{12}\; sen\,\omega_2 t \\ \varphi_2(t) = A_2\,\varphi_{22}\; sen\,\omega_2 t \end{cases} ; \tag{53}$$

A_1 ed A_2 sono due costanti arbitrarie, mentre le due coppie (espresse come vettori colonna)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} \\ \\ \varphi_{21} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{12} \\ \\ \varphi_{22} \end{vmatrix} \tag{54}$$

sono le soluzioni (definite appunto a meno di una costante ciascuna) del sistema (51) per $\omega = \omega_1$ e per $\omega = \omega_2$.

Seguendo la stessa strada si verifica che il sistema (43) ha anche le soluzioni

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = B_1\,\varphi_{11}\; cos\,\omega_1 t \\ \varphi_2(t) = B_1\,\varphi_{21}\; cos\,\omega_1 t \end{cases}$$

$$\tag{55}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = B_2\,\varphi_{12}\; cos\,\omega_2 t \\ \varphi_2(t) = B_2\,\varphi_{22}\; cos\,\omega_2 t \end{cases} ,$$

dove ω_1, ω_2, $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono gli stessi già determinati con le soluzioni (48) in seno.

Le quattro soluzioni (53) e (55) sono linearmente indipendenti, e quindi la loro somma è la soluzione del sistema (43):

$$\varphi_1(t) = \varphi_{11}\,(A_1\; sen\,\omega_1 t + B_1\; cos\,\omega_1 t) + \varphi_{12}\,(A_2\; sen\,\omega_2 t + B_2\; cos\,\omega_2 t)$$

$$\tag{56}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{21}\,(A_1\; sen\,\omega_1 t + B_1\; cos\,\omega_1 t) + \varphi_{22}\,(A_2\; sen\,\omega_2 t + B_2\; cos\,\omega_2 t).$$

Le quattro costanti, una volta definite le coppie $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$, sono definite dalle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= a_1 & \dot{\varphi}_1(0) &= b_1 \\ \varphi_2(0) &= a_2 & \dot{\varphi}_2(0) &= b_2 \ , \end{aligned} \tag{57}$$

che possono anche scriversi matricialmente

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{a} \qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \mathbf{b} \ .$$

Ancora matricialmente, le (56) possono scriversi

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{u}_1 (A_1 \, sen \, \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) + \mathbf{u}_2 (A_2 \, sen \, \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t); \tag{58}$$

il moto è cioè la somma di un moto armonico della configurazione $\mathbf{u}_1$ e di un moto armonico della configurazione $\mathbf{u}_2$, con frequenze circolari ω_1 e ω_2.

L'equazione (52) si scrive

$$\omega^4 - \frac{348}{11} \frac{k}{ma^2} \omega^2 + \frac{288}{11} \frac{k^2}{m^2 a^4} = 0 \ ,$$

da cui

$$\omega^2 = \begin{cases} 0{,}85 \dfrac{k}{ma^2} \\ 30{,}79 \dfrac{k}{ma^2} \ , \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{0{,}922}{a} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= \frac{5{,}549}{a} \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Per questi valori di ω_1 ed ω_2 le soluzioni del sistema (51) sono, ciascuna a meno di una costante,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \\ -1{,}3014 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ \\ 0{,}6586 \end{vmatrix} . \tag{60}$$

Nella fig. 4.2 sono riportate le configurazioni corrispondenti ad ω_1 e ω_2, e cioè i due *modi* di vibrare.

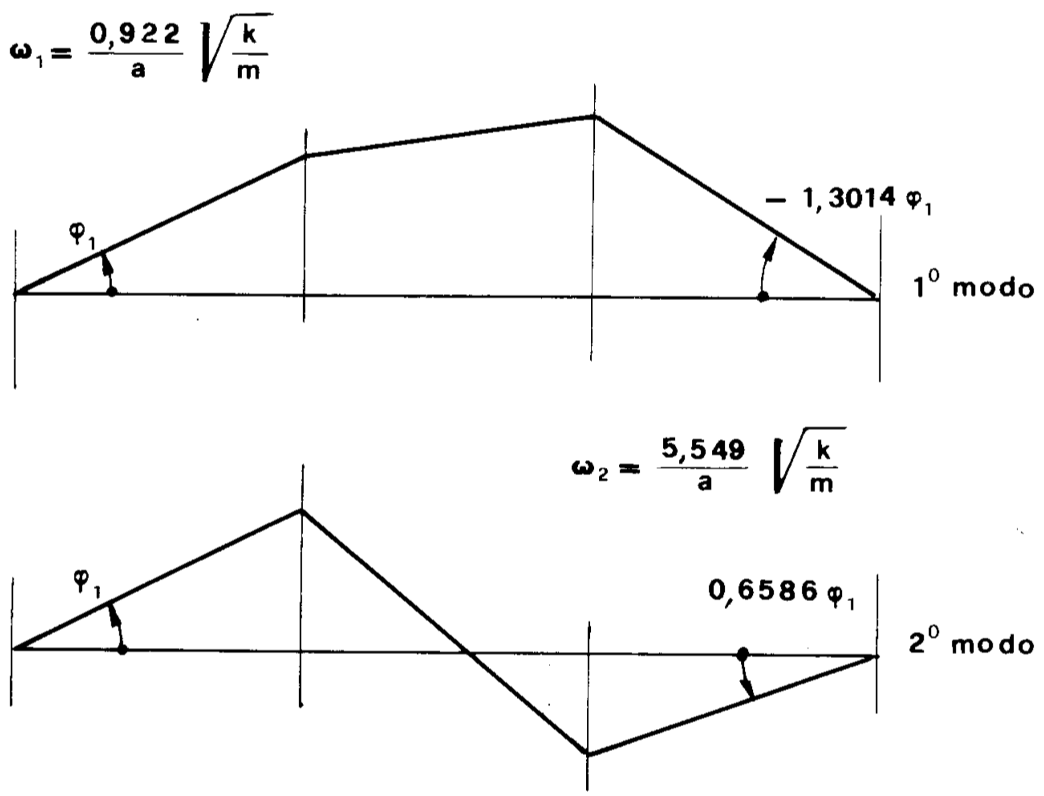

Figura 4.2.

c) Nella fig. 4.3 è riportato, a meno di *sen* $\omega_1 t$, il modo relativo ad ω_1 e le forze ad esso collegate. Si ha

$$F_1 = -m\ddot{v}_1 = m\frac{a}{2}\ddot{\varphi}_1 = -m\frac{a}{2}\omega_1^2\varphi_1 \; sen\, \omega_1 t =$$

$$= -m\frac{a}{2}\varphi_1 \cdot 0{,}85\frac{k}{ma^2}\; sen\, \omega_1 t =$$

$$= -\ 0{,}425\ \frac{k}{a}\ \varphi_1\ sen\ \omega_1 t\ ;$$

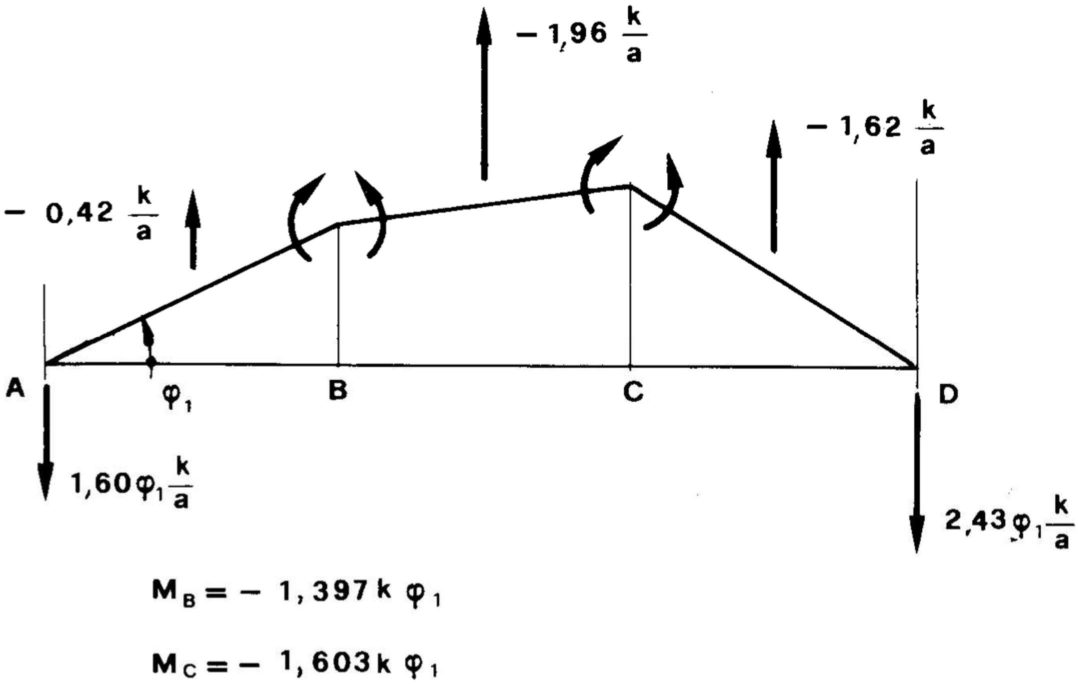

Figura 4.3.

