

per $F = 3 \frac{k}{a}$ è

$$\frac{\varphi_2''}{\varphi_1''} = 1 .$$

Tali soluzioni sono disegnate nella fig. 24.6 a meno di una costante ciascuna.

Problema n. 25.

La struttura della fig. 25 è soggetta sia a q che ad F . L'espressione di L è quella già ottenuta nel problema 23; l'espressione di P è somma di quella del problema 23 (termine lineare in φ_1 e φ_2), e di quella del problema 24 (termine quadratico in φ_1 e φ_2). Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

conducono così ad un sistema di equazioni in φ_1 e φ_2 dove i coefficienti sono quelli (123) del problema 24, ed i termini noti quelli del problema 23:

$$(5k - 2Fa) \varphi_1 + (4k - Fa) \varphi_2 = -q \frac{a^2}{2} \quad (124)$$

$$(4k - Fa) \varphi_1 + (5k - 2Fa) \varphi_2 = qa^2 .$$

La soluzione di tale sistema è

$$\varphi_1 = \frac{qa^4}{2} \frac{4Fa^3 - 13ka^2}{3F^2 a^6 - 12Fka^5 + 9k^2 a^4} \quad (125)$$

$$\varphi_2 = \frac{qa^4}{2} \frac{-5Fa^3 + 14ka^2}{3F^2 a^6 - 12Fka^5 + 9k^2 a^4} .$$

Per $F = 0$ si ritrovano i valori già ottenuti nel problema 23.

