Problema n. 40.

La trave è la stessa del problema precedente; essa è soggetta ad una forza assiale F non più nell'estremo A, ma nella mezzeria C (fig. 40.1). Non si può operare sullo sviluppo completo di Fourier, perchè

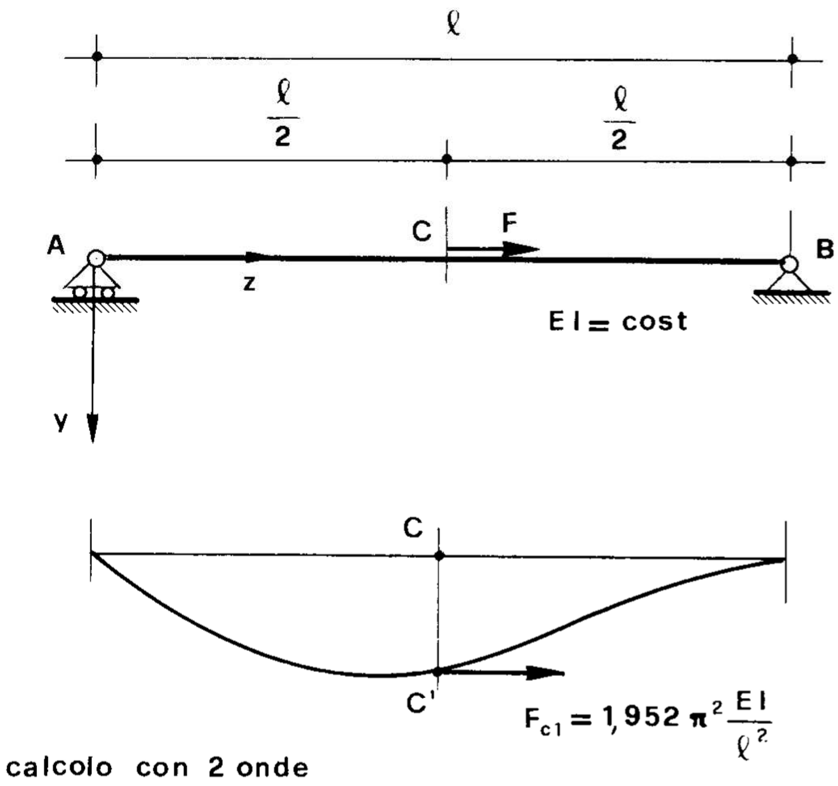


Figura 40.1.

mentre l'espressione di L è sempre la (163), quella di P contiene anche i termini rettangolari in $v_i\, v_j$.

Operando con una sola onda si ha

$$w_C = \frac{1}{2}\int_{l/2}^{l} v'^2\, dz = \frac{\pi^2 v_1^2}{2l^2}\int_{l/2}^{l} cos^2 \frac{\pi z}{l}\, dz = \frac{\pi^2 v_1^2}{8l}$$

e quindi

$$P = -\frac{F\pi^2 v_1^2}{8l} .$$

Si ha perciò

$$E_t = -\frac{F\pi^2}{8l}v_1^2 + \frac{EI\pi^4}{4l^3}v_1^2$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = \left(-\frac{F\pi^2}{4l} + \frac{EI\pi^4}{2l^3}\right)v_1$$

quindi la condizione $\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = 0$ implica $v_1 \neq 0$ se, e solo se,

$$F = F_1 = 2\pi^2 \frac{EI}{l^2}. \tag{171}$$

Operando con due onde si ha

$$w_C = \frac{1}{2}\int_{l/2}^{l} v'^2\,dz = \frac{\pi^2}{2l^2}\left(v_1^2 \int_{l/2}^{l} cos^2 \frac{\pi z}{l}\,dz +\right.$$

$$\left. + 4v_2^2 \int_{l/2}^{l} cos^2 \frac{2\pi z}{l}\,dz + 4v_1v_2 \int_{l/2}^{l} cos\frac{\pi z}{l}\,cos\frac{2\pi z}{l}\,dz\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2l^2}\left(v_1^2 \frac{l}{4} + 4v_2^2 \frac{l}{4} - 4v_1v_2 \frac{l}{3\pi}\right)$$

Dalla relazione generale

$$\int \cos\alpha z \cos\beta z\,dz = \frac{1}{2}\left[\int\cos(\alpha+\beta)z\,dz + \int\cos(\alpha-\beta)z\,dz\right] =$$

$$= \frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)z}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\text{sen}\,(\alpha-\beta)z}{2(\alpha-\beta)} \tag{172}$$

si ottiene

$$\int_{l/2}^{l} \cos \frac{\pi z}{l} \cos \frac{2\pi z}{l} \, dz = -\frac{l}{3\pi}$$

Se ne trae

$$E_t = -\frac{F\pi^2}{2l^2}\left(v_1^2 \frac{l}{4} + 4v_2^2 \frac{l}{4} - 4v_1 v_2 \frac{l}{3\pi}\right) +$$

$$+ \frac{EI\pi^4}{4l^3}\,(v_1^2 + 4v_2^2)\,.$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = \frac{\partial E_t}{\partial v_2} = 0$$

conducono al sistema

$$\left(\frac{EI\pi^4}{2l^3} - \frac{F\pi^2}{4l}\right) v_1 + \frac{2\pi F}{3l} v_2 = 0$$

$$\frac{2\pi F}{3l} v_1 + \left(\frac{2EI\pi^4}{l^3} - \frac{F\pi^2}{l}\right) v_2 = 0\ ;$$

l'annullarsi del determinante dei coefficienti è un'equazione di secondo grado in F di radici

$$F_1 = 1{,}952\,\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$F_2 = 7{,}805\,\pi^2 \frac{EI}{l^2}\,. \tag{173}$$

Confrontando con la (171), si osserva che migliorando l'approssimazione della deformata il carico critico si abbassa; di ciò si è già fornita una giustificazione intuitiva nel corso del problema 38.

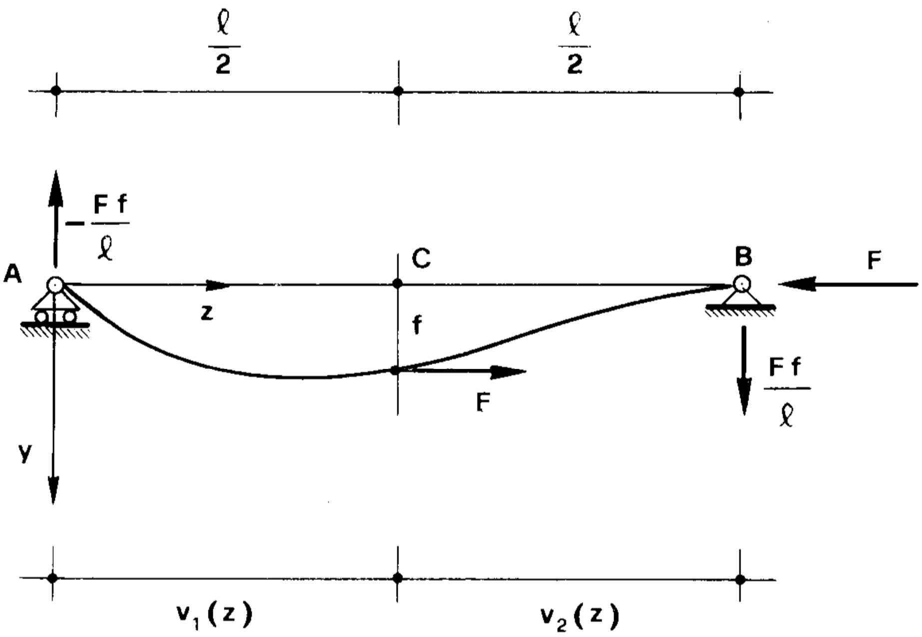


Figura 40.2.

Si vuole adesso trattare lo stesso problema per via geometrica (fig. 40.2). Il momento flettente è fornito da

$$M = \begin{cases} \dfrac{Ff}{l}\, z & \text{se} \quad z \in \left[0, \dfrac{l}{2}\right] \\[2ex] -\dfrac{Ff}{l}\,(l-z) + F v_2 & \text{se} \quad z \in \left[\dfrac{l}{2}, l\right]. \end{cases} \tag{174}$$

Si è chiamata $v_1\ (z)$ la deformata nell'intervallo $\left[0, \dfrac{l}{2}\right]$, $v_2\ (z)$ la deformata nell'intervallo $\left[\dfrac{l}{2}, l\right]$. L'equazione di equilibrio per una generica sezione del primo intervallo è

$$EI\ v_1'' = -\frac{Ff}{l}\, z\ ,$$

e per una generica sezione del secondo intervallo è

$$EI\, v_2'' = -\, F v_2 + \frac{Ff}{l}\,(l - z)\;. \tag{175}$$

Ponendo

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

si ha

$$v_1'' = -\, k^2 \frac{f}{l}\, z \qquad \text{se} \quad z \in \left[0,\, \frac{l}{2}\right]$$

$$v_2'' + k^2 v_2 = k^2 \frac{f}{l}\,(l - z) \qquad \text{se} \quad z \in \left[\frac{l}{2}\,,\, l\right]\;.$$

La prima si integra direttamente, e si ottiene

$$v_1' = -\, \frac{k^2 f}{2l}\, z^2 + C_1$$

$$v_1 = -\, \frac{k^2 f}{6l}\, z^3 + C_1 z + C_2\;.$$

Un integrale particolare della seconda è $v_2 = \frac{f}{l}\,(l - z)$, e quindi il suo integrale generale è

$$v_2 = C_3\, sen\, kz + C_4 \cos kz + \frac{f}{l}\,(l - z)\;.$$

Le costanti di integrazione sono le quattro C_i; la f deve restare indeterminata.

Le condizioni ai limiti sono pure quattro:

$$z = 0 \rightarrow v_1 = 0$$

$$z = \frac{l}{2} \rightarrow v_1 = v_2,\ v_1' = v_2'$$

$$z = l \rightarrow v_2 = 0.$$

La prima porge

$$C_2 = 0\ .$$

La quarta si scrive

$$C_3\ sen\, k\, l + C_4\ cos\, k\, l = 0$$

da cui

$$C_4 = -\ C_3\ tg\, k\, l$$

La seconda si scrive

$$-\frac{k^2 f}{6l}\ \frac{l^3}{8} + C_1\ \frac{l}{2} = C_3\, sen\, \frac{k\, l}{2} - C_3\ tg\, k\, l\ cos\, \frac{kl}{2} + \frac{f}{2}\ ,$$

da cui

$$C_1\ \frac{l}{2} - C_3\ \left(sen\ \frac{k\, l}{2} - tg\, k\, l\ cos\ \frac{k\, l}{2}\right) = f\ \frac{k^2 l^2 + 24}{48}\ . \qquad (176)$$

La terza si scrive

$$-\frac{k^2 f}{2l}\ \frac{l^2}{4} + C_1 = k\, C_3\ cos\ \frac{k\, l}{2} + k\, C_3\ tg\, k\, l\ sen\ \frac{k\, l}{2} - \frac{f}{l}$$

da cui

$$C_1 l - C_3\ \left(k\, l\ cos\ \frac{k\, l}{2} + k\, l\, tg\, k\, l\ sen\ \frac{k\, l}{2}\right) = f\ \frac{k^2 l^2 - 8}{8}\ . \qquad (177)$$

La condizione

$$z = \frac{l}{2} \to v_1 = f$$

permette di esprimere f in funzione delle C_i:

$$f = C_1 \frac{24\,l}{k^2 l^2 + 48} \; .$$

Le (176) e (177) si scrivono quindi come segue:

$$C_1 \frac{12\,l}{k^2 l^2 + 48} - C_3 \left(sen \frac{k\,l}{2} - tg\,k\,l \; cos \frac{k\,l}{2} \right) = 0$$

$$C_1 \frac{l\,(72 - 2\,k^2 l^2)}{k^2 l^2 + 48} - C_3\,k\,l \left(cos \frac{k\,l}{2} + tg\,k\,l \; sen \frac{k\,l}{2} \right) = 0 \; .$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni non banali è che sia nullo il determinante dei coefficienti delle incognite C_i, cioè

$$\begin{vmatrix} 12 & - sen \dfrac{k\,l}{2} + tg\,k\,l \; cos \dfrac{k\,l}{2} \\ & \\ 72 - 2\,k^2 l^2 & - k\,l \left(cos \dfrac{k\,l}{2} + tg\,k\,l \; sen \dfrac{k\,l}{2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

Posto

$$\frac{k\,l}{2} = \alpha$$

la suddetta condizione si scrive

$$- 24\,\alpha\,(cos\,\alpha + tg\,2\,\alpha\,sen\,\alpha) = (72 - 8\,\alpha^2)\,(- sen\,\alpha + tg\,2\,\alpha\,cos\,\alpha)$$

e ancora

$$-24\alpha\left(\cos\alpha + \frac{2\,tg\,\alpha\ sen\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right) = (72 - 8\alpha^2)\left(-\ sen\,\alpha + \frac{2\ tg\,\alpha\ \cos\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}\right);$$

$$-24\alpha\ (\cos^3\alpha + sen^2\alpha\cos\alpha) = (72 - 8\alpha^2)\ (sen^3\alpha + sen\,\alpha\cos^2\alpha)\ ;$$

$$-24\alpha\ \cos\alpha = (72 - 8\,\alpha^2)\ sen\,\alpha;$$

$$tg\,\alpha + \frac{24\,\alpha}{72 - 8\,\alpha^2} = 0\ . \qquad (178)$$

Le soluzioni della (178) costituiscono una successione crescente; il primo valore è

$$\alpha = 2{,}1602$$

da cui

$$k\,l = 2\,\alpha = 4{,}3204$$

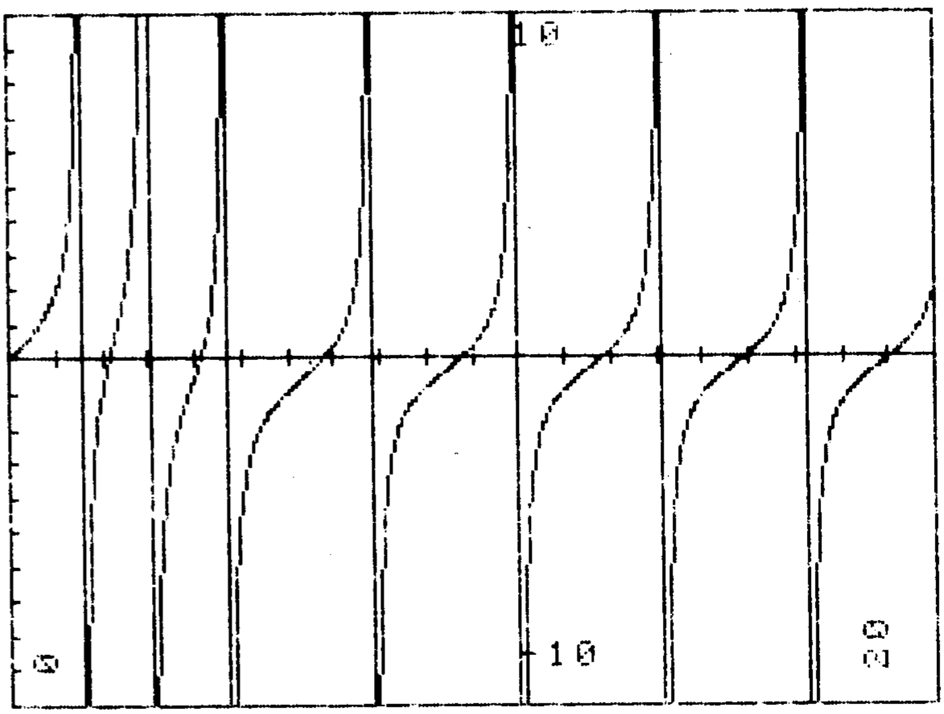


Figura 40.3.

$$k\,l^2 = \frac{F\,l^2}{E\,I} = 18{,}66$$

$$F_c = 18{,}66 \frac{EI}{l^2} = 1{,}891\, \pi^2 \frac{EI}{l^2}\,. \tag{179}$$

Confrontando la (171) e la prima delle (173) con la (179) si osserva che calcolando con una sola onda l'errore è del 5,76 %, operando con due del 3,23 %. Si osserva pure che il carico critico reale è più basso dei due

Nella figura 40.3 è riportato il diagramma della (178) tra 0 e 20; si sono calcolati gli zeri, ottenendo la seguente tabella:

Carichi approssimati.

i	α	$F_i\, l^2/\pi^2\, EI$
1	2,1602	1,891
2	4,1343	6,927
3	6,7857	18,662
4	9,7523	38,545
5	12,8093	66,498
6	15,9011	102,474
7	19,0099	146,460

Problema n. 41.

La trave della fig. 41.1 è ad asse rettilineo, con $EI = cost$; in A c'è appoggio, in B incastro perfetto. Si operi con due onde:

$$v = v_1 \; sen \frac{\pi z}{l} + v_2 \; sen \frac{2\pi z}{l}\,.$$

La condizione di congruenza in B

$$v'_B = -\frac{\pi}{l} v_1 + \frac{2\pi}{l} v_2 = 0$$

impone

$$v_2 = \frac{v_1}{2}$$

La deformata è perciò

$$v = v_1 \left(sen \frac{\pi z}{l} + \frac{1}{2}\, sen \frac{2\pi z}{l} \right);$$

le due condizioni

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad v = 0$$

$$z = l \quad \rightarrow \quad v = 0$$

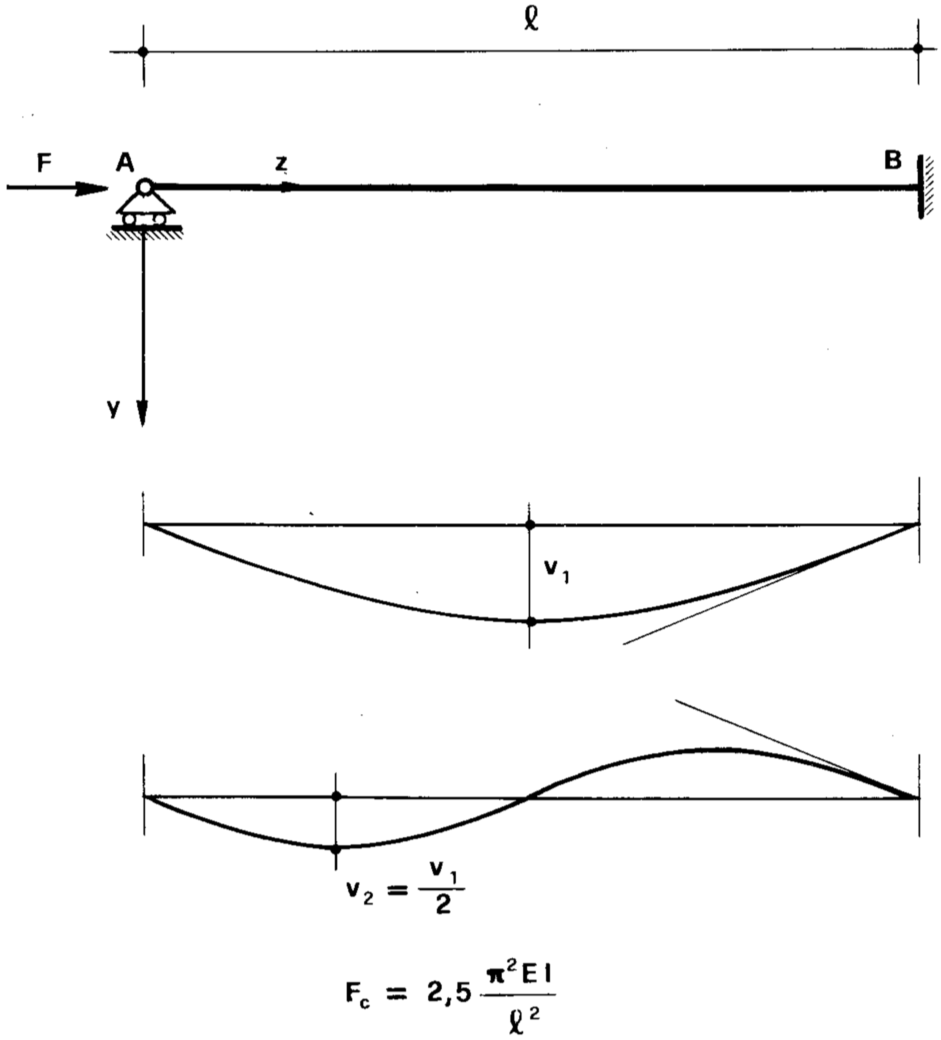


Figura 41.1.

erano rispettate in partenza.

Si ha

$$v' = v_1 \frac{\pi}{l} \left(cos \frac{\pi z}{l} + cos \frac{2\pi z}{l} \right)$$

$$v'' = -v_1 \frac{\pi^2}{l^2}\left(sen \frac{\pi z}{l} + 2\, sen \frac{2\pi z}{l}\right)$$

$$L = \frac{EI}{2}\int_0^l v''^2\, dz = \frac{5\pi^4}{4}\frac{EI}{l^3}v_1^2$$

$$P = -\frac{F}{2}\int_0^l v'^2\, dz = -\frac{F\pi^2}{2l}v_1^2$$

$$E_t = \left(-\frac{F\pi^2}{2l} + \frac{5\pi^4 EI}{l^3}\right)v_1^2$$

$$\frac{dE_t}{dv_1} = \left(-\frac{F\pi^2}{l} + \frac{5\pi^4 EI}{2l^3}\right)v_1 \;\; ;$$

dalla condizione $\frac{dE_t}{dv_1} = 0$ si trae $v_1 \neq 0$ per

$$F = 2{,}5\ \pi^2 \frac{EI}{l^2}\,. \qquad (180)$$

Si studi lo stesso caso adottando come deformata la sovrapposizione di una funzione lineare e di una funzione sinusoidale di semilunghezza d'onda l_{on} (fig. 41.2):

$$v = \frac{v_0}{l} z + v_n\ sen \frac{\pi z}{l_{on}} \qquad (181)$$

La condizione

$$z = 0 \rightarrow v = 0$$

è rispettata.