$$F_2 = -\ 2m\ddot{v}_2 = -\ ma\ (-\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) =$$

$$= -\ 1{,}9562\ \frac{k}{a}\ \varphi_1\ sen\ \omega_1 t\ ;$$

$$F_3 = -\ 3m\ddot{v}_3 = -\ \frac{3}{2}\ ma\ddot{\varphi}_2 =$$

$$= -\ 1{,}6592\ \frac{k}{a}\ \varphi_1\ sen\ \omega_1 t\ ;$$

$$M_B = -\ 1{,}3972\ k\varphi_1$$

$$M_C = -\ 1{,}6028\ k\varphi_1\ .$$

Risulta

$$R_A = 1{,}6088 \frac{k}{a} \varphi_1$$

$$R_D = 2{,}4316 \frac{k}{a} \varphi_1 .$$

L'equazione di equilibrio intorno a C è verificata; ed infatti si ha

$$-R_D a - F_3 \frac{a}{2} - M_C = \varphi_1 k\,(-2{,}43 + 0{,}83 + 1{,}60) = 0.$$

Analogamente è verificata l'equazione di equilibrio intorno a B.

d) In generale, si può partire dal sistema di n equazioni omogenee nelle φ_i

$$\mathbf{K}\varphi = \lambda \widetilde{\mathbf{M}} \varphi ; \tag{61}$$

questo deriva dal (44) ove si ponga φ al posto di $\ddot{\varphi}$, e si introduca il parametro $-\lambda$ a fattore di $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Il (61) ammette soluzione non banale se e solo se si verifica

$$\det |\mathbf{K} - \lambda \widetilde{\mathbf{M}}| = 0 . \tag{62}$$

e cioè

$$\det |K_{ij} - \lambda \widetilde{\mathrm{M}}_{ij}| = 0 ,$$

per $i, j = 1, 2, \ldots n$.

La (62) è un'equazione di grado n in λ, le cui radici sono dette *autovalori*. Ad ogni autovalore λ_h corrisponde una ennupla

$$\mathbf{u}_h = \begin{vmatrix} \varphi_{1h} \\ \varphi_{2h} \\ \vdots \\ \varphi_{nh} \end{vmatrix} , \tag{63}$$

definita a meno di una costante, soluzione non banale del sistema (61); l'ennupla $\varphi_{1h} \ldots \varphi_{nh}$ è stata scritta in (63) come vettore colonna, e si chiama autoennupla, autosoluzione, o, più frequentemente, *autovettore* corrispondente a λ_h. Per esse, e solo per esse, è soddisfatta la condizione (61), che perciò è vera solo se scritta come segue

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_h = \lambda_h\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h \tag{64}$$

per $h = 1, 2, \ldots n$.

Nel caso in esame gli autovalori – come già preannunziato – sono tutti reali e positivi.

Si supponga infatti che esista un autovalore λ_h complesso, e cioè

$$\lambda_h = \alpha + i\beta\ ;$$

sia $\mathbf{u}_h$ il corrispondente autovettore, anch'esso complesso. Si ricordi che, se AB sono due numeri complessi, il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati; indicando infatti con asterisco il coniugato, è

$$P = A \cdot B = (a + ib)\,(c + id) = ac - bd + i\,(b + c)\ ;$$

$$P^* = ac - bd - i\,(b + c)\ ;$$

$$A^* \cdot B^* = (a - ib)\,(c - id) = ac - bd - i\,(b + c) = P^*\ .$$

Poichè l'uguaglianza di due complessi implica quella dei coniugati, dalla (64) si trae

$$(\mathbf{K}\,\mathbf{u}_h)^* = (\lambda_h\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}_h)^*$$

e quindi, per la proprietà dianzi enunciata, e per la realtà di $\mathbf{K}$ ed $\widetilde{\mathbf{M}}$,

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_h^* = \lambda_h^*\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h^*\ . \tag{65}$$

Premoltiplicando la (64) per $\mathbf{u}_h^{*T}$ e postmoltiplicando la trasposta della (65) per $\mathbf{u}_h$ si ha, stante la simmetria di $\mathbf{K}$ ed $\widetilde{\mathbf{M}}$,

$$\mathbf{u}_h^{*T}\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_h = \lambda_h^*\,\mathbf{u}_h^{T}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h\quad ;$$

$$\mathbf{u}_h^{*T}\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_h = \lambda_h\,\mathbf{u}^{*T}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h$$

sottraendo risulta

$$(\lambda_h - \lambda_h^*)\ \mathbf{u}_h^{*T}\ \widetilde{\mathbf{M}}\ \mathbf{u}_h = 0$$

da cui

$$\lambda_h - \lambda_h^* = 2i\beta = 0\ ,$$

e quindi $\beta = 0$, e λ_h è reale.

Sempre dalla (64) si ha

$$\mathbf{u}_h^T\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_h = \lambda_h\,\mathbf{u}_h^T\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h\ ; \tag{66}$$

si è già visto che

$$\mathbf{u}_h^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{u}_h > 0$$

$$\mathbf{u}_h^T\ \widetilde{\mathbf{M}}\ \mathbf{u}_h > 0\ .$$

da cui $\lambda_h > 0$. Quindi le n radici λ_h della (62) sono reali e positive.

Se gli n autovalori λ_h sono *distinti*, le n autoennuple $\mathbf{u}_h$ sono linearmente indipendenti. Ed infatti, dati i due autovalori λ_h e λ_k può scriversi per la (64),

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_h = \lambda_h\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h$$

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_k = \lambda_k\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{u}_k$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^T\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_k &= \lambda_h\quad \mathbf{u}_k^T\ \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_h \\ (\mathbf{u}_h^T\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_k)^T &= \lambda_k\ \ (\mathbf{u}_h^T\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_k)^T \end{aligned} \tag{67}$$

Essendo $\mathbf{K}$ ed $\widetilde{\mathbf{M}}$ simmetriche, si ha

$$(\mathbf{u}_h^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{u}_k)^T = \mathbf{u}_k^T\ \mathbf{K}\,\mathbf{u}_h$$

$$(\mathbf{u}_h^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_k)^T = \mathbf{u}_k^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h \quad .$$

Le (67) si scrivono così

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_h = \lambda_h \mathbf{u}_k^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h$$

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_h = \lambda_k \mathbf{u}_k^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h \quad ;$$

sottraendo si ottiene

$$0 = (\lambda_h - \lambda_k) \mathbf{u}_k^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h \quad ,$$

da cui

$$\mathbf{u}_k^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h = 0 \; . \tag{68}$$

Due ennuple che rispettano la (68) si dicono *ortogonali,* e se ne vedrà presto il motivo. Intanto, dalla condizione di ortogonalità discende l'indipendenza lineare; infatti dalla posizione

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = 0$$

e cioè, per la (68),

$$\mathbf{c}_h \mathbf{u}_h^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h = 0 \; ;$$

si è già visto che

$$\mathbf{u}_h^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h > 0 \; ,$$

e quindi $c_h = 0$, per $h = 1, 2, \ldots n$.

Le autoennuple $\mathbf{u}_h$ sono perciò *linearmente indipendenti.*

L'aggettivo "ortogonale" si spiega perchè, per la (64), la (68) si scrive

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_h = 0 \; . \tag{69}$$

D'altro canto, l'*energia mutua* tra due configurazioni φ_h e φ_k è una forma bilineare in φ_{ih} e φ_{ik} (per $i, j = 1, 2, \ldots n$) che per $h = k$ deve fornire il doppio della L espressa dalla (41), e cioè

$$L_{hk} = \varphi_h^T \mathbf{K} \varphi_k \; ; \tag{70}$$

si ha così

$$L_h = \frac{1}{2} \varphi_h^T \mathbf{K} \varphi_h = \frac{1}{2} L_{hh} \; .$$

La (69) significa che l'energia mutua tra $\mathbf{u}_h$ ed $\mathbf{u}_k$ è nulla, e l'aggettivo "ortogonale" è così giustificato.

Le soluzioni $\mathbf{u}_h$ del sistema (61) sono definite, come già detto, ciascuna a meno di una costante; queste possono fissarsi con la *condizione di normalità*.

$$L_h = \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^T \mathbf{K} \mathbf{u}_h = \epsilon \; , \tag{71}$$

dove ϵ è l'unità di lavoro. Per la (64), la (71) può anche scriversi

$$\lambda_h \mathbf{u}_h^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h = 2\epsilon \; . \tag{72}$$

Le (69) e (71) possono compendiarsi nell'unica espressione

$$\mathbf{u}_h^T \mathbf{K} \mathbf{u}_k = 2\epsilon \delta_h^k \tag{73}$$

dove δ_h^k è il già definito delta di Kronecker. La (73) equivale all'altra

$$\lambda_h \mathbf{u}_h^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_k = 2\epsilon \delta_h^k \; . \tag{74}$$

La matrice

$$\mathbf{U} = \left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{array} \right| \; . \tag{75}$$

è la *matrice modale*; essa contiene per colonne affiancate le autoennuple (63), e può anche porsi nella forma

$$\mathbf{U} = |\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n| \tag{76}$$

La matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \tag{77}$$

è la *matrice degli autovalori.*

Le n relazioni (64)

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_h = \lambda_h \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_h \qquad (h = 1,\ 2,\ \dots\ n)$$

si traducono nell'unica

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{M}}\, \mathbf{U}\, \Lambda\ . \tag{78}$$

Nel prodotto $\mathbf{P} = \mathbf{KU}$ la colonna h-esima è data da $\mathbf{K}\ \mathbf{u}_h$, dove $\mathbf{u}_h$ è la colonna h-esima di $\mathbf{U}$. Infatti è

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1h} & \dots & \varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nh} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & p_{ih} & \\ & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \end{array} ,$$

e cioè

$$p_{ih} = K_{i1}\ \varphi_{1h} + K_{i2}\ \varphi_{2h} + \dots + K_{in}\ \varphi_{nh} = \bar{\mathbf{k}}_i\ \mathbf{u}_h \tag{79}$$

dove $\bar{\mathbf{k}}_i$ è la riga i-esima di $\mathbf{K}$ ed $\mathbf{u}_h$ è la colonna h-esima di $\mathbf{U}$. Il p_{ih} coincide quindi con il termine h-esimo del prodotto $\mathbf{K u}_h$.