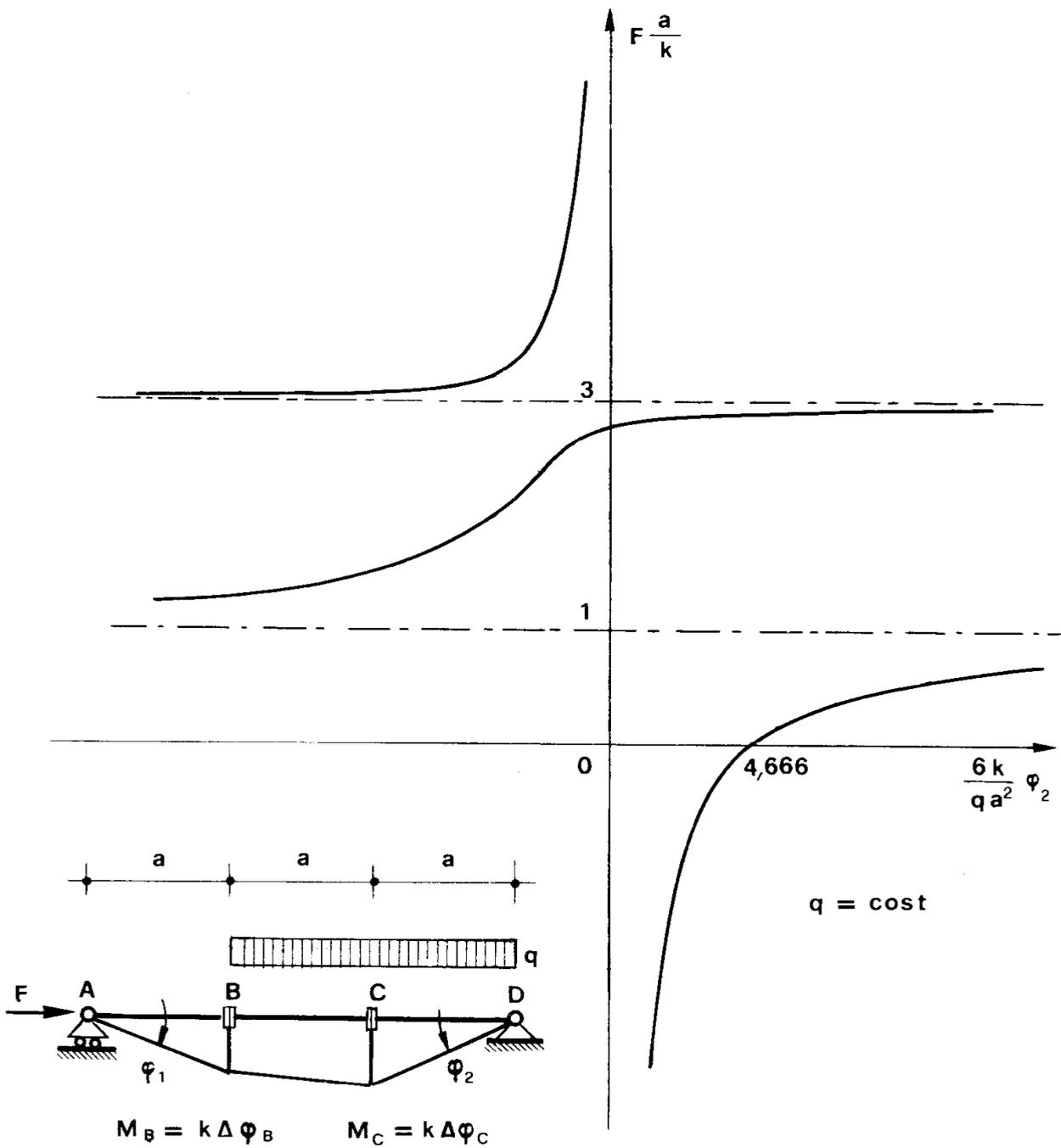


Figura 25

Per $F = \frac{k}{a}$ e per $F = \frac{3k}{a}$ (valori critici calcolati nel problema 24)

il denominatore delle due espressioni (125) si annulla.

Se F è costante, φ_1 e φ_2 sono funzioni lineari di q , e la presenza di

F si risente solo nella pendenza delle rette $\varphi_1(q)$ e $\varphi_2(q)$, e cioè nella deformabilità della struttura.

Se q è costante, sia $\varphi_1(F)$ che $\varphi_2(F)$ sono definite in $R - F_1 - F_2$ e sono applicazioni non iniettive da tale insieme su R . Nella figura 25 è disegnato il diagramma $\varphi_2(F)$; esso presenta gli asintoti

$$\varphi_2 = 0$$

$$F = \frac{k}{a}$$

$$F = 3 \frac{k}{a}$$

E' appena necessario avvertire ancora che il diagramma, costruito nell'ipotesi di piccoli spostamenti, è valido solo per un intorno del primo ordine di $\varphi_2 = 0$.

Problema n. 26.

L'arco della fig. 26 è isostatico, con $n = 2$. Si assumono come coordinate lagrangiane le rotazioni φ_1 e φ_2 dei tratti AB e DE .