Le altre due condizioni ai limiti

$$z = l \rightarrow v = v' = 0$$

si scrivono

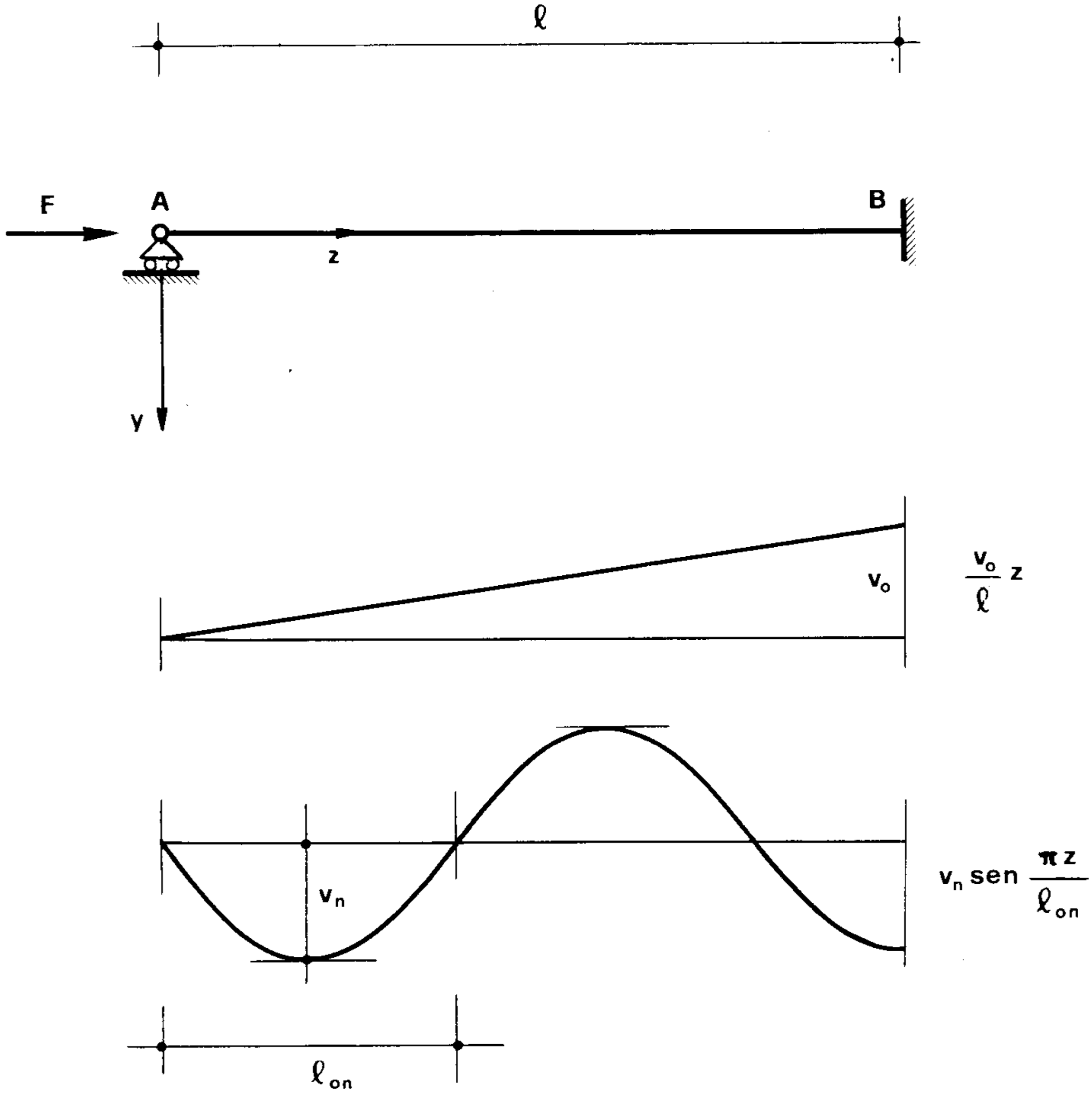


Figura 41.2.

$$v_0 + v_n \; sen \; \frac{\pi l}{l_{on}} = 0$$

$$\frac{v_0}{l} + \frac{\pi}{l_{on}} \, v_n \; cos \; \frac{\pi l}{l_{on}} = 0$$

da cui

$$v_0 = - v_n \; sen \; \frac{\pi l}{l_{on}} \tag{182}$$

$$tg \; \frac{\pi l}{l_{on}} = \frac{\pi l}{l_{on}} \; . \tag{183}$$

Quindi è

$$v = v_n \left(- \frac{z}{l} \; sen \; \frac{\pi l}{l_{on}} + sen \; \frac{\pi z}{l_{on}} \right). \tag{184}$$

I valori l_{on} che soddisfano la (182) formano una successione decrescente, del tipo di Cauchy, convergente a zero. Il primo valore è dato da

$$\frac{\pi l}{l_{01}} = 4{,}493$$

da cui

$$l_{01} = 0{,}6992 \, l \; . \tag{185}$$

Si opera su una deformata definita da uno sviluppo in serie completo il cui termine generico è fornito dalla (181). Si ha così

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 \, dz = \frac{EI \pi^4}{2} \int_0^l \left(\Sigma \; \frac{v_n}{l_{on}^2} \; sen \; \frac{\pi z}{l_{on}} \right)^2 dz$$

$$P = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 \, dz = - \frac{F}{2} \int_0^l \left[\Sigma \, v_n \left(- \frac{1}{l} \; sen \; \frac{\pi l}{l_{on}} + \frac{\pi}{l_{on}} \; cos \; \frac{\pi z}{l_{on}} \right) \right]^2 dz \; .$$

Ponendo

$$\frac{\pi}{l_{on}} = \alpha_n$$

si ha

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l (\Sigma\, v_n\, \alpha_n^2 \;\; sen\, \alpha_n\, z)^2 \, dz$$

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^l \left[\Sigma\, v_n \left(-\frac{sen\, \alpha_n\, l}{l} + \alpha_n \, cos\, \alpha_n\, z\right)\right]^2 dz \, .$$

Per le (141) è

$$\int_0^l sen\, \alpha_m\, z \;\; sen\, \alpha_n\, z \;\; dz = \frac{1}{2} \left(\frac{sen\; (\alpha_m - \alpha_n)\, z}{\alpha_m - \alpha_n} - \frac{sen\; (\alpha_m + \alpha_n)\; z}{\alpha_m + \alpha_n} \right)_0^l =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{sen\; (\alpha_m - \alpha_n)\, l}{\alpha_m - \alpha_n} - \frac{sen\; (\alpha_m + \alpha_n)\; l}{\alpha_m + \alpha_n} \right) ;$$

poichè è

$$tg \;\; \alpha_n\, l = \alpha_n\, l$$

è pure

$$sen\; (\alpha_m \mp \alpha_n)\, l = sen\; \alpha_m\, l\, cos\; \alpha_n\; l \mp cos\, \alpha_m\; l \;\; sen\; \alpha_n\;\; l =$$

$$= \frac{tg\; \alpha_m\, l}{\sqrt{1 + tg^2\, \alpha_m\, l}\, \sqrt{1 + tg^2\, \alpha_n\, l}} \mp \frac{tg\; \alpha_n\, l}{\sqrt{1 + tg^2\, \alpha_m\, l}\;\; \sqrt{1 + tg^2\, \alpha_n\, l}} =$$

$$= l\; \frac{\alpha_m \mp \alpha_n}{\sqrt{(1 + \alpha_m^2\, l^2)\;(1 + \alpha_n^2\, l^2)}} \quad ;$$

quindi può scriversi

$$\int_0^l sen\,\alpha_m z\ sen\,\alpha_n z\, dz = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(l - \dfrac{sen\ 2\alpha_n l}{2\,\alpha_n}\right) & \text{se} \quad m = n \\ 0 & \text{se} \quad m \neq n\,. \end{cases}$$

Se ne trae

$$L = \frac{EI}{4}\ \Sigma\ v_n^2\ \alpha_n^4 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\ 2\,\alpha_n l\right).$$

Per la (172) è

$$\int_0^l \left(- \frac{sen\,\alpha_m l}{l} + \alpha_m \cos\alpha_m z\right)\left(- \frac{sen\,\alpha_n l}{l} + \alpha_n \cos\alpha_n z\right) dz =$$

$$= \frac{sen\,\alpha_m l\ sen\,\alpha_n l}{l} - \frac{sen\,\alpha_m l}{l}\, sen\,\alpha_n l - \frac{sen\,\alpha_n l}{l}\, sen\,\alpha_m l +$$

$$+ \alpha_m \alpha_n \int_0^l \cos\alpha_m z\ \cos\alpha_n z\, dz = - \frac{sen\,\alpha_m l\ sen\,\alpha_n l}{l} +$$

$$+ \frac{\alpha_m \alpha_n}{2}\left(\frac{sen\ (\alpha_m + \alpha_n) l}{\alpha_m + \alpha_n} + \frac{sen\ (\alpha_m - \alpha_n) l}{\alpha_m - \alpha_n}\right).$$

Poichè è

$$\frac{sen\,\alpha_m l \cdot sen\,\alpha_n l}{l} = \frac{tg\,\alpha_m l \cdot tg\,\alpha_n l}{l\sqrt{1 + tg^2\,\alpha_m l}\ \sqrt{1 + tg^2\,\alpha_n l}} =$$

$$= \frac{\alpha_m l \cdot \alpha_n l}{l\sqrt{1 + \alpha_m^2 l^2}\ \sqrt{1 + \alpha_n^2 l^2}}$$

si verifica facilmente che è

$$\int_0^l \left(- \frac{sen\, \alpha_m\, l}{l} + \alpha_m \cos \alpha_m z\right) \left(- \frac{sen\, \alpha_n\, l}{l} + \alpha_n \cos \alpha_n z\right) dz =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha_n^2}{2} \left(l - \dfrac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right) & \text{se} \quad m = n \\[2ex] 0 & \text{se} \quad m \neq n\,. \end{cases}$$

Quindi è

$$P = -\frac{F}{4} \Sigma v_n^2 \alpha_n^2 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right).$$

In definitiva si ha

$$E_t = -\frac{F}{4} \Sigma v_n^2\, \alpha_n^2 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right) +$$

$$+ \frac{EI}{4} \Sigma v_n^2\, \alpha_n^4 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right).$$

Nell'espressione della E_t non compaiono i termini rettangolari nelle $v_i v_j$; è quindi lo stesso caso esaminato nell'es. 39; ogni condizione $\dfrac{\partial E_t}{\partial v_n} = 0$ fornisce la soluzione v_n ed il corrispondente autovalore. Si ha infatti

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_n} = \left[-\frac{F}{2}\, \alpha_n^2 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right) + \frac{EI}{2}\, \alpha_n^4 \left(l - \frac{1}{2\alpha_n}\, sen\, 2\alpha_n l\right)\right] v_n = 0$$

da cui

$$v_n \neq 0$$

per

$$F = F_n = EI\,\alpha_n^2 = \frac{\pi^2 EI}{l_{on}^2}\,; \qquad (186)$$

la configurazione corrispondente è

$$v = v_n\left(sen\,\frac{\pi z}{l_{on}} - \frac{z}{l}\,sen\,\frac{\pi l}{l_{on}}\right). \qquad (187)$$

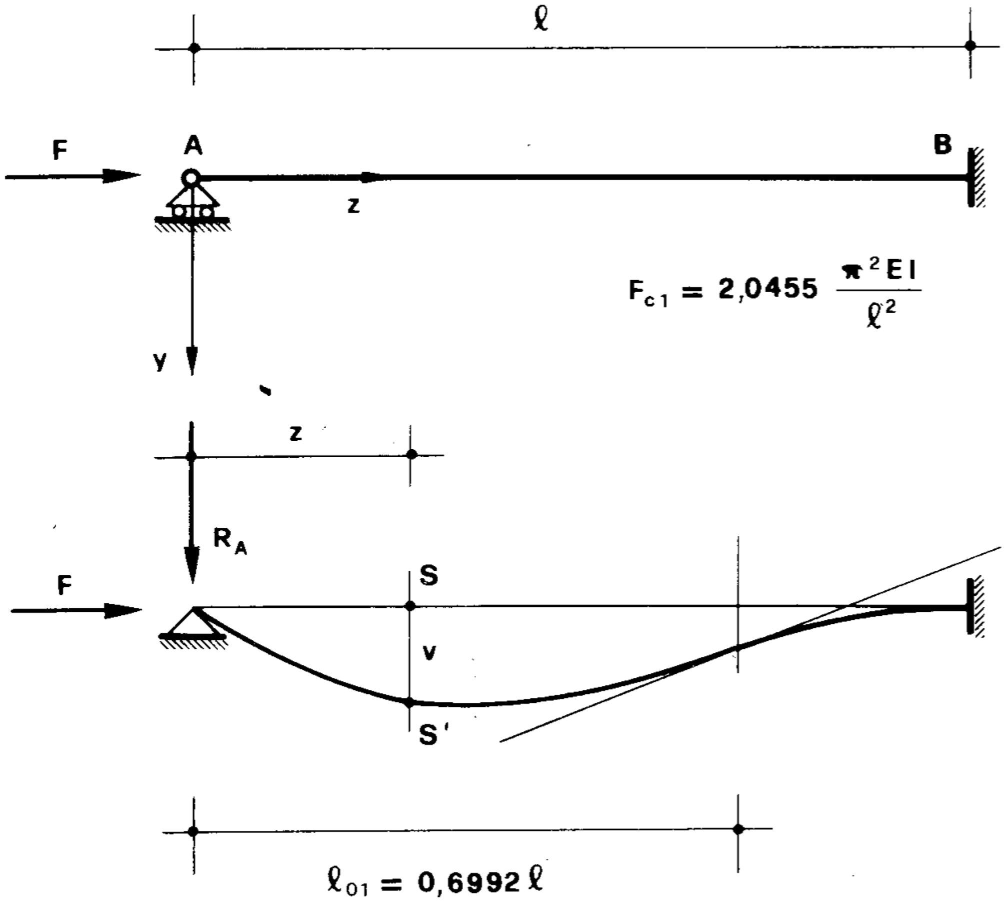


Figura 41.3.

Gli F_n costituiscono una successione crescente; il primo termine corrisponde al primo della successione l_{on} (185):

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}6992\,l)^2} = 2{,}0455\ \pi^2\,\frac{EI}{l^2}\,. \qquad (188)$$

La deformata sotto F_1 (fig. 41.3) è la (187) per $l_{on} = l_{01}$.

Si risolva lo stesso problema seguendo il procedimento geometrico. L'equazione di equilibrio in corrispondenza della sezione generica è(*)

$$F v - R_A z = - E I v'' \; ; \tag{189}$$

ponendo

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\beta = \frac{R_A}{EI}$$

la (189) si scrive

$$v'' + k^2 v = \beta z \, . \tag{190}$$

Un integrale particolare della (190) è

$$v = \frac{\beta}{k^2} z \, ,$$

e perciò l'integrale generale è

$$v = A \; sen \, k z + B \cos k z + \frac{\beta}{k^2} z \, .$$

Le condizioni ai limiti sono

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad v = 0$$

$$z = l \quad \rightarrow \quad v = v' = 0 \, .$$

Esse si scrivono

$$B = 0$$

$$A \; sen \, k l + \frac{\beta}{k^2} l = 0$$

(*) Si opera direttamente sull'equazione $EIv'' = - M$, come nella trave appoggiata, perchè scrivendo la (189) ci si riferisce alla mensola con incastro in B.

$$kA \cos kl + \frac{\beta}{k^2} = 0$$

da cui si trae che A e β sono non nulli se e solo se

$$tg\, kl = kl \,. \tag{191}$$

Le soluzioni della (191) sono una successione crescente; la più piccola è

$$kl = 4{,}493 \;,$$

da cui

$$F_1 = k^2 EI = 20{,}187 \frac{EI}{l^2}$$

e ancora

$$F_1 = 2{,}045\, \pi^2 \frac{EI}{l^2} \,.$$

Problema n. 42.

Nella trave AB della fig. 42 si pone

$$v = \Sigma\, v_n \left(\pm 1 - sen \frac{(2n-1)\pi z}{2l}\right) : \quad \begin{array}{l} + \text{ se } n \in N_d \\ - \text{ se } n \in N_p \,. \end{array} \tag{192}$$

le condizioni

$$z = l \;\rightarrow\; v = v' = 0$$

sono rispettate da ciascun termine dello sviluppo.

Si ha

$$v' = -\frac{\pi}{2l}\, \Sigma\, v_n\, (2n-1) \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2l}$$

$$v'' = \frac{\pi^2}{4l^2} \Sigma v_n (2n - 1)^2 \, sen \, \frac{(2n - 1)\pi z}{2l}$$

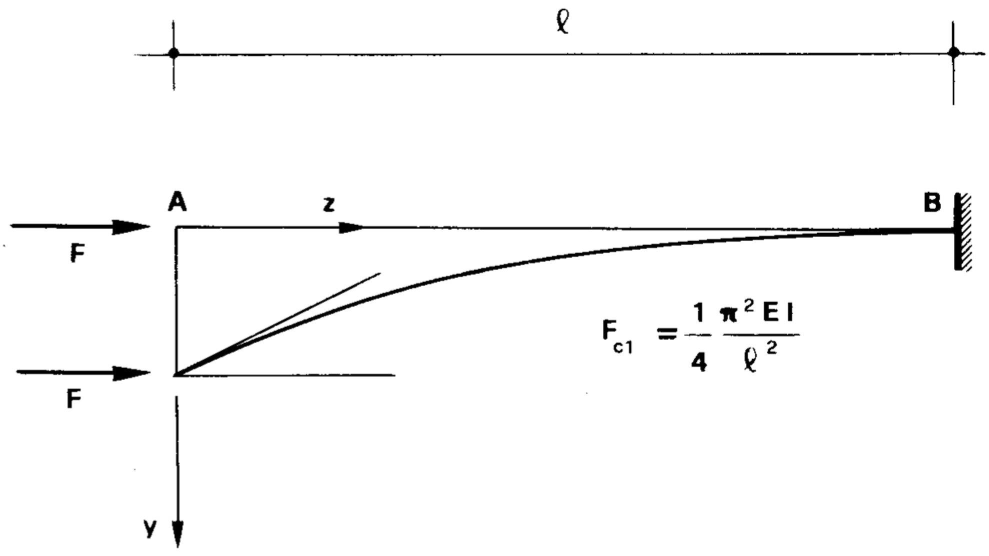


Figura 42.

e quindi

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 \, dz = \frac{EI\pi^4}{32 l^3} \Sigma v_n^2 (2n - 1)^4$$

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^l v'^2 \, dz = -\frac{F\pi^2}{8l} \Sigma v_n^2 (2n - 1)^2$$

La condizione

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_n} = \left(-\frac{F\pi^2}{4l} (2n - 1)^2 + \frac{EI\pi^4}{16 l^3} (2n - 1)^4 \right) v_n = 0$$

importa $v_n \neq 0$ per

$$F = F_n = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2 EI}{4l^2} .$$

Le F_n sono una successione crescente; il primo valore è

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{4\,l^2}\,. \tag{193}$$

Esso è il carico critico, perchè lo sviluppo (192) è completo.

Problema n. 43.

Nella trave AB della fig. 43 si pone

$$v = \Sigma\, v_n \left(1 - cos\,\frac{2n\pi z}{l}\right). \tag{194}$$

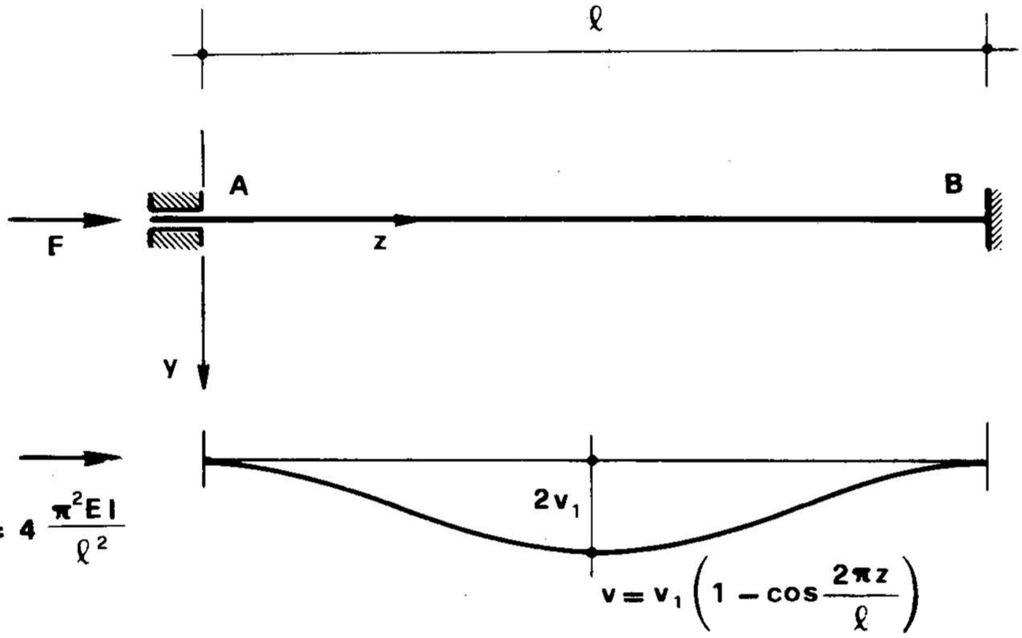


Figura 43.