D'altro canto nel prodotto $\mathbf{Q} = \mathbf{M\ U}$ la colonna h-esima è data da $\mathbf{M\ u}_h$; effettuando poi il prodotto $\widetilde{\mathbf{M}}\ \mathbf{U}\ \Lambda$ si ha

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1h} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nh} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_h & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11}\lambda_1 & \dots & q_{1h}\lambda_h & \dots & q_{1n}\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}\lambda_1 & \dots & q_{nh}\lambda_h & \dots & q_{nn}\lambda_n \end{vmatrix}$$

e cioè la colonna h-esima è moltiplicata per λ_h. Quindi la colonna h-esima della matrice $\widetilde{\mathbf{M}}\ \mathbf{U}\ \Lambda$ è $\lambda_h\ \mathbf{u}_h$. Per le (64) le due matrici $\mathbf{KU}$ ed $\widetilde{\mathbf{M}}\ \mathbf{U}\ \Lambda$ hanno colonne uguali, e quindi coincidono.

Per la (73) si ha poi

$$\mathbf{U}^T\mathbf{K U} = 2\epsilon\mathbf{I}\ . \tag{80}$$

Infatti $\mathbf{I}$ è la matrice identica

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

ed il termine generico del prodotto $\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$ è

$$p_{ij} = \mathbf{u}_i^* \mathbf{K}\, \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}\, \mathbf{u}_j \ ,$$

dove $\bar{\mathbf{u}}_i^*$ è la riga i-esima della $\mathbf{U}^T$, e cioè la colonna i-esima della $\mathbf{U}$; quindi $p_{ij} = 2\epsilon\, \delta_i^j$.

Dalle (78) e (80)

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{U}\,\Lambda$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} = 2\epsilon\mathbf{I}$$

si trae

$$2\epsilon\mathbf{I} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}\Lambda$$

da cui

$$\mathbf{U}^T \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}' = 2\epsilon\,\Lambda^{-1} \ . \qquad (81)$$

La trasformazione

$$\varphi = \mathbf{U}\,\mathbf{c} \qquad (82)$$

e cioè

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_{11}\, c_1 + \varphi_{12}\, c_2 + \ldots + \varphi_{1n}\, c_n \\
\varphi_2 &= \varphi_{21}\, c_1 + \varphi_{22}\, c_2 + \ldots + \varphi_{2n}\, c_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= \varphi_{n1}\, c_1 + \varphi_{n2}\, c_2 + \ldots + \varphi_{nn}\, c_n
\end{aligned}$$

fornisce ogni deformata C come somma delle deformate C_i inerenti alle autoennuple $\mathbf{u}_i$ moltiplicate ciascuna per una costante c_i:

$$C = \sum_i c_i\, C_i \ ; \qquad (83)$$

ed infatti per l'indipendenza delle autoennuple la $\mathbf{U}$ è invertibile, e quindi la (82) definisce le c_i in funzione delle φ_i.

Dalla (44)

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\varphi} + \mathbf{K}\varphi = 0$$

premoltiplicando per $\mathbf{U}^T$ e sostituendo alla φ il valore (82) si ha

$$\mathbf{U}^T\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{U} \quad \mathbf{U}\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{c} = 0 \quad ; \tag{84}$$

per le (80) e (81) la (84) si scrive

$$\mathbf{\Lambda}^{-1}\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{I}\,\mathbf{c} = 0$$

e, premoltiplicando per Λ

$$\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{\Lambda}\;\mathbf{c} = 0 \; . \tag{85}$$

In esteso la (85) si scrive

$$\begin{aligned} &\ddot{c}_1 + \lambda_1 c = 0 \\ &\ddot{c}_2 + \lambda_2 c = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\ddot{c}_n + \lambda_n c = 0 \; , \end{aligned} \tag{86}$$

e cioè si hanno n equazioni del tipo (11), la cui soluzione è

$$c_i = A_i \; sen \sqrt{\lambda_i} \;\; t + B_i \; cos \sqrt{\lambda_i} \;\; t \; .$$

Ciascuna configurazione C_i si muove quindi con moto armonico la cui frequenza circolare è data da

$$\omega_i^2 = \lambda_i \; , \tag{87}$$

e si può scrivere

$$c_i = A_i \; sen \; \omega_i t + B_i \; cos \; \omega_i t \; . \tag{88}$$

Le C_i, e cioè le autoennuple $\mathbf{u}_i$, sono i cosiddetti *modi* di vibrare; le

c_i sono le *coordinate normali,* o anche *coordinate modali.*

Le $2n$ condizioni iniziali

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \mathbf{b}$$

per la (82) si traducono nelle

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\,(0) &= \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{c}}\,(0) &= \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{b}\ ; \end{aligned} \tag{89}$$

queste forniscono i $2n$ valori A_i e B_i della (88). La (82) poi fa passare dalle coordinate modali alle lagrangiane; si tenga presente però che anche le coordinate modali possono essere interpretate come coordinate lagrangiane.

Si noti che dalla (80), e cioè dalla condizione di ortonormalità, postmoltiplicando per $\mathbf{U}^{-1}$ si ha

$$\mathbf{U}^T\,\mathbf{K} = 2\,\epsilon\,\mathbf{U}^{-1}\ ; \tag{90}$$

e quindi le (89) possono anche scriversi come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\,(0) &= \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{U}^T\,\mathbf{K}\mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{c}}\,(0) &= \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{U}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{b}\ . \end{aligned} \tag{91}$$

In generale, per la (90), la trasformazione inversa della (82)

$$\mathbf{c} = \mathbf{U}^{-1}\,\boldsymbol{\varphi} \tag{92}$$

si traduce nella

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{U}^T\,\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}\ . \tag{93}$$

Le espressioni di T ed L [(31) e (41)]

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \widetilde{\mathbf{M}} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}$$

possono scriversi in forma canonica utilizzando la (82); ed infatti si ha

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{U}^T \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{U} \dot{\mathbf{c}}$$

e, per la (81),

$$T = \epsilon \, \dot{\mathbf{c}}^T \, \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \, \dot{\mathbf{c}} \; ; \tag{94}$$

così pure

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \mathbf{c}$$

e, per la (80)

$$L = \epsilon \, \mathbf{c}^T \mathbf{c} \, . \tag{95}$$

Si vuole infine osservare che se una radice λ_h della (62) è di molteplicità s, il sistema (61) per $\lambda = \lambda_h$ ammette s autoennuple $\mathbf{u}_{h1}$ $\mathbf{u}_{h2}$ ... $\mathbf{u}_{hs}$ linearmente indipendenti (e quindi qualsiasi loro combinazione è ancora soluzione). Esse sono ortogonali nel senso della (69) alle autoennuple corrispondenti agli autovalori $\lambda_i \neq \lambda_h$. Inoltre, le costanti di combinazione possono essere scelte in modo da renderle anche tra loro ortogonali. Seguendo, per esempio, il procedimento di *Schmidt*, si può partire da $\mathbf{u}_{h1}$, ponendo la seconda come

$$\mathbf{u}'_{h2} = \mathbf{u}_{h2} + c_{21} \, \mathbf{u}_{h1} \; ;$$

la costante c_{21} è data dalla condizione

$$\mathbf{u}_{h1}^T \mathbf{K} \, \mathbf{u}'_{h2} = 0$$

e cioè

$$\mathbf{u}_{h1}^T \, \mathbf{K} \, (\mathbf{u}_{h2} + c_{21} \, \mathbf{u}_{h1}) = 0 \ ,$$

da cui

$$c_{21} = - \frac{\mathbf{u}_{h1}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{u}_{h2}}{\mathbf{u}_{h1}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{u}_{h1}} \ .$$

La terza si pone come

$$\mathbf{u}'_{h3} = \mathbf{u}_{h3} + c_{31} \, \mathbf{u}_{h1} + c_{32} \, \mathbf{u}'_{h2} \ ;$$

le due condizioni di ortogonalità con $\mathbf{u}_{h1}$ ed $\mathbf{u}'_{h2}$ sono

$$\mathbf{u}_{h1}^T \ \mathbf{K} \, (\mathbf{u}_{h3} + c_{31} \, \mathbf{u}_{h1} + c_{32} \, \mathbf{u}'_{h2}) = 0$$

$$\mathbf{u}_{h2}'^T \ \mathbf{K} \, (\mathbf{u}_{h3} + c_{31} \, \mathbf{u}_{h1} + c_{32} \, \mathbf{u}'_{h2}) = 0 \ .$$

Esse si scrivono

$$\mathbf{u}_{h1}^T \ \mathbf{K} \, \mathbf{u}_{h3} \ + c_{31} \, \mathbf{u}_{h1}^T \ \mathbf{K} \, \mathbf{u}_{h1} \ = 0$$

$$\mathbf{u}_{h2}'^T \ \mathbf{K} \, \mathbf{u}_{h3} \ + c_{32} \, \mathbf{u}_{h2}'^T \ \mathbf{K} \, \mathbf{u}'_{h2} \ = 0$$

da cui si ricavano separatamente c_{31} e c_{32}. Il procedimento si itera in modo ovvio.