Ponendo $\varphi_2 = 0$, si ha

$$\Delta\varphi_B = - 2,618 \varphi_1$$

$$\Delta\varphi_D = - 0,732 \varphi_1$$

$$A_q = 23,42 \varphi_1 m^2$$

Ponendo $\varphi_1 = 0$, si ha poi

$$\Delta\varphi_B = 1,590 \varphi_2$$

$$\Delta\varphi_D = 3,768 \varphi_2$$

$$A_q = 43,23 \varphi_2 m^2$$

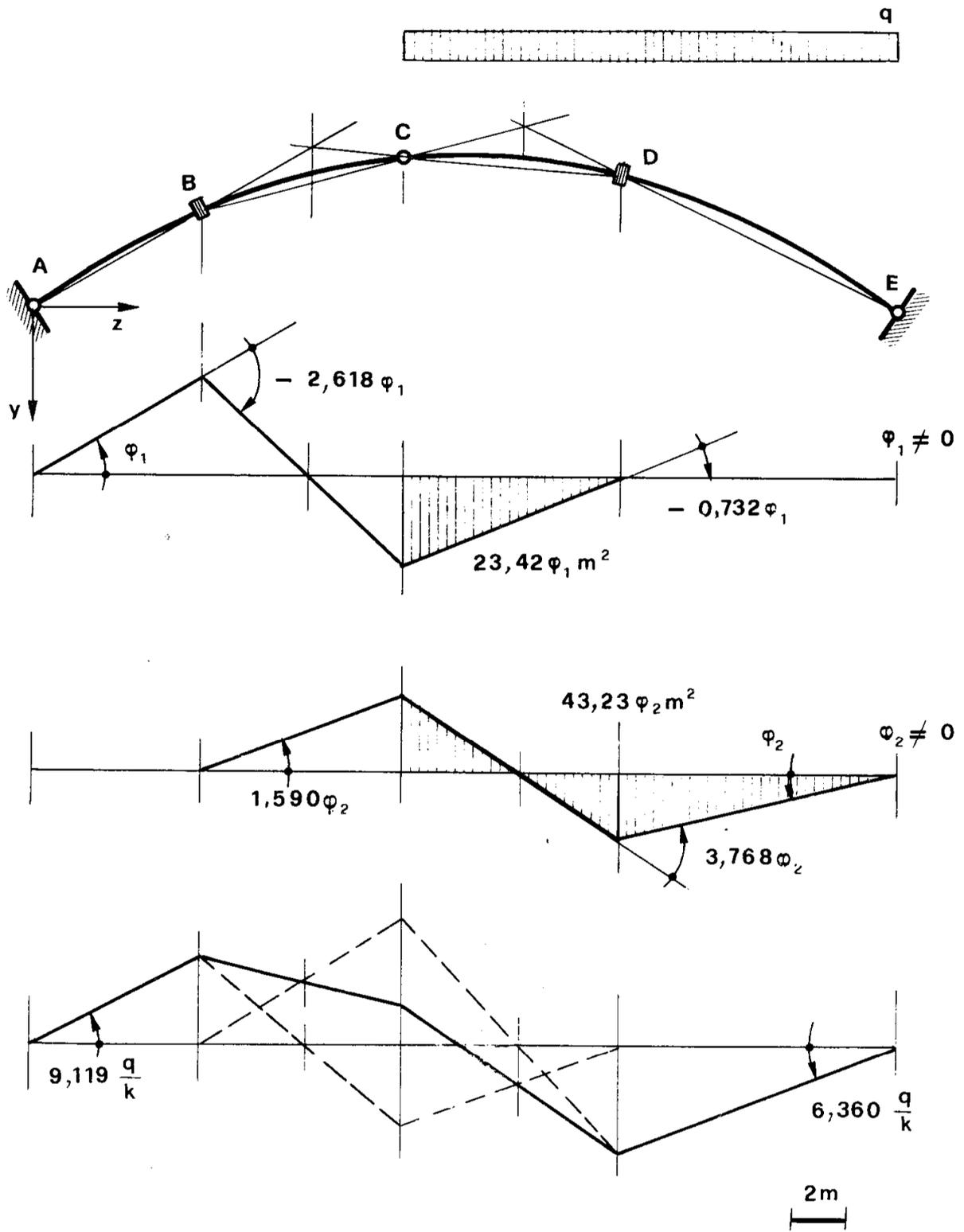


Figura 26

Quindi si può scrivere

$$E_t = -q \left(23,42 \varphi_1 + 43,23 \varphi_2 \right) + \frac{k_B}{2} (-2,618 \varphi_1 + 1,590 \varphi_2)^2 + \\ + \frac{k_D}{2} (-0,732 \varphi_1 + 3,768 \varphi_2)^2 .$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

portano al sistema

$$\varphi_1 (6,854 k_B + 0,536 k_D) - \varphi_2 (4,160 k_B + 2,758 k_D) = 23,42 q \\ - \varphi_1 (4,160 k_B + 2,758 k_D) + \varphi_2 (2,528 k_B + 14,20 k_D) = 43,23 q.$$

Per $k_B = k_D = k$ risulta

$$\varphi_1 = 9,119 \frac{q}{k} .$$

$$\varphi_2 = 6,360 \frac{q}{k} .$$

Nella fig. 26 è disegnata, per sovrapposizione, la deformata.

Problema n. 27.

La struttura della fig. 27 è una volta iperstatica, con $n = 2$; le rigidità dei tre conci elastici sono uguali, e pari a k . Si ha simmetria rispetto all'asse di mezzaria.

