

**Problema n. 32.**

La stessa trave del problema precedente è soggetta in  $C$  ad una coppia  $\mathfrak{M}$  (fig. 32). Si ha

$$P = - \mathfrak{M} \varphi$$

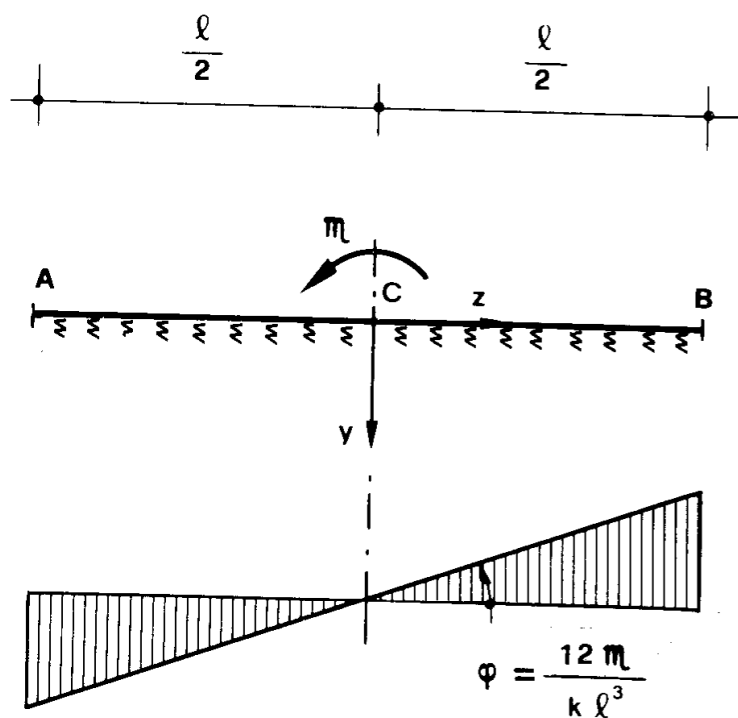


Figura 32.

e quindi (132)

$$E_t = - \mathfrak{M} \varphi + k v_C^2 \frac{l}{2} + \varphi^2 \frac{l^3}{24}$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_t}{\partial v_C} = 0$$

conducono alle equazioni

$$-\mathfrak{m} + \varphi \frac{kl^3}{12} = 0$$

$$v_C kl = 0$$

da cui

$$v_C = 0$$

$$\varphi = \frac{12\mathfrak{m}}{kl^3}$$

La deformata è antisimmetrica, come era naturale attendersi.

### Problema n. 33.

La stessa struttura dei due problemi precedenti è soggetta ad una forza  $F$  diretta secondo  $y$  in  $A$ .

Risulta

$$v_A = v_C + \varphi \frac{l}{2}$$

e quindi (132)

$$E_t = -F \left( v_C + \varphi \frac{l}{2} \right) + k \left( v_C^2 \frac{l}{2} + \varphi^2 \frac{l^3}{24} \right).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_t}{\partial v_C} = 0$$

implicano il sistema

$$-F \frac{l}{2} + k\varphi \frac{l^3}{12} = 0$$

$$-F + kv_C l = 0$$

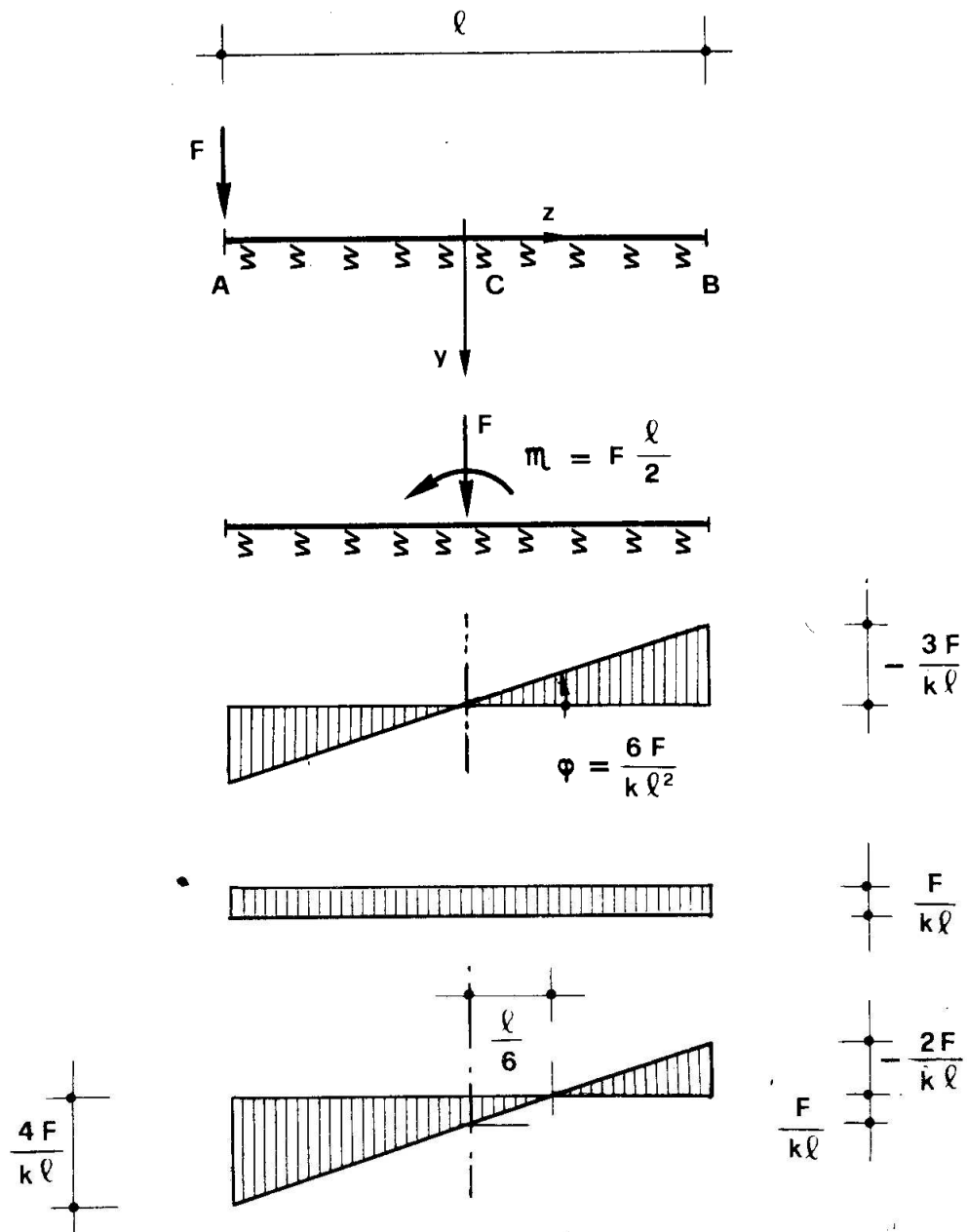


Figura 33

da cui

$$v_C = \frac{F}{kl}$$

$$\varphi = \frac{6F}{kl^2}$$

Quindi è

$$v_A = \frac{4F}{kl}$$

$$v_B = -\frac{2F}{kl}$$

ed anche

$$r_A = -\frac{4F}{l}$$

$$r_B = \frac{2F}{l}$$

Il diagramma  $r(z)$  è lineare, e si annulla in  $z = \frac{l}{6}$ .

Si lascia alla cura del lettore il disegno dei diagrammi  $T(z)$  ed  $M(z)$ , sia per questo esempio che per il precedente.

#### Problema n. 34.

Nella struttura della fig. 34.1 la deformata dipende da tre coordinate lagrangiane, e come tali si scelgono gli angoli di rotazione dei due tratti  $AB$  e  $BC$ , e lo spostamento  $\Delta$  secondo  $y$  del punto  $B$ .

Per ottenere  $L$  si tracciano le deformate relative alle tre coordinate presenti ciascuna da sola, e si calcolano i termini propri di  $L$  e quelli di scambio. Si ha così

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} ka \Delta \cdot \Delta = \frac{3}{4} ka \Delta^2$$

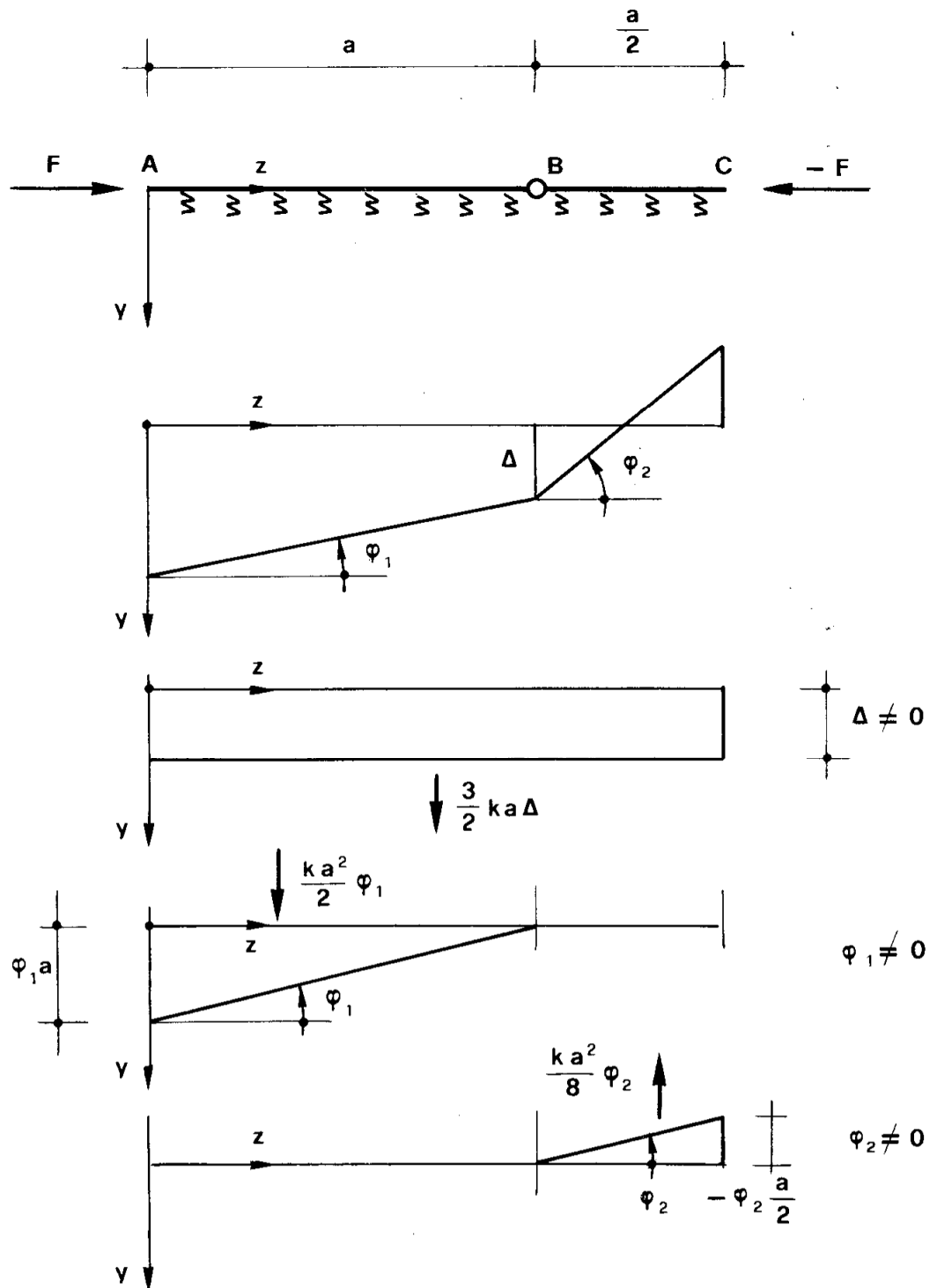


Figura 34.1

$$L_{\varphi_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ka^2}{2} \varphi_1 \cdot \frac{2}{3} \varphi_1 a = \frac{ka^3}{6} \varphi_1^2$$

$$L_{\varphi_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ka^2}{8} \varphi_2 \cdot \frac{2}{3} \varphi_2 \frac{a}{2} = \frac{ka^3}{48} \varphi_2^2$$

$$L_{\Delta, \varphi_1} = \frac{ka^2}{2} \varphi_1 \cdot \Delta = \frac{ka^2}{2} \varphi_1 \Delta$$

$$L_{\Delta, \varphi_2} = - \frac{ka^2}{8} \varphi_2 \cdot \Delta = - \frac{ka^2}{8} \varphi_2 \Delta$$

$$L_{\varphi_1, \varphi_2} = 0$$

e quindi

$$L = \frac{ka}{2} \left( \frac{3}{2} \Delta^2 + \frac{a^2}{3} \varphi_1^2 + \frac{a^2}{24} \varphi_2^2 + a \varphi_1 \Delta - \frac{a}{4} \varphi_2 \Delta \right)$$