I vettori $\mathbf{u}'_{h2}$, $\mathbf{u}'_{h3}$ ... non possono essere nulli, perchè gli $\mathbf{u}_i$ sono indipendenti, e così ogni loro parte. Essi poi, essendo ortogonali, sono anche indipendenti. E' quindi sempre possibile ottenere la matrice modale $\mathbf{U}$ (75) formata da n ennuple ortogonali, e quindi indipendenti.

Problema n. 5.

a) Si consideri ancora la trave della fig. 4.1, soggetta (fig. 5) ad un carico

$$q(t) = q \; sen \; \omega_q t \; . \qquad (96)$$

Risulta

$$P = - \int_0^{3a} q \, v \, dz = A_q(t) \; sen \; \omega_q t = q a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \; sen \; \omega_q t \; .$$

Si ha

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_1} = - q a^2 \; sen \; \omega_q t$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_2} = q a^2 \; sen \; \omega_q t$$

e quindi le (10) porgono (vedi pure (43))

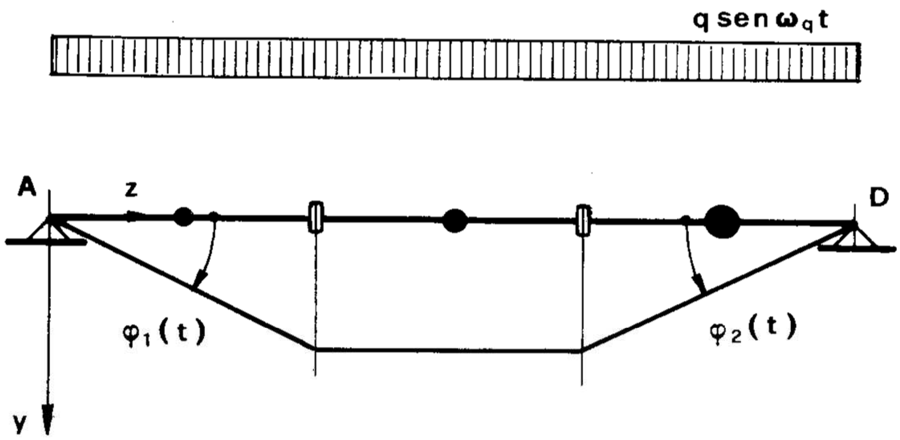

Figura 5.

$$\begin{aligned} \frac{ma^2}{8} (6\ddot{\varphi}_1 - 4\ddot{\varphi}_2) + \frac{3k}{2} (6\varphi_1 + 4\varphi_2) &= q a^2 \; sen \; \omega_q t \\ - \frac{ma^2}{8} (4\ddot{\varphi}_1 - 10\ddot{\varphi}_2) + \frac{3k}{2} (4\varphi_1 + 4\varphi_2) &= - q a^2 \; sen \; \omega_q t \; . \end{aligned} \qquad (97)$$

Le (97) si compendiano nell'unica relazione matriciale

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{q}\, sen\, \omega_q t \qquad (98)$$

dove

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} Q_1 \\ \\ Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qa^2 \\ \\ -qa^2 \end{vmatrix} \qquad (99)$$

L'integrale generale del sistema omogeneo associato al (97) è dato dalle (56). Un integrale particolare del (97) è poi

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_1^*\, sen\, \omega_q t \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^*\, sen\, \omega_q t \quad ; \end{aligned} \qquad (100)$$

sostituendo nel (97) si ha infatti

$$sen\, \omega_q t \left[-\frac{\omega_q^2\, ma^2}{8} (6\varphi_1^* - 4\varphi_2^*) + \frac{3k}{2} (6\varphi_1^* + 4\varphi_2^*) \right] =$$

$$= qa^2\, sen\, \omega_q t$$

$$sen\, \omega_q t \left[\frac{\omega_q^2\, ma^2}{8} (4\varphi_1^* - 10\varphi_2^*) + \frac{3k}{2} (4\varphi_1^* + 4\varphi_2^*) \right] =$$

$$= -\, qa^2\, sen\, \omega_q t$$

che è soddisfatta se e solo se

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_q^2\, ma^2}{8} (6\varphi_1^* - 4\varphi_2^*) + \frac{3k}{2} (6\varphi_1^* + 4\varphi_2^*) &= qa^2 \;. \\ \frac{\omega_q^2\, ma^2}{8} (4\varphi_1 - 10\varphi_2) + \frac{3k}{2} (4\varphi_1^* + 4\varphi_2^*) &= -\, qa^2 \;. \end{aligned} \qquad (101)$$

Il (101) si scrive

$$\left(-\frac{3}{8}\, ma^2\, \omega_q^2 + \frac{9k}{2}\right) \cdot \varphi_1^* + \left(\frac{ma^2\, \omega_q^2}{4} + 3k\right) \varphi_2^* = \frac{qa^2}{2}\,.$$

$$\left(\frac{ma^2\, \omega_q^2}{4} + 3k\right) \varphi_1^* + \left(-\frac{5}{8}\, ma^2\, \omega_q^2 + 3k\right) \varphi_2^* = -\frac{qa^2}{2}\,.$$

Confrontando con il (51), si nota che se $\omega_q = \omega_1$, oppure $\omega_q = \omega_2$ (ω_1 ed ω_2 radici della (52)) è $\Delta = 0$, e quindi $\varphi_1^* = \infty$, $\varphi_2^* = \infty$. E' questo il già osservato fenomeno della risonanza.

La soluzione è somma delle (100) e delle (56):

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_{11}\,(A_1\, sen\, \omega_1 t + B_1\, cos\, \omega_1 t) + \\ &+ \varphi_{12}\,(A_2\, sen\, \omega_2 t + B_2\, cos\, \omega_2 t) + \\ &+ \varphi_1^*\, sen\, \omega_q t \end{aligned}$$

$$(102)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \varphi_{21}\,(A_1\, sen\, \omega_1 t + B_1\, cos\, \omega_1 t) + \\ &+ \varphi_{22}\,(A_2\, sen\, \omega_2 t + B_2\, cos\, \omega_2 t) + \\ &+ \varphi_2^*\, sen\, \omega_q t\,. \end{aligned}$$

Le quattro costanti sono ottenibili dalle condizioni iniziali (57).

b) L'equazione (98)

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\varphi} + \mathbf{K}\varphi = \mathbf{q}\, sen\, \omega_q t$$

può riferirsi ad un sistema ad un numero qualsiasi n di parametri di libertà.

La posizione (82)

$$\varphi = \mathbf{U}\,\mathbf{c}$$

la trasforma in

$$\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{U}\,\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}\,\mathbf{U}\,\mathbf{c} = \mathbf{q}\ sen\ \omega_q\, t\ .$$

Premoltiplicando per $\mathbf{U}^T$ si ottiene

$$\mathbf{U}^T\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{U}\,\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{U}^T\,\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{c} = \mathbf{U}^T\,\mathbf{q}\,sen\ \omega_q\, t \quad ;$$

per le (81) e (80) si ha quindi

$$2\epsilon\,\mathbf{\Lambda}^{-1}\,\ddot{\mathbf{c}} + 2\epsilon\,\mathbf{c} = \mathbf{U}^T\,\mathbf{q}\ sen\ \omega_q\, t\ ,$$

e premoltiplicando per $\mathbf{\Lambda}$

$$\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{c} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T\,\mathbf{q}\ sen\ \omega_q\, t\ . \tag{103}$$

Le (103) in esteso si scrivono

$$\ddot{c}_1 + \lambda_1\,c_1 = \frac{\lambda_1}{2\epsilon}\sum_{h=1}^{n}\varphi_{h1}\,Q_h\ sen\ \omega_q\, t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{104}$$

$$\ddot{c}_n + \lambda_n\,c_n = \frac{\lambda_n}{2\epsilon}\sum_{h=1}^{n}\varphi_{hn}\,Q_h\ sen\ \omega_q\, t\ .$$

La parte omogenea delle (104) è data dalle (86). La generica equazione (104) ha quindi soluzione (88)

$$c_i = A_i\ sen\ \omega_i t + B_i\ cos\ \omega_i t + c_i^*(t)\ ,$$

dove $c_i^*(t)$ è un integrale particolare. Posto

$$c_i^*(t) = c_i^* \, sen \, \omega_q t$$

l'equazione si scrive

$$-\omega_q^2 \, c_i^* \, sen \, \omega_q \, t + \omega_i^2 \, c_i^* \, sen \, \omega_q \, t = \frac{\omega_i^2}{2\epsilon} \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, Q_h \, sen \, \omega_q \, t \; ,$$

ed è soddisfatta se e solo se

$$c_i^* = \frac{\omega_i^2 \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, Q_h}{2\epsilon \, (\omega_i^2 - \omega_q^2)} \; .$$

In definitiva è

$$c_i = A_i \, sen \, \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + \frac{\omega_i^2}{2\epsilon \, (\omega_i^2 - \omega_q^2)} \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, Q_h \, sen \, \omega_q \, t \; . \tag{105}$$

La posizione (82) consente poi di passare dalle coordinate modali alle lagrangiane. Le $2n$ costanti A_i e B_i sono definite dalle condizioni iniziali. Se per $t = 0$ è $c_i = 0$ e $\dot{c}_i = 0$, si ha

$$0 = B_i$$

$$0 = -\,\omega_i A_i - \omega_q \, c_i^*$$

da cui

$$c_i = c_i^* \left(- \frac{\omega_q}{\omega_i} \, sen \, \omega_i t + sen \, \omega_q \, t \right) . \tag{106}$$

Per $\omega_q \to \omega_i$, c_i tende alla forma indeterminata $c_i^* \, (-\, sen \, \omega_i t + sen \, \omega_i t) = \dfrac{0}{0}$; è questo il già esaminato fenomeno della risonanza.