Le condizioni di congruenza ai limiti

$$z \to 0 \;:\; v = v' = 0$$

$$z \to l \;:\; v = v' = 0$$

sono rispettate da ciascun termine dello sviluppo.

Si ha

$$v' = \frac{2\pi}{l} \Sigma v_n \; n \; sen \; \frac{2n\pi z}{l}$$

$$v'' = \frac{4\pi^2}{l^2} \Sigma v_n n^2 \cos \frac{2n\pi z}{l}$$

e quindi

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 \; dz = \frac{4EI\pi^4}{l^3} \Sigma v_n^2 n^4$$

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^l v'^2 \; dz = -\frac{F\pi^2}{l} \Sigma v_n^2 n^2 \; .$$

La condizione

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_n} = \left(- \frac{2F\pi^2}{l^2} n^2 + \frac{8EI\pi^4}{l^3} n^4 \right) v_n = 0$$

importa $v_n \neq 0$ per

$$F = F_n = \frac{4n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad .$$

Le F_n sono una successione crescente; il primo valore è

$$F_1 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad , \tag{195}$$

cui si associa la deformata (fig. 43)

$$v = v_1 \left(1 - \frac{\cos 2\pi z}{l} \right) .$$

Lo sviluppo (194) non è completo, poichè copre tutte e solo le deformate simmetriche. Le deformate antisimmetriche però corrispondono a quelle di una trave di luce $\frac{l}{2}$, incastrata in un estremo e appoggiata all'altro; il più basso F_n commesso con tali deformate è (prob. 41 for. 188)

$$2{,}0455 \cdot 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

superiore alla (195), che resta perciò il carico critico della struttura.

Problema n. 44.

La trave AB ad asse rettilineo della fig. 44 è soggetta ad un carico $q\,(z)$ diretto secondo y, ad eventuali distorsioni e presenta agli estremi le rotazioni φ_A φ_B e gli spostamenti v_A v_B. Siano $\overline{\mathfrak{M}}_A$ ed $\overline{\mathfrak{M}}_B$ le coppie di incastro perfetto, R_A ed R_B le reazioni di incastro perfetto, dovute a $q\,(z)$ ed alle distorsioni.

La configurazione della trave è definita dai valori φ_A φ_B v_A v_B (le deformazioni dai tre valori φ_A φ_B e $v_B - v_A$ che quindi, dato $q\,(z)$, sono le coordinate lagrangiane della trave). Si vuole ottenere l'espressione di L e di P in funzione di tali parametri.

La P si ha immediatamente considerando che la $v\,(z)$ generica è la somma delle v all'ascissa z nelle cinque configurazioni della fig. 44:

$$P = -\int_A^B q\,(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)\,dz\,. \tag{196}$$

La L è composta dalla somma dei cinque termini propri, e dei termini di scambio; si noti subito che i termini L_{12}, L_{13}, L_{14} ed L_{15} sono nulli per il teorema di Land-Colonnetti.

E'

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_A^B q\,v_1\,dz = \frac{1}{2}\int_A^B q\,\bar{v}\,dz$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\,\rho_{AB}\,\varphi_A^2$$

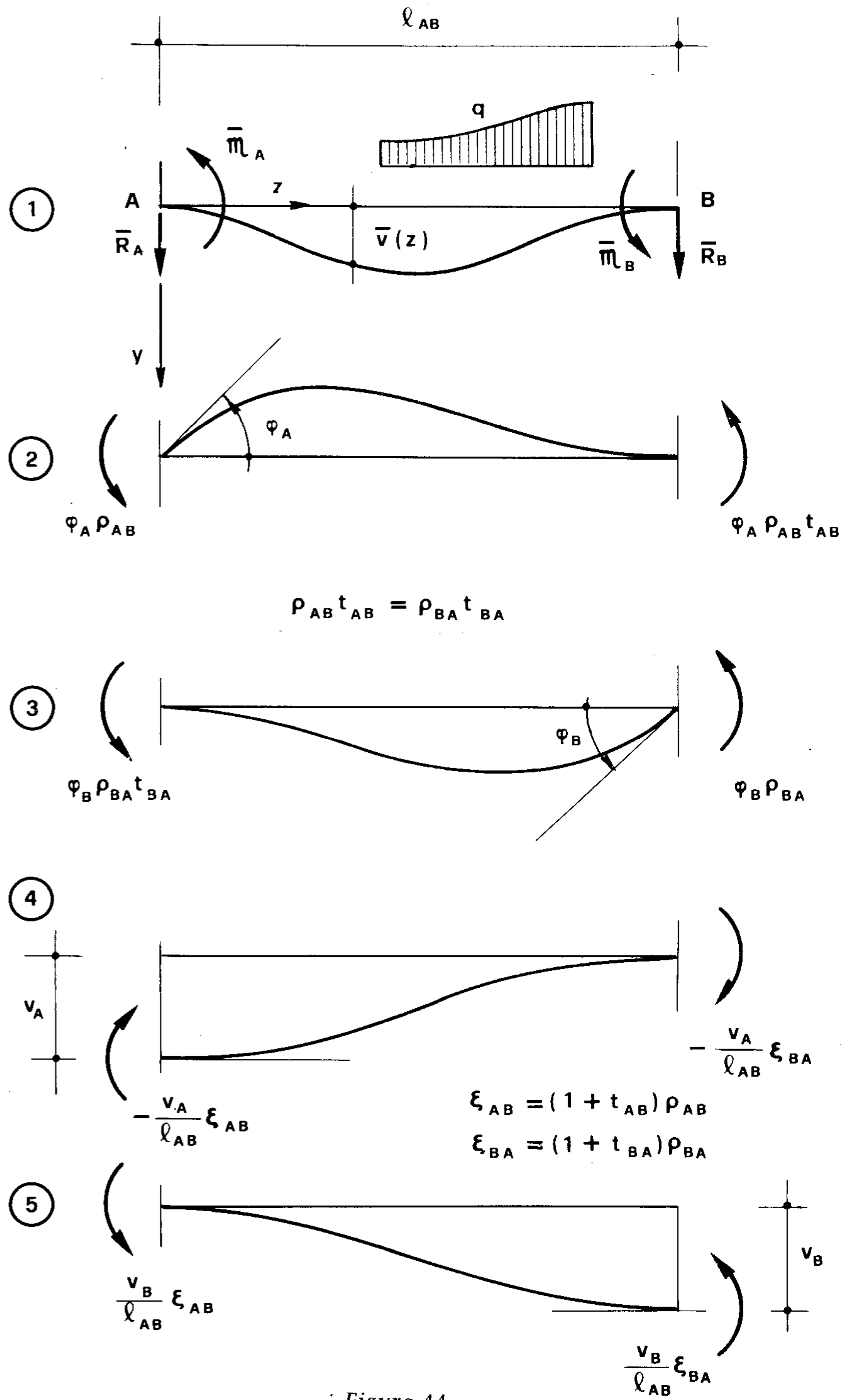

ℓ_{AB}
q
$\overline{\mathfrak{M}}_A$
1
A
z
B
$\overline{R}_A$
$\overline{v}(z)$
$\overline{\mathfrak{M}}_B$
$\overline{R}_B$
y
φ_A
2
$\varphi_A \rho_{AB}$
$\varphi_A \rho_{AB} t_{AB}$
$\rho_{AB} t_{AB} = \rho_{BA} t_{BA}$
3
φ_B
$\varphi_B \rho_{BA} t_{BA}$
$\varphi_B \rho_{BA}$
4
v_A
$-\frac{v_A}{\ell_{AB}} \xi_{BA}$
$-\frac{v_A}{\ell_{AB}} \xi_{AB}$
$\xi_{AB} = (1 + t_{AB}) \rho_{AB}$
$\xi_{BA} = (1 + t_{BA}) \rho_{BA}$
5
v_B
$\frac{v_B}{\ell_{AB}} \xi_{AB}$
$\frac{v_B}{\ell_{AB}} \xi_{BA}$

Figura 44

$$L_3 = \frac{1}{2}\,\rho_{BA}\,\varphi_B^2$$

$$L_4 = \frac{\xi_{AB} + \xi_{BA}}{2\,l_{AB}^2}\,v_A^2$$

$$L_5 = \frac{\xi_{AB} + \xi_{BA}}{2\,l_{AB}^2}\,v_B^2$$

$$L_{23} = \rho_{AB}\,t_{AB}\,\varphi_A\,\varphi_B \tag{197}$$

$$L_{24} = -\,\frac{\xi_{AB}}{l_{AB}}\,v_A\,\varphi_A$$

$$L_{25} = \frac{\xi_{AB}}{l_{AB}}\,v_B\,\varphi_A$$

$$L_{34} = -\,\frac{\xi_{BA}}{l_{AB}}\,v_A\,\varphi_B$$

$$L_{35} = \frac{\xi_{BA}}{l_{AB}}\,v_B\,\varphi_B$$

$$L_{45} = -\,\frac{\xi_{AB} + \xi_{BA}}{l_{AB}^2}\,v_A\,v_B\;.$$

Con riferimento alla trave *AB* incastrata ai due estremi, una rotazione φ_A dell'incastro A genera in A una coppia

$$\mathfrak{M}_A = \varphi_A\, \rho_{AB}\ .$$

ed in B una coppia

$$\mathfrak{M}_B = \varphi_A\, \rho_{AB}\, t_{AB}\ ,$$

dove t_{AB} è il *coefficiente di trasmissione* da A a B. Così pure una rotazione φ_B dell'incastro B genera le due coppie

$$\mathfrak{M}_B = \varphi_B\, \rho_{BA}$$

$$\mathfrak{M}_A = \varphi_B\, \rho_{BA}\, t_{BA}\ .$$

Poichè per il teorema di Volterra è

$$\mathfrak{M}_{B2} \cdot \varphi_B = \mathfrak{M}_{A3} \cdot \varphi_A$$

e cioè

$$\varphi_A\, \rho_{AB}\, t_{AB} \cdot \varphi_B = \varphi_B\, \rho_{BA}\, t_{BA} \cdot \varphi_A\ ,$$

è pure

$$\rho_{AB}\, t_{AB} = \rho_{BA}\, t_{BA}\ . \tag{198}$$

Una traslazione verticale v_A dell estremo A equivale a due rotazioni $\varphi_A = \varphi_B = -\dfrac{v_A}{l_{AB}}$, e quindi genera in A una coppia

$$\mathfrak{M}_A = -\frac{v_A}{l_{AB}}\rho_{AB} - \frac{v_A}{l_{AB}}\rho_{BA}\, t_{BA} =$$

$$= -\frac{v_A}{l_{AB}}(\rho_{AB} + \rho_{BA}\, t_{BA}) = -\frac{v_A}{l_{AB}}(\rho_{AB} + \rho_{AB}\, t_{AB}) =$$

$$= -\frac{v_A}{l_{AB}}\rho_{AB}\,(1+t_{AB}) = -\frac{v_A}{l_{AB}}\xi_{AB}\,,$$

dove si è posto

$$\xi_{AB} = \rho_{AB}\,(1+t_{AB})\,. \tag{199}$$

La stessa traslazione v_A genera in B una coppia

$$\mathfrak{M}_B = -\frac{v_A}{l_{AB}}\rho_{BA} - \frac{v_A}{l_{AB}}\rho_{AB}\,t_{AB} =$$

$$= -\frac{v_A}{l_{AB}}\xi_{BA}$$

dove si è posto

$$\xi_{BA} = \rho_{BA}\,(1+t_{BA})\,. \tag{200}$$

Analogamente può dirsi che una traslazione verticale v_B dell'estremo B genera in A e B due coppie

$$\mathfrak{M}_A = \frac{v_B}{l_{AB}}\xi_{AB}$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{v_B}{l_{AB}}\xi_{BA}$$

Si passi ora al calcolo di P. Ancora per il teorema di Land può scriversi

$$\int_A^B q\,v_2\,dz + \overline{\mathfrak{M}}_A\,\varphi_A = 0$$

$$\int_A^B q\,v_3\,dz + \overline{\mathfrak{M}}_B\,\varphi_B = 0$$

$$\int_A^B q\, v_4\, dz + \bar{R}_A\, v_A = 0$$

$$\int_A^B q\, v_5\, dz + \bar{R}_B\, v_B = 0\,.$$

Perciò in definitiva è

$$P = -\int_A^B q\, v\, dz = -\int_A^B q\, \bar{v}\, dz + \overline{\mathfrak{M}}_A\, \varphi_A + \overline{\mathfrak{M}}_B\, \varphi_B + \bar{R}_A\, v_A + \bar{R}_B\, v_B \tag{201}$$

e quindi, per le (197),

$$\begin{aligned} E_t = &-\frac{1}{2}\int_A^B q\, \bar{v}\, dz + \overline{\mathfrak{M}}_A\, \varphi_A + \overline{\mathfrak{M}}_B\, \varphi_B + \bar{R}_A\, v_A + \bar{R}_B\, v_B \\ &+ \varphi_A^2\, \frac{\rho_{AB}}{2} + \varphi_B^2\, \frac{\rho_{BA}}{2} + (v_A^2 + v_B^2)\, \frac{\xi_{AB} + \xi_{BA}}{2\, l_{AB}^2} + \\ &+ \varphi_A\, \varphi_B\, \rho_{AB}\, t_{AB} + \varphi_A\, (v_B - v_A)\, \frac{\xi_{AB}}{l_{AB}} + \varphi_B\, (v_B - v_A)\, \frac{\xi_{BA}}{l_{AB}} - \\ &- v_A\, v_B\, \frac{\xi_{AB} + \xi_{BA}}{l_{AB}^2}\,. \end{aligned} \tag{202}$$

Se la trave è di sezione costante è

$$\rho_{AB} = \rho_{BA} = \frac{4\, EI}{l}$$

$$t_{AB} = t_{BA} = \frac{1}{2}$$

$$\xi_{AB} = \xi_{BA} = \frac{6EI}{l} \quad ,$$

e quindi la (201) si scrive

$$E_t = -\frac{1}{2}\int_A^B q\,\bar{v}\,dz + \overline{\mathfrak{M}}_A\,\varphi_A + \overline{\mathfrak{M}}_B\,\varphi_B + \bar{R}_A\,v_A + \bar{R}_B\,v_B +$$

$$+ \frac{2EI}{l}(\varphi_A^2 + \varphi_B^2) + \frac{6EI}{l^3}(v_A^2 + v_B^2) +$$

$$+ \frac{2EI}{l}\varphi_A\,\varphi_B + \frac{6EI}{l^2}(-\varphi_A\,v_A + \varphi_A\,v_B - \varphi_B\,v_A + \varphi_B\,v_B) -$$

$$- \frac{12EI}{l^3}v_A\,v_B \; . \qquad (203)$$

I simboli E, I ed l devono intendersi affetti dal deponente AB.

Si osservi che nelle derivate di E_t rispetto a φ_A, φ_B, v_A e v_B il termine in $\bar{v}$ scompare, e quindi il carico q gioca solo attraverso coppie e reazioni di incastro perfetto.

Problema n. 45.

Si vogliono le rotazioni φ_A e φ_B degli estremi della trave AB appoggiata, di luce l (fig. 45). La E_t non contiene i termini in v_A e v_B, poichè essi sono nulli. I valori di φ_A e φ_B che corrispondono alla soluzione equilibrata sono le radici del sistema

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_A} = \overline{\mathfrak{M}}_A + \varphi_A\,\rho_{AB} + \varphi_B\,\rho_{AB}\,t_{AB} = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_B} = \overline{\mathfrak{M}}_B + \varphi_A \, \rho_{AB} \, t_{AB} + \varphi_B \, \rho_{BA} = 0$$

da cui

$$\varphi_A = - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_A \, \rho_{BA} - \overline{\mathfrak{M}}_B \, \rho_{AB} \, t_{AB}}{\rho_{AB} \, \rho_{BA} - \rho_{AB}^2 \, t_{AB}^2}$$

$$\varphi_B = \frac{\overline{\mathfrak{M}}_A \, \rho_{AB} \, t_{AB} - \overline{\mathfrak{M}}_B \, \rho_{AB}}{\rho_{AB} \, \rho_{BA} - \rho_{AB}^2 \, t_{AB}^2} \, . \tag{204}$$

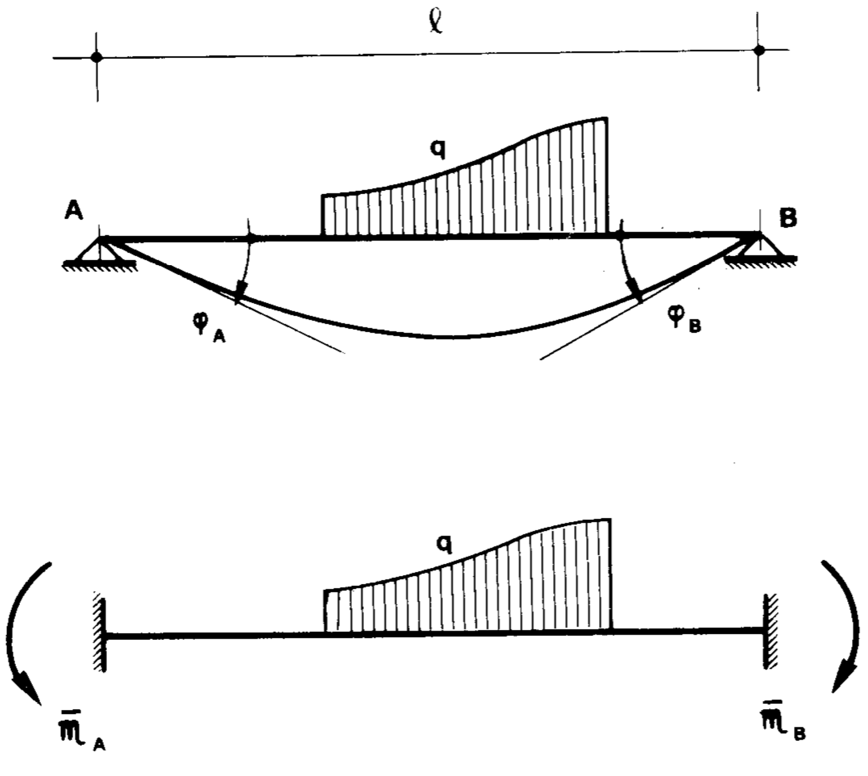


Figura 45.

Se la trave è con $EI = cost.$, si ha

$$\varphi_A = - \frac{l}{6\,EI} \, (2\overline{\mathfrak{M}}_A - \overline{\mathfrak{M}}_B)$$

$$\varphi_B = \frac{l}{6\,EI}\,(\overline{\mathfrak{M}}_A - 2\overline{\mathfrak{M}}_B) \qquad (205)$$

Problema n. 46.

Le coordinate lagrangiane del portale della fig. 46 sono le rotazioni φ_1 e φ_2 dei nodi B e C, e lo spostamento Δ (orizzontale) del traverso BC (positivo verso destra). Si indica con ψ l'angolo

$$\psi = -\frac{\Delta}{h}\,. \qquad (206)$$

Il prodotto EI è costante per tutta la struttura.

Dalla (146) si calcolano le espressioni di E_t relative a ciascuna di tali travi:

1) Trave AB.

Si fa coincidere la t prefissata della trave con la z della fig. 44. E' così

$$\overline{\mathfrak{M}}_A = \frac{qh^2}{12} \qquad \varphi_A = 0$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_B = -\frac{qh^2}{12} \qquad \varphi_B = \varphi_1$$

$$\bar{R}_A = -\frac{qh}{2} \qquad v_A = 0$$

$$\bar{R}_B = -\frac{qh}{2} \qquad v_B = -h\,\psi\,.$$

Si ha perciò

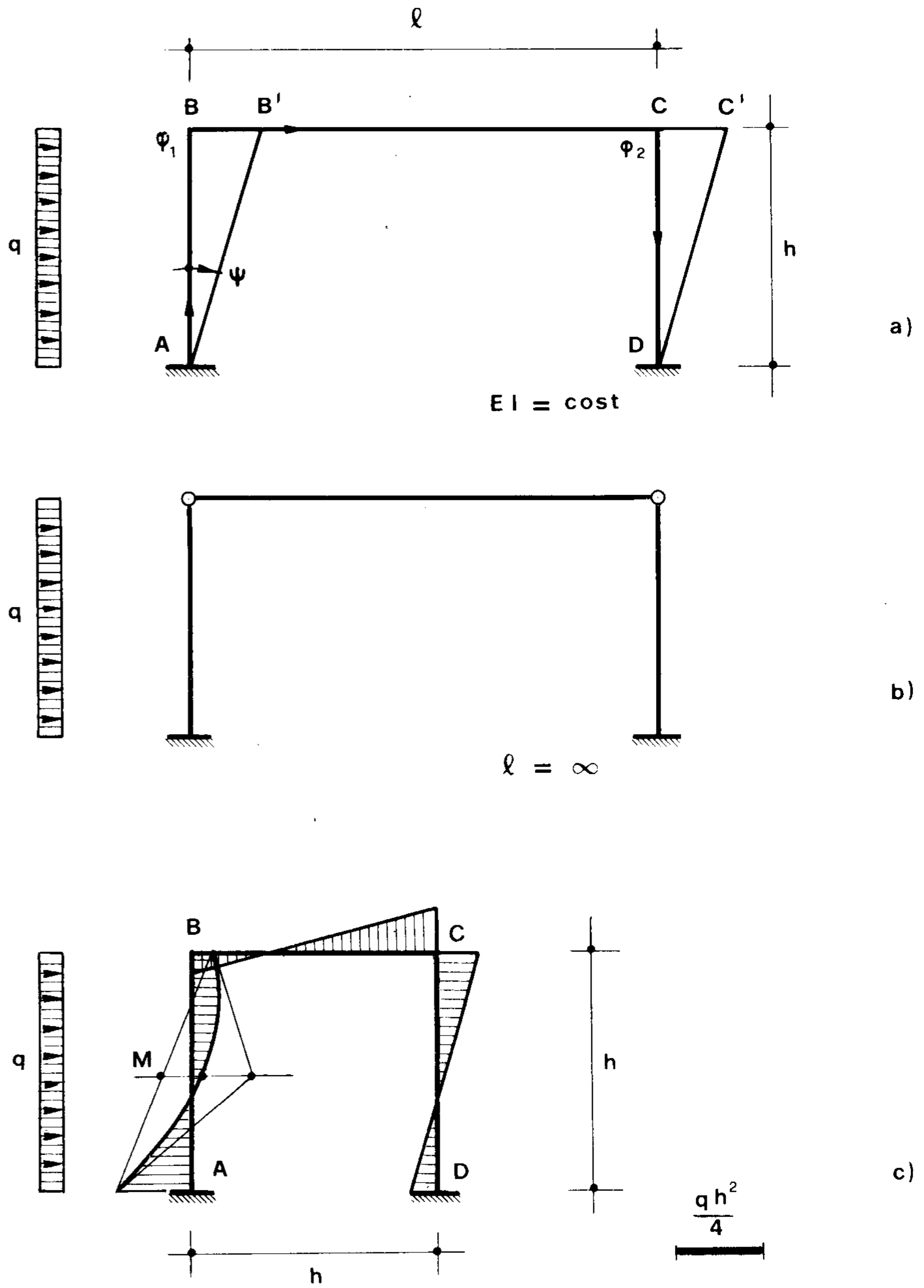


Figura 46

$$E_{tAB} = -\frac{q}{2}\int_A^B \bar{v}\,dt - \frac{qh^2}{12}\varphi_1 + \frac{qh^2}{2}\psi +$$

$$+\frac{2EI}{h}\varphi_1^2 + \frac{6EI}{h}\psi^2 - \frac{6EI}{h}\varphi_1\psi\,.$$

2) Trave BC.