Ponendo $\varphi_2 = 0$ si ha

$$\Delta \varphi_B = -2,065 \varphi_1$$

$$\Delta \varphi_D = -0,383 \varphi_1$$

$$A_q = 17,65 \varphi_1 m^2 .$$

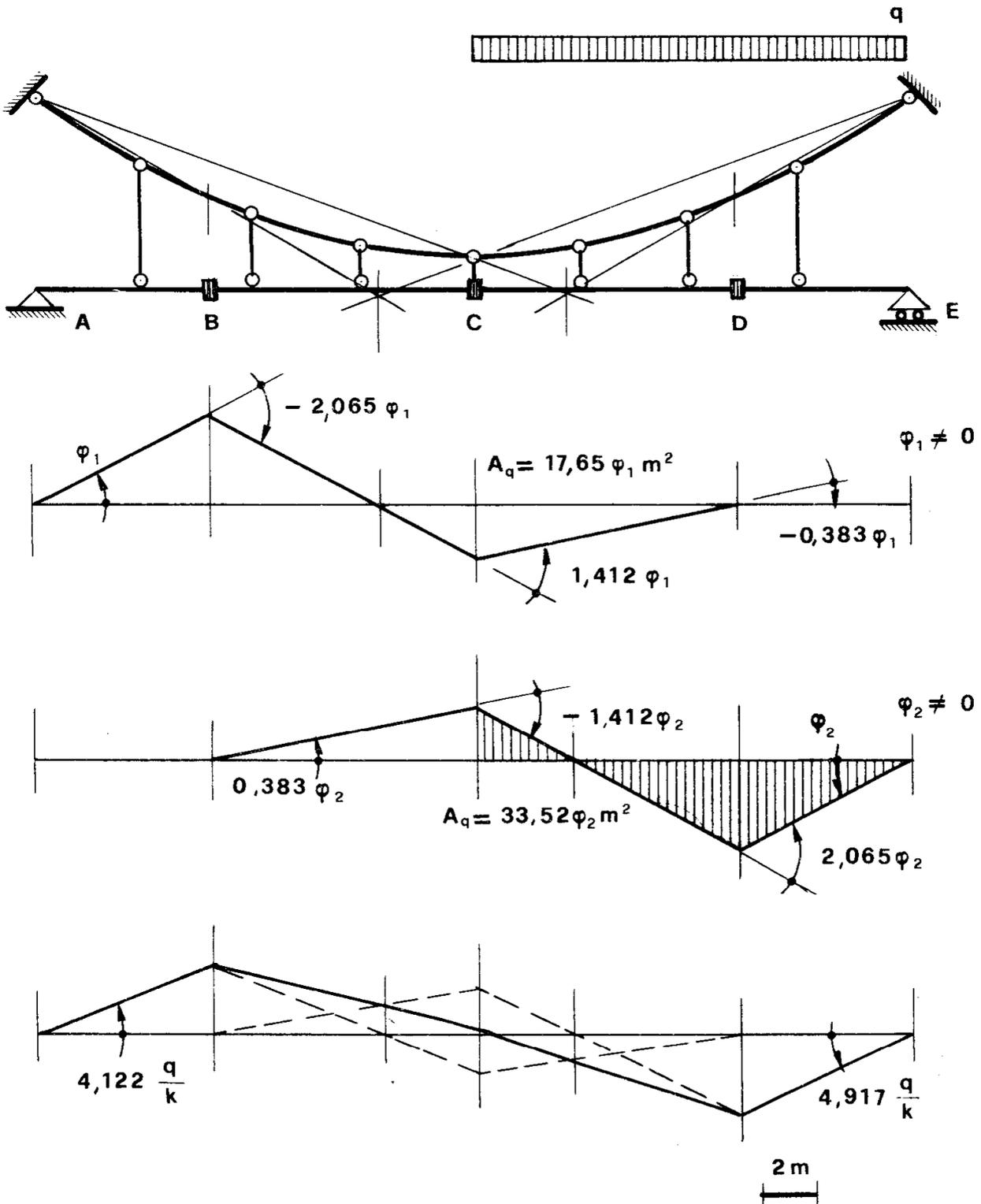


Figura 27

Ponendo $\varphi_1 = 0$ si ha

$$\Delta\varphi_B = 0,383 \varphi_2$$

$$\Delta\varphi_D = 2,065 \varphi_2$$

$$A_q = 33,52 \varphi_2 m^2 .$$

E' quindi

$$E_t = -q (17,65 \varphi_1 + 33,52 \varphi_2) + k (6,405 \varphi_1^2 + 6,405 \varphi_2^2 - 7,149 \varphi_1 \varphi_2).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