E' poi

$$w_C - w_A = - a \frac{\varphi_1^2}{2} - \frac{a}{2} \frac{\varphi_2^2}{2}$$

e quindi

$$P = - F w_A + F w_C = - \frac{Fa}{4} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Le tre condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial E_t}{\partial \Delta} = 0$$

si traducono nel sistema

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \left( \frac{ka^3}{3} - Fa \right) + \Delta \frac{ka^2}{2} &= 0 \\
\varphi_2 \left( \frac{ka^3}{24} - \frac{Fa}{2} \right) - \Delta \frac{ka^2}{8} &= 0 \quad (134) \\
\varphi_1 \frac{ka^2}{2} - \varphi_2 \frac{ka^2}{8} + \Delta \frac{3}{2} ka &= 0 ;
\end{aligned}$$

la condizione perchè esso ammetta soluzioni non banali (e cioè essere nullo il determinante dei coefficienti) dovrebbe in genere essere un'equazione di terzo grado in  $F$ . Nel caso in esame tale equazione si degrada invece in quadratica:

$$F^2 - 0,2290 F ka^2 + 0,006944 k^2 a^4 = 0$$

che porge

$$F = F_1 = 0,036 ka^2$$

$$F = F_2 = 0,193 ka^2$$

Per  $F = F_1$  il (134) si scrive

$$0,297 \varphi_1 + 0,500 \frac{\Delta}{a} = 0$$

$$0,024 \varphi_2 - 0,125 \frac{\Delta}{a} = 0$$

$$0,500 \varphi_1 - 0,125 \varphi_2 + 1,500 \frac{\Delta}{a} = 0$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_1' a}{\Delta'} = - 1,683$$

$$\frac{\varphi_2' a}{\Delta'} = 5,208 .$$

Per  $F = F_2$  il (134) si scrive

$$0,140 \varphi_1 + 0,500 \frac{\Delta}{a} = 0$$

$$- 0,054 \varphi_2 - 0,125 \frac{\Delta}{a} = 0$$

$$0,500 \varphi_1 - 0,125 \varphi_2 + 1,500 \frac{\Delta}{a} = 0$$

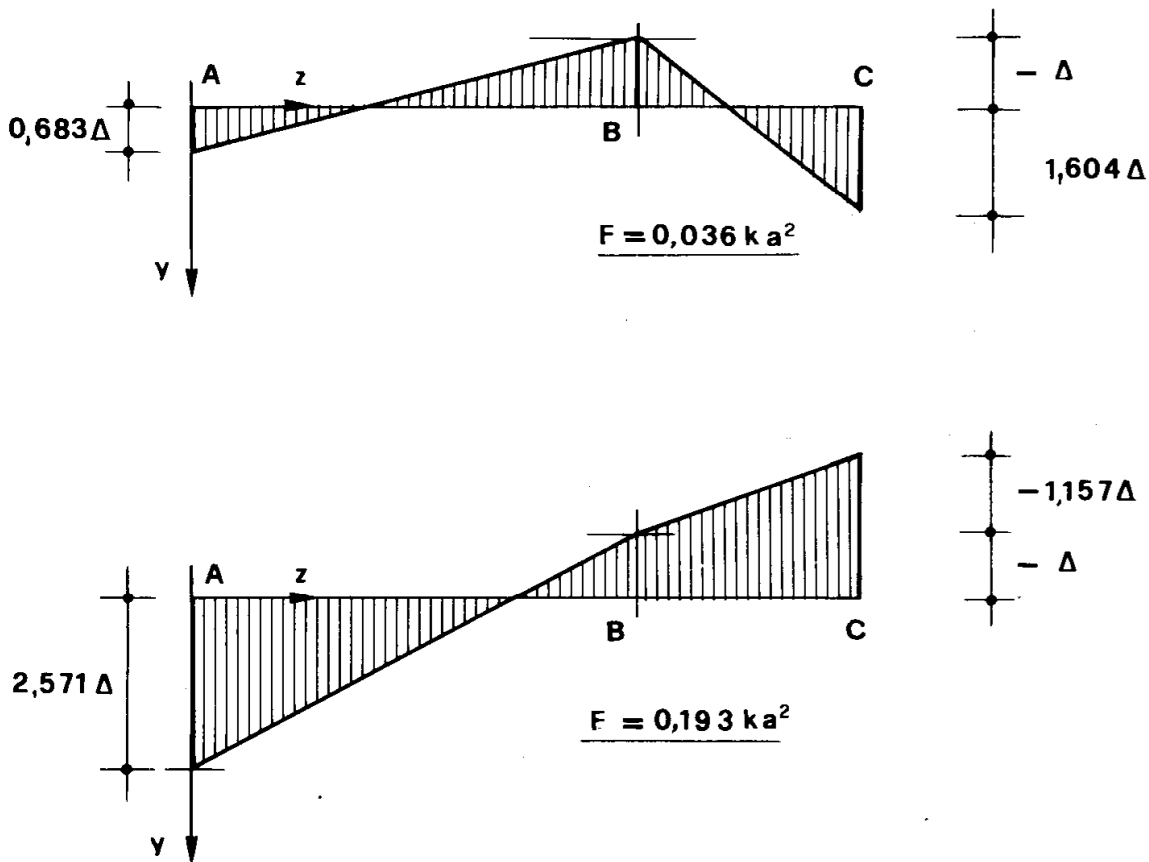


Figura 34.2.



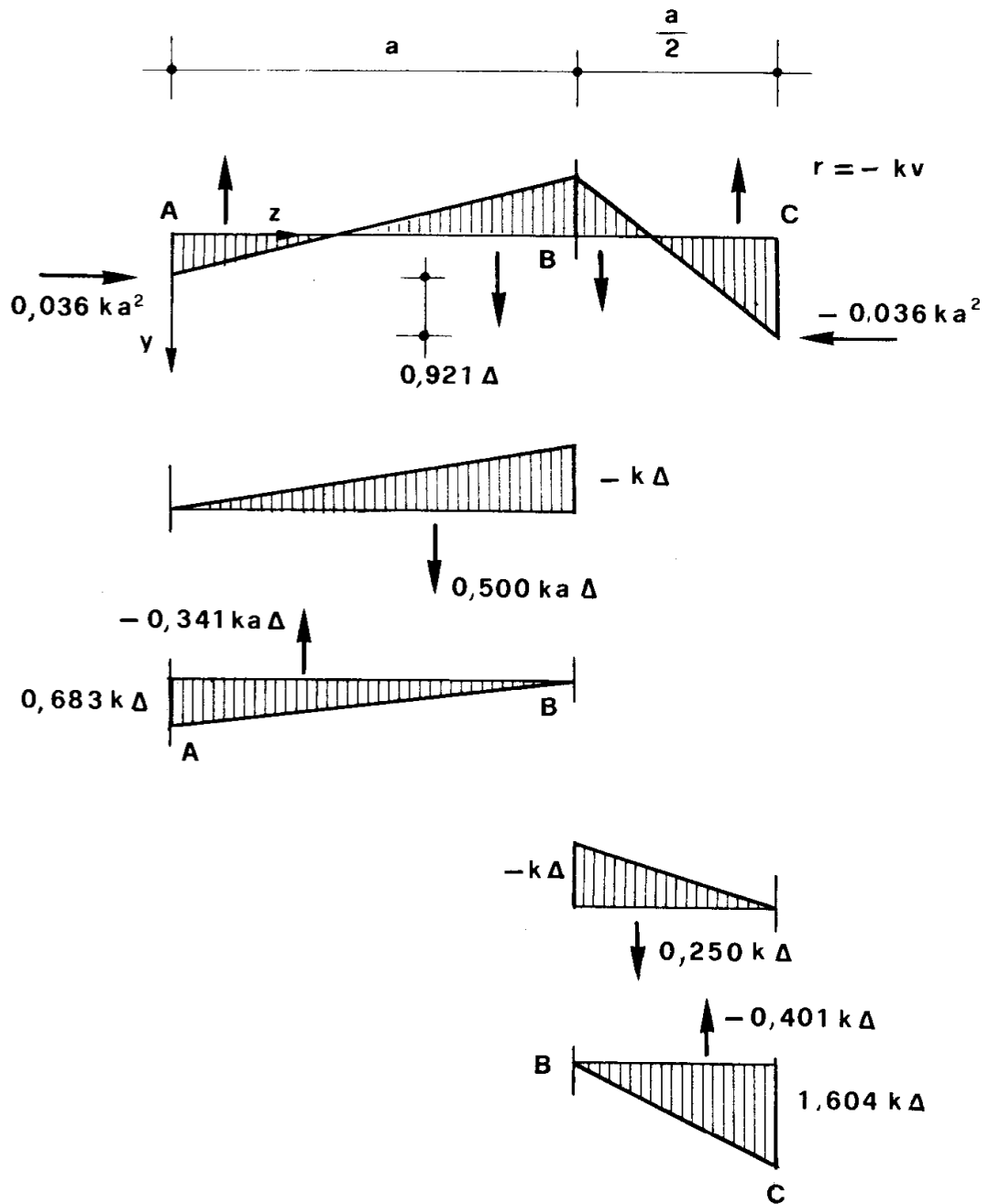


Figura 34.3

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_1'' a}{\Delta''} = - 3,571$$

$$\frac{\varphi_2'' a}{\Delta''} = - 2,315 .$$

Nella fig. 34.2 sono disegnate le due deformate, a meno di un  $\Delta$  negativo.

Si lascia al lettore la verifica dell'equilibrio per  $F = F_1$ , sulla scorta dei dati della fig. 34.3.

### Problema n. 35.

Nella trave della fig. 35.1 la deformata dipende da tre coordinate lagrangiane. Poichè la struttura è simmetrica rispetto alla mezzeria  $C$ , possibili deformate sono quelle simmetriche ( $\varphi_{AB} = -\varphi_{DE}$ ,  $\varphi_{BD} = 0$ ) e quelle antisimmetriche ( $\varphi_{AB} = \varphi_{DE}$ ,  $v_C = 0$ ). Nelle prime giocano solo  $\varphi_{AB} = \varphi_1$ , e  $v_C = \Delta$ ; nelle seconde solo  $\varphi_{AB} = \varphi_1$ ,  $\varphi_{BD} = \varphi_2$ . Se da tali deformate si traggono tre carichi critici, questi sono gli unici, poichè tre sono anche le coordinate lagrangiane.