Si ha

$$\bar{\mathfrak{M}}_A = \bar{\mathfrak{M}}_B = \bar{R}_A = \bar{R}_B = 0$$

$$\bar{v} = 0$$

$$\varphi_A = \varphi_1$$

$$\varphi_B = \varphi_2$$

$$v_A = v_B = 0$$

E' quindi

$$E_{tBC} = \frac{2EI}{l}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{2EI}{l}\varphi_1\varphi_2$$

3) Trave CD.

Si ha

$$\bar{\mathfrak{M}}_A = \bar{\mathfrak{M}}_B = \bar{R}_A = \bar{R}_B = 0$$

$$\bar{v} = 0$$

$$\varphi_A = \varphi_2$$

$$\varphi_B = 0$$

$$v_A = h\,\psi$$

$$v_B = 0\ .$$

E' quindi

$$E_{tCD} = \frac{2EI}{h}\,\varphi_2^2 + \frac{6EI}{h^3}\,h^2\,\psi^2 - \frac{6EI}{h^2}\,\varphi_2\,h\,\psi =$$

$$= \frac{2EI}{h}\,\varphi_2^2 + \frac{6EI}{h}\,\psi^2 - \frac{6EI}{h}\,\varphi_2\,\psi\ .$$

Sommando i tre termini di E_t si ottiene

$$E_t = -\frac{q}{2}\int_A^B \bar{v}\,dt - \frac{qh^2}{12}\,\varphi_1 + \frac{qh^2}{2}\,\psi +$$

$$+ \frac{2EI\,(l+h)}{l\,h}\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{12\,EI}{h}\,\psi^2 + \qquad (207)$$

$$+ \frac{2EI}{l}\,\varphi_1\,\varphi_2 - \frac{6EI}{h}\,(\varphi_1 + \varphi_2)\,\psi\ .$$

Le tre condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial E_t}{\partial \psi} = 0$$

conducono al sistema

$$\frac{2(h+l)}{hl}\varphi_1 + \frac{1}{l}\varphi_2 - \frac{3}{h}\psi = \frac{qh^2}{24EI}$$

$$\frac{1}{l}\varphi_1 + \frac{2(h+l)}{hl}\varphi_2 - \frac{3}{h}\psi = 0$$

$$-\frac{3}{h}\varphi_1 - \frac{3}{h}\varphi_2 + \frac{12}{h}\psi = -\frac{qh^2}{4EI}$$

la cui soluzione è

$$\varphi_1 = -\frac{qh^3}{24EI}\frac{7l^2 - 2hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl}$$

$$\varphi_2 = -\frac{qh^3}{24EI}\frac{9l^2 + 10hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl} \tag{208}$$

$$\psi = -\frac{qh^3}{24EI}\frac{6h^2 + 6l^2 + 15hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl}.$$

Il caso $l \to \infty$ è quello della fig. 46b, in cui, assumendo come incognita lo sforzo X nel pendolo BC, si può scrivere l'equazione di congruenza (X positivo se BC è tirante)

$$\frac{qh^4}{8EI} + \frac{Xh^3}{3EI} = -\frac{Xh^3}{3EI};$$

da essa si trae

$$X = -\frac{3}{16}qh$$

$$\psi = -\frac{1}{h}\cdot\frac{3}{16}qh\cdot\frac{h^3}{3EI} = -\frac{qh^3}{16EI}$$

$$\varphi_1 = -\frac{qh^3}{6EI} - \frac{Xh^2}{2EI} = -\frac{7}{96}\frac{qh^3}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{Xh^2}{2EI} = -\frac{3}{32}\frac{qh^3}{EI}.$$

Tali sono pure i valori limiti delle (208) per $l \to \infty$.

Si verifica pure che per $l \to 0$ (traverso BC infinitamente rigido) è $\varphi_1 \to 0$, $\varphi_2 \to 0$, e

$$\frac{qh^3}{48EI}$$

il lettore giustifichi tale valore ponendo prima un appoggio fittizio in C, e poi sottoponendo il traverso rigido alla forza orizzontale $\frac{qh}{2}$.

Dalle (208) si vuol risalire ai valori dei momenti; si scrive perciò, con riferimento alle travi AB e CD,

$$\mathfrak{M}_A = \frac{qh^2}{12} + \frac{6EI}{h^2}\Delta + \frac{2EI}{h}\varphi_1 =$$

$$= \frac{qh^2}{12} - \frac{6EI}{h}\psi + \frac{2EI}{h}\varphi_1 =$$

$$= \frac{qh^2}{12}\,\frac{30h^2 + 15l^2 + 73hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl};$$

$$\mathfrak{M}_B = -\frac{qh^2}{12} - \frac{6EI}{h}\psi + \frac{4EI}{h}\varphi_1 =$$

$$= \frac{qh^2}{12}\,\frac{6h^2 + 23hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl}$$

$$\mathfrak{M}_C = -\frac{6EI}{h}\psi + \frac{2EI}{h}\varphi_2 =$$

$$= \frac{qh^2}{12}\,\frac{18h^2 + 9l^2 + 35hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl};$$

$$\mathfrak{M}_D = -\frac{6EI}{h}\psi + \frac{4EI}{h}\varphi_2 =$$

$$= \frac{qh^2}{12}\,\frac{18h^2 + 25hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl} .$$

Per $h = l$ si ha

$$\mathfrak{M}_A = \frac{118}{42}\,\frac{qh^2}{12}$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{29}{42}\,\frac{qh^2}{12}$$

$$\mathfrak{M}_C = \frac{62}{42}\,\frac{qh^2}{12}$$

$$\mathfrak{M}_D = \frac{43}{42}\,\frac{qh^2}{12} ;$$

con tali valori si è disegnato il diagramma della fig. 46c.

Problema n. 47.

La stessa struttura del problema precedente è soggetta (fig. 47) ad una forza F orizzontale sul traverso BC. Nella trave AB si ha

$$\overline{\mathfrak{M}}_A = \overline{\mathfrak{M}}_B = \bar{R}_A = 0, \qquad \bar{v} = 0 ,$$

$$\bar{R}_B = -F ,$$

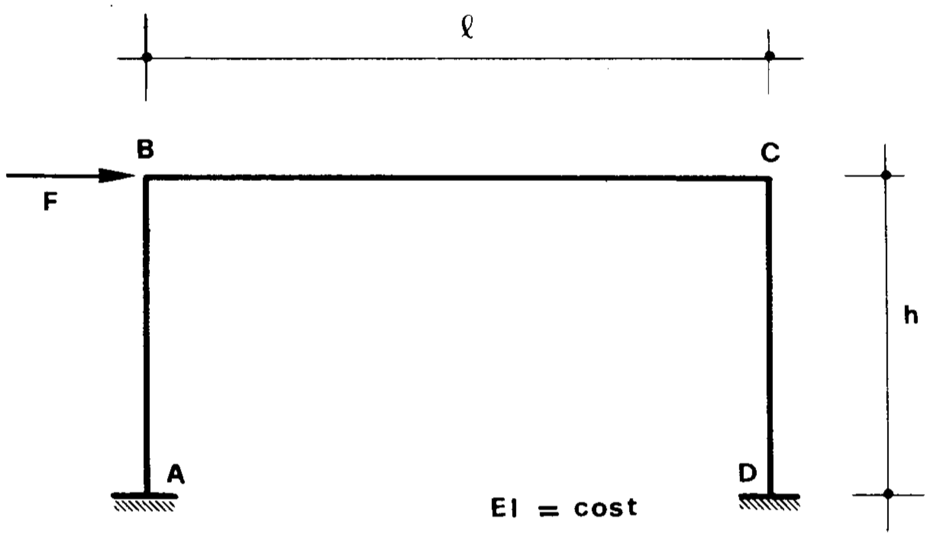
e quindi

$$E_{tAB} = Fh\psi + \frac{2EI}{h}\varphi_1^2 + \frac{6EI}{h}\psi^2 - \frac{6EI}{h}\varphi_1\psi .$$

Le espressioni di E_{tBC} ed E_{tCD} restano inalterate. E' perciò

$$E_t = Fh\psi + \frac{2EI\,(l+h)}{lh}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{12EI}{h}\psi^2 +$$

$$+ \frac{2EI}{l}\varphi_1\varphi_2 - \frac{6EI}{h}(\varphi_1 + \varphi_2)\psi . \qquad (209)$$



Le tre condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial E_t}{\partial\psi} = 0$$

conducono al sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{2\,(h+l)}{hl}\,\varphi_1 &+ \frac{1}{l}\,\varphi_2 - \frac{3}{h}\,\psi = 0\\
\frac{1}{l}\,\varphi_1 &+ \frac{2\,(h+l)}{hl}\,\varphi_2 - \frac{3}{h}\,\psi = 0\\
-\frac{3}{h}\,\varphi_1 &- \frac{3}{h}\,\varphi_2 + \frac{12}{h}\,\psi = -\frac{Fh}{2\,EI}
\end{aligned}
$$

la cui soluzione è

$$
\varphi_1 = -\frac{Fh^2}{2EI}\,\frac{2l^2 + hl}{12h^2 + 4l^2 + 26hl} = \varphi_2
$$

$$
\psi = -\frac{Fh^2}{6EI}\,\frac{4l^2 + 3h^2}{12h^2 + 4l^2 + 26hl}\,.
$$

Per $l \to \infty$ è

$$
\varphi_1 = \varphi_2 \to -\frac{Fh^2}{4EI}
$$

$$
\psi \to -\frac{Fh^2}{6EI}\,;
$$

per $l \to 0$ è

$$
\varphi_1 = \varphi_2 \to 0
$$

$$
\psi \to -\frac{Fh^2}{24EI}\,.
$$

Verifichi il lettore che tali valori corrispondono ai due casi in cui il traverso BC è caratterizzato da rigidezza nulla o infinitamente grande.

Si osservi che le espressioni (207) e (209) di E_t differiscono soltanto nel termine noto e nei termini lineari nelle incognite, quindi i due sistemi che ne derivano hanno la stessa matrice dei coefficienti.

Problema n. 48.

Si prende in esame un generico telaio di routine, in cui cioè (fig. 48.1)

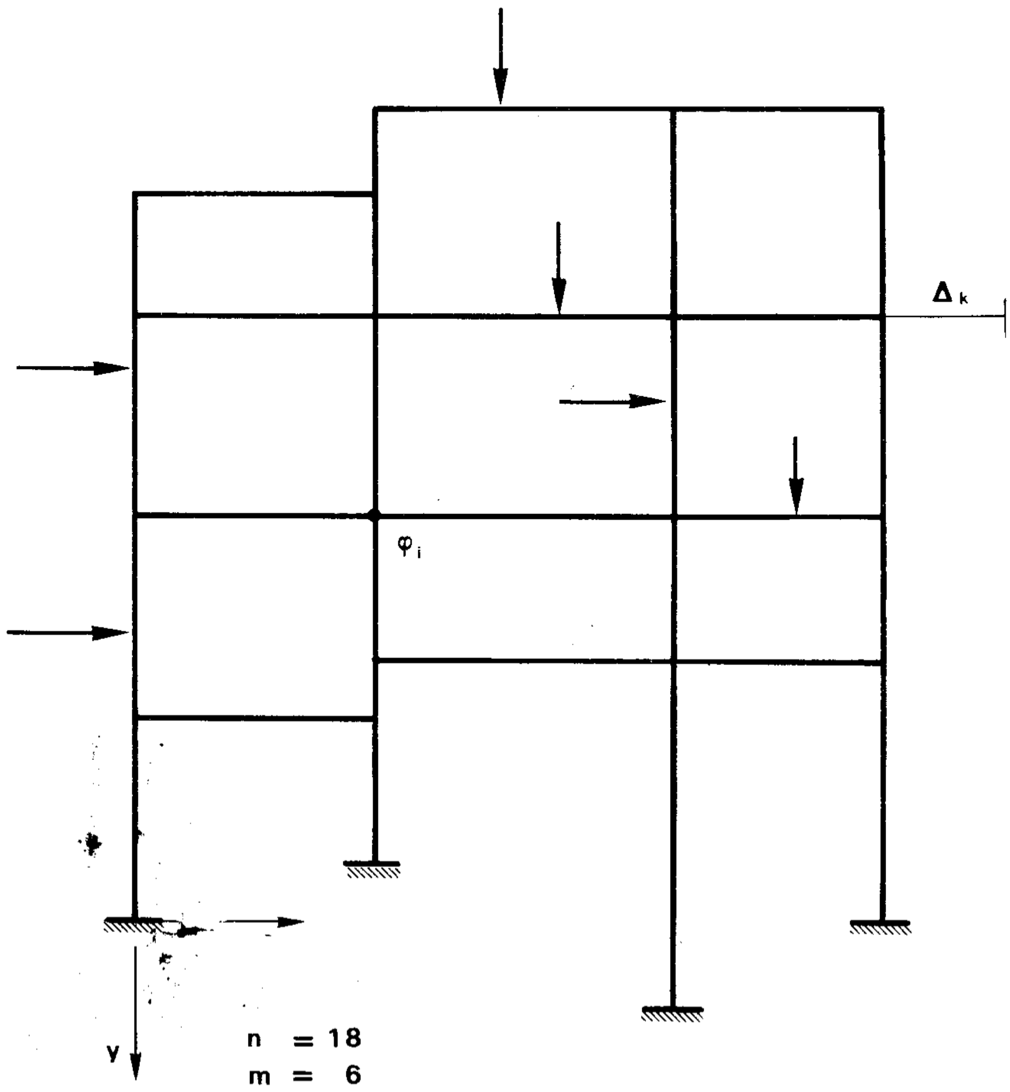


Figura 48.1.

le travi sono orizzontali o verticali, ed i nodi possono spostarsi solo orizzontalmente. Le incognite del problema sono quindi le rotazioni φ_i dei nodi e gli spostamenti Δ_k dei traversi. Si supponga inoltre che tra due nodi i ed h adiacenti, e cioè per ogni trave ih, sia $EI = cost.$; se $E_{ih}\ I_{ih}$ è il prodotto EI della generica trave, ed l_{ih} la sua lunghezza, si pone

$$\rho_{ih} = \frac{4 E_{ih} I_{ih}}{l_{ih}} \tag{210}$$

L'espressione di E_{tih} per ogni trave è la (203), ove si ponga $A = i$, $B = h$; l'energia potenziale totale è

$$E_t = \Sigma E_{tih}$$

estesa a tutte le travi.

Le condizioni che risolvono il problema sono le

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0 \qquad && i = 1,\ 2,\ \dots\ n \\ &\frac{\partial E_t}{\partial \Delta_k} = 0 \qquad && k = 1,\ 2,\ \dots\ m \end{aligned}\right. \tag{211}$$

dove n è il numero dei nodi ed m quello dei traversi.

La φ_i entra soltanto nelle E_{tih} delle travi che concorrono in i; quindi la prima delle (211) si scrive

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = \varphi_i \Sigma' \rho + \Sigma' \overline{\mathfrak{M}}_i + \frac{1}{2} \Sigma' \varphi_h \rho +$$

$$+ \frac{3}{2} \left[\frac{\rho_{is}}{l_s} (\Delta_{is} - \Delta_i) + \frac{\rho_{ii}}{l_i} (\Delta_i - \Delta_{ii}) \right] = 0\ . \tag{212}$$

Le Σ' sono estese alle sole travi, orizzontali e verticali, che concorrono in i. Con il secondo indice i (s) si indicano gli elementi relativi al ritto al di sotto (al di sopra) di i. Per i segni si ricordi che φ ed $\mathfrak{M}$ sono positive se antiorarie ($\mathfrak{M}$ agente dal nodo sulla trave), Δ è positivo se diretto verso destra.

La Δ_k entra soltanto nelle E_{tjh} dei ritti confluenti sul traverso k; quindi la seconda delle (211) si scrive

$$\frac{\partial E_t}{\partial \Delta_k} = 3\Delta_k \Sigma'' \frac{\rho}{l^2} + \Sigma'' \bar{R}_j -$$

$$-\frac{3}{2}\Sigma''_s \frac{\rho_{js}}{l_s}(\varphi_k + \varphi_{ks}) + \frac{3}{2}\Sigma''_i \frac{\rho_{ji}}{l_i}(\varphi_k + \varphi_{ki}) - \tag{213}$$

$$-3\Delta_{ks}\Sigma''_s \frac{\rho_{js}}{l_s^2} - 3\Delta_{ki}\Sigma''_i \frac{\rho_{ji}}{l_i^2} = 0$$

Le $\bar{R}_j$ sono positive se dirette verso destra.

Le Σ'' sono estese ai ritti che confluiscono nel traverso k. Le Σ''_i (e Σ''_s) sono estese ai soli ritti che confluiscono dal di sotto (dal di sopra) nel traverso k.

Le (212) e (213) prendono rispettivamente nome di *equazioni di nodo* ed *equazioni di piano:* le (212) sono le ben note equazioni di Gehler, o delle cinque rotazioni.