Si osserva come la trasformazione (82), che porta alla scrittura delle

n equazioni (86) dissociate, e cioè ciascuna in una sola incognita c_i (t), non è di per sè di grande interesse, perchè presuppone il calcolo preventivo degli autovalori λ_i. Il vantaggio è evidente però in presenza di carichi trasversali, dove le equazioni nelle c_i sono ancora dissociate, come si evince dalle (104).

Problema n. 6.

a) Si considera di nuovo la trave della fig. 4.1, soggetta questa volta (fig. 6) ad un cedimento verticale alterno dell'appoggio A pari a

$$\Delta_y\,(t) = \Delta\, sen\; \omega_q\, t\,. \tag{107}$$

Si ha, sovrapponendo gli effetti di Δ_y (t), φ_1 e φ_2 (φ_1 e φ_2 sono

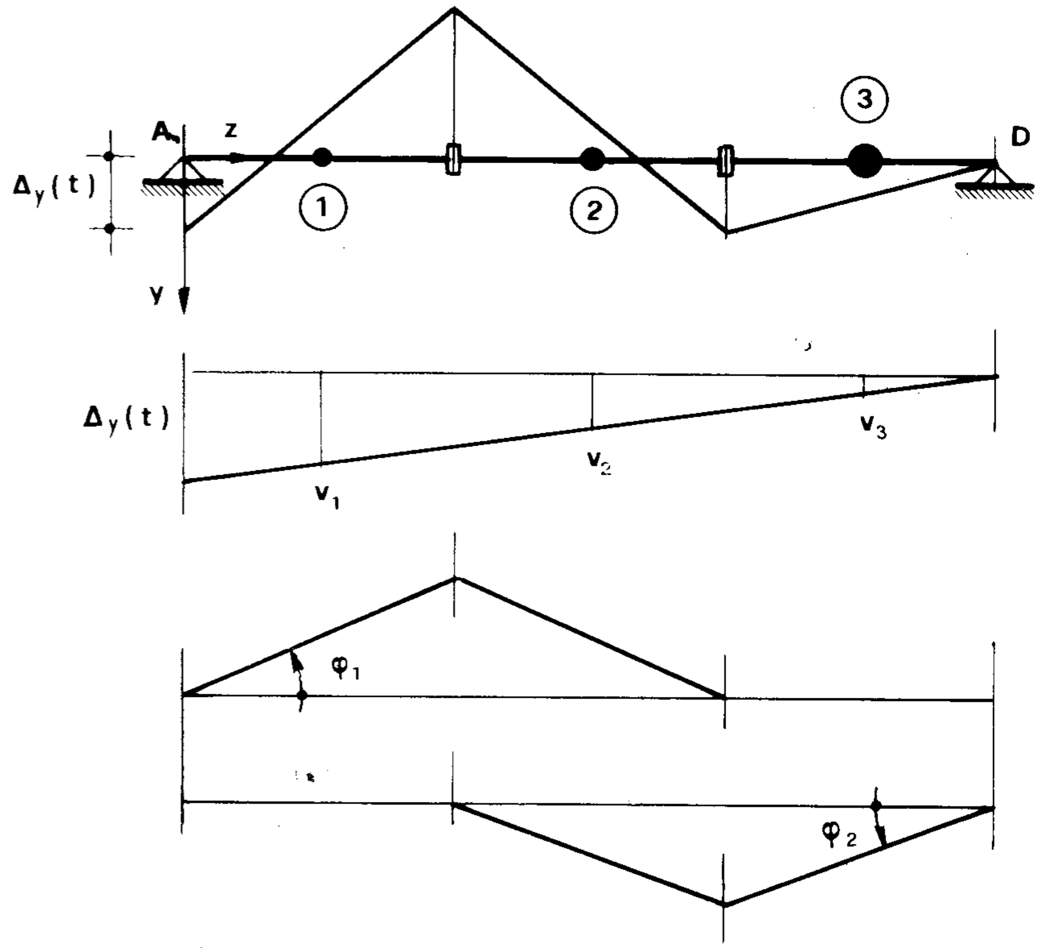

Figura 6.

valutati rispetto alla congiungente AB, mobile per effetto di Δ_y)

$$v_1 = \frac{5}{6}\,\Delta\, sen\, \omega_q t - \frac{a}{2}\,\varphi_1$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\,\Delta\, sen\, \omega_q t + \frac{a}{2}\,(-\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (108)$$

$$v_3 = \frac{1}{6}\,\Delta\, sen\, \omega_q t + \frac{a}{2}\,\varphi_2 \,.$$

Può porsi (27)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\,\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{v}_\Delta \qquad (109)$$

dove

$$\mathbf{v}_\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{6}\,\Delta \\ \frac{1}{2}\,\Delta \\ \frac{1}{6}\,\Delta \end{vmatrix}\; sen\, \omega_q t \,. \qquad (110)$$

Per la (109), la (30)

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{v}}$$

si scrive

$$T = \frac{1}{2}\,(\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\,\mathbf{V}^T + \dot{\mathbf{v}}_\Delta^T)\,\mathbf{M}\,(\mathbf{V}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\mathbf{v}}_\Delta) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\,\mathbf{V}^T\mathbf{M}\,\mathbf{V}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{v}}_\Delta^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{v}}_\Delta + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T\,\mathbf{V}^T\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{v}}_\Delta \,.$$

La matrice $\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}$ è la $\widetilde{\mathbf{M}}$ della (32). Il caso in esame è quello – molto frequente, si citi per tutti il sismo – in cui il cedimento permette il moto rigido della struttura, in questo caso l'energia di deformazione è data ancora dalla (41)

$$L = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \ ,$$

dove le coordinate lagrangiane φ_j sono valutate rispetto alla struttura indeformata.

Le (10) porgono così le due equazioni

$$\widetilde{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}_\Delta$$

e cioè

$$\widetilde{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \omega_q^2 \, \mathbf{b} \, sen \, \omega_q t \tag{111}$$

dove

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} B_1 \\ \\ B_2 \end{vmatrix} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \Delta \ . \tag{112}$$

La (111) è identica alla (98); ad essa può pervenirsi anche considerando la struttura soggetta, invece che al cedimento (107), alle forze $- m_h \ddot{v}_\Delta$ in corrispondenza delle masse. Per la (82) la (111) si scrive

$$\widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{U} \ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{K} \mathbf{U} \mathbf{c} = \omega_q^2 \, \mathbf{b} \, sen \, \omega_q t \ . \tag{113}$$

Si osservi che $\mathbf{b}$ ha dimensioni $[Flt^2]$, $\omega_q^2 \mathbf{b}$ dimensioni $[Fl]$; ciò nel nostro caso, in cui le coordinate lagrangiane sono dei numeri puri, ed il cedimento è una lunghezza. Premoltiplicando per $\mathbf{U}^T$ dalla (113) si ottiene [(81), (80)]

$$2 \epsilon \Lambda^{-1} \ddot{\mathbf{c}} + 2 \epsilon \mathbf{c} = \omega_q^2 \, \mathbf{U}^T \mathbf{b} \, sen \, \omega_q t \ ; \tag{114}$$

le (114) in esteso si scrivono

$$\ddot{c}_i + \omega_i^2 c_i = \frac{\omega_i^2 \omega_q^2}{2 \epsilon} \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} B_h \ sen \, \omega_q t$$

ove, nel caso in esame, $n = 2$.