Operando (fig. 35.2) su deformate simmetriche, si ha (vedi fig. 35.3)

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} ka \Delta \cdot \Delta = \frac{3}{4} ak \Delta^2$$

$$L_{\varphi_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ka^2 \varphi_1 \cdot \frac{2}{3} a \varphi_1 = \frac{1}{6} ka^3 \varphi_1^2 \quad (135)$$

$$L_{\Delta, \varphi_1} = \frac{1}{2} ka^2 \varphi_1 \cdot \Delta$$

e quindi

$$L = \frac{ka}{12} (9 \Delta^2 + 2a^2 \varphi_1^2 + 6a \varphi_1 \Delta) .$$

E' poi

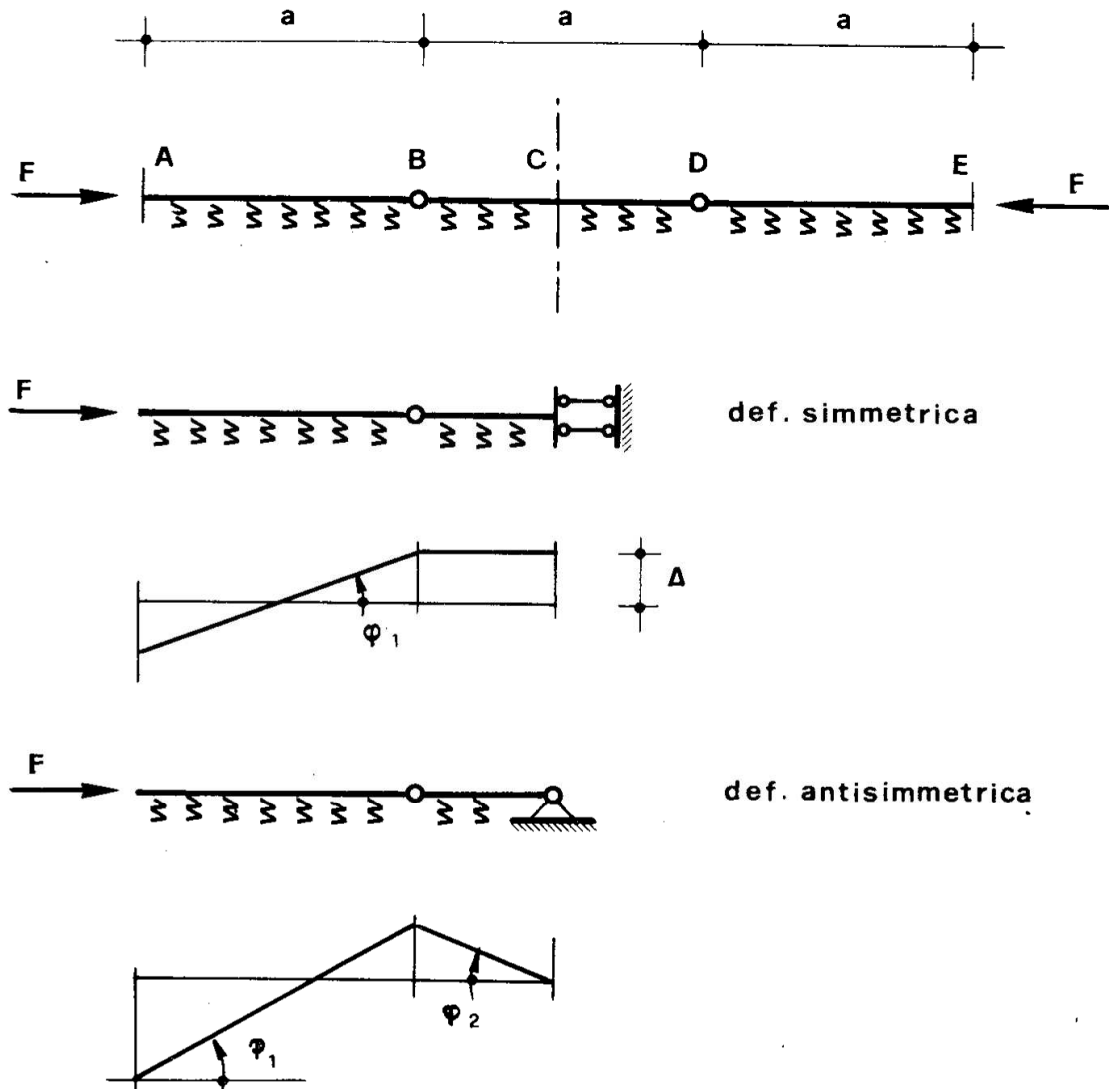


Figura 35.1

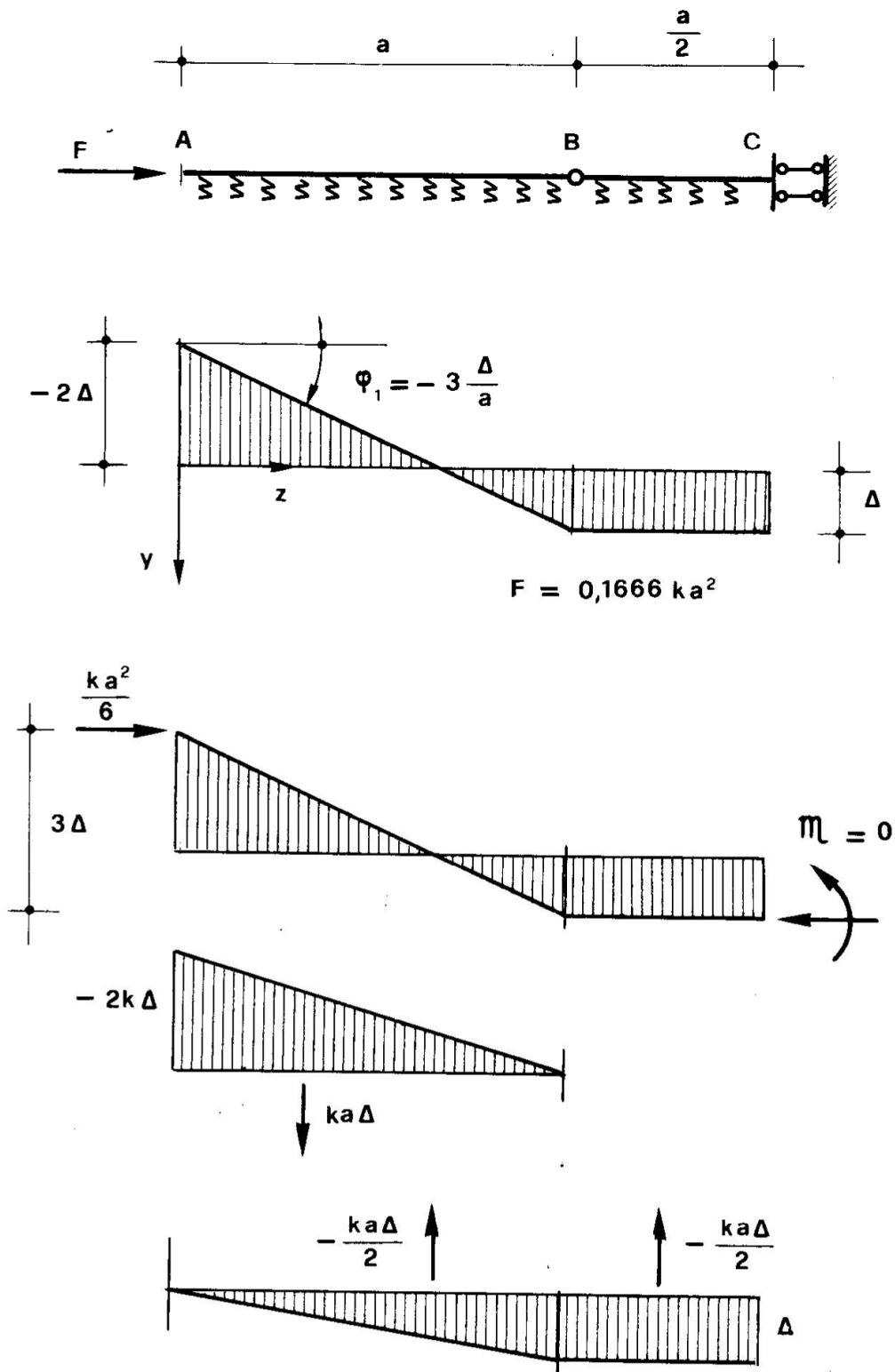


Figura 35.2

$$w_A = a \frac{\varphi_1^2}{2},$$

e quindi

$$E_t = -\frac{Fa}{2} \varphi_1^2 + \frac{ka}{12} (9\Delta^2 + 2a^2 \varphi_1^2 + 6a\varphi_1 \Delta).$$

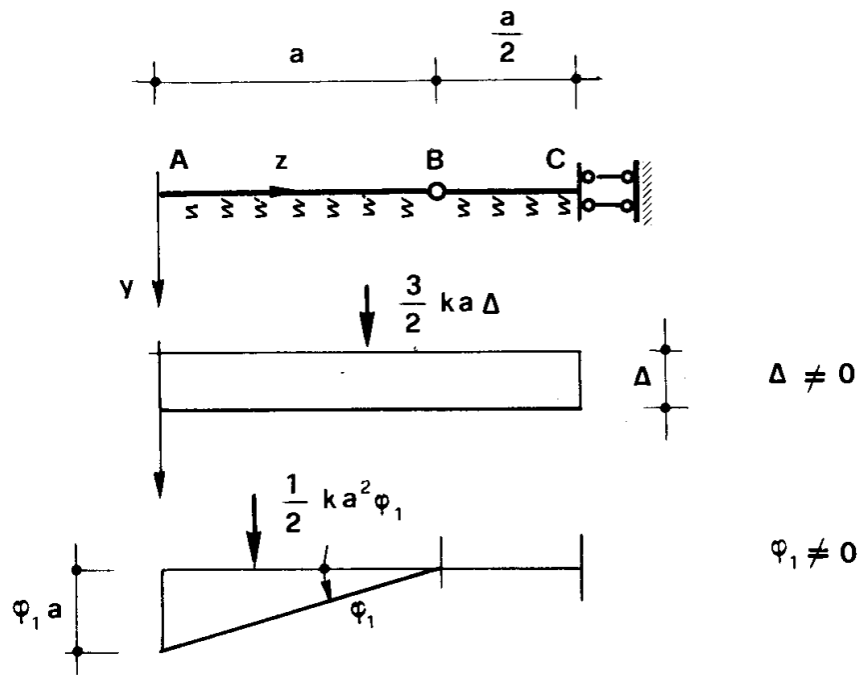


Figura 35.3.