porgono

$$12,81 \varphi_1 - 7,149 \varphi_2 = 17,65 \frac{q}{k}$$

$$- 7,149 \varphi_1 + 12,81 \varphi_2 = 33,52 \frac{q}{k}$$

da cui

$$\varphi_1 = 4,122 \frac{q}{k}$$

$$\varphi_2 = 4,917 \frac{q}{k} .$$

Nella stessa fig. 27 è disegnata la deformata.

Problema n. 28.

Il telaio della fig. 28.1 è sei volte iperstatico, con $n = 2$. Come coordinate lagrangiane si scelgono gli angoli di rotazione φ_1 e φ_2 dei tratti

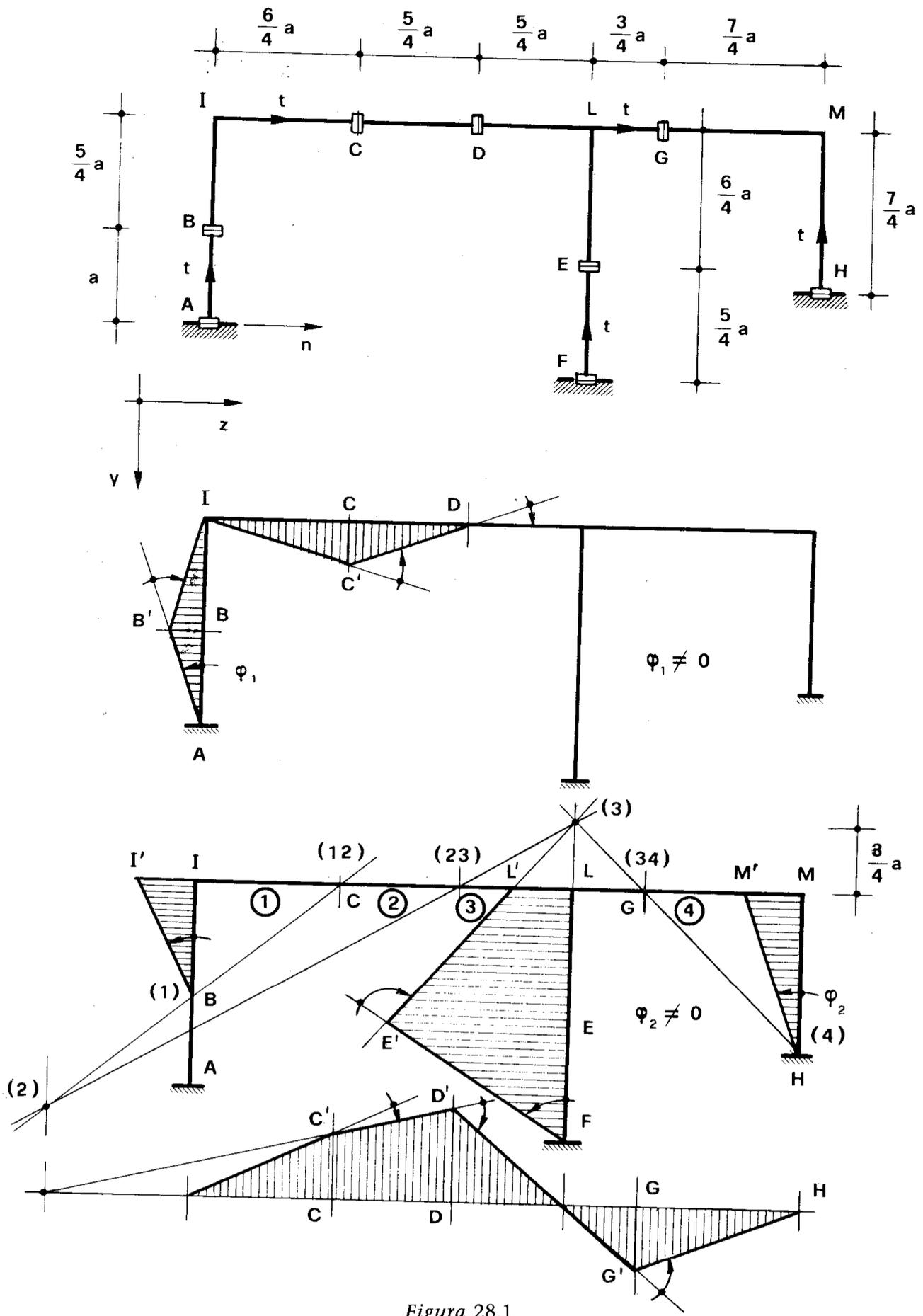


Figura 28.1

AB e *HM*.

Ponendo $\varphi_2 = 0$ si ha

$$BB' = -a\varphi_1$$

$$\varphi_{BC} = -a\varphi_1 : \frac{5}{4}a = -0,80\varphi_1$$

$$CC' = 0,80\varphi_1 \cdot \frac{6}{4}a = 1,20a\varphi_1$$

$$\varphi_{CD} = 1,20a\varphi_1 : \frac{5}{4}a = 0,96\varphi_1$$

$$\Delta\varphi_A = \varphi_1$$

$$\Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_1 = -1,80\varphi_1$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{BC} = 1,76\varphi_1$$

$$\Delta\varphi_D = -\varphi_{CD} = -0,96\varphi_1$$

Ponendo $\varphi_1 = 0$ si ha

$$II' = LL' = MM' = -\varphi_2 \cdot \frac{7}{4}a = -1,75a\varphi_2$$

$$EE' : LL' = \frac{9}{4}a : \frac{3}{4}a = 3$$

$$\begin{aligned}