Ciascuna di queste equazioni ha soluzione, come già visto al comma precedente,

$$c_i = A_i \, sen \, \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + c_i^* (t) \ .$$

L'integrale particolare $c_i^* (t)$ può porsi ancora nella forma

$$c_i^* (t) = c_i^* \, sen \, \omega_q t \ ;$$

per esso l'equazione si scrive

$$- \omega_q^2 \, c_i^* \, sen \, \omega_q t + \omega_i^2 \, c_i^* \, sen \, \omega_q t =$$

$$= \frac{\omega_i^2 \, \omega_q^2}{2 \epsilon} \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, B_h \, sen \, \omega_q t \ ,$$

che è soddisfatta se e solo se

$$c_i^* = \frac{\omega_i^2 \, \omega_q^2}{2 \epsilon} \; \frac{\sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, B_h}{\omega_i^2 - \omega_q^2} \ . \tag{115}$$

In definitiva è (confronta pure con la (105))

$$\begin{aligned} c_i &= A_i \, sen \, \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + \\ &+ \frac{\omega_i^2 \, \omega_q^2}{2 \epsilon \, (\omega_i^2 - \omega_q^2)} \sum_{h=1}^{n} \varphi_{hi} \, B_h \, sen \, \omega_q t \ . \end{aligned} \tag{116}$$

Nel caso in esame la $\mathbf{u}_1$ normalizzata è fornita [(60), (72), (42)] da

$$| \, c \ ; \ - 1{,}3014 \, c \, | \cdot \begin{vmatrix} 9k & 6k \\ 6k & 6k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ - 1{,}3014 \, c \end{vmatrix} = 2 \epsilon$$

e cioè

$$3{,}545\ c^2 k = 2\epsilon$$

da cui

$$c = 0{,}5311 \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$$

e quindi

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} \\ \\ \varphi_{21} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0{,}5311 \\ \\ -\ 0{,}6912 \end{vmatrix} \qquad (117)$$

Così pure per la $\mathbf{u}_2$ si ha

$$| c\ ;\ 0{,}6586\ c | \cdot \begin{vmatrix} 9k & 6k \\ 6k & 6k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ 0{,}6586\ c \end{vmatrix} = 2\epsilon$$

da cui

$$c = 0{,}2264 \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$$

e quindi

$$\mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{12} \\ \\ \varphi_{22} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0{,}2264 \\ \\ 0{,}1491 \end{vmatrix} . \qquad (118)$$

E' poi [(28),(25)]

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M} = \begin{vmatrix} -\dfrac{a}{2} & -\dfrac{a}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{ma}{2} & -ma & 0 \\ 0 & ma & \dfrac{3}{2}ma \end{vmatrix},$$

ed ancora (110)

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{ma}{2} & -ma & 0 \\ 0 & ma & \dfrac{3}{2}ma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{5}{6}\Delta \\ \dfrac{1}{2}\Delta \\ \dfrac{1}{6}\Delta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{11}{12}ma\,\Delta \\ \dfrac{3}{4}ma\,\Delta \end{vmatrix}.$$

E' quindi (112)

$$B_1 = -\frac{11}{12}\, ma\,\Delta$$

$$B_2 = \frac{3}{4}\, ma\,\Delta\,.$$

Se ne trae (115)

$$c_1^* = \frac{\omega_1^2\,\omega_q^2}{2\epsilon\,(\omega_1^2 - \omega_q^2)}\sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}\,(0{,}5311\, B_1 - 0{,}6912\, B_2) = \tag{119}$$

$$= 1{,}0052\, \frac{ma\Delta}{\sqrt{2\epsilon k}}\, \frac{\omega_1^2\,\omega_q^2}{\omega_1^2 - \omega_q^2}\;;$$

$$c_2^* = \frac{\omega_2^2\,\omega_q^2}{2\epsilon\,(\omega_2^2 - \omega_q^2)}\sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}\,(0{,}2264\, B_1 + 0{,}1491\, B_2) = \tag{120}$$

$$= -\,0{,}0957\, \frac{ma\,\Delta}{\sqrt{2\,\epsilon\, k}}\, \frac{\omega_2^2\,\omega_q^2}{\omega_2^2 - \omega_q^2}\,.$$

Problema n. 7.

Si considera ancora la trave della fig. 4.1, soggetta (fig. 7.1) ad una forza assiale αF in A e ad una forza $2\,\alpha F$ in B.

Si calcolano innanzitutto i valori critici di α. L'appoggio A si sposta secondo z della quantità

$$w_A = \frac{a}{2}\,[\varphi_1^2 + (\varphi_1 + \varphi_2)^2 + \varphi_2^2] = \frac{a}{2}\,(2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2)\,,$$

ed il punto B della quantità

$$w_B = \frac{a}{2}\,[(\varphi_1 + \varphi_2)^2 + \varphi_2^2] = \frac{a}{2}\,(\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2)\,.$$

Dalla relazione

$$P = -\alpha F w_A - 2\alpha F w_B$$

si trae

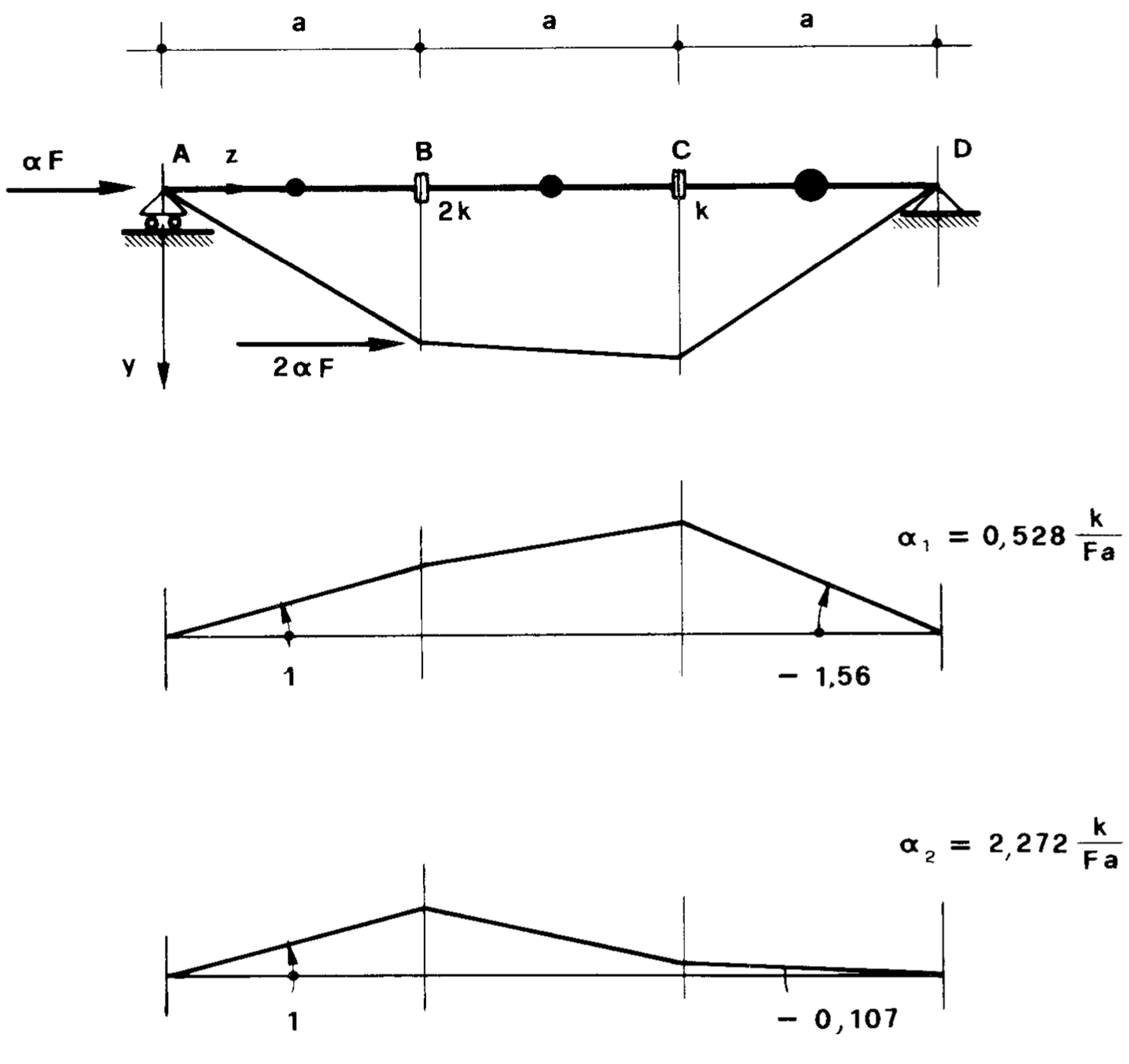

Figura 7.1.

$$P = -\alpha \frac{Fa}{2} (4\varphi_1^2 + 6\varphi_2^2 + 6\varphi_1 \varphi_2) \,. \qquad (121)$$

E' poi (40)

$$L = \frac{3k}{2} (3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 4\varphi_1 \varphi_2) \,.$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = (9k - 4\alpha Fa)\,\varphi_1 + (6k - 3\alpha Fa)\,\varphi_2 = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = (6k - 3\alpha Fa)\,\varphi_1 + (6k - 6\alpha Fa)\,\varphi_2 = 0. \tag{122}$$

La condizione di compatibilità del sistema (122) è

$$\det \begin{vmatrix} (9k - 4\alpha Fa) & (6k - 3\alpha Fa) \\ (6k - 3\alpha Fa) & (6k - 6\alpha Fa) \end{vmatrix} = 0\,,$$

che presenta le due radici (*valori critici* di α, o *moltiplicatori critici* dell'insieme F e $2F$)

$$\alpha_1 = 0{,}528\,\frac{k}{Fa}$$

$$\alpha_2 = 2{,}272\,\frac{k}{Fa}\,. \tag{123}$$

Corrispondentemente si hanno le due soluzioni del sistema (122)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1{,}560 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -0{,}107 \end{vmatrix}\,. \tag{124}$$