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \Delta} = 0$$

si traducono nel sistema

$$\varphi_1 \left( \frac{ka^3}{3} - Fa \right) + \Delta \frac{ka^2}{2} = 0$$

$$\varphi_1 \frac{ka^2}{2} + \Delta \frac{3ka}{2} = 0.$$

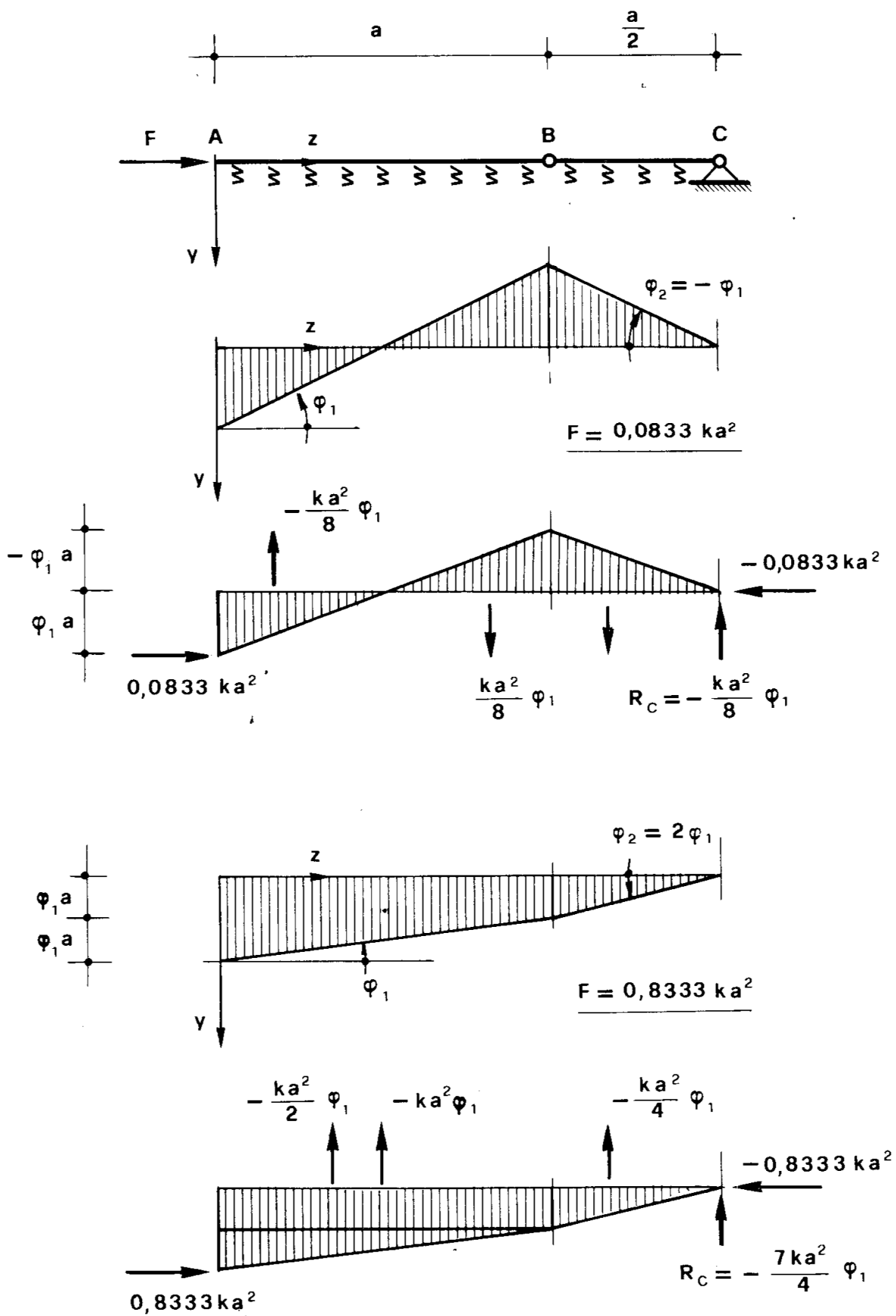


Figura 35.4

La condizione di esistenza di soluzioni non banali è una equazione di primo grado (in genere, dovrebbe essere di secondo grado, perchè ci si trova innanzi ad una struttura con due coordinate lagrangiane)

$$\left(\frac{ka^3}{3} - Fa\right) \cdot \frac{3ka}{2} - \frac{k^2 a^4}{4} = 0$$

da cui

$$F = \frac{ka^2}{6} = 0,16666 ka^2 .$$

Con tale valore di  $F$  il sistema si scrive

$$\frac{ka^3}{6} \varphi_1 + \frac{ka^2}{2} \Delta = 0$$

$$\frac{ka^2}{6} \varphi_1 + \frac{3ka}{2} \Delta = 0$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_1 a}{\Delta} = - 3.$$

Nella fig. 35.3 è disegnata la deformata per un generico  $\Delta$  positivo. Nella stessa figura sono consegnati i dati in base ai quali il lettore potrà verificare l'equilibrio.

Operando su deformate antisimmetriche, si ha (vedi fig. 35.5).

$$L_{\varphi_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} ka^2 \varphi_2 \cdot \frac{2}{3} \frac{a\varphi_2}{2} = \frac{1}{24} ka^3 \varphi_2^2$$

$$L_{\varphi_1, \varphi_2} = \frac{1}{2} ka^2 \varphi_1 \cdot \frac{a}{2} \varphi_2 = \frac{1}{4} ka^3 \varphi_1 \varphi_2 ;$$

per la (135) è

$$L_{\varphi_1} = \frac{1}{6} ka^3 \varphi_1^2 ,$$

e quindi

$$L = \frac{ka^3}{48} (8\varphi_1^2 + 7\varphi_2^2 + 12\varphi_1\varphi_2).$$

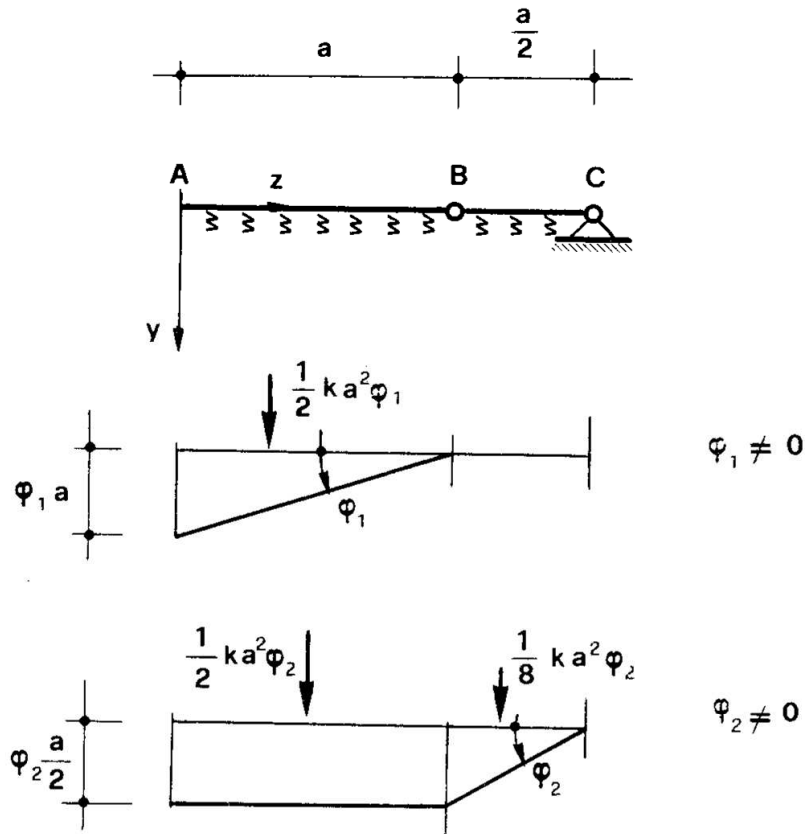


Figura 35.5.

E' poi

$$w_A = a \frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{a}{2} \frac{\varphi_2^2}{2} = \frac{a}{4} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

e quindi

$$E_t = -\frac{Fa}{4} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{ka^3}{48} (8\varphi_1^2 + 7\varphi_2^2 + 12\varphi_1\varphi_2).$$

Le due condizioni



$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

si traducono nel sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{ka^3}{3} - Fa \right) + \varphi_2 \frac{ka^3}{4} &= 0 \\ \varphi_1 \frac{ka^3}{4} + \varphi_2 \left( \frac{7}{24} ka^3 - \frac{Fa}{2} \right) &= 0 . \end{aligned} \tag{136}$$

La condizione di esistenza di soluzioni non banali (determinante dei coefficienti nullo) si risolve nell'equazione di secondo grado in  $F$

$$F^2 - 0,9166 Fka^2 + 0,0694 k^2 a^4 = 0$$

da cui

$$F = F_1 = 0,0833 ka^2$$

$$F = F_2 = 0,8333 ka^2$$

Per  $F = F_1$  il (136) si scrive

$$0,250 \varphi_1 + 0,250 \varphi_2 = 0$$

$$0,250 \varphi_1 + 0,250 \varphi_2 = 0$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'} = -1 ;$$

per  $F = F_2$  il (136) si scrive

$$-0,500 \varphi_1 + 0,250 \varphi_2 = 0$$

$$0,250 \varphi_1 - 0,125 \varphi_2 = 0$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_2''}{\varphi_1''} = 0,5 .$$

Nella fig. 35.4 sono disegnate le deformate per  $F = F_1$  e per  $F = F_2$ . Si lascia al lettore la cura di verificarne l'equilibrio, sulla scorta dei dati della stessa fig. 35.4.

Problema n. 36.

La trave della fig. 36 presenta

$$L = k \frac{(\Delta \varphi_C)^2}{2} = 2k\varphi^2 .$$

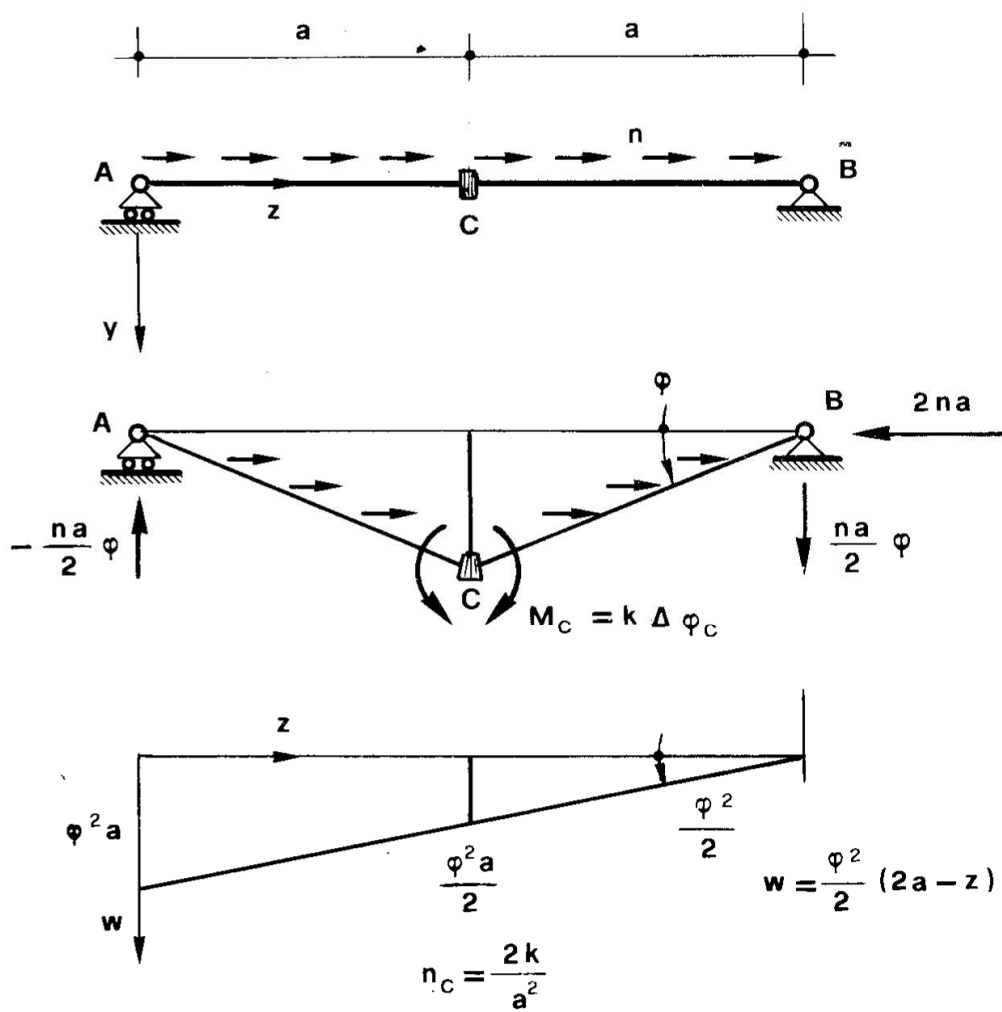


Figura 36.