Si consideri in concreto il telaio della fig. 48.2; EI è costante in tutta la struttura. Data la simmetria della struttura e l'antisimmetria delle forze applicate le incognite sono quattro, φ_1 φ_2 Δ_1 Δ_2. Le (212) si riducono così a due, che si scrivono come segue:

$$14\frac{EI}{l}\varphi_1 + 2\frac{EI}{l}\varphi_2 + \qquad + 6\frac{EI}{l^2}\Delta_2 = 0$$

$$2\frac{EI}{l}\varphi_1 + 10\frac{EI}{l}\varphi_2 - 6\frac{EI}{l^2}\Delta_1 + 6\frac{EI}{l^2}\Delta_2 = 0\,.$$

Le (213), dal loro canto, danno

$$-12\frac{EI}{l^2}\varphi_2 + 48\frac{EI}{l^3}\Delta_1 - 24\frac{EI}{l^3}\Delta_2 = F\,.$$

$$12\frac{EI}{l^2}\varphi_1 + 12\frac{EI}{l^2}\varphi_2 - 24\frac{EI}{l^3}\Delta_1 + 24\frac{EI}{l^3}\Delta_2 = F\,.$$

Il sistema può scriversi perciò come segue:

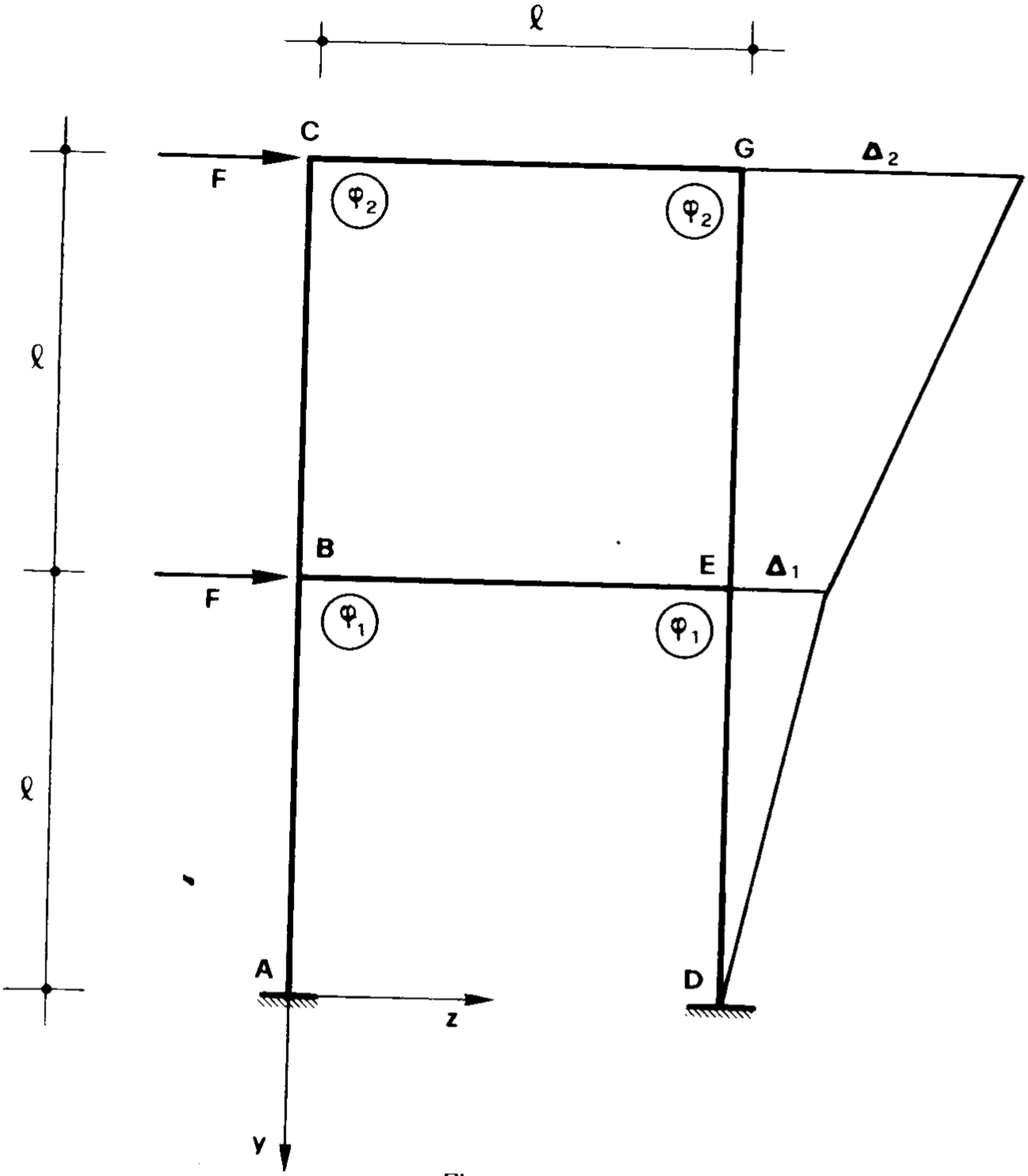


Figura 48.2.

$$7\,\varphi_1 + 5\,\varphi_2 + 3\,\frac{\Delta_2}{l} = 0$$

$$\varphi_1 + 5\,\varphi_2 - 3\,\frac{\Delta_1}{l} + 3\,\frac{\Delta_2}{l} = 0$$

$$-3\,\varphi_2 + 12\,\frac{\Delta_1}{l} - 6\,\frac{\Delta_2}{l} = \frac{Fl^2}{4EI}$$

$$3\,\varphi_1 + 3\,\varphi_2 - 6\,\frac{\Delta_1}{l} + 6\,\frac{\Delta_2}{l} = \frac{Fl^2}{4EI}$$

la cui soluzione è

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\ 0{,}100\ \frac{Fl^2}{EI} \\
\varphi_2 &= -\ 0{,}050\ \frac{Fl^2}{EI} \\
\Delta_1 &= \ \ 0{,}133\ \frac{Fl^3}{EI} \\
\Delta_2 &= \ \ 0{,}250\ \frac{Fl^3}{EI}
\end{aligned}
\qquad (214)
$$

Le coppie di incastro sono fornite da

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_A &= \frac{6EI}{l^2}\Delta_1 + \frac{2EI}{l}\varphi_1 = 0{,}600\ Fl \\
\mathfrak{M}_{BA} &= \frac{6EI}{l^2}\Delta_1 + \frac{4EI}{l}\varphi_1 = 0{,}400\ Fl \\
\mathfrak{M}_{BC} &= \frac{6EI}{l^2}(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 = 0{,}200\ Fl \\
\mathfrak{M}_{CB} &= \frac{6EI}{l^2}(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{4EI}{l}\varphi_2 = 0{,}300\ Fl \\
\mathfrak{M}_{BE} &= \frac{6EI}{l}\varphi_1 = -\ 0{,}600\ Fl \\
\mathfrak{M}_{CG} &= \frac{6EI}{l}\varphi_2 = -\ 0{,}300\ Fl\,.
\end{aligned}
$$

Si verifica che è

$$\mathfrak{M}_{BA} + \mathfrak{M}_{BE} + \mathfrak{M}_{BC} = 0$$

$$\mathfrak{M}_{CB} + \mathfrak{M}_{CG} = 0$$

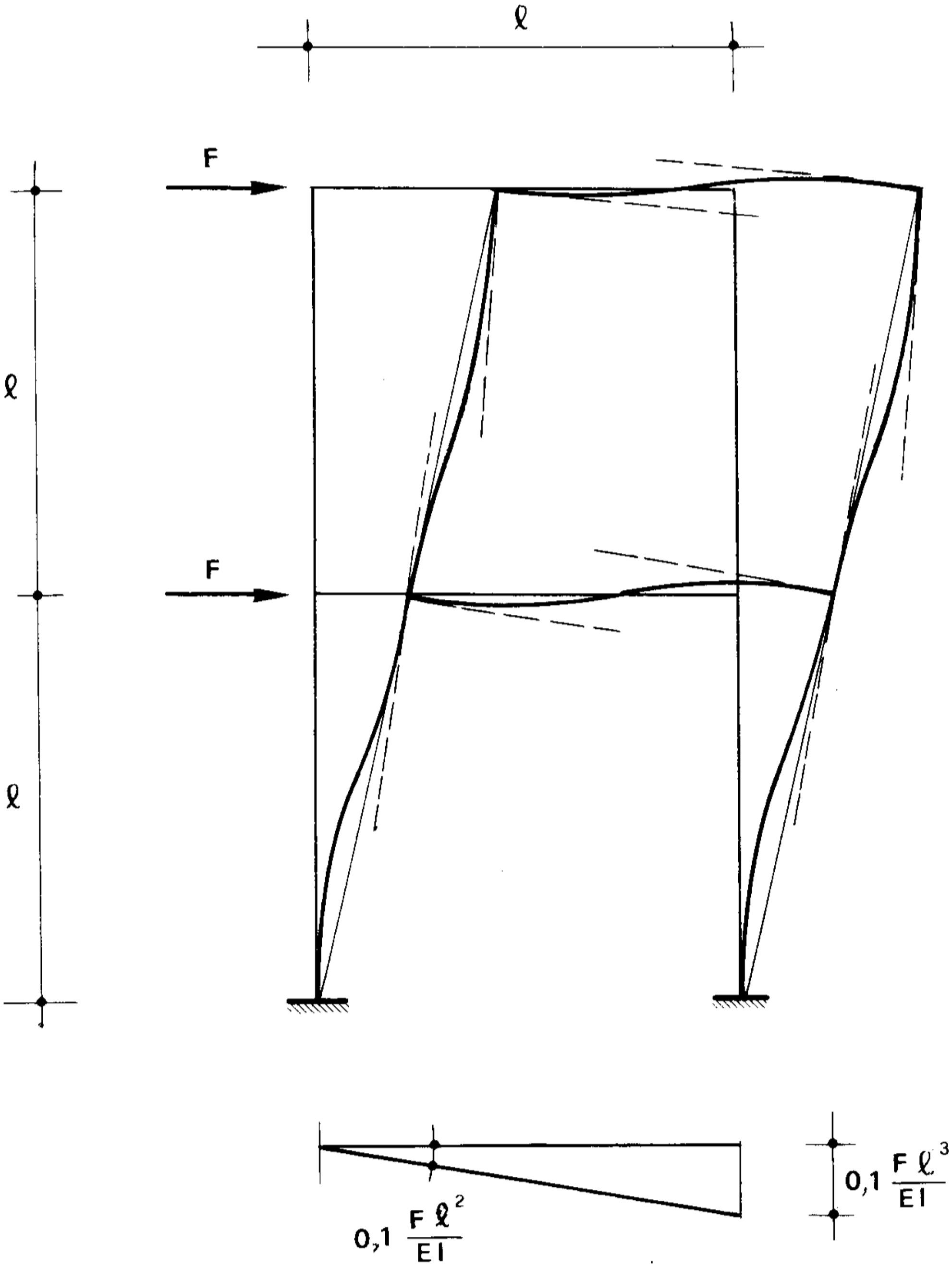


Figura 48.3.

$$- 2 \frac{\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_{BA}}{l} + 2F = 0$$

$$- 2 \frac{\mathfrak{M}_{BC} + \mathfrak{M}_{CB}}{l} + F = 0$$

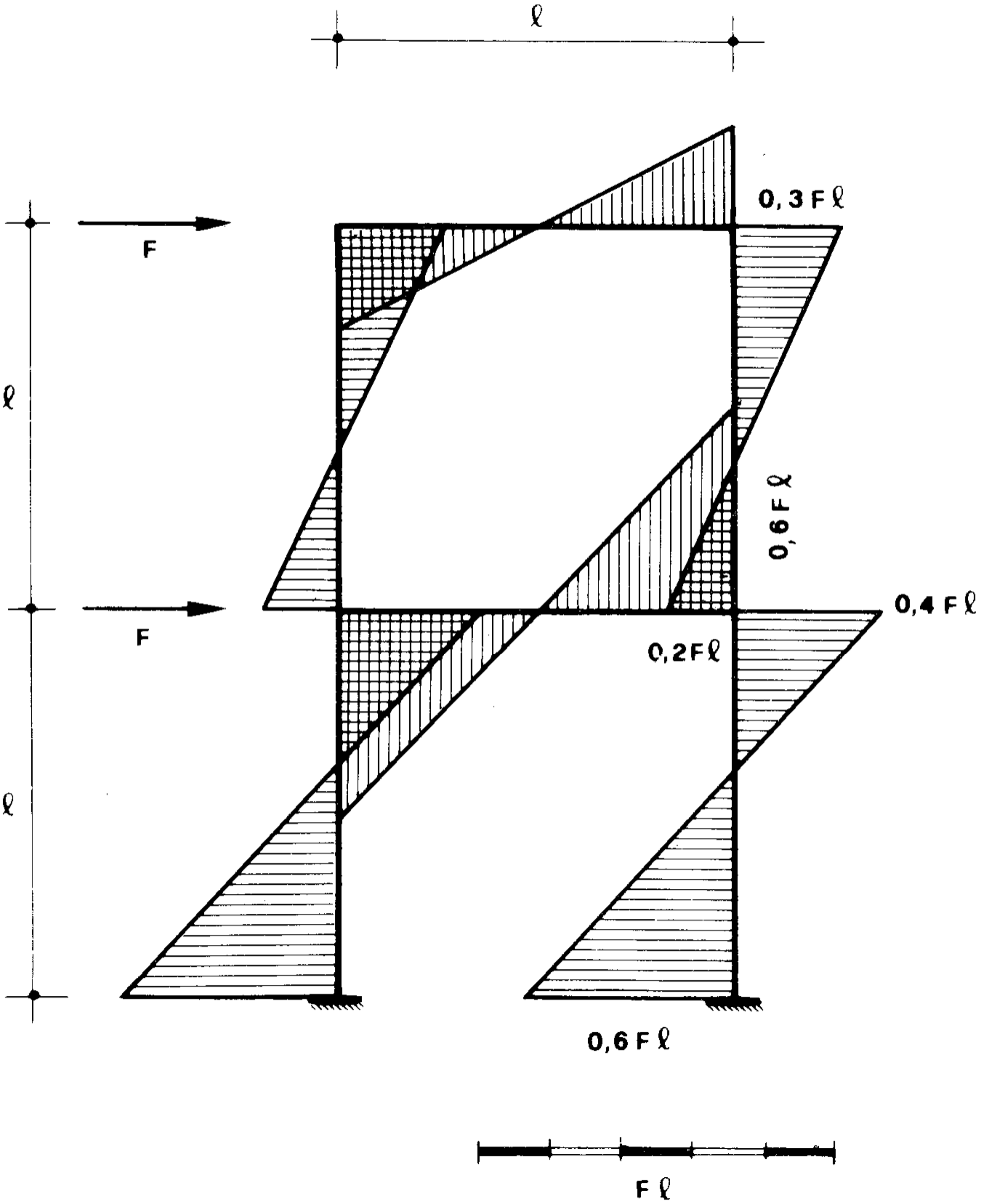


Figura 48.4.

Sono così verificate le condizioni di equilibrio alla rotazione dei nodi, e le condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale dei due traversi.

Nella fig. 48.3 è disegnata la deformata della struttura, nella fig. 48.4 è disegnato il diagramma dei momenti.

Problema n. 49.

Si prende in esame la struttura della fig. 49.1; in ogni trave $EI = cost.$ Le rotazioni incognite φ sono cinque, gli spostamenti Δ sono tre (fig. 49.2).

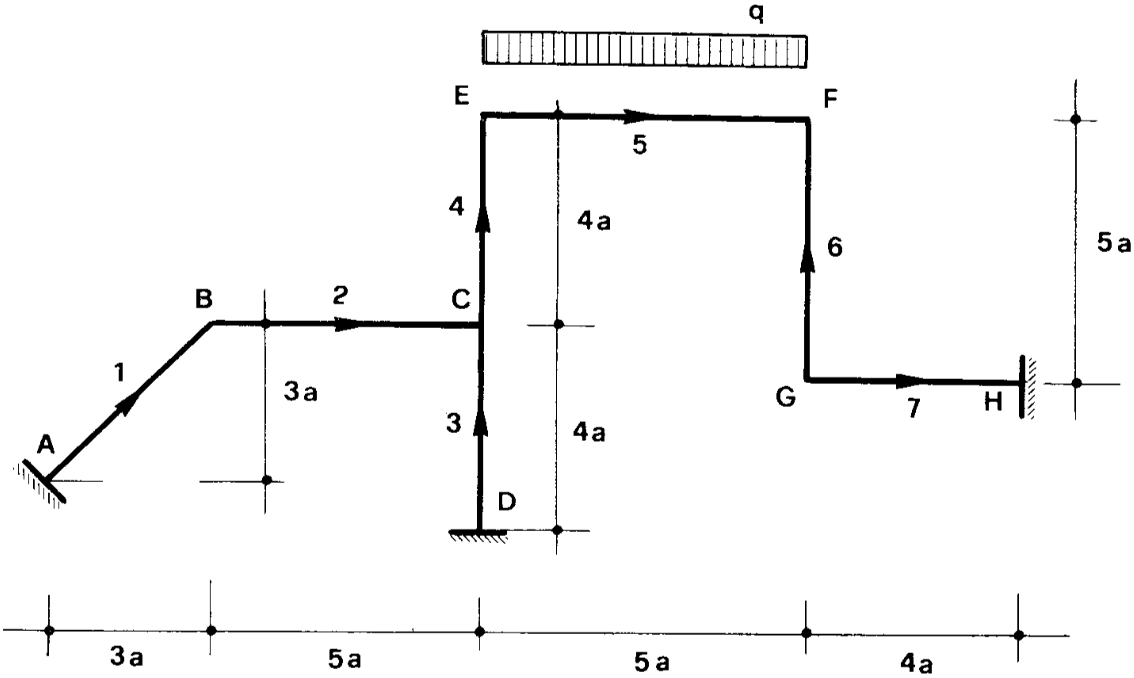


Figura 49.1.

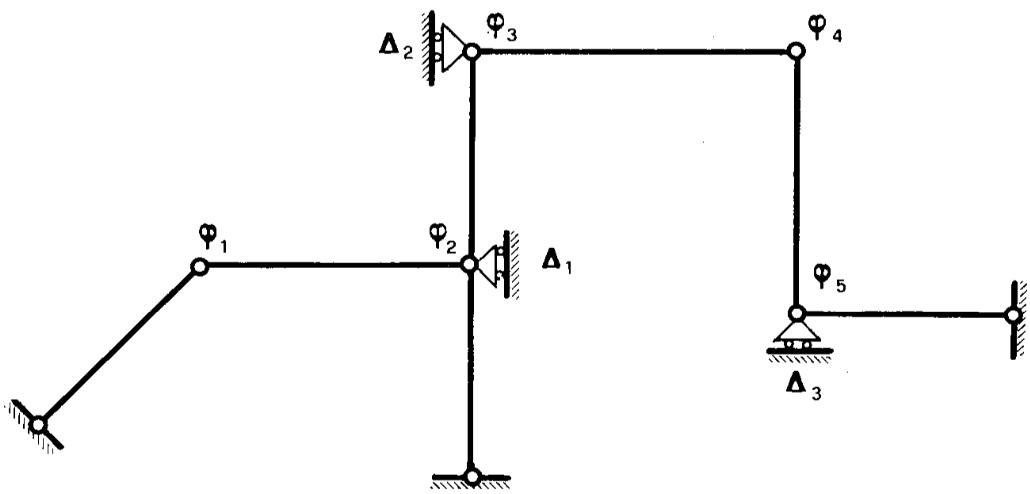


Figura 49.2.

Si chiama, come già fatto, con ρ il rapporto $\dfrac{4\,EI}{l}$ relativo a ciascuna trave.

Attraverso la (203) si scrivono i contributi ad E_t di ciascuna trave: a ciò fare si sono disegnati in fig. 49 (3, 4, 5) i termini v_A e v_B provocati in ogni trave da Δ_1, Δ_2 e Δ_3. Per la scrittura della (203) l'asse z della

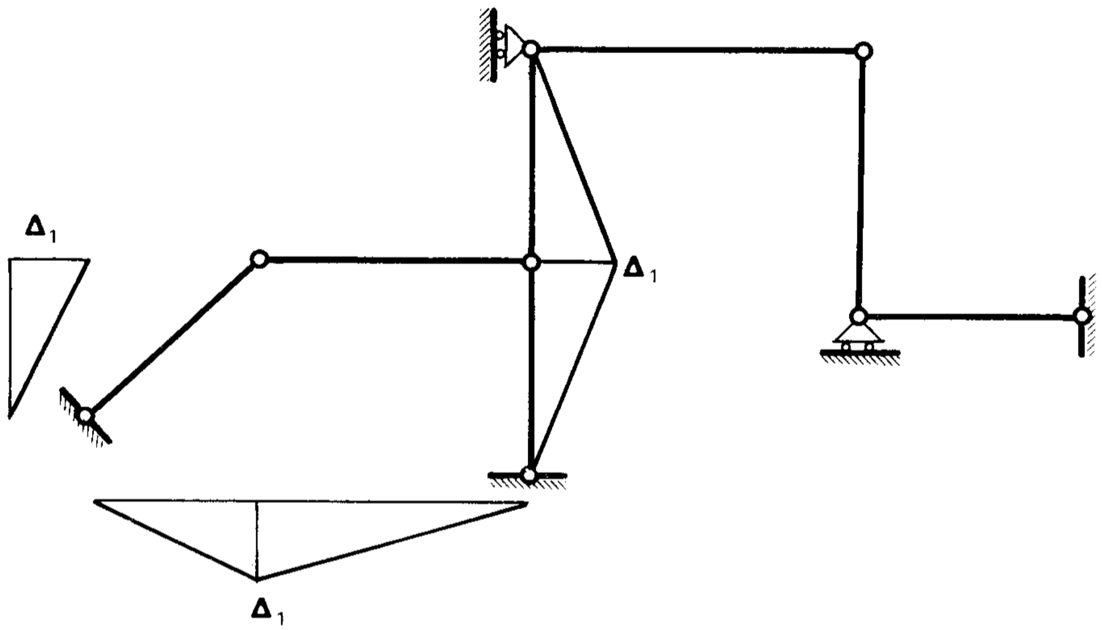


Figura 49.3

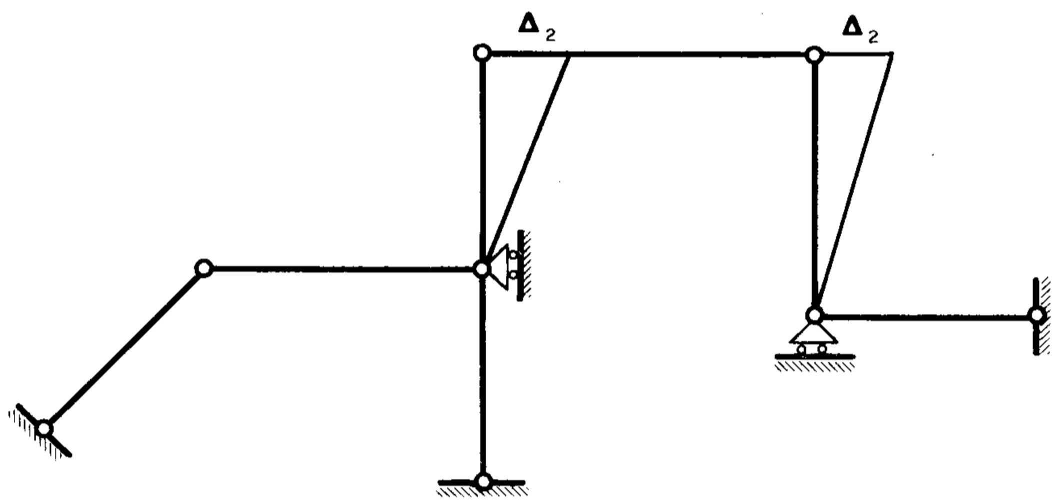


Figura 49.4.

fig. 44 è riportato sulla struttura in esame così come è consegnato nella fig. 49.1. Si ha quindi

$$E_{t1} = \frac{\rho_1}{2}\varphi_1^2 + \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{(3a\sqrt{2})^2}(\Delta_1\sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{3a\sqrt{2}}\varphi_1\,\Delta_1\sqrt{2}\ .$$

$$E_{t2} = \frac{\rho_2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{3}{2} \frac{\rho_2}{(5a)^2} \Delta_1^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_1 \varphi_2 -$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\rho_2}{5a} \Delta_1 (\varphi_1 + \varphi_2);$$