EE' &= 3 LL' &= - 5,25 a \varphi_2 \\
\varphi_{DEG} &= EE' : \frac{9}{4} a &= - 2,33 \varphi_2 \\
\varphi_{EF} &= - EE' : \frac{5}{4} a &= 4,20 \varphi_2 \\
\varphi_{BC} &= - II' : \frac{5}{4} a &= 1,40 \varphi_2 \\
CC' &= - \varphi_{BC} \cdot \frac{6}{4} a &= - 2,10 a \varphi_2 \\
DD' &= \varphi_{DEG} : \frac{5}{4} a &= - 2,92 a \varphi_2 \\
\varphi_{CD} &= - (DD' - CC') : \frac{5}{4} a &= 0,65 \varphi_2 \\
GG' &= - \varphi_{DEG} \cdot \frac{3}{4} a &= 1,75 a \varphi_2 \\
\Delta\varphi_B &= \varphi_{BC} &= 1,40 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_C &= \varphi_{CD} - \varphi_{BC} &= - 0,75 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_D &= \varphi_{DEG} - \varphi_{CD} &= - 2,98 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_E &= \varphi_{DEG} - \varphi_{EF} &= - 6,53 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_F &= \varphi_{EF} &= 4,20 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_G &= \varphi_2 - \varphi_{DEG} &= 3,33 \varphi_2 \\
\Delta\varphi_H &= &= \varphi_2
\end{aligned}$$

Nella tabella 28.1 sono riportati i valori degli spostamenti e delle rotazioni dovuti a φ_1 ed a φ_2 .

Tabella 28.1.