Essa è soggetta alle forze  $n$  parallele all'asse, ed uniformemente distribuite lungo questo; dunque il generico tratto elementare lungo  $dz$  è soggetto alla forza concentrata  $ndz$  agente secondo  $z$ . Ne consegue che può scriversi

$$P = - \int_0^{2a} n w dz .$$

Poichè è

$$w(z) = \frac{\varphi^2}{2} (2a - z)$$

si può scrivere

$$P = - \frac{n\varphi^2}{2} \int_0^{2a} (2a - z) dz = - n\varphi^2 a^2 .$$

E' perciò

$$E_t = - n\varphi^2 a^2 + 2k\varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = \varphi (-2na^2 + 4k) ;$$

si trae che è  $\varphi \neq 0$  per

$$n = n_C = \frac{2k}{a^2} .$$

Si può giungere alla stessa espressione con il metodo geometrico. Per l'equilibrio alla rotazione intorno a  $B$  si ha infatti

$$2R_A a + 2 \cdot na \cdot \frac{a\varphi}{2} = 0$$

da cui

$$R_A = - \frac{na\varphi}{2} .$$

Per l'equilibrio della parte  $AC$  alla rotazione intorno a  $C$  si ha poi

$$-\frac{na\varphi}{2} \cdot a - na \cdot \frac{a\varphi}{2} + 2k\varphi = 0$$

$$na^2 \varphi = 2k\varphi$$

$$n = \frac{2k}{a^2} .$$

### Problema n. 37.

Si prende in esame la trave  $AB$  ad asse rettilineo della fig. 37.1 di luce  $l$ , appoggiata agli estremi; il momento di inerzia è variabile con legge lineare, da  $I$  in  $A$  a  $2I$  in  $B$ .

$$I(z) = I \left( 1 + \frac{z}{l} \right). \quad (137)$$

Un carico  $q$  è uniformemente distribuito su tutta la luce. Si approssima la deformata  $v(z)$  con uno sviluppo in serie di Fourier limitato ai primi tre termini:

$$v = v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + v_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} + v_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} . \quad (138)$$

Ciascuno dei termini della (138) rispetta le condizioni di congruenza

$$z = 0 \quad v = 0$$

$$z = l \quad v = 0 .$$

Le altre due condizioni (di equilibrio)

$$z = 0 \quad v'' = 0$$

$$z = l \quad v'' = 0$$

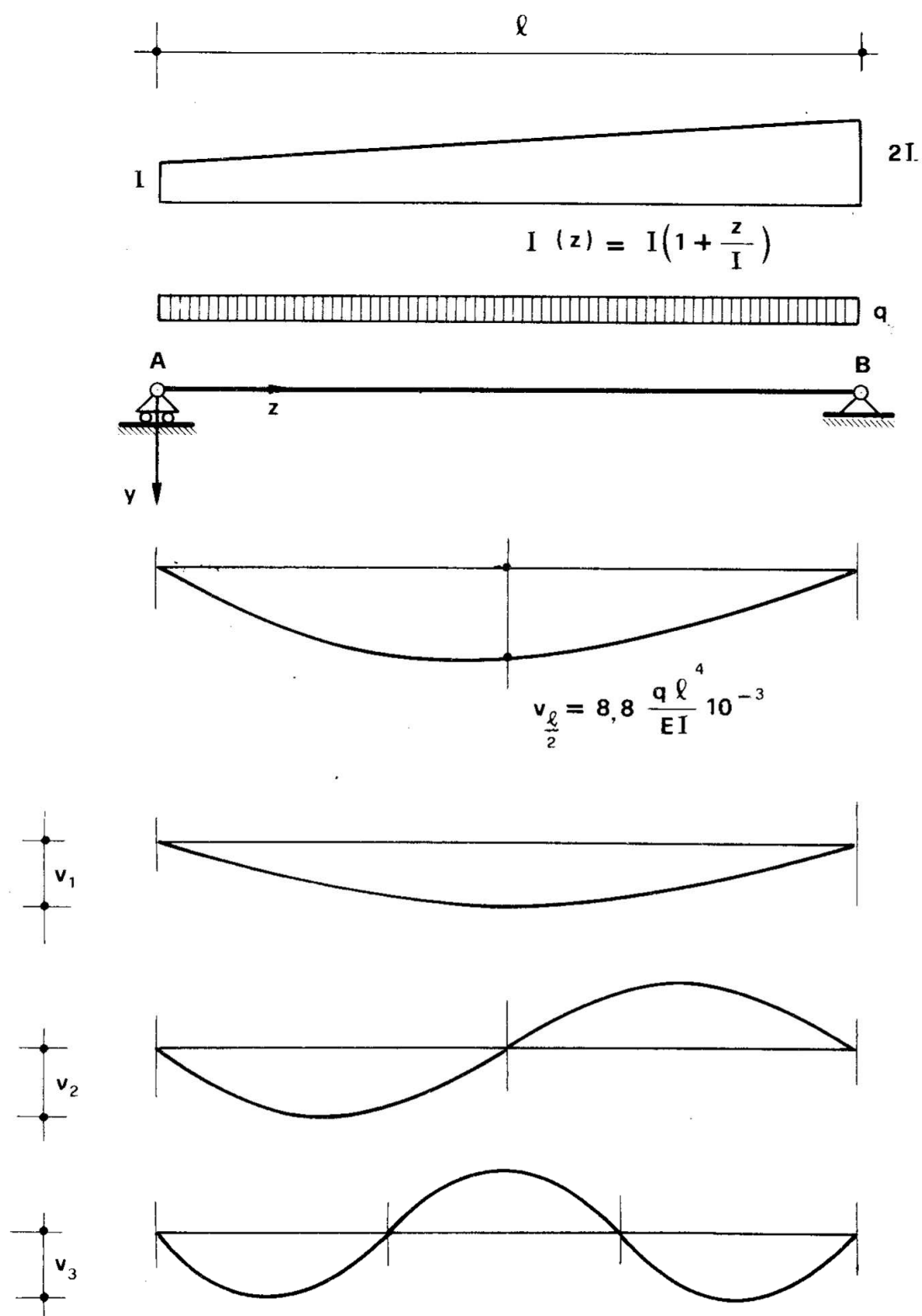


Figura 37.1

sono pur esse rispettate, ma potrebbero non esserlo; ed infatti il principio di stazionarietà dell'E.P.T. assicura di detta stazionarietà con riferimento a tutte le possibili deformate congruenti. Le soluzioni, se esatte, saranno certamente equilibrate.

La deformata  $v(z)$  dipende dai tre parametri  $v_1 v_2 v_3$ , che assumono quindi il ruolo di parametri lagrangiani.

L'energia di deformazione connessa con la (138) è

$$L = \frac{E}{2} \int_0^l I(z) v''^2 dz = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(1 + \frac{z}{l}\right) v''^2 dz ; \quad (139)$$

con uno e due apici si indicano le derivate prima e seconda rispetto a  $z$ .  
Si può scrivere

$$v' = \frac{\pi}{l} v_1 \cos \frac{\pi z}{l} + \frac{2\pi}{l} v_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + \frac{3\pi}{l} v_3 \cos \frac{3\pi z}{l}$$

$$v'' = -\frac{\pi^2}{l^2} v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} - \frac{4\pi^2}{l^2} v_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} - \frac{9\pi^2}{l^2} v_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l}$$

e cioè ancora

$$v' = \frac{\pi}{l} \left( v_1 \cos \frac{\pi z}{l} + 2 v_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + 3 v_3 \cos \frac{3\pi z}{l} \right) \quad (140)$$

$$v'' = -\frac{\pi^2}{l^2} \left( v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + 4 v_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} + 9 v_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} \right).$$

E' quindi

$$L = \frac{EI}{2} \frac{\pi^4}{l^4} \left[ v_1^2 \left( \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l} dz \right) + \right. \\ \left. + 16 v_2^2 \left( \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi z}{l} dz \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 81 v_3^2 \left( \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi z}{l} dz \right) + \\
& + 8 v_1 v_2 \left( \int_0^l \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} dz \right) + \\
& + 18 v_1 v_3 \left( \int_0^l \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz \right) + \\
& + 72 v_2 v_3 \left( \int_0^l \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz + \frac{1}{l} \int_0^l z \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz \right) \Big]
\end{aligned}$$

Si calcolano di seguito gli integrali che occorrono per il problema in esame, e che si incontrano spesso in problemi analoghi:

$$\int \operatorname{sen}^2 \alpha z dz = \int \frac{1 - \cos 2\alpha z}{2} dz = \frac{z}{2} - \frac{1}{4\alpha} \operatorname{sen} 2\alpha z ;$$

$$\begin{aligned}
\int z \operatorname{sen}^2 \alpha z dz &= \left( \frac{z}{2} - \frac{1}{4\alpha} \operatorname{sen} 2\alpha z \right) \int - \frac{z}{2} - \frac{1}{4\alpha} \operatorname{sen} 2\alpha z dz = \\
&= \frac{z^2}{2} - \frac{z}{4\alpha} \operatorname{sen} 2\alpha z - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{8\alpha^2} \cos 2\alpha z = \\
&= \frac{z^2}{4} - \frac{z}{4\alpha} \operatorname{sen} 2\alpha z - \frac{1}{8\alpha^2} \cos 2\alpha z ;
\end{aligned}$$

più in generale

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} \alpha z \operatorname{sen} \beta z dz &= \frac{1}{2} \left( \int \cos (\alpha - \beta) z dz - \int \cos (\alpha + \beta) z dz \right) = \\
&= \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) z}{2 (\alpha - \beta)} - \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) z}{2 (\alpha + \beta)} ; \tag{141}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int z \operatorname{sen} \alpha z \operatorname{sen} \beta z \, dz &= \left( \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) z}{2 (\alpha - \beta)} - \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) z}{2 (\alpha + \beta)} \right) - \\
&- \frac{1}{2 (\alpha - \beta)} \int \operatorname{sen} (\alpha - \beta) z \, dz + \frac{1}{2 (\alpha + \beta)} \int \operatorname{sen} (\alpha + \beta) z \, dz = \\
&= 2 \left( \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) z}{2 (\alpha - \beta)} - \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) z}{2 (\alpha + \beta)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos (\alpha - \beta) z}{2 (\alpha - \beta)^2} - \frac{\cos (\alpha + \beta) z}{2 (\alpha + \beta)^2} \right).
\end{aligned}$$

Gli integrali sono forniti da

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l} \, dz = \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi z}{l} \, dz = \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi z}{l} \, dz = \frac{l}{2} ;$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \, dz &= \int_0^l \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} \, dz = \\
&= \int_0^l \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} \, dz = 0 ;
\end{aligned}$$

$$\int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l} \, dz = \int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi z}{l} \, dz = \int_0^l z \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi z}{l} \, dz = \frac{l^2}{4} ;$$

$$\int_0^l z \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \, dz = -\frac{8}{9} \frac{l^2}{\pi^2} ;$$



$$\int_0^l z \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz = 0$$

$$\int_0^l z \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz = -\frac{24}{25} \frac{l^2}{\pi^2}.$$

E' quindi

$$\begin{aligned} L = & \frac{EI}{2} \frac{\pi^4}{l^4} \left[ v_1^2 \left( \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4l} \right) + 16 v_2^2 \left( \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4l} \right) + \right. \\ & + 81 v_3^2 \left( \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4l} \right) - 8 v_1 v_2 \cdot \frac{8}{9l} \frac{l^2}{\pi^2} - \\ & \left. - 72 v_2 v_3 \cdot \frac{24}{25 l} \frac{l^2}{\pi^2} \right] \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} L = & \frac{EI}{l^3} (36,528 v_1^2 + 584,45 v_2^2 + 2958,8 v_3^2 - \\ & - 35,092 v_1 v_2 - 341,09 v_2 v_3). \end{aligned} \quad (142)$$

Anche il carico  $q$  si approssima con uno sviluppo in serie di Fourier limitato ai primi tre termini:

$$q = q_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + q_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} + q_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l}$$

dove è

$$q_1 = \frac{2}{l} \int_0^l q \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} dz = \frac{4q}{\pi}$$

$$q_2 = \frac{2}{l} \int_0^l q \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} dz = 0$$

$$q_3 = \frac{2}{l} \int_0^l q \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} dz = \frac{4q}{3\pi}$$

L'energia potenziale  $P$  è fornita da

$$P = - \int_0^l q v dz = - \int_0^l \left( \sum_1^3 v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right) \left( \sum_1^3 q_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right) dz .$$