Sempre nella fig. 7.1 sono riportate le due deformate (124).

b) Si ricercano adesso i modi di vibrare in presenza di αF e $2\alpha F$. Si ha in questo caso [(37), (40), (121)]

$$T = \frac{ma^2}{8}\,(3\dot{\varphi}_1^2 + 5\dot{\varphi}_2^2 - 4\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2)$$

$$L = \frac{3k}{2} \left(3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 4\varphi_1 \varphi_2\right)$$

$$P = -\alpha \frac{Fa}{2} \left(4\varphi_1^2 + 6\varphi_2^2 + 6\varphi_1 \varphi_2\right) ;$$

è quindi (10), ponendo $\varphi(t) = \varphi \; sen \; \omega t$,

$$sen \; \omega t \quad \left[\left(-\frac{3}{8} ma^2 \omega^2 + \frac{9}{2} k - 2\alpha Fa\right) \cdot \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 + 3k - \frac{3}{2} \alpha Fa\right) \varphi_2\right] = 0 \quad ; \qquad (125)$$

$$sen \; \omega t \quad \left[\left(\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 + 3k - \frac{3}{2} \alpha Fa\right) \varphi_2 + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{5}{8} ma^2 \omega^2 + 3k - 3\alpha Fa\right) \varphi_2\right] = 0 \quad .$$

Il sistema (125) si traduce nell'altro

$$\left(-\frac{3}{8} ma^2 \omega^2 + \frac{9}{2} k - 2\alpha Fa\right) \varphi_1 + \left(\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 + 3k - \frac{3}{2} \alpha Fa\right) \varphi_2 = 0$$

(126)

$$\left(\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 + 3k - \frac{3}{2} \alpha Fa\right) \varphi_1 + \left(-\frac{5}{8} ma^2 \omega^2 + 3k - 3\alpha Fa\right) \varphi_2 = 0$$

che ha soluzione non banale se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} \left(-\frac{3}{8}ma^2\omega^2 + \frac{9}{2}k - 2\alpha F\alpha\right) & \left(\frac{1}{4}ma^2\omega^2 + 3k - \frac{3}{2}\alpha Fa\right) \\ \left(\frac{1}{4}ma^2\omega^2 + 3k - \frac{3}{2}\alpha Fa\right) & \left(-\frac{5}{8}ma^2\omega^2 + 3k - 3\alpha Fa\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (127)$$

L'equazione (127), quadratica in ω^2, ha come radici

$$\begin{matrix}\omega_1^2 \\ \omega_2^2\end{matrix} = \frac{1}{ma}\left(15{,}\overline{81}\,\frac{k}{a} - 9{,}\overline{09}\,\alpha F\right) \mp$$
$$\mp \sqrt{224{,}03\,\frac{k^2}{a^2} + 60{,}835\,\alpha^2F^2 - 226{,}51\,\frac{kF}{a}}\ . \qquad (128)$$

Per $\alpha = 0$ la (128) fornisce

$$\omega_1^2 = 0{,}85\,\frac{k}{ma^2}$$

$$\omega_2^2 = 30{,}79\,\frac{k}{ma^2}\,,$$

e cioè le (59).

Per $\omega = 0$ la (127) fornisce l'equazione in α

$$\alpha^2 - \frac{42}{15}\,\frac{k}{Fa}\,\alpha + \frac{18}{15}\,\frac{k^2}{F^2a^2} = 0$$

che ha radici

$$\alpha_1 = 0{,}528 \frac{k}{Fa}$$

$$\alpha_2 = 2{,}272 \frac{k}{Fa},$$

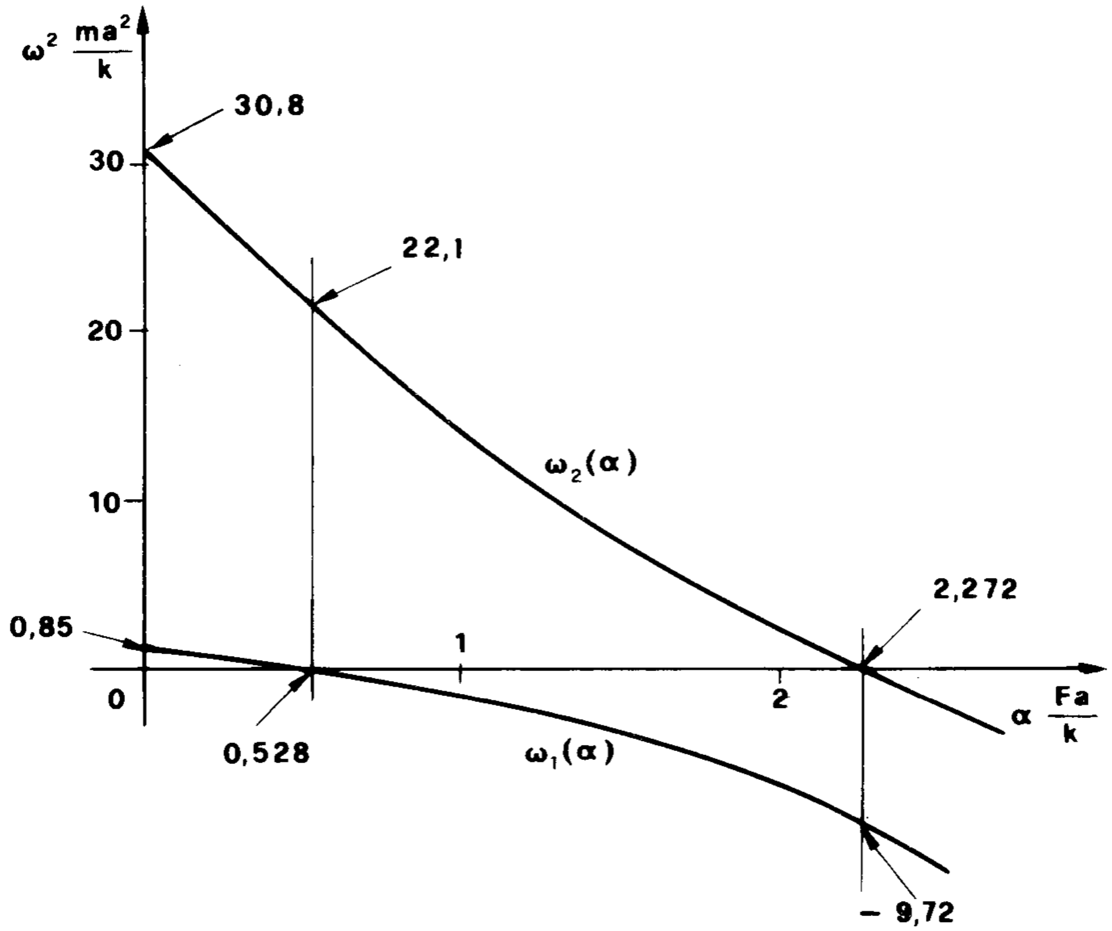

Figura 7.2.

e cioè le (123).

Si controlla facilmente (fig. 7.2) che ω_1 ed ω_2 (129) sono funzioni decrescenti di α, che si annullano la prima in $\alpha = \alpha_1$, la seconda in $\alpha = \alpha_2$. Per $\alpha > \alpha_1$ la ω_1 è negativa; ciò significa che per $\alpha > \alpha_1$ la struttura entra in crisi, come del resto era da attendere.

c) In generale può porsi, per un sistema a più gradi di libertà soggetto a forze assiali,

$$P = -\frac{\alpha}{2} \varphi^T \mathbf{P} \varphi \; ; \qquad (129)$$

le (10), in questo caso, porgono, al posto delle n equazioni del tipo (44), le altre

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} - \alpha\mathbf{P}\boldsymbol{\varphi} = 0\,. \tag{130}$$

Le n equazioni

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} - \alpha\mathbf{P}\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{131}$$

porgono gli n valori di α_h $(h = 1, 2, \dots n)$ dei moltiplicatori critici, attraverso l'equazione

$$\det|\mathbf{K} - \alpha\mathbf{P}| = 0\,. \tag{132}$$

E' anche questo un problema di autovalori (prob. 4, comma *d*); la **P** è simmetrica e definita positiva, e quindi le n radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sono reali e positive. Così pure le n soluzioni del sistema (131), corrispondenti alle suddette radici, e che si chiameranno $\mathbf{a}_h$ $(h = 1, 2, \dots n)$ sono linearmente indipendenti. Infatti, si può procedere analogamente a quanto svolto nel prob. 4 (comma *d*); nell'ipotesi che gli n autovalori α_h siano distinti, dati due qualsiasi di questi, α_h ed α_k, per la (131) si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a}_h &= \alpha_h\,\mathbf{P}\mathbf{a}_h \\ \mathbf{K}\mathbf{a}_k &= \alpha_k\,\mathbf{P}\mathbf{a}_k \end{aligned} \tag{133}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{a}_h &= \alpha_h\,a_k^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{a}_h \\ (\mathbf{a}_h^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{a}_k)^T &= \alpha_k\,(\mathbf{a}_h^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{a}_k)^T\,. \end{aligned} \tag{134}$$