	$\varphi_2 = 0 ; \varphi_1 \neq 0$	$\varphi_1 = 0 ; \varphi_2 \neq 0$
BB'	$- a \varphi_1$	—
CC'	$1,20 a \varphi_1$	$- 2,10 a \varphi_2$
II'	—	$- 1,75 a \varphi_2$
LL'	—	$- 1,75 a \varphi_2$
MM'	—	$- 1,75 a \varphi_2$
EE'	—	$- 5,25 a \varphi_2$
DD'	—	$- 2,92 a \varphi_2$
GG'	—	$1,75 a \varphi_2$
φ_{BC}	$- 0,80 \varphi_1$	$1,40 \varphi_2$
φ_{CD}	$0,96 \varphi_1$	$0,65 \varphi_2$
φ_{DEG}	—	$- 2,33 \varphi_2$
φ_{EF}	—	$4,20 \varphi_2$
$\Delta\varphi_A$	φ_1	—
$\Delta\varphi_B$	$- 1,80 \varphi_1$	$1,40 \varphi_2$
$\Delta\varphi_C$	$1,76 \varphi_1$	$- 0,75 \varphi_2$
$\Delta\varphi_D$	$- 0,96 \varphi_1$	$- 2,98 \varphi_2$
$\Delta\varphi_E$	—	$- 6,53 \varphi_2$
$\Delta\varphi_F$	—	$- 4,20 \varphi_2$
$\Delta\varphi_G$	—	$3,33 \varphi_2$
$\Delta\varphi_H$	—	φ_2

Con i dati relativi ai $\Delta\varphi$ si può calcolare l'energia di deformazione (k è lo stesso per gli otto conci elastici).

$$L = \frac{k}{2} \sum (\Delta\varphi_i)^2 = \frac{k}{2} (8,26 \varphi_1^2 + 83,8 \varphi_2^2 - 1,96 \varphi_1 \varphi_2) \quad (126)$$

Si passa adesso a vari casi particolari di carico.