Per la (141) vale la relazione, di frequente incontro,

$$\int_0^l \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n . \end{cases} \quad (143)$$

Quindi è

$$\begin{aligned} P &= - \frac{l}{2} (q_1 v_1 + q_3 v_3) = - \frac{2ql}{\pi} \left( v_1 + \frac{v_3}{3} \right) = \\ &= - ql (0,63662 v_1 + 0,21221 v_3) . \end{aligned} \quad (144)$$

L'espressione di  $E_t$  è quindi

$$\begin{aligned} E_t &= P + L = - ql (0,6366 v_1 + 0,2122 v_3) + \\ &+ \frac{EI}{l} (36,53 v_1^2 + 584,4 v_2^2 + 2959 v_3^2 - \\ &- 35,09 v_1 v_2 - 341,1 v_2 v_3) ; \end{aligned}$$

le condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = \frac{\partial E_t}{\partial v_2} = \frac{\partial E_t}{\partial v_3} = 0$$

si risolvono nel sistema

$$\begin{aligned} 73,06 v_1 - 35,09 v_2 &= 0,6366 \frac{ql^4}{EI} \\ - 35,09 v_1 + 1169 v_2 - 341,1 v_3 &= 0 \\ - 341,1 v_2 + 5918 v_3 &= 0,2122 \frac{ql^4}{EI}, \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} v_1 &= 8,848 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} \\ v_2 &= 2,808 \cdot 10^{-4} \frac{ql^4}{EI} \\ v_3 &= 5,204 \cdot 10^{-5} \frac{ql^4}{EI} \end{aligned} \quad (145)$$

Utilizzando due soli termini dello sviluppo in serie di  $v(z)$  e  $q(z)$  si ha il sistema

$$\begin{aligned} 73,06 v_1 - 35,09 v_2 &= 0,6366 \frac{ql^4}{EI} \\ - 35,09 v_1 + 1169 v_2 &= 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$v_1 = 8,840 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} \quad (146)$$

$$v_2 = 2,654 \cdot 10^{-4} \frac{ql^4}{EI} .$$

Utilizzando una sola onda, si ha

$$73,06 v_1 = 0,6366 \frac{ql^4}{EI}$$

da cui

$$v_1 = 8,714 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} . \quad (147)$$

Se dalla deformata si vuol passare ai momenti flettenti (nel nostro caso, trattandosi di struttura isostatica, il calcolo ha un aspetto esclusivamente didattico) si può usare la formula

$$M = - EI (z) \cdot v''$$

da cui

$$M = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(1 + \frac{z}{l}\right) \left(v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + 4v_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l} + 9v_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l}\right).$$

In mezzeria è

$$M_{l/2} = \frac{3\pi^2 EI}{2l^2} (v_1 + 9v_3) = \frac{ql^2}{8,060} . \quad (148)$$

Operando su due onde si ha

$$M_{l/2} = \frac{3\pi^2 EI}{2l^2} v_1 = \frac{ql^2}{7,641} . \quad (149)$$

Operando su una sola onda è

$$M_{l/2} = \frac{3\pi^2 EI}{2l^2} v_1 = \frac{ql^2}{7,752} \quad (150)$$

Nella (149) si è introdotto il valore di  $v_1$  ottenuto operando su due onde, nella (150) il valore di  $v_1$  ottenuto operando su una sola onda.

Per determinare l'errore commesso operando su deformate di forma approssimata, si calcoli  $v_{l/2}$  con il metodo di Mohr (fig. 37.2). Si ha

$$M = \frac{q}{2} z (l - z)$$

$$q^* = \frac{M}{EI(z)} = \frac{ql}{2EI} \frac{l-z}{l+z} z.$$

Il procedimento di Lagrange conduce a scrivere

$$\int_0^{l/2} q^* \varphi z dz + \int_{l/2}^l q^* \varphi (l-z) dz - 2\varphi M_{l/2}^* = 0$$

da cui

$$M_{l/2}^* = \frac{ql}{4EI} \int_0^{l/2} z^2 \frac{l-z}{l+z} dz + \int_{l/2}^l (l-z) \frac{l-z}{l+z} z dz.$$

Poichè si ha

$$\int_0^{l/2} \frac{z^2 (l-z)}{l+z} dz = \left( -\frac{19}{24} + 2 \ln \frac{3}{2} \right) l^3 = 0,0193 l^3$$

$$\int_{l/2}^l \frac{z (l-z)^2}{l+z} dz = \left( \frac{7}{6} - 4 \ln \frac{4}{3} \right) l^3 = 0,0159 l^3$$

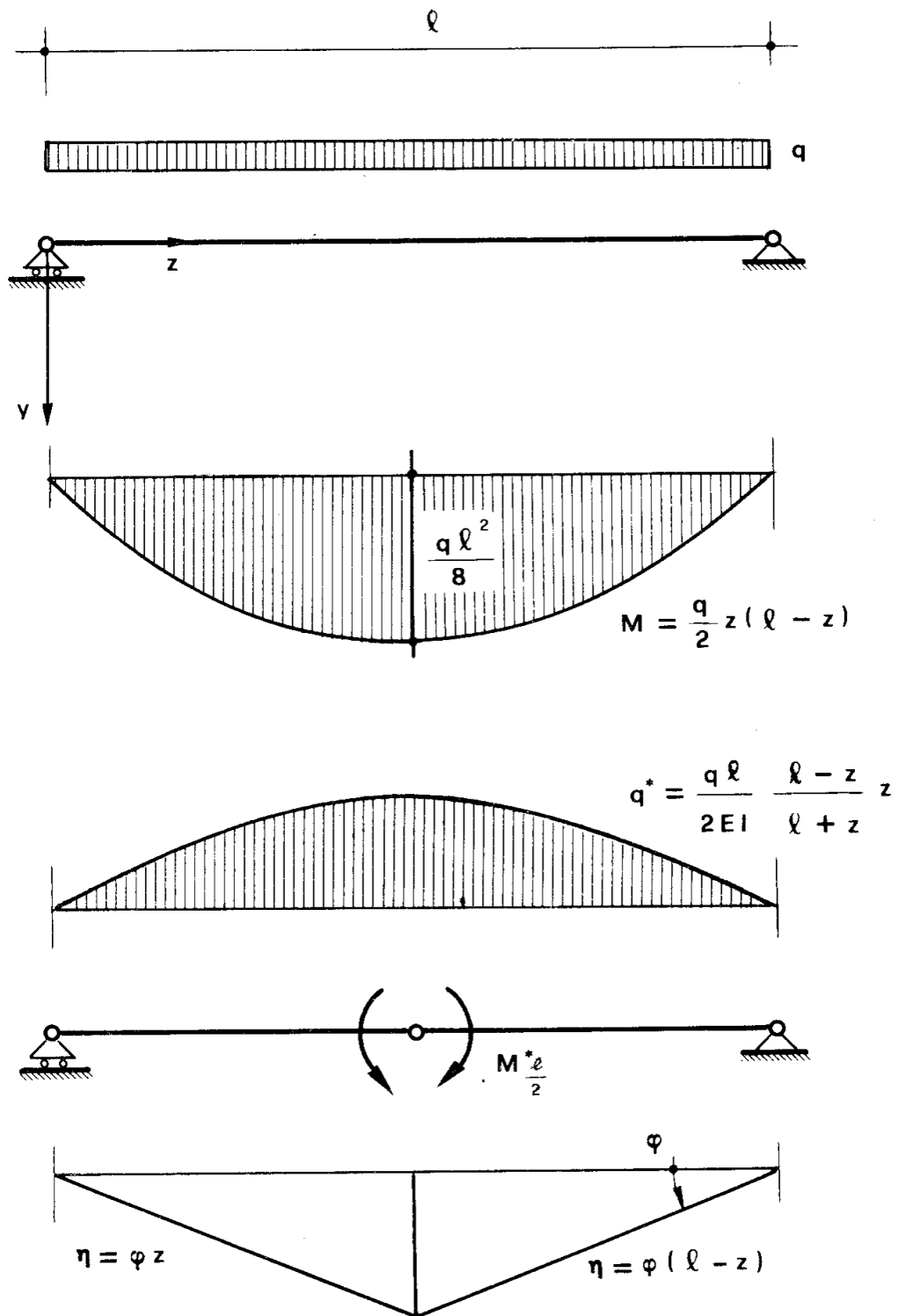


Figura 37.2

è pure

$$v_{l/2} = M_{l/2}^* = \frac{ql}{4EI} \cdot 0,0352 l^3$$

e quindi

$$v_{l/2} = 8,800 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}$$

Nella tabella 37.1 sono riportati i valori di  $v_{l/2}$  ed  $M_{l/2}$  ottenuti operando su una, due o tre onde; le  $v$  sono a meno di  $\frac{ql^4}{EI} \cdot 10^{-3}$ , gli  $M$  a meno di  $ql^2$ .

$n$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_{l/2}$	$M_{l/2}$
1	8,714	—	—	8,714	0,1290
2	8,840	0,265	—	8,840	0,1309
3	8,848	0,281	0,052	8,796	0,1241
$\infty$				8,800	0,1250

Tabella 37.1

Nella tabella 37.2 sono consegnati gli errori, in percento dei risultati esatti ( $n = \infty$ ):

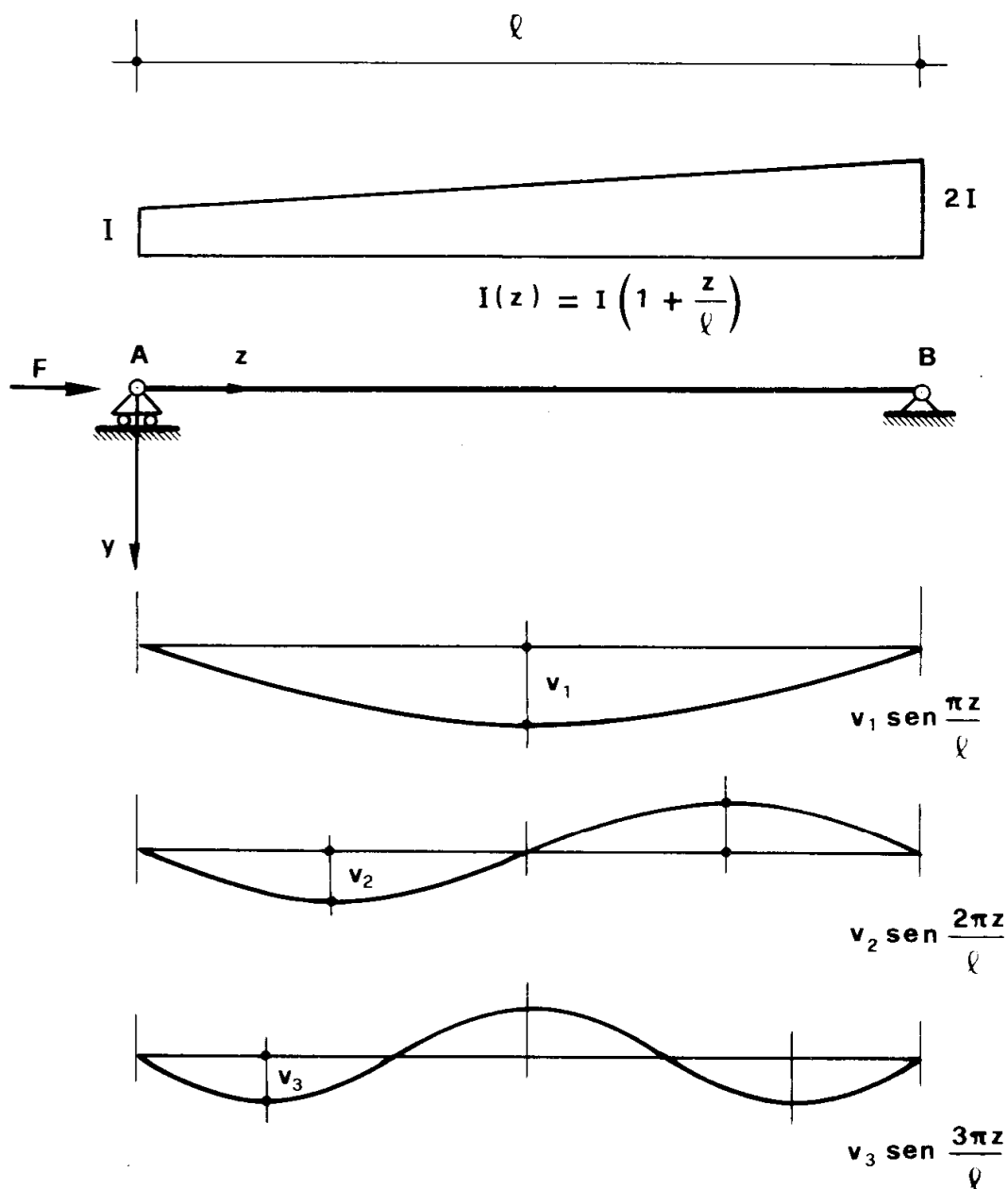
$n$	$v_{l/2}$	$M_{l/2}$
1	— 0,98	3,20
2	0,45	4,70
3	— 0,04	— 0,75

Tabella 37.2

Si osserva subito che l'approssimazione è molto migliore negli spostamenti che nelle caratteristiche; è questo un fatto di carattere generale, che si spiega considerando come nelle derivazioni successive di  $v(z)$  i successivi termini dello sviluppo di Fourier risultano esaltati, e quindi giocano un ruolo più importante.