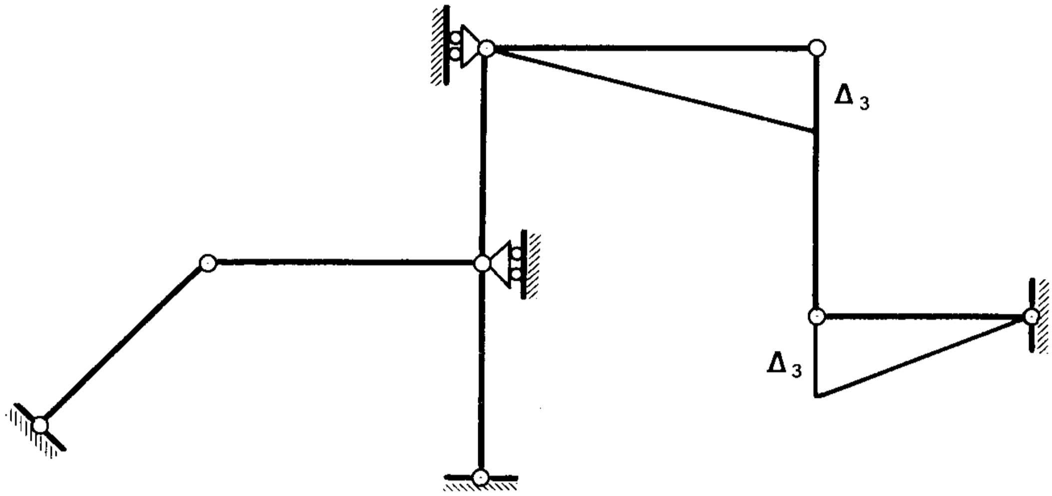


Figura 49.5.

$$E_{t3} = \frac{\rho_3}{2} \varphi_2^2 + \frac{3}{2} \frac{\rho_3}{(4a)^2} \Delta_1^2 + \frac{3}{2} \frac{\rho_3}{4a} \varphi_2 \Delta_1 ;$$

$$E_{t4} = \frac{\rho_4}{2} (\varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \frac{3}{2} \frac{\rho_4}{(4a)^2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) +$$

$$+ \frac{\rho_4}{2} \varphi_2 \varphi_3 + \frac{3}{2} \frac{\rho_4}{4a} (- \varphi_2 \Delta_1 + \varphi_2 \Delta_2 - \varphi_3 \Delta_1 + \varphi_3 \Delta_2)$$

$$- 3 \frac{\rho_4}{(4a)^2} \Delta_1 \Delta_2 ;$$

$$E_{t5} = \frac{\rho_5}{2} (\varphi_3^2 + \varphi_4^2) + \frac{3}{2} \frac{\rho_5}{(6a)^2} \Delta_3^2 + \frac{\rho_5}{2} \varphi_3 \varphi_4 +$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\rho_5}{6a} \Delta_3 (\varphi_3 + \varphi_4) - \frac{1}{2} \int_3^4 q \bar{v} dz + \frac{q (6a)^2}{12} \varphi_3 -$$

$$- \frac{q (6a)^2}{12} \varphi_4 - 3 qa \Delta_3 ;$$

$$E_{t6} = \frac{\rho_6}{2} (\varphi_5^2 + \varphi_4^2) + \frac{3}{2} \frac{\rho_6}{(5a)^2} \Delta_2^2 + \frac{\rho_6}{2} \varphi_5 \varphi_4 +$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{\rho_6}{5a} \Delta_2 (\varphi_5 + \varphi_4) ;$$

$$E_{t7} = \frac{\rho_7}{2} \varphi_5^2 + \frac{3}{2} \frac{\rho_7}{(4a)^2} \Delta_3^2 - \frac{3}{2} \frac{\rho_7}{4a} \varphi_3 \Delta_3$$

Le otto condizioni di stazionarietà

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0 \qquad \frac{\partial E_t}{\partial \Delta_k} = 0$$

conducono al sistema lineare non omogeneo di otto equazioni in otto incognite che di seguito si scrive:

$$\varphi_1 (\rho_1 + \rho_2) + \varphi_2 \frac{\rho_2}{2} + \frac{\Delta_1}{a} \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{3 \rho_2}{10} \right) = 0 ;$$

$$\varphi_2 (\rho_2 + \rho_3 + \rho_4) + \varphi_1 \frac{\rho_2}{2} + \varphi_3 \frac{\rho_4}{2} + \frac{\Delta_1}{a} \left(- \frac{3 \rho_2}{10} + \frac{3 \rho_3}{8} - \frac{3 \rho_4}{8} \right) +$$

$$+ \frac{\Delta_2}{a} \frac{3 \rho_4}{8} = 0 ;$$

$$\varphi_3 (\rho_4 + \rho_5) + \varphi_2 \frac{\rho_4}{2} + \varphi_4 \frac{\rho_5}{2} - \frac{\Delta_1}{a} \frac{3 \rho_4}{8} + \frac{\Delta_2}{a} \frac{3 \rho_4}{8} +$$

$$+ \frac{\Delta_3}{a} \frac{\rho_5}{4} = - 3 qa^2 ;$$

$$\varphi_4 (\rho_5 + \rho_6) + \varphi_3 \frac{\rho_5}{2} + \varphi_5 \frac{\rho_6}{2} + \frac{\Delta_2}{a} \frac{3\rho_6}{10} + \frac{\Delta_3}{a} \frac{\rho_5}{4} = 3qa^2 \quad ;$$

$$\varphi_5 (\rho_6 + \rho_7) + \varphi_4 \frac{\rho_6}{2} + \frac{\Delta_2}{a} \frac{3\rho_6}{10} - \frac{\Delta_3}{a} \frac{3\rho_7}{8} = 0 \quad ;$$

$$\varphi_1 \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{3\rho_2}{10}\right) + \varphi_2 \left(-\frac{3\rho_2}{10} + \frac{3\rho_3}{8} - \frac{3\rho_4}{8}\right) -$$

$$- \varphi_3 \frac{3\rho_4}{8} + \frac{\Delta_1}{a} \left(\frac{\rho_1}{3} + \frac{3\rho_2}{25} + \frac{3\rho_3}{16} + \frac{3\rho_4}{16}\right) - \frac{\Delta_2}{a} \frac{3\rho_4}{16} = 0 \quad ;$$

$$\varphi_2 \frac{3\rho_4}{8} + \varphi_3 \frac{3\rho_4}{8} + \varphi_4 \frac{3\rho_6}{10} + \varphi_5 \frac{3\rho_6}{10} -$$

$$- \frac{\Delta_1}{a} \frac{3\rho_4}{16} + \frac{\Delta_2}{a} \left(\frac{3\rho_4}{16} + \frac{3\rho_6}{25}\right) = 0 \quad ;$$

$$\varphi_3 \frac{\rho_5}{4} + \varphi_4 \frac{\rho_5}{4} - \varphi_5 \frac{3\rho_7}{8} + \frac{\Delta_3}{a} \left(\frac{\rho_5}{12} + \frac{3\rho_7}{16}\right) = 3qa^2 .$$

Per

$\rho_5 = \rho$

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_7 = 0{,}5\,\rho$

$\rho_3 = \rho_4 = \rho_6 = 0{,}2\,\rho$

i coefficienti ed i termini noti del sistema sono riportati nella tabella 49.1; nell'ultima riga della stessa tabella appaiono i termini della soluzione a meno di $\frac{qa^2}{\rho}$.

Nella fig. 49.6 sono riportati i momenti flettenti; per il loro calcolo si è proceduto come segue

$$\mathfrak{M}_A = \frac{2EI}{l}\varphi_B + \frac{6EI}{l^2}\eta_B =$$

$$= \frac{\rho_1}{2}\varphi_1 + \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{3a\sqrt{2}}\Delta_1\sqrt{2} = -0{,}6402\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{BA} = \rho_1\varphi_1 + \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{3a\sqrt{2}}\Delta_1\sqrt{2} = -0{,}6245\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{BC} = \rho_2\varphi_1 + \frac{\rho_2}{2}\varphi_2 - \frac{3}{2}\frac{\rho_2}{5a}\Delta_1 = 0{,}8084\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{CB} = \frac{\rho_2}{2}\varphi_1 + \rho_2\varphi_2 - \frac{3}{2}\frac{\rho_2}{5a}\Delta_1 = 0{,}8084\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{\rho_3}{2}\varphi_2 + \frac{3}{2}\frac{\rho_3}{4a}\Delta_1 = -0{,}1169\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{CD} = \rho_3\varphi_2 + \frac{3}{2}\frac{\rho_3}{4a}\Delta_1 = -0{,}0371\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{CE} = \rho_4\varphi_2 + \frac{\rho_4}{2}\varphi_3 + \frac{3}{2}\frac{\rho_4}{4a}(\Delta_2 - \Delta_1) = -0{,}7712\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{EC} = \frac{\rho_4}{2}\varphi_2 + \rho_4\varphi_3 + \frac{3}{2}\frac{\rho_4}{4a}(\Delta_2 - \Delta_1) = -2{,}2158\ qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{EF} = \rho_5\,\varphi_3 + \frac{\rho_5}{2}\,\varphi_4 + \frac{3}{2}\,\frac{\rho_5}{6a}\,\Delta_3 + \frac{q\,(6a)^2}{12} = 2{,}2158\; qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{FE} = \frac{\rho_5}{2}\,\varphi_3 + \rho_5\,\varphi_4 + \frac{3}{2}\,\frac{\rho_5}{}\,\Delta_3 - \frac{q\,(6a)^2}{12} = -\,0{,}5833\; qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{FG} = \frac{\rho_6}{2}\,\varphi_5 + \rho_6\,\varphi_4 + \frac{3}{2}\,\frac{\rho_6}{5a}\,\Delta_2 = 0{,}5833\; qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{GF} = \rho_6\,\varphi_5 + \frac{\rho_6}{2}\,\varphi_4 + \frac{3}{2}\,\frac{\rho_6}{5a}\,\Delta_2 = 3{,}1504\; qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{GH} = \rho_7\,\varphi_5 - \frac{3}{2}\,\frac{\rho_7}{4a}\,\Delta_3 = -\,3{,}1504\; qa^2$$

$$\mathfrak{M}_{H} = \frac{\rho_7}{2}\,\varphi_5 - \frac{3}{2}\,\frac{\rho_7}{4a}\,\Delta_3 = -\,7{,}7569\; qa^2$$

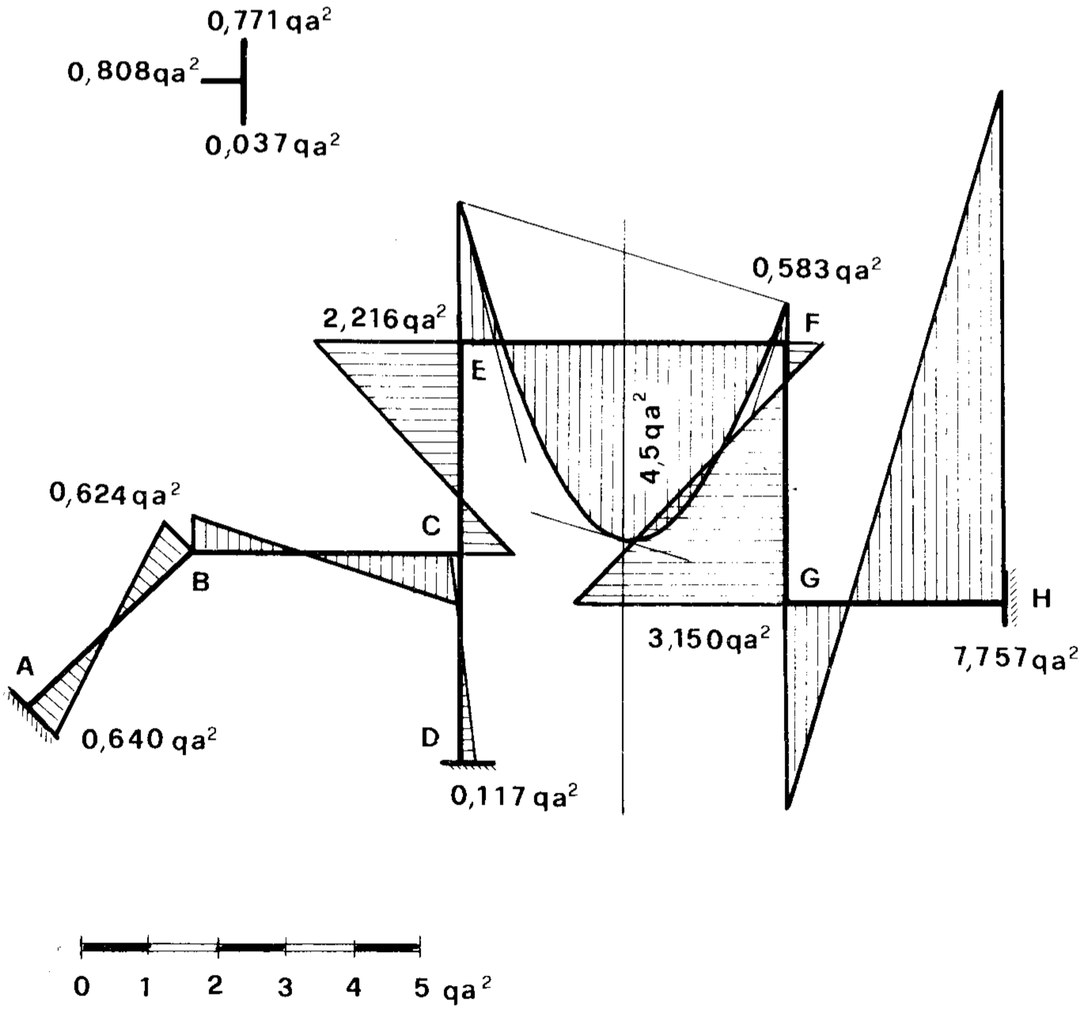


Figura 49.6.

Il lettore potrebbe agevolmente verificare che le equazioni di cui alla tab. 49.1 sono di equilibrio: le prime cinque rappresentano il nullificarsi della somma delle coppie agenti in ciascuno dei nodi *BCEFG*, le altre tre il nullificarsi delle reazioni sviluppate dai tre appoggi posti ciascuno ad impedire Δ_1, Δ_2 e Δ_3. Ciò corrisponde infatti a vincolare la struttura in

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	$\frac{\Delta_1}{a}$	$\frac{\Delta_2}{a}$	$\frac{\Delta_3}{a}$	
1,0000	0,2500	0	0	0	0,1000	0	0	0
0,2500	0,9000	0,1000	0	0	− 0,1500	0,0750	0	0
0	0,1000	1,2000	0,5000	0	− 0,0750	0,0750	0,2500	$-\frac{3\,qa^2}{\rho}$
0	0	0,5000	1,2000	0,1000	0	0,0600	0,2500	$\frac{3\,qa^2}{\rho}$
0	0	0	0,1000	0,7000	0	0,0600	− 0,1875	0
0,1000	− 0,1500	− 0,0750	0	0	0,3017	− 0,0375	0	0
0	0,0750	0,0750	0,0600	0,0600	− 0,0375	0,0615	0	0
0	0	0,2500	0,2500	− 0,1875	0	0	0,1771	$\frac{3qa^2}{\rho}$
0,0628	0,7982	− 13,6466	− 7,2446	18,4262	− 2,6236	3,1602	65,9386	$\frac{qa^2}{\rho}$

Tabella 49.1.

modo da impedire le cinque φ ed i tre Δ_k, poi assoggettarla alle forze applicate, ed infine imprimere cinque rotazioni φ_i e tre cedimenti Δ_k; la soluzione, per un qualsiasi insieme di valori delle φ_i e dei Δ_k, è congruente ma non equilibrata, poichè i vincoli aggiunti sono fittizi; l'unica che è assieme congruente ed equilibrata è quella che annulla le reazioni sviluppate dai vincoli fittizi.

Problema n. 50.

Si vuole studiare il telaio della fig. 50.1 soggetto a carichi verticali distribuiti sui traversi, ed a forze orizzontali in corrispondenza dei traversi stessi. Le coordinate lagrangiane sono le rotazioni dei 35 nodi, gli spostamenti orizzontali dei 10 traversi, nonchè gli spostamenti verticali dei punti *ABC*.

Nella fig. 50.2 sono numerate le travi (in cerchietto), i nodi, ed i vincoli fittizi che contrastano gli spostamenti (in rettangolino).

Nella tabella 50.1 sono riportati, per ciascuna delle 57 travi, i contributi ad E_t (con esclusione dei termini noti, che non giocano nelle derivate). Nella tabella 50.2 sono riportati i coefficienti ed i termini noti delle 48 equazioni del tipo

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \Delta_k} = 0 \ ;$$

nell'ultima colonna sono riportati i termini noti, nell'ultima riga i risultati, a meno di $\dfrac{qa^2}{\rho}$.

Nella fig. 50.3 sono disegnati i momenti flettenti nei traversi; nella fig. 50.4 i momenti flettenti nei ritti; nella fig. 50.5 i valori delle coppie reattive d'incastro (agenti dal nodo sulle travi).