Essendo **K** e **P** simmetriche, si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_h^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{a}_k)^T &= \mathbf{a}_k^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{a}_h \\ (\mathbf{a}_h^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{a}_k)^T &= \mathbf{a}_k^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{a}_h\,. \end{aligned}$$

e quindi le (134) si scrivono

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{K} \mathbf{a}_h = \alpha_h \mathbf{a}_k^T \mathbf{P} \mathbf{a}_h$$

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{K} \mathbf{a}_h = \alpha_k \mathbf{a}_k^T \mathbf{P} \mathbf{a}_h$$

da cui, sottraendo,

$$0 = (\alpha_h - \alpha_k) \mathbf{a}_k^T \mathbf{P} \mathbf{a}_h$$

e quindi

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{P} \mathbf{a}_h = 0 \; ; \tag{135}$$

la (135) implica l'indipendenza delle $\mathbf{a}_h$. Dalla seconda delle (133) si trae

$$\mathbf{P} \mathbf{a}_h = \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{K} \mathbf{a}_h$$

che sostituita nella (135) porge

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{K} \mathbf{a}_h = 0 \; ; \tag{136}$$

perciò anche le $\mathbf{a}_h$, come le $\mathbf{u}_h$ del prob. 4, sono *ortogonali* nel senso dell'energia mutua. Esse possono normalizzarsi attraverso una delle due relazioni (vedi (71) e (72))

$$\mathbf{a}_h^T \mathbf{K} \mathbf{a}_h = 2\epsilon \tag{137}$$

$$\alpha_h \mathbf{a}_h^T \mathbf{P} \mathbf{a}_h = 2\epsilon \tag{138}$$

Le autoennuple $\mathbf{a}_h$ della (131) possono raggrupparsi nell'unica matrice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi'_{21} & \varphi'_{22} & \cdots & \varphi'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix} \; , \tag{139}$$

dove si sono introdotti gli apici per non confondere gli elementi di **A** con quelli di **U** (75). La **A** si chiama *matrice euleriana*; essa contiene per colonne affiancate le autoennuple $\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n$ della (132).

Se esistono radici multiple λ_h, vale ancora quanto detto nel prob. 4 con riferimento a questo caso; è quindi sempre possibile ottenere la matrice **A** formata da n colonne ortogonali, e quindi indipendenti.

La matrice diagonale

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} \tag{140}$$

è la *matrice dei moltiplicatori critici.*

Le n relazioni

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a}_h = \alpha_h\,\mathbf{P}\,\mathbf{a}_h$$

si traducono nell'unica

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma} \quad ; \tag{141}$$

le (136) e (137) si compendiano poi nell'unica

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{K}\mathbf{A} = 2\epsilon\mathbf{I}\ . \tag{142}$$

Dalle (141) e (142) si trae

$$2\epsilon\mathbf{I} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}$$

da cui, postmoltiplicando per $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$,

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}\mathbf{A} = 2\epsilon\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\ . \tag{143}$$

d) Si torni all'equazione (130)

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\varphi} + \mathbf{K}\varphi - \alpha\mathbf{P}\varphi = 0$$

e si ponga la φ sotto l'aspetto

$$\varphi = \mathbf{A}\,\mathbf{c}\ ; \tag{144}$$

si ha così

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{c} - \alpha\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{c} = 0\ .$$

Premoltiplicando per $\mathbf{A}^T$ si ottiene

$$\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{A}\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{c} - \alpha\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{c} = 0$$

e, per le (142) e (143),

$$\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{A}\ddot{\mathbf{c}} + 2\epsilon\,\mathbf{c} - 2\alpha\epsilon\,\mathbf{\Gamma}^{-1}\,\mathbf{c} = 0\ . \tag{145}$$

Chiamando $\overline{\mathbf{M}}$ la matrice $\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{A}$, ed $\overline{M}_{ij}$ i suoi elementi, la (145) equivale alle n equazioni

$$\begin{gathered}\overline{M}_{11}\,\ddot{c}_1 + \overline{M}_{12}\,\ddot{c}_2 + \ldots + \overline{M}_{1n}\,\ddot{c}_n + 2\epsilon c_1\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right) = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{M}_{n1}\,\ddot{c}_1 + \overline{M}_{n2}\,\ddot{c}_2 + \ldots + \overline{M}_{nn}\,\ddot{c}_n + 2\epsilon c_n\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right) = 0\ .\end{gathered} \tag{146}$$

Ponendo

$$c_i\,(t) = c_i\ sen\ \omega t \tag{147}$$

per $i = 1, 2, \ldots n$, tale soluzione è ammessa se e solo se si verificano le n equazioni

$$\begin{gathered}-\ \omega^2\,(\overline{M}_{11}\,c_1 + \ldots + \overline{M}_{1n}\,c_n) + 2\epsilon c_1\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right) = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\ \omega^2\,(\overline{M}_{n1}\,c_1 + \ldots + \overline{M}_{nn}\,c_n) + 2\epsilon c_n\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right) = 0\ .\end{gathered} \tag{148}$$

Queste hanno soluzione non banale se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M_{11} + 2\epsilon\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\right] \ldots & -\omega^2 M_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -\omega^2 M_{n1} & \ldots \left[-\omega^2 M_{nn} + 2\epsilon\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right)\right] \end{vmatrix} = 0 \tag{149}$$

Si hanno così le n frequenze ω_1 ω_2 ... ω_n, e dal sistema (148) gli n modi corrispondenti; le ω_h sono funzioni di α (fig. 7.4). Se $\alpha = \alpha_h$, tutti gli elementi della linea h-esima del determinante (149) presentano il fattore ω^2, e quindi l'equazione (149) ha una radice $\omega = 0$.

e) Nel caso in esame si cominci con il normalizzare le (124). Si ha così [(137), (42)]

$$|c \; ; \; -1{,}560\, c| \cdot \begin{vmatrix} 9k & 6k \\ 6k & 9k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ -1{,}560\, c \end{vmatrix} = 2\epsilon$$

e cioè

$$4{,}8816\, c^2 k = 2\epsilon$$

da cui

$$c = 0{,}4526 \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$$

e quindi

$$\mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} \\ \\ \varphi'_{21} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,4526 \\ \\ -0,7061 \end{vmatrix} \qquad (150)$$

Così pure è

$$|c \; ; -0,107\,c| \cdot \begin{vmatrix} 9k & 6k \\ 6k & 6k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ -0,107\,c \end{vmatrix} = 2\epsilon$$

e cioè

$$7,7847 \; c^2 k = 2\epsilon$$

da cui

$$c = 0,3584 \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$$

e quindi

$$\mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \varphi'_{12} \\ \\ \varphi'_{22} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,3584 \\ \\ -0,0383 \end{vmatrix} \qquad (151)$$

E' quindi

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,4526 & 0,3584 \\ \\ -0,7061 & -0,0383 \end{vmatrix} \qquad (152)$$

Si ha poi (38)

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{A}^T\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{A} = \frac{2ma^2\,\epsilon}{k}\begin{vmatrix} 1{,}0964 & 0{,}2907 \\ 0{,}2907 & 0{,}1118 \end{vmatrix}, \qquad (153)$$

e l'equazione (149) si scrive

$$\det\begin{vmatrix} \left[-1{,}0964\,\dfrac{ma^2\,\omega^2}{k} + \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_1}\right)\right] & -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\,\omega^2}{k} \\ -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\,\omega^2}{k} & \left[-0{,}1118\,\dfrac{ma^2\,\omega^2}{k} + \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_2}\right)\right] \end{vmatrix} = 0 \qquad (154)$$

Per $\alpha = \alpha_1$ la (154) si scrive

$$\det\begin{vmatrix} -1{,}0964\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} & -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} \\ -0{,}2907\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} & -0{,}1118\,\dfrac{ma^2\omega^2}{k} + 0{,}7676 \end{vmatrix} = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$\omega_1^2 = 0$$

$$\omega_2^2 = 22{,}089\,\frac{k}{ma^2}\,.$$

Per $\alpha = \alpha_2$ la (154) si scrive

$$\det \begin{vmatrix} -1{,}0964 \dfrac{ma^2\omega^2}{k} - 3{,}303 & -0{,}2907 \dfrac{ma^2\omega^2}{k} \\ \\ -0{,}2907 \dfrac{ma^2\omega^2}{k} & 0{,}1118 \dfrac{2ma^2\omega^2}{k} \end{vmatrix} = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$\omega_1^2 = -9{,}6929 \frac{k}{ma^2}$$

$$\omega_2^2 = 0$$

Per $\alpha = 0$ la (154) si scrive

$$\omega^4 - 31{,}71\,\omega^2 \frac{k}{ma^2} + 26{,}247 \frac{k^2}{m^2a^4} = 0$$

le cui soluzioni

$$\omega_1^2 = 0{,}85 \frac{k}{ma^2}$$

$$\omega_2^2 = 30{,}8 \frac{k}{ma^2}$$

riproducono le (59).

Problema n. 8.

La trave rigido elastica della fig. 8 è a due gradi di libertà, i due conci elastici hanno la stessa rigidità flessionale k. Si vogliono studiare le vibrazioni libere, e quindi, essendo nulle le forze applicate, è $P = 0$. Si ha poi

$$\Delta\varphi_B = -2\varphi_1 - \varphi_2$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 + 2\varphi_2\,.$$