**Problema n. 38.**

La stessa trave dell'esercizio precedente è soggetta in  $A$  (fig. 38.1)



ad una forza  $F$  diretta secondo l'asse. Si ha



$$w_A = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz ; \quad (151)$$

adottando l'approssimazione (138) è (vedi le (140))

$$w_A = \frac{\pi^2}{2l^2} \int_0^l \left( \sum_1^3 n v_n \cos \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz .$$

Vale la relazione, analoga alla (143),

$$\int_0^l \cos \frac{m\pi z}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} dz = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} . \quad (152)$$

E' perciò

$$w_A = \frac{\pi^2}{2l^2} \left( v_1^2 \frac{l}{2} + 4 v_2^2 \frac{l}{2} + 9 v_3^2 \frac{l}{2} \right)$$

e quindi

$$P = - \frac{F\pi^2}{4l} (v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2) . \quad (153)$$

Per la (142) può quindi scriversi

$$\begin{aligned} E_t = & - \frac{F}{l} (2,4674 v_1^2 + 9,8696 v_2^2 + 22,207 v_3^2) + \\ & + \frac{EI}{l^3} (36,528 v_1^2 + 584,45 v_2^2 + 2958,8 v_3^2 - \\ & - 35,092 v_1 v_2 - 341,09 v_2 v_3) . \end{aligned} \quad (154)$$

Le tre condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = \frac{\partial E_t}{\partial v_2} = \frac{\partial E_t}{\partial v_3} = 0$$

conducono al sistema

$$\begin{aligned} \left(73,06 - 4,935 \frac{Fl^2}{EI}\right) v_1 & - 35,09 v_2 & & = 0 \\ - 35,09 v_1 + \left(1169 - 19,74 \frac{Fl^2}{EI}\right) v_2 & & - 341,1 v_3 & = 0 \\ & - 341,1 v_2 + \left(5918 - 44,42 \frac{Fl^2}{EI}\right) v_3 & & = 0 \end{aligned} \quad (155)$$

Il sistema (155) è algebrico lineare omogeneo nelle  $v_1 v_2 v_3$ ; esso ammette soluzione non banale se, e solo se, il determinante dei coefficienti è nullo. Tale condizione si esprime come segue

$$\det \begin{vmatrix} \left(73,06 - 4,933 \frac{Fl^2}{EI}\right) & - 35,09 & 0 \\ - 35,09 & \left(1169 - 19,74 \frac{Fl^2}{EI}\right) & - 341,1 \\ 0 & - 341,1 & \left(5918 - 44,42 \frac{Fl^2}{EI}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (156)$$

La (156) è un'equazione algebrica di terzo grado in  $F$ ; essa ammette *sempre* tre radici reali, poichè è a matrice simmetrica rispetto alla diagonale principale (*equazione secolare*). Le radici sono

$$F_1 = 14,5 \frac{EI}{l^2}$$

$$F_2 = 57,6 \frac{EI}{l^2} \quad (157)$$

$$F_3 = 135 \frac{EI}{l^2}$$

Ad esse corrispondono le soluzioni del sistema (155) fornite dalla tabella 38.1.

$\frac{Fl^2}{EI}$	14,5	57,6	135
$\frac{v_2}{v_1}$	0,0407	6,309	16,92
$\frac{v_3}{v_1}$	0,0026	3,271	74,11

Tabella 38.1

Operando su due onde invece che su tre, e cioè ponendo

$$v = v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + v_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l},$$

l'espressione di  $E_t$  dovrà coincidere con quella (154) per  $v_3 = 0$ . Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = \frac{\partial E_t}{\partial v_2} = 0$$

portano al sistema ottenibile dal (155) per  $v_3 = 0$ . La condizione di esi-

stenza di soluzioni non banali sarà la (156) per  $v_3 = 0$ , e cioè

$$\begin{vmatrix} 73,06 - 4,935 \frac{Fl^2}{EI} & - 35,09 \\ - 35,09 & 1169 - 19,74 \frac{Fl^2}{EI} \end{vmatrix} = 0$$

le cui radici sono

$$F_1 = 14,51 \frac{EI}{l^2} \tag{158}$$

$$F_2 = 59,50 \frac{EI}{l^2}$$

Ad esse corrispondono le soluzioni del sistema fornite dalla tabella 38.2.

$\frac{Fl^2}{EI}$	14,51	59,50
$\frac{v_2}{v_1}$	0,0410	6,294

Tabella 38.2

Operando su una sola onda, e cioè ponendo

$$v = v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

si ha

$$E_t = 2,4674 \frac{F}{l} v_1^2 + 36,528 \frac{EI}{l^3} v_1^2$$

e quindi  $v_1 \neq 0$  per

$$F_1 = 14,80 \frac{EI}{l^2} . \quad (159)$$

L'errore che si commette operando con una sola onda è del 2 % del valore ottenibile operando con due onde; l'errore che si commette operando con due onde è del 0,07 % del valore ottenibile operando con tre onde. Così pure si osserva che il valore del carico critico  $F_1$  diminuisce all'aumentare del numero di onde, e cioè al migliorare dell'approssimazione. Ciò è in accordo con la nota proposizione secondo cui i valori  $F'_c$  del carico critico ricavati utilizzando tipi di deformata diversi dal vero sono sempre maggiori del carico critico reale  $F_c$  ( $F'_c > F_c$ ,  $F''_c > F_c$ ; se  $F''_c$  è più approssimato di  $F'_c$ , è  $F'_c > F''_c$ ). Tale affermazione si giustifica sul piano fisico con la considerazione che operare su una deformata diversa dalla vera equivale ad introdurre dei vincoli supplementari, e ciò innalza il valore del carico critico; essa trova però precisa dimostrazione sul piano matematico. Dal punto di vista pratico l'osservazione è preziosa, poichè pone ovvi limiti ai procedimenti energetici.

Si nota pure che il carico critico è compreso tra i due valori ottenibili (con la formula di Eulero) ponendo  $I(z) = \text{cost.} = I$ ; ed  $I(z) = \text{cost.} = 2I$ , nei due casi infatti è

$$F'_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 9,869 \frac{EI}{l^2}$$

$$F''_1 = 2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 19,74 \frac{EI}{l^2} ,$$

e quindi

$$F'_1 \leq F_1 \leq F''_1 .$$

Anche questa circostanza è di carattere generale; si dimostra infatti in rigore che aumentando le inerzie delle sezioni il carico critico non può diminuire, e viceversa.

Si osserva infine che nella deformata relativa ad  $F_1$  è di gran lunga prevalente l'onda di ordine uno; nella deformata relativa ad  $F_2$  prevale l'onda di ordine due, ma si risente notevolmente anche l'onda di ordine tre; nella deformata relativa ad  $F_3$  prevale l'onda di ordine tre, mentre l'onda di ordine uno è trascurabile.

Nella fig. 38.2 è riportata la posizione degli autovettori corrispondenti alle configurazioni  $C_2$  (sotto  $F_2$ ) e  $C_3$  (sotto  $F_3$ ) nel riferimento  $v_1 v_2 v_3$ : più precisamente, si è disegnata l'intersezione di tali autovettori con il

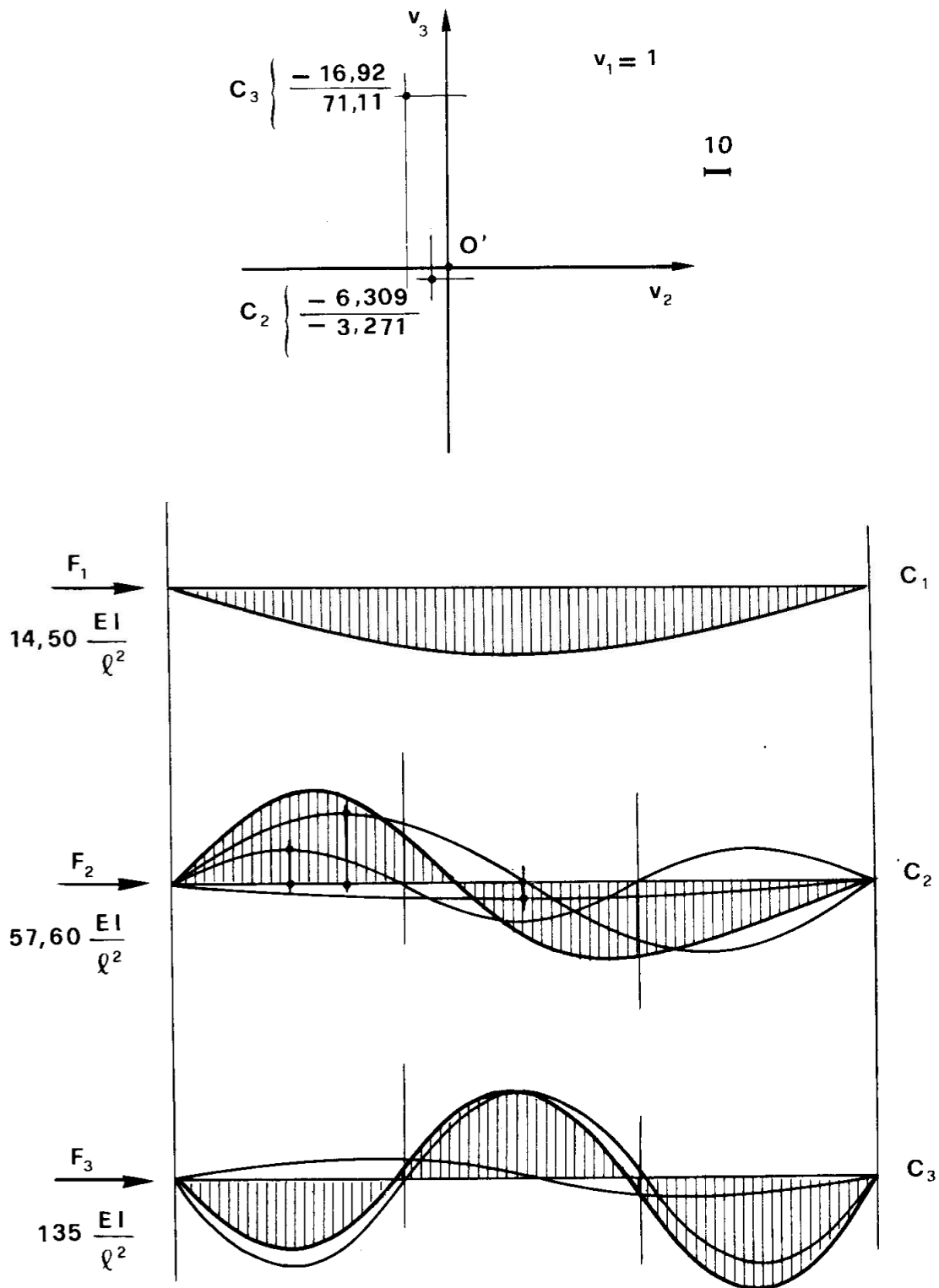


Figura 38.2

piano della figura assunto coincidente con il piano  $v_1 = 1$ . In tale maniera ogni autovettore è definito da un punto di tale piano, e viceversa. E' chiaro che, poichè la soluzione è a meno di una costante, l'autovettore è definito solo in direzione. Si è omesso di riportare anche la posizione dell'autovettore corrispondente a  $C_1$ , perchè sarebbe stato definito da un punto troppo vicino all'origine.