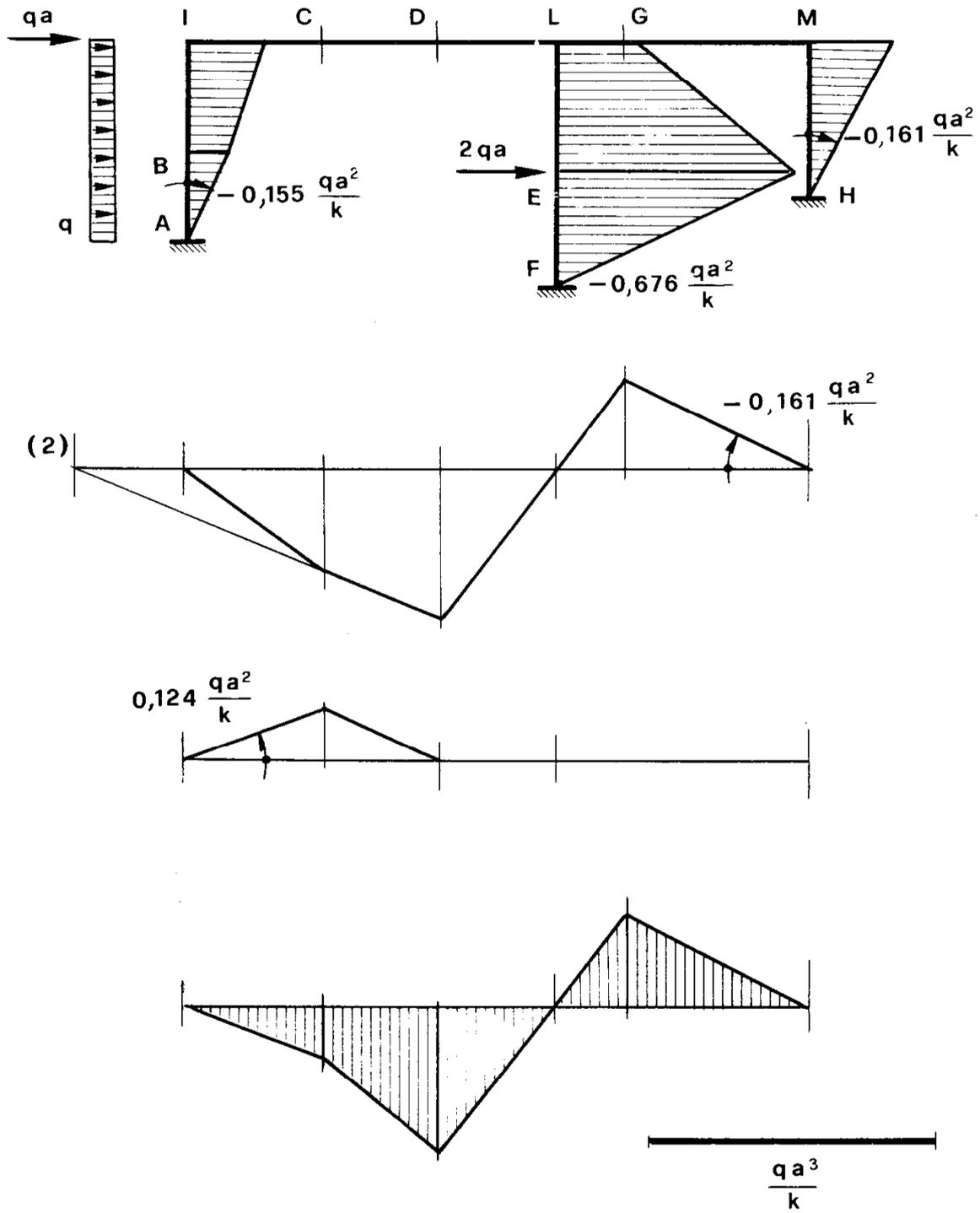


Figura 28.2

a) sul ritto AI agisce un carico distribuito uniformemente q , diretto secondo z , e sul nodo I un carico concentrato pari a qa , diretto anche secondo z ; in E agisce un altro carico concentrato pari a $2qa$, diretto ancora secondo z (fig. 28.2).

Si ha

$$\begin{aligned} A_q &= -\frac{1}{2} a \varphi_1 \cdot \frac{9}{4} a - \frac{1}{2} 1,750 a \varphi_2 \cdot \frac{5}{4} a = \\ &= -1,125 a^2 \varphi_1 - 1,094 a^2 \varphi_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P &= -q (-1,125 a^2 \varphi_1 - 1,094 a^2 \varphi_2) + qa \cdot 1,75 a \varphi_2 + \\ &+ 2qa \cdot 5,25 a \varphi_2 = qa^2 (1,125 \varphi_1 + 13,34 \varphi_2) . \end{aligned}$$

Si è in possesso così dell'espressione di E_t . Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

portano al sistema

$$\begin{aligned} 8,260 \varphi_1 - 0,980 \varphi_2 &= -1,125 \frac{qa^2}{k} \\ -0,980 \varphi_1 + 83,77 \varphi_2 &= -13,34 \frac{qa^2}{k} \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_1 = -0,1553 \frac{qa^3}{k}$$

$$\varphi_2 = -0,1611 \frac{qa^2}{k} .$$

Si calcolano di seguito i $\Delta\varphi$ ed i momenti in corrispondenza dei conci elastici:

$$\Delta\varphi_A = \varphi_1 = -0,155 \frac{qa^2}{k} ; M_A = -0,155 qa^2$$

$$\Delta\varphi_B = -1,80 \varphi_1 + 1,40 \varphi_2 = 0,054 \frac{qa^2}{k} ; M_B = 0,054 qa^2$$

$$\Delta\varphi_C = 1,76 \varphi_1 - 0,75 \varphi_2 = -0,152 \frac{qa^2}{k} ; M_C = -0,152 qa^2$$

$$\Delta\varphi_E = -6,53 \varphi_2 = 1,052 \frac{qa^2}{k} ; M_E = 1,052 qa^2$$

$$\Delta\varphi_F = 4,20 \varphi_2 = -0,677 \frac{qa^2}{k} ; M_F = -0,677 qa^2$$

$$\Delta\varphi_G = 3,33 \varphi_2 = -0,536 \frac{qa^2}{k} ; M_G = -0,536 qa^2$$

$$\Delta\varphi_H = \varphi_2 = -0,161 \frac{qa^2}{k} ; M_H = -0,161 qa^2$$

Per disegnare il diagramma dei momenti (fig. 28.3) occorre procedere a considerazioni di equilibrio dei singoli tratti della struttura. L'equilibrio alla rotazione di EF , supposto che la forza $2 qa$ agisca sulla sezione E appartenente a DEG , si scrive

$$(1,052 + 0,