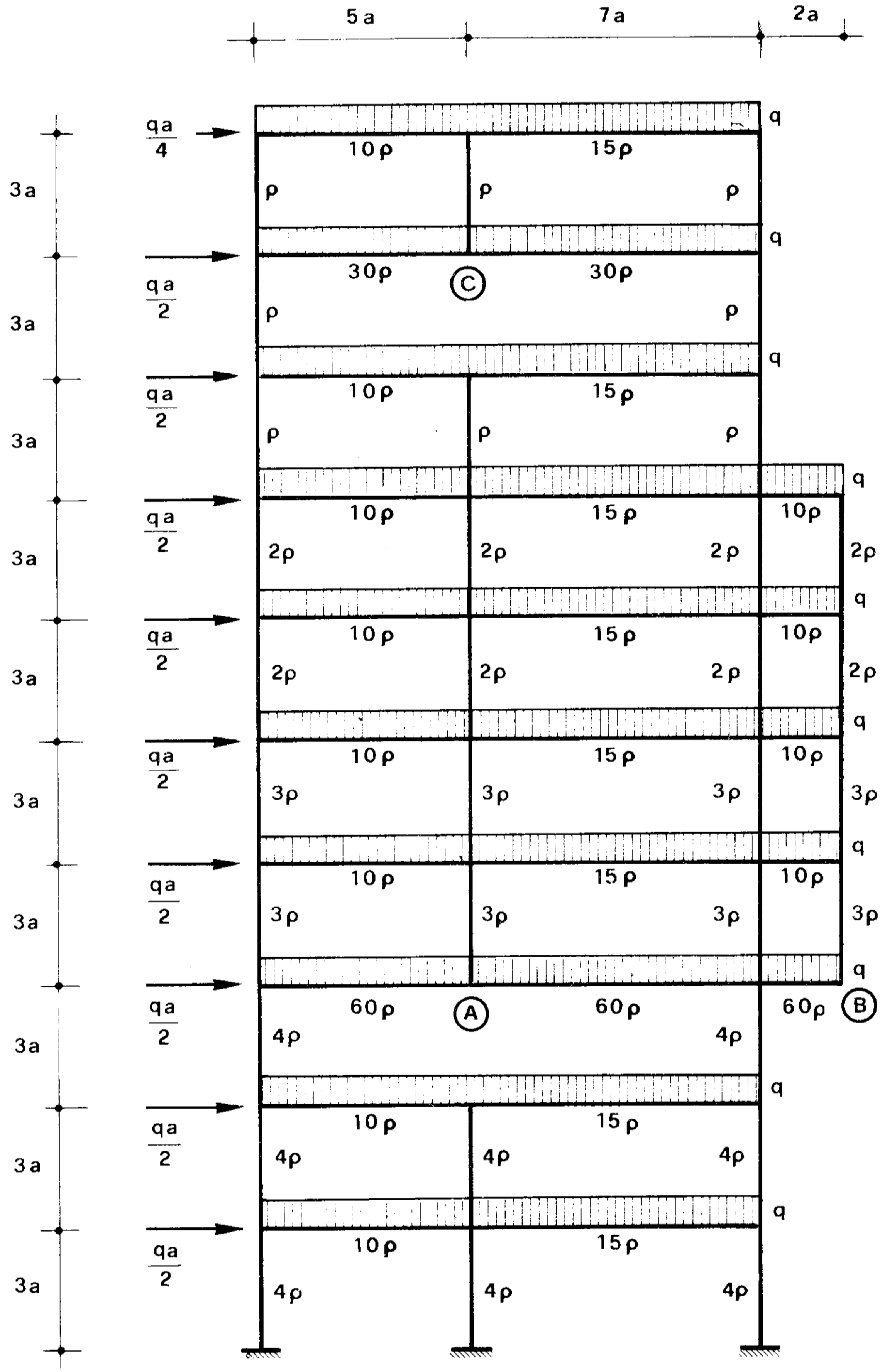


Figura 50.1

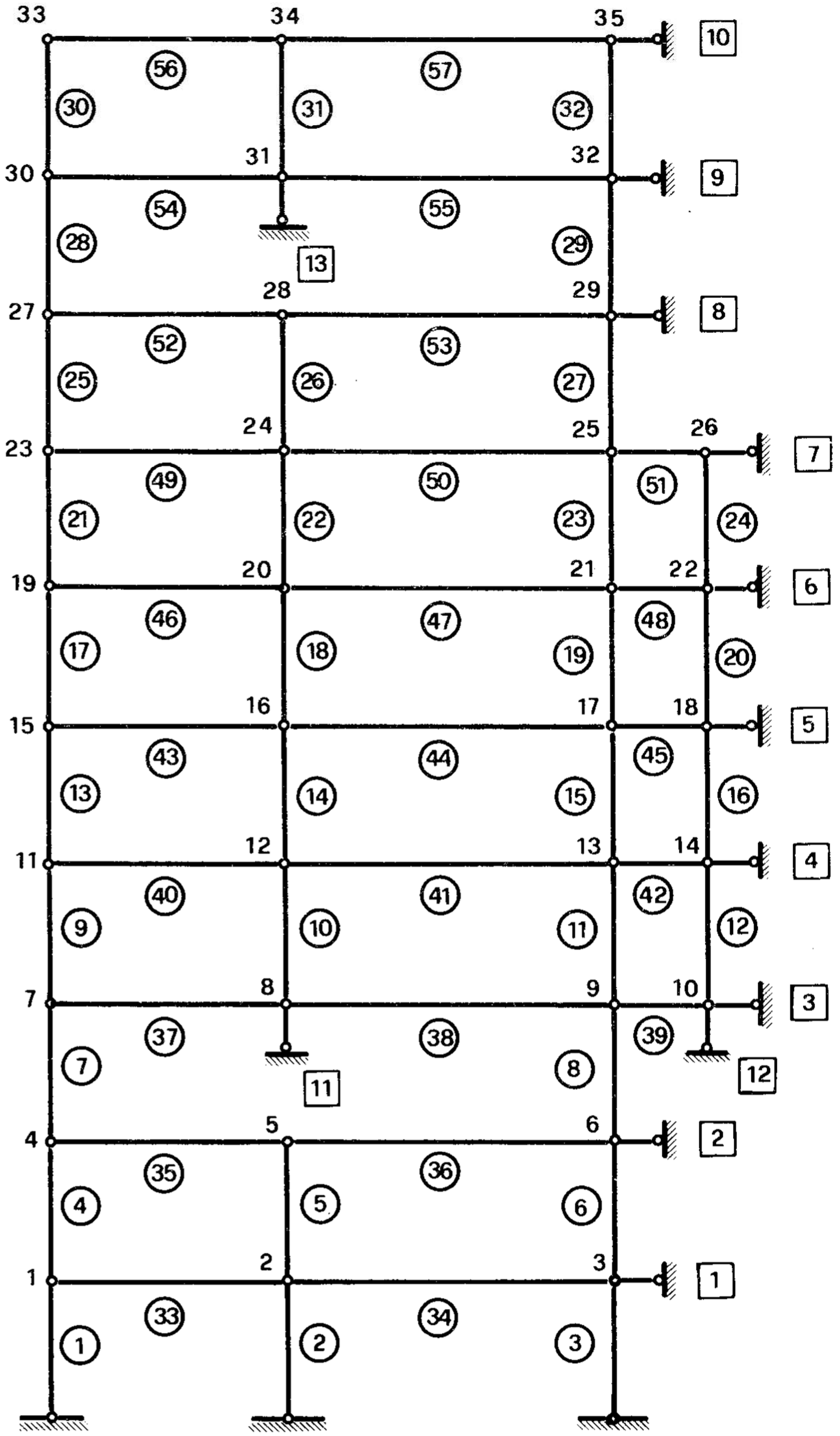

33 34 35 10
56 57
30 31 32
30 31 32 9
54 55
28 29
13
27 28 29 8
52 53
25 26 27
23 24 25 26 7
49 50 51
21 22 23 24
19 20 21 22 6
46 47 48
17 18 19 20
15 16 17 18 5
43 44 45
13 14 15 16
11 12 13 14 4
40 41 42
9 10 11 12
7 8 9 10 3
37 38 39
7 8
11 12
4 5 6 2
35 36
4 5 6
1 2 3 1
33 34
1 2 3

Figura 50.2

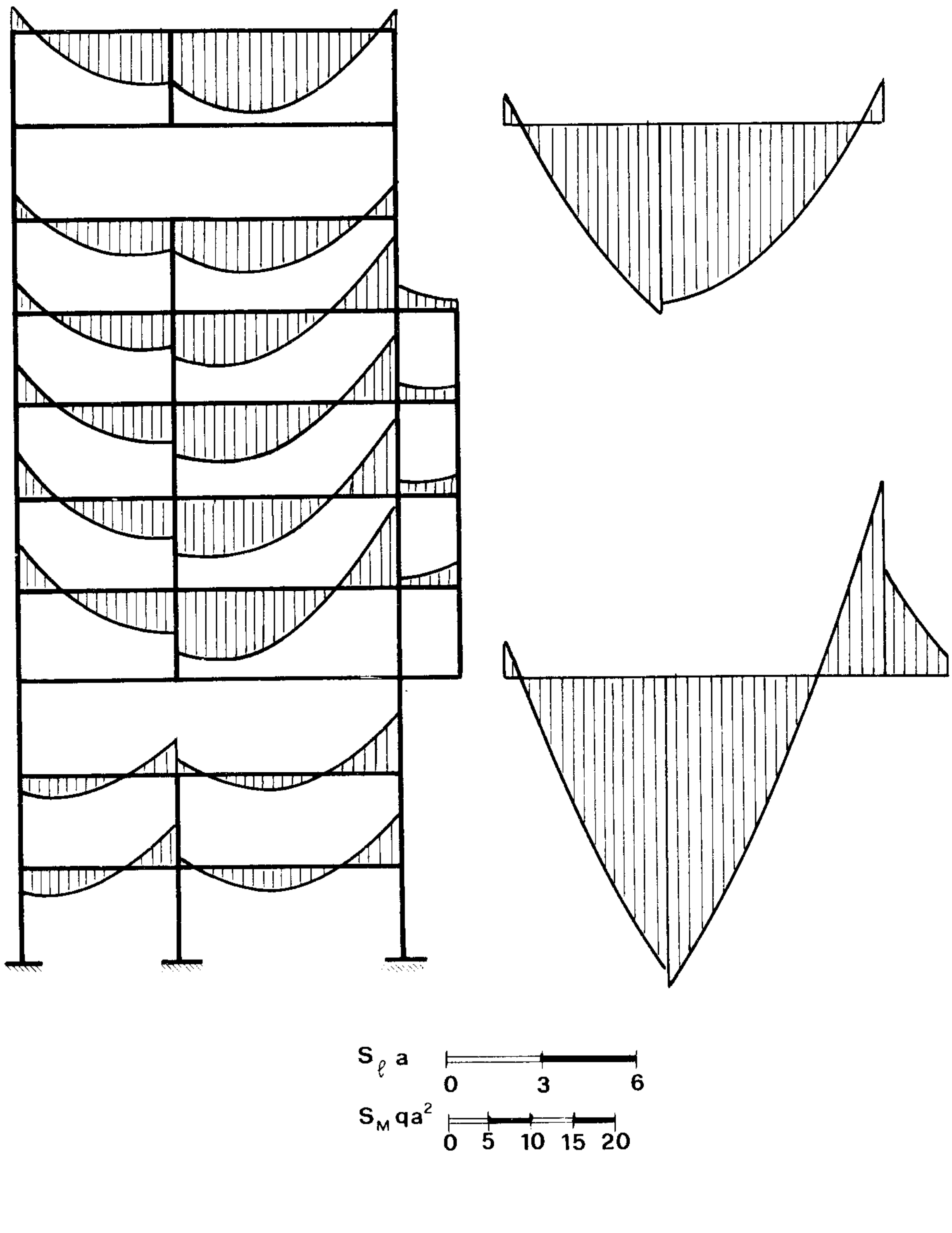


Figura 50.3

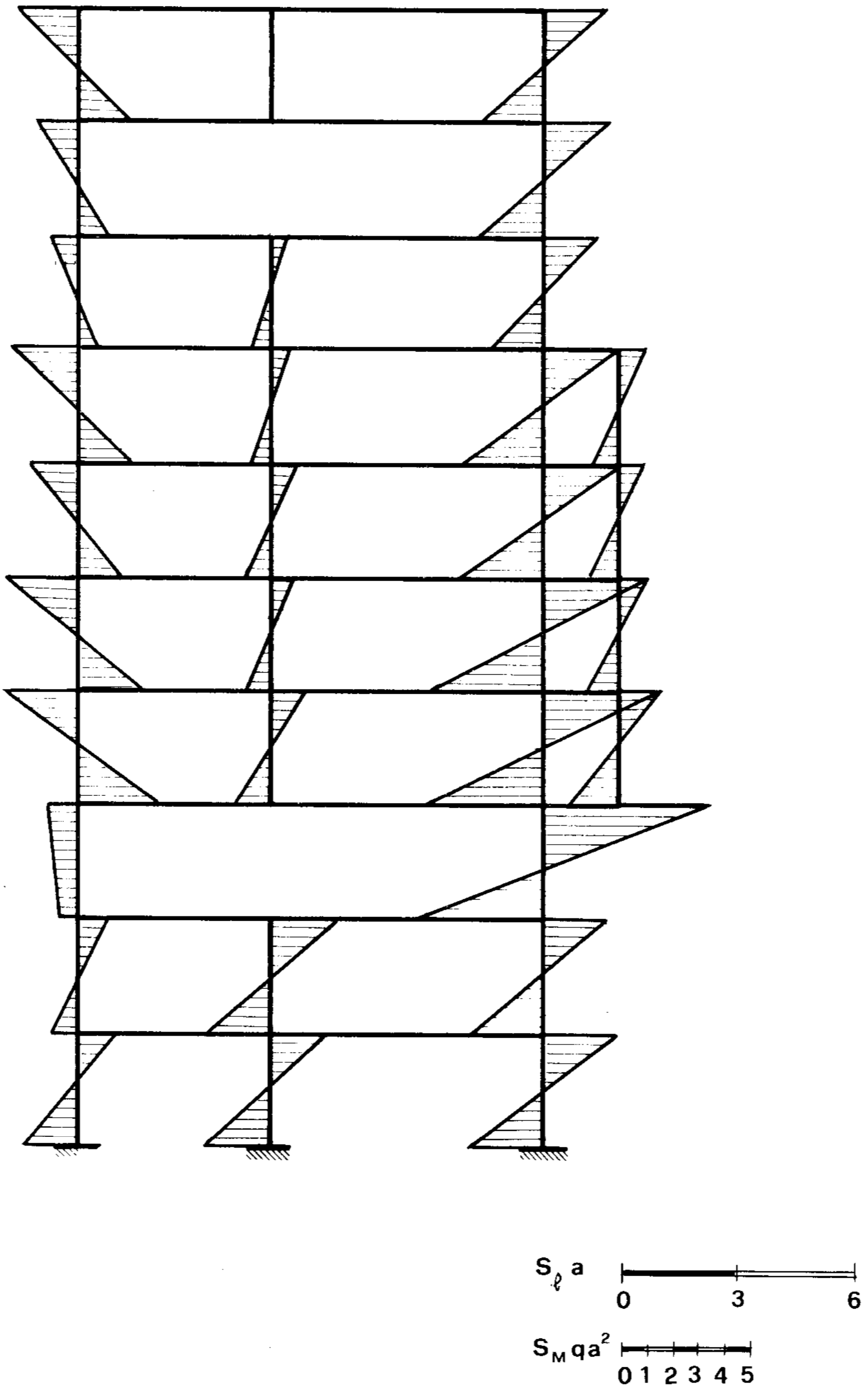
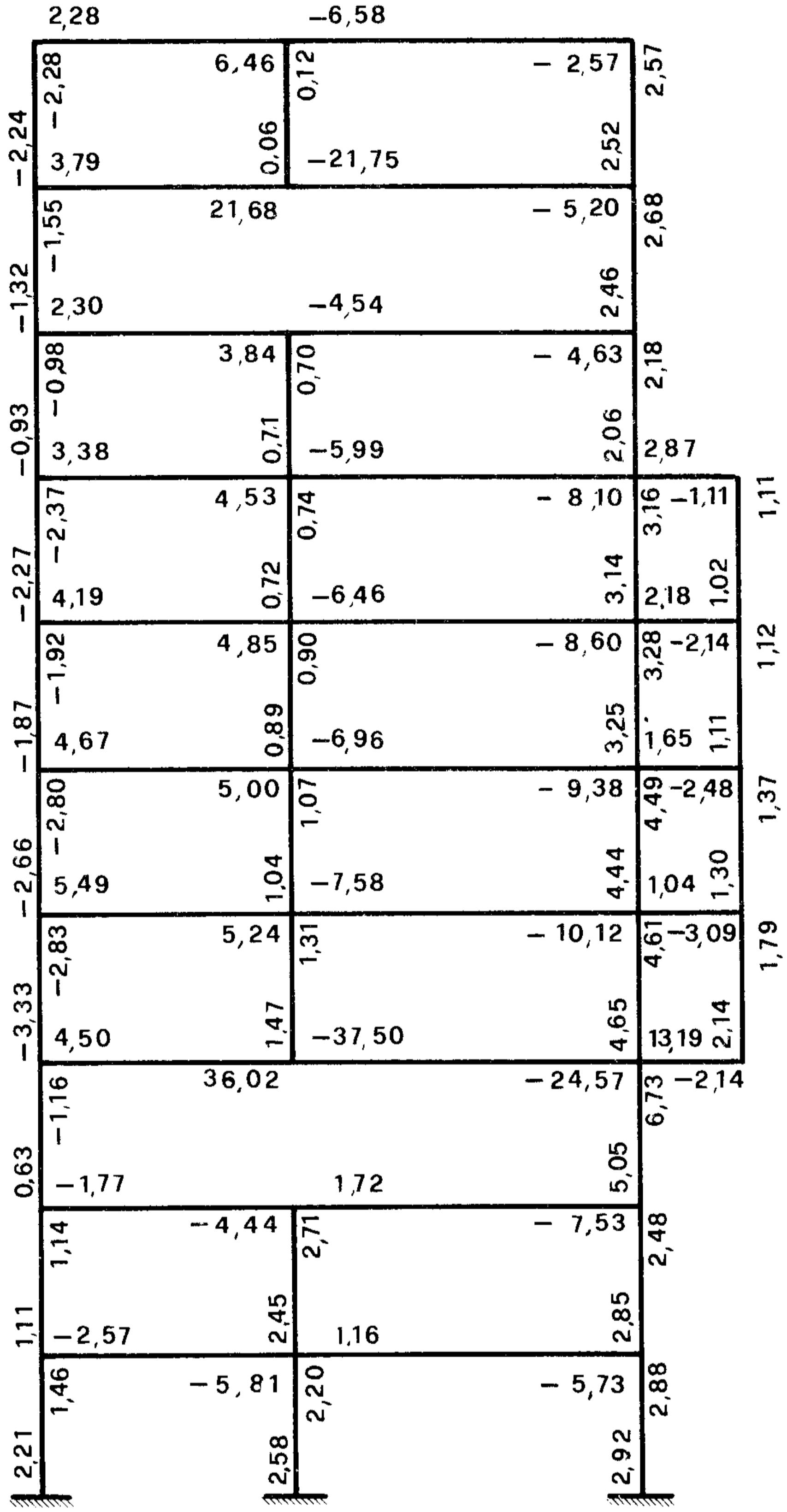


Figura 50.4



$\mathfrak{M} = mqa^2$

Figura 50.5

Tabella 50.1a

n	ρ_n/ρ	l_n/a	$\frac{\rho_n}{2\rho}\varphi_A^2$	$\frac{\rho_n}{2\rho}\varphi_B^2$	$\frac{3}{2}\rho_n\frac{v_A^2}{l_n^2}\frac{a^2}{\rho}$	$\frac{3}{2}\rho_n\frac{v_B^2\,a^2}{l_n^2\rho}$	$\overline{\mathfrak{M}}_A\ \varphi_A$	$\overline{\mathfrak{M}}_B\ \varphi_B$	$R_A\ v_A$	$R_B\ v_B$	$\frac{\rho_n}{2\rho}\varphi_A\varphi_B$	$-\frac{3}{2}\rho_n\frac{\varphi_A v_A a}{l_n\rho}$	$\frac{3}{2}\rho_n\frac{\varphi_A v_B a}{l_n\rho}$	$-\frac{3}{2}\rho_n\frac{\varphi_B v_A a}{l_n\rho}$	$\frac{3}{2}\rho_n\frac{\varphi_B v_B a}{l_n\rho}$	$-3\rho_n\frac{v_A v_B a}{l_n^2\rho}$
1	4	3		$2\varphi_1^2$		$\frac{2}{3}\Delta_1^2$				$-\frac{qa}{2}\Delta_1$					$2\varphi_1\Delta_1$	
2	4	3		$2\varphi_2^2$		$\frac{2}{3}\Delta_1^2$									$2\varphi_2\Delta_1$	
3	4	3		$2\varphi_3^2$		$\frac{2}{3}\Delta_1^2$									$2\varphi_3\Delta_1$	
4	4	3	$2\varphi_1^2$	$2\varphi_4^2$	$\frac{2}{3}\Delta_1^2$	$\frac{2}{3}\Delta_2^2$			$-\frac{qa}{2}\Delta_1$	$-\frac{qa}{2}\Delta_2$	$2\varphi_1\varphi_4$	$-2\varphi_1\Delta_1$	$2\varphi_1\Delta_2$	$-2\varphi_4\Delta_1$	$2\varphi_4\Delta_2$	$-\frac{4}{3}\Delta_1\Delta_2$
5	4	3	$2\varphi_2^2$	$2\varphi_5^2$	$\frac{2}{3}\Delta_1^2$	$\frac{2}{3}\Delta_2^2$					$2\varphi_2\varphi_5$	$-2\varphi_2\Delta_1$	$2\varphi_2\Delta_2$	$-2\varphi_5\Delta_1$	$2\varphi_5\Delta_2$	$-\frac{4}{3}\Delta_1\Delta_2$
6	4	3	$2\varphi_3^2$	$2\varphi_6^2$	$\frac{2}{3}\Delta_1^2$	$\frac{2}{3}\Delta_2^2$					$2\varphi_3\varphi_6$	$-2\varphi_3\Delta_1$	$2\varphi_3\Delta_2$	$-2\varphi_6\Delta_1$	$2\varphi_6\Delta_2$	$-\frac{4}{3}\Delta_1\Delta_2$
7	4	3	$2\varphi_4^2$	$2\varphi_7^2$	$\frac{2}{3}\Delta_2^2$	$\frac{2}{3}\Delta_3^2$			$-\frac{qa}{2}\Delta_2$	$-\frac{qa}{2}\Delta_3$	$2\varphi_4\varphi_7$	$-2\varphi_4\Delta_2$	$2\varphi_4\Delta_3$	$-2\varphi_7\Delta_2$	$2\varphi_7\Delta_3$	$-\frac{4}{3}\Delta_2\Delta_3$
8	4	3	$2\varphi_6^2$	$2\varphi_9^2$	$\frac{2}{3}\Delta_2^2$	$\frac{2}{3}\Delta_3^2$					$2\varphi_6\varphi_9$	$-2\varphi_6\Delta_2$	$2\varphi_6\Delta_3$	$-2\varphi_9\Delta_2$	$2\varphi_9\Delta_3$	$-\frac{4}{3}\Delta_2\Delta_3$
9	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_7^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{11}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_3^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$			$-\frac{qa}{2}\Delta_3$	$-\frac{qa}{2}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_7\varphi_{11}$	$-\frac{3}{2}\varphi_7\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_7\Delta_4$	$-\frac{3}{2}\varphi_{11}\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_{11}\Delta_4$	$-\ \Delta_3\Delta_4$
10	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_8^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{12}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_3^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$					$\frac{3}{2}\varphi_8\varphi_{12}$	$-\frac{3}{2}\varphi_8\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_8\Delta_4$	$-\frac{3}{2}\varphi_{12}\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_{12}\Delta_4$	$-\ \Delta_3\Delta_4$
11	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_9^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{13}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_3^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$					$\frac{3}{2}\varphi_9\varphi_{13}$	$-\frac{3}{2}\varphi_9\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_9\Delta_4$	$-\frac{3}{2}\varphi_{13}\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_{13}\Delta_4$	$-\ \Delta_3\Delta_4$
12	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_{10}^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{14}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_3^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$					$\frac{3}{2}\varphi_{10}\varphi_{14}$	$-\frac{3}{2}\varphi_{10}\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_{10}\Delta_4$	$-\frac{3}{2}\varphi_{14}\Delta_3$	$\frac{3}{2}\varphi_{14}\Delta_4$	$-\ \Delta_3\Delta_4$
13	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_{11}^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{15}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$	$\frac{1}{2}\Delta_5^2$			$-\frac{qa}{2}\Delta_4$	$-\frac{qa}{2}\Delta_5$	$\frac{3}{2}\varphi_{11}\varphi_{15}$	$-\frac{3}{2}\varphi_{11}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{11}\Delta_5$	$-\frac{3}{2}\varphi_{15}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{15}\Delta_5$	$-\ \Delta_4\Delta_5$
14	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_{12}^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{16}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$	$\frac{1}{2}\Delta_5^2$					$\frac{3}{2}\varphi_{12}\varphi_{16}$	$-\frac{3}{2}\varphi_{12}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{12}\Delta_5$	$-\frac{3}{2}\varphi_{16}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{16}\Delta_5$	$-\ \Delta_4\Delta_5$
15	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_{13}^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{17}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$	$\frac{1}{2}\Delta_5^2$					$\frac{3}{2}\varphi_{13}\varphi_{17}$	$-\frac{3}{2}\varphi_{13}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{13}\Delta_5$	$-\frac{3}{2}\varphi_{17}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{17}\Delta_5$	$-\ \Delta_4\Delta_5$
16	3	3	$\frac{3}{2}\varphi_{14}^2$	$\frac{3}{2}\varphi_{18}^2$	$\frac{1}{2}\Delta_4^2$	$\frac{1}{2}\Delta_5^2$					$\frac{3}{2}\varphi_{14}\varphi_{18}$	$-\frac{3}{2}\varphi_{14}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{14}\Delta_5$	$-\frac{3}{2}\varphi_{18}\Delta_4$	$\frac{3}{2}\varphi_{18}\Delta_5$	$-\ \Delta_4\Delta_5$
17	2	3	φ_{15}^2	φ_{19}^2	$\frac{1}{3}\Delta_5^2$	$\frac{1}{3}\Delta_6^2$			$-\frac{qa}{2}\Delta_5$	$-\frac{qa}{2}\Delta_6$	$\varphi_{15}\varphi_{19}$	$-\varphi_{15}\Delta_5$	$\varphi_{15}\Delta_6$	$-\varphi_{19}\Delta_5$	$\varphi_{19}\Delta_6$	$-\frac{2}{3}\Delta_5\Delta_6$
18	2	3	φ_{16}^2	φ_{20}^2	$\frac{1}{3}\Delta_5^2$	$\frac{1}{3}\Delta_6^2$					$\varphi_{16}\varphi_{20}$	$-\varphi_{16}\Delta_5$	$\varphi_{16}\Delta_6$	$-\varphi_{20}\Delta_5$	$\varphi_{20}\Delta_6$	$-\frac{2}{3}\Delta_5\Delta_6$
19	2	3	φ_{17}^2	φ_{21}^2	$\frac{1}{3}\Delta_5^2$	$\frac{1}{3}\Delta_6^2$					$\varphi_{17}\varphi_{21}$	$-\varphi_{17}\Delta_5$	$\varphi_{17}\Delta_6$	$-\varphi_{21}\Delta_5$	$\varphi_{21}\Delta_6$	$-\frac{2}{3}\Delta_5\Delta_6$
20	2	3	φ_{18}^2	φ_{22}^2	$\frac{1}{3}\Delta_5^2$	$\frac{1}{3}\Delta_6^2$					$\varphi_{18}\varphi_{22}$	$-\varphi_{18}\Delta_5$	$\varphi_{18}\Delta_6$	$-\varphi_{22}\Delta_5$	$\varphi_{22}\Delta_6$	$-\frac{2}{3}\Delta_5\Delta_6$