Nella stessa fig. 38.2 si sono disegnate le deformate corrispondenti ai tre valori (157).

Nella fig. 38.3 si è riportata la posizione dei due autovettori corrispondenti alle configurazioni  $C_1$  e  $C_2$  ottenute operando su due sole onde (fig. 38.2).

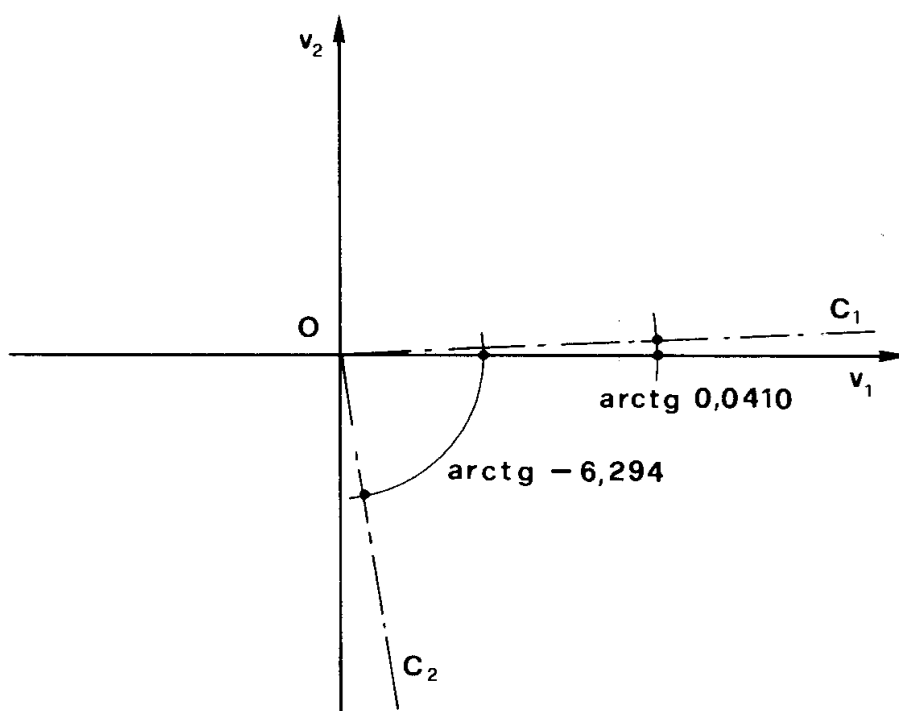


Figura 38.3.

Se la trave  $AB$  è soggetta contemporaneamente al carico  $q$  ed alla forza assiale  $F$ , l'energia potenziale è somma della (144) e della (153), mentre l'energia di deformazione è sempre fornita dalla (142). Le tre condizioni  $\frac{\partial E}{\partial v_i} = 0$  forniscono un sistema di tre equazioni algebriche lineari

non omogenee nelle  $v_i$ , in cui i termini noti sono quelli del problema 37, mentre i coefficienti delle incognite sono quelli del problema 38, forniti da (155). Quindi, quando  $F$  tende ad uno dei tre valori (157) che annullano il (101), le  $v_i$  tendono a valori infinitamente grandi; la funzione  $v_i(F)$  non è definita perciò nei tre valori (157). Ciò accade per qualsiasi tipo di forza trasversale applicata. Limitandosi ad una sola onda si perviene ad una formula di un certo interesse. In tal caso infatti può por-

si in generale

$$E_t = - A v_1 - B F v_1^2 + C v_1^2$$

mentre in assenza di  $F$  è

$$E_t = - A v_1 + C v_1^2 ,$$

ed in assenza di carico trasversale è

$$E_t = - B F v_1^2 + C v_1^2 .$$

Quindi in assenza di  $F$  risulta

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = - A + 2 C v_1 = 0$$

$$v_1^{\circ} = \frac{A}{2C} ;$$

in assenza di carico trasversale è

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = 2 v_1 (- B F + C) = 0$$

$$F_c = \frac{C}{B} ;$$

in presenza di ambedue i termini è

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_1} = - A + 2 v_1 (- B F + C)$$

da cui

$$v_1 = \frac{A}{2 (C - B F)} = \frac{A}{2 C \left( 1 - \frac{B}{C} F \right)}$$



e quindi

$$v_1 = \frac{v_1^0}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (160)$$

Tutto quanto detto nei due problemi 37 e 38 è valido sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti; infatti le formule (139) e (151) sono condizionate da tale ipotesi. Ciò trova conferma nel fatto che le espressioni di  $L$  e di  $P$  contengono solo i termini del primo e del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane  $v_i$ .

### Problema n. 39.

La trave della fig. 39 è ad asse rettilineo, e con  $EI = cost.$  La deformata  $v$  si sviluppi in serie di Fourier *completa*:

$$v = \sum v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \quad (161)$$

Si ha

$$v' = \frac{\pi}{l} \sum n v_n \cos \frac{n\pi z}{l} \quad (162)$$

$$v'' = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum n^2 v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}$$

e quindi

$$L = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 dz = \frac{EI \pi^4}{2l^4} \int_0^l \left( \sum n^2 v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz .$$

Per la (143) può scriversi

$$L = \frac{EI \pi^4}{4l^3} \sum n^4 v_n^2 \quad (163)$$

L'energia potenziale è

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz = -\frac{F\pi^2}{2l^2} \int_0^l \left( \sum n v_n \cos \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz ;$$

$$EI = \text{cost}$$

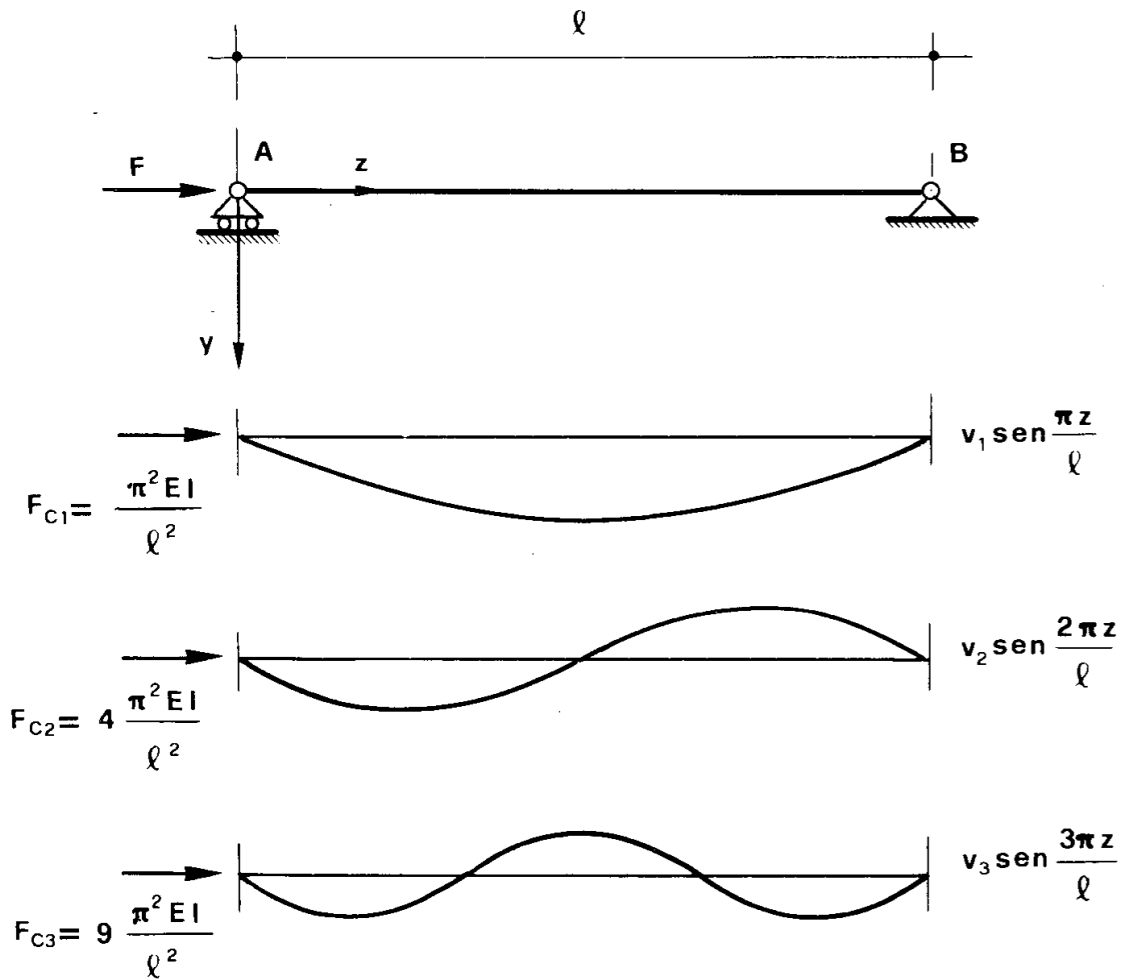


Figura 39.

per la (152) può scriversi

$$P = -\frac{F\pi^2}{4l} \sum n^2 v_n^2 . \tag{164}$$

E' quindi

$$E_t = -\frac{F\pi^2}{4l} \sum n^2 v_n^2 + \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum n^4 v_n^2 .$$

La generica condizione

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_n} = 0 \quad (165)$$

si scrive

$$\left( -\frac{F\pi^2 n^2}{2l} + \frac{EI\pi^4 n^4}{2l^3} \right) v_n = 0 \quad (166)$$

Le (165) danno luogo quindi ad un insieme di equazioni omogenee indipendenti del tipo (166), ciascuna con una sola incognita  $v_n$ . Oltre alla soluzione banale, esiste la

$$v_n \neq 0$$

se, e solo se,

$$F = F_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} . \quad (167)$$

Le (167) formano una successione crescente; il primo termine

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (168)$$

è il carico critico. Al generico autovalore  $F_n$  corrisponde l'autovettore  $v_n$ , e la deformata

$$v = v_n \text{ sen } \frac{n\pi z}{l} . \quad (169)$$

Seguendo il metodo geometrico, l'equazione di equilibrio (eguaglianza

del momento esterno al momento interno) in corrispondenza della sezione generica alla ascissa  $z$  si scrive<sup>(\*)</sup>

$$Fv = -EI v''$$

da cui

$$v'' + k^2 v = 0$$

con

$$k^2 = \frac{F}{EI} . \quad (170)$$

La soluzione è perciò

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz .$$

Le condizioni

$$z = 0 \rightarrow v = B = 0$$

$$z = l \rightarrow v = A \operatorname{sen} kl + B \operatorname{cos} kl = 0$$

importano  $B = 0$ , ed  $A \neq 0$  per  $\operatorname{sen} kl = 0$ , e cioè per

$$kl = n\pi$$

da cui

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

e, per la (170),

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$v = A \operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} .$$

(\*) Poichè la trave è isostatica, la funzione  $M(z)$  è nota, e quindi si può utilizzare l'equazione  $EIv'' = -M$ , con due sole condizioni di frontiera.