Tabella 50.1b

21	2	3	φ^2_{19}	φ^2_{23}	$\frac{1}{3}\Delta^2_6$	$\frac{1}{3}\Delta^2_7$			$-\frac{qa}{2}\Delta_6$	$-\frac{qa}{2}\Delta_7$	$\varphi_{19}\varphi_{23}$	$-\varphi_{19}\Delta_6$	$\varphi_{19}\Delta_7$	$-\varphi_{23}\Delta_6$	$\varphi_{23}\Delta_7$	$-\frac{2}{3}\Delta_6\Delta_7$
22	2	3	φ^2_{20}	φ^2_{24}	$\frac{1}{3}\Delta^2_6$	$\frac{1}{3}\Delta^2_7$					$\varphi_{20}\varphi_{24}$	$-\varphi_{20}\Delta_6$	$\varphi_{20}\Delta_7$	$-\varphi_{24}\Delta_6$	$\varphi_{24}\Delta_7$	$-\frac{2}{3}\Delta_6\Delta_7$
23	2	3	φ^2_{21}	φ^2_{25}	$\frac{1}{3}\Delta^2_6$	$\frac{1}{3}\Delta^2_7$					$\varphi_{21}\varphi_{25}$	$-\varphi_{21}\Delta_6$	$\varphi_{21}\Delta_7$	$-\varphi_{25}\Delta_6$	$\varphi_{25}\Delta_7$	$-\frac{2}{3}\Delta_6\Delta_7$
24	2	3	φ^2_{22}	φ^2_{26}	$\frac{1}{3}\Delta^2_6$	$\frac{1}{3}\Delta^2_7$					$\varphi_{22}\varphi_{26}$	$-\varphi_{22}\Delta_6$	$\varphi_{22}\Delta_7$	$-\varphi_{26}\Delta_6$	$\varphi_{26}\Delta_7$	$-\frac{2}{3}\Delta_6\Delta_7$
25	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{23}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{27}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_7$	$\frac{1}{6}\Delta^2_8$			$-\frac{qa}{2}\Delta_7$	$-\frac{qa}{2}\Delta_8$	$\frac{1}{2}\varphi_{23}\varphi_{27}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{23}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{23}\Delta_8$	$-\frac{1}{2}\varphi_{27}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{27}\Delta_8$	$-\frac{1}{3}\Delta_7\Delta_8$
26	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{24}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{28}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_7$	$\frac{1}{6}\Delta^2_8$					$\frac{1}{2}\varphi_{24}\varphi_{28}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{24}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{24}\Delta_8$	$-\frac{1}{2}\varphi_{28}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{28}\Delta_8$	$-\frac{1}{3}\Delta_7\Delta_8$
27	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{25}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{29}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_7$	$\frac{1}{6}\Delta^2_8$					$\frac{1}{2}\varphi_{25}\varphi_{29}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{25}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{25}\Delta_8$	$-\frac{1}{2}\varphi_{29}\Delta_7$	$\frac{1}{2}\varphi_{29}\Delta_8$	$-\frac{1}{3}\Delta_7\Delta_8$
28	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{27}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{30}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_8$	$\frac{1}{6}\Delta^2_9$			$-\frac{qa}{2}\Delta_8$	$-\frac{qa}{2}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{27}\varphi_{30}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{27}\Delta_8$	$\frac{1}{2}\varphi_{27}\Delta_9$	$-\frac{1}{2}\varphi_{30}\Delta_8$	$\frac{1}{2}\varphi_{30}\Delta_9$	$-\frac{1}{3}\Delta_8\Delta_9$
29	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{29}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{32}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_8$	$\frac{1}{6}\Delta^2_9$					$\frac{1}{2}\varphi_{29}\varphi_{32}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{29}\Delta_8$	$\frac{1}{2}\varphi_{29}\Delta_9$	$-\frac{1}{2}\varphi_{32}\Delta_8$	$\frac{1}{2}\varphi_{32}\Delta_9$	$-\frac{1}{3}\Delta_8\Delta_9$
30	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{30}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{33}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_9$	$\frac{1}{6}\Delta^2_{10}$			$-\frac{qa}{2}\Delta_9$	$-\frac{qa}{4}\Delta_{10}$	$\frac{1}{2}\varphi_{30}\varphi_{33}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{30}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{30}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{33}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{33}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{3}\Delta_9\Delta_{10}$
31	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{31}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{34}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_9$	$\frac{1}{6}\Delta^2_{10}$					$\frac{1}{2}\varphi_{31}\varphi_{34}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{31}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{31}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{34}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{34}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{3}\Delta_9\Delta_{10}$
32	1	3	$\frac{1}{2}\varphi^2_{32}$	$\frac{1}{2}\varphi^2_{35}$	$\frac{1}{6}\Delta^2_9$	$\frac{1}{6}\Delta^2_{10}$					$\frac{1}{2}\varphi_{32}\varphi_{35}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{32}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{32}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{2}\varphi_{35}\Delta_9$	$\frac{1}{2}\varphi_{35}\Delta_{10}$	$-\frac{1}{3}\Delta_9\Delta_{10}$
33	10	5	$5\varphi^2_1$	$5\varphi^2_2$			$\frac{25}{12}qa^2\varphi_1$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_2$			$5\varphi_1\varphi_2$					
34	15	7	$\frac{15}{2}\varphi^2_2$	$\frac{15}{2}\varphi^2_3$			$\frac{49}{12}qa^2\varphi_2$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_3$			$\frac{15}{2}\varphi_2\varphi_3$					
35	10	5	$5\varphi^2_4$	$5\varphi^2_5$			$\frac{25}{12}qa^2\varphi_4$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_5$			$5\varphi_4\varphi_5$					
36	15	7	$\frac{15}{2}\varphi^2_5$	$\frac{15}{2}\varphi^2_6$			$\frac{49}{12}qa^2\varphi_5$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_6$			$\frac{15}{2}\varphi_5\varphi_6$					
37	60	5	$30\varphi^2_7$	$30\varphi^2_8$		$\frac{18}{5}\Delta^2_{11}$	$\frac{25}{12}qa^2\varphi_7$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_8$		$-\frac{5}{2}qa\Delta_{11}$	$30\varphi_7\varphi_8$		$18\varphi_7\Delta_{11}$		$18\varphi_8\Delta_{11}$	
38	60	7	$30\varphi^2_8$	$30\varphi^2_9$	$\frac{90}{49}\Delta^2_{11}$		$\frac{49}{12}qa^2\varphi_8$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_9$	$-\frac{7}{2}qa\Delta_{11}$	$-\frac{5}{2}qa\Delta_{11}$	$30\varphi_8\varphi_9$	$-\frac{90}{7}\varphi_8\Delta_{11}$		$-\frac{90}{7}\varphi_9\Delta_{11}$		
39	60	2	$30\varphi^2_9$	$30\varphi^2_{10}$		$\frac{45}{2}\Delta^2_{12}$	$\frac{1}{3}qa^2\varphi_9$	$-\frac{1}{3}qa^2\varphi_{10}$		$-qa\Delta_{12}$	$30\varphi_9\varphi_{10}$		$45\varphi_9\Delta_{12}$		$45\varphi_{10}\Delta_{12}$	
40	10	5	$5\varphi^2_{11}$	$5\varphi^2_{12}$	$\frac{3}{5}\Delta_{11}$	$\frac{3}{5}\Delta^2_{11}$	$\frac{25}{12}qa^2\varphi_{11}$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_{12}$		$-\frac{5}{2}qa\Delta_{11}$	$5\varphi_{11}\varphi_{12}$		$3\varphi_{11}\Delta_{11}$		$3\varphi_{12}\Delta_{11}$	
41	15	7	$\frac{15}{2}\varphi^2_{12}$	$\frac{15}{2}\varphi^2_{13}$	$\frac{45}{98}\Delta^2_{11}$		$\frac{49}{12}qa^2\varphi_{12}$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_{13}$	$-\frac{7}{2}qa\Delta_{11}$		$\frac{15}{2}\varphi_{12}\varphi_{13}$	$-\frac{45}{14}\varphi_{12}\Delta_{11}$		$-\frac{45}{14}\varphi_{13}\Delta_{11}$		

Tabella 50.1c

42	10	2	$5\ \varphi_{13}^2$	$5\ \varphi_{14}^2$		$\frac{15}{4}\ \Delta_{12}^2$	$\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{13}$	$-\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{14}$		$-qa\ \Delta_{12}$	$5\ \varphi_{13}\varphi_{14}$		$\frac{15}{2}\varphi_{13}\Delta_{12}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{14}\Delta_{12}$	
43	10	5	$5\ \varphi_{15}^2$	$5\ \varphi_{16}^2$		$\frac{3}{5}\ \Delta_{11}^2$	$\frac{25}{12}qa^2\varphi_{15}$	$-\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{16}$		$-\frac{5}{2}qa\ \Delta_{11}$	$5\ \varphi_{15}\varphi_{16}$		$3\ \varphi_{15}\Delta_{11}$		$3\ \varphi_{16}\Delta_{11}$	
44	15	7	$\frac{15}{2}\ \varphi_{16}^2$	$\frac{15}{2}\ \varphi_{17}^2$	$\frac{45}{98}\ \Delta_{11}^2$		$\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{16}$	$-\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{17}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{11}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{16}\varphi_{17}$	$-\frac{45}{14}\ \varphi_{16}\Delta_{11}$		$-\frac{45}{14}\ \varphi_{17}\Delta_{11}$		
45	10	2	$5\ \varphi_{17}^2$	$5\ \varphi_{18}^2$		$\frac{15}{4}\ \Delta_{12}^2$	$\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{17}$	$-\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{18}$		$-qa\ \Delta_{12}$	$5\ \varphi_{17}\varphi_{18}$		$\frac{15}{2}\varphi_{17}\Delta_{12}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{18}\Delta_{12}$	
46	10	5	$5\ \varphi_{19}^2$	$5\ \varphi_{20}^2$		$\frac{3}{5}\ \Delta_{11}^2$	$\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{19}$	$-\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{20}$		$-\frac{5}{2}\ qa\Delta_{11}$	$5\ \varphi_{19}\varphi_{20}$		$3\ \varphi_{19}\Delta_{11}$		$3\ \varphi_{20}\Delta_{11}$	
47	15	7	$\frac{15}{2}\ \varphi_{20}^2$	$\frac{15}{2}\ \varphi_{21}^2$	$\frac{45}{98}\ \Delta_{11}^2$		$\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{20}$	$-\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{21}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{11}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{20}\varphi_{21}$	$-\frac{45}{14}\ \varphi_{20}\Delta_{11}$		$-\frac{45}{14}\ \varphi_{21}\Delta_{11}$		
48	10	2	$5\ \varphi_{21}^2$	$5\ \varphi_{22}^2$		$\frac{15}{4}\ \Delta_{12}^2$	$\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{21}$	$-\frac{1}{3}qa^2\varphi_{22}$		$-qa\ \Delta_{12}$	$5\ \varphi_{21}\varphi_{22}$		$\frac{15}{2}\varphi_{21}\Delta_{12}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{22}\Delta_{12}$	
49	10	5	$5\ \varphi_{23}^2$	$5\ \varphi_{24}^2$		$\frac{3}{5}\ \Delta_{11}^2$	$\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{23}$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_{24}$		$-\frac{5}{2}\ qa\Delta_{11}$	$5\ \varphi_{23}\varphi_{24}$		$3\ \varphi_{23}\Delta_{11}$		$3\ \varphi_{24}\Delta_{11}$	
50	15	7	$\frac{15}{2}\ \varphi_{24}^2$	$\frac{15}{2}\ \varphi_{25}^2$	$\frac{45}{98}\ \Delta_{11}^2$		$\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{24}$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_{25}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{11}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{24}\varphi_{25}$	$-\frac{45}{14}\ \varphi_{24}\Delta_{11}$		$-\frac{45}{14}\varphi_{25}\Delta_{11}$		
51	10	2	$5\ \varphi_{25}^2$	$5\ \varphi_{26}^2$		$\frac{15}{4}\ \Delta_{12}^2$	$\frac{1}{3}qa^2\varphi_{25}$	$-\frac{1}{3}\ qa^2\varphi_{26}$		$-qa\ \Delta_{12}$	$5\ \varphi_{25}\varphi_{26}$		$\frac{15}{2}\varphi_{25}\Delta_{12}$		$\frac{15}{2}\varphi_{26}\Delta_{12}$	
52	10	5	$5\ \varphi_{27}^2$	$5\ \varphi_{28}^2$		$\frac{3}{5}\ \Delta_{11}^2$	$\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{27}$	$-\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{28}$		$-\frac{5}{2}qa\Delta_{11}$	$5\ \varphi_{27}\varphi_{28}$		$3\ \varphi_{27}\Delta_{11}$		$3\ \varphi_{28}\Delta_{11}$	
53	15	7	$\frac{15}{2}\ \varphi_{28}^2$	$\frac{15}{2}\varphi_{29}^2$	$\frac{45}{98}\ \Delta_{11}^2$		$\frac{49}{12}qa^2\varphi_{28}$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_{29}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{11}$		$\frac{15}{2}\ \varphi_{28}\varphi_{29}$	$-\frac{45}{14}\ \varphi_{28}\Delta_{11}$		$-\frac{45}{14}\varphi_{29}\Delta_{11}$		
54	30	5	$15\ \varphi_{30}^2$	$15\ \varphi_{31}^2$	$\frac{9}{5}\ \Delta_{13}^2$	$\frac{9}{5}\ \Delta_{13}^2$	$\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{30}$	$-\frac{25}{12}qa^2\varphi_{31}$		$-\frac{5}{2}\ qa\Delta_{13}$	$15\ \varphi_{30}\varphi_{31}$		$9\ \varphi_{30}\Delta_{13}$		$9\ \varphi_{31}\Delta_{13}$	
55	30	7	$15\ \varphi_{31}^2$	$15\ \varphi_{32}^2$	$\frac{45}{49}\ \Delta_{13}^2$		$\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{31}$	$-\frac{49}{12}qa^2\varphi_{32}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{13}$		$15\ \varphi_{31}\varphi_{32}$	$-\frac{45}{7}\ \varphi_{31}\Delta_{13}$		$-\frac{45}{7}\varphi_{32}\Delta_{13}$		
56	10	5	$5\ \varphi_{33}^2$	$5\ \varphi_{34}^2$		$\frac{3}{5}\ \Delta_{13}^2$	$\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{33}$	$-\frac{25}{12}\ qa^2\varphi_{34}$		$-\frac{5}{2}\ qa\Delta_{13}$	$5\ \varphi_{33}\varphi_{34}$		$3\ \varphi_{33}\Delta_{13}$		$3\ \varphi_{34}\Delta_{13}$	
57	15	7	$\frac{15}{2}\ \varphi_{34}^2$	$\frac{15}{2}\ \varphi_{35}^2$	$\frac{45}{98}\ \Delta_{13}^2$		$\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{34}$	$-\frac{49}{12}\ qa^2\varphi_{35}$	$-\frac{7}{2}\ qa\ \Delta_{13}$		$\frac{15}{2}\varphi_{34}\varphi_{35}$	$-\frac{45}{14}\ \varphi_{34}\Delta_{13}$		$-\frac{45}{14}\ \varphi_{35}\Delta_{13}$		

Tabella 50.2

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{25}	φ_{26}	φ_{27}	φ_{28}	φ_{29}	φ_{30}	φ_{31}	φ_{32}	φ_{33}	φ_{34}	φ_{35}	$\Delta_{1/4}$	$\Delta_{2/4}$	$\Delta_{3/4}$	$\Delta_{4/4}$	$\Delta_{5/4}$	$\Delta_{6/4}$	$\Delta_{7/4}$	$\Delta_{8/4}$	$\Delta_{9/4}$	$\Delta_{10/4}$	$\Delta_{11/4}$	$\Delta_{12/4}$	$\Delta_{13/4}$		N
18	5		2																																		2													-2,083
5	33	7,5		2																																	2													-2
	7,5	23			2																																2													4,083
2			18	5		2																													-2		2												-2,083
	2		5	29	7,5																														-2	2													-2
		2		7,5	23			2																											-2		2												4,083
			2			67	30			1,5																										-2	0,5	1,5							18				-2,083
						30	123	30			1,5																										-1,5	1,5							5,143				-2
					2		30	127	30			1,5																								-2	0,5	1,5							-12,857	4,5			3,75
								30	63				1,5																								-1,5	1,5								4,5			0,333
						1,5				16	5			1,5																							-1,5		1,5						3				-2,083
							1,5			5	31	7,5			1,5																						-1,5		1,5						-0,214				-2
								1,5			7,5	31	5			1,5																					-1,5		1,5						-3,214	7,5			3,75
									1,5			5	16				1,5																				-1,5		1,5							7,5			0,333
										1,5				15	5			1																				-1,5	0,5	1					3				-2,083
											1,5			5	30	7,5			1																			-1,5	0,5	1					-0,214				-2
												1,5			7,5	30	5			1																		-1,5	0,5	1					-3,214	7,5			3,75
													1,5			5	15				1																	-1,5	0,5	1						7,5			0,333
														1				14	5			1																	-1		1				3				-2,083
															1			5	29	7,5			1																-1		1				-0,214				-2
																1			7,5	29	5			1															-1		1				-3,214	7,5			3,75
																	1			5	14				1														-1		1					7,5			0,333
																		1				13	5			0,5														-1	0,5	0,5			3				-2,083
																			1			5	28	7,5			0,5													-1	0,5	0,5			-0,214				2
																				1			7,5	28	5			0,5												-1	0,5	0,5			-3,214	7,5			3,75
																					1			5	12															-1	1					7,5			0,333
																						0,5				12	5		0,5												-0,5		0,5		3				-2,083
																							0,5			5	28	7,5													-0,5	0,5			-0,214				-2
																								0,5			7,5	17			0,5										-0,5		0,5		-3,214				4,083
																										0,5			32	15		0,5										-0,5		0,5			9		-2,083
																													15	61	15		0,5										-0,5	0,5			2,572		-2
																												0,5		15	32			0,5								-0,5		0,5			-6,429		4,083
																													0,5			11	5										-0,5	0,5			3		-2,083
																														0,5		5	26	7,5									-0,5	0,5			-0,214		-2
																															0,5		7,5	16									-0,5	0,5			-3,214		4,083
			-2	-2	-2																														8	-4													0,5
2	2	2		2		-2		-2																											-4	6,667	-2,667												0,5
			2		2	0,5	-1,5	0,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5																							-2,667	6,667	-4											0,5
						1,5	1,5	1,5	1,5					-1,5	-1,5	-1,5	-1,5																				-4	8	-4										0,5
										1,5	1,5	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	-1	-1	-1	-1																	-4	6,667	-2,667									0,5
														1	1	1	1					-1	-1	-1	-1														-2,667	5,333	-2,667								0,5
																		1	1	1	1	0,5	0,5	0,5	1	-0,5	-0,5	-0,5												-2,667	3,667	-1							0,5
																						0,5	0,5	0,5			0,5		-0,5		-0,5										-1	1,667	-0,667						0,5
																										0,5		0,5		-0,5		-0,5	-0,5	-0,5								-0,667	1,667	-1					0,5
																													0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5									-1	1					0,25
						18	5,143	-12,857		3	-0,214	-3,214		3	-0,214	-3,214		3	-0,214	-3,214		3	-0,214	-3,214		3	-0,214	-3,214																	21,465				36
								45	45			7,5	7,5			7,5	7,5			7,5	7,5			7,5	7,5																					75,000			5
																													9	2,572	-6,429	3	-0,214	-3,214													7,555		12
-0,372	-0,187	-0,018	-0,358	-0,057	-0,201	-1,256	-0,064	0,639	0,150	-0,919	-0,138	0,615	-0,083	-1,013	-0,114	0,652	-0,041	-1,065	-0,104	0,700	-0,031	-1,163	-0,065	0,723	0,061	-1,251	-0,110	0,967	-1,701	-0,232	1,417	-1,792	-0,123	1,501	1,475	3,133	5,241	6,629	7,706	8,930	9,948	11,658	13,209	13,924	4,427	-0,667	6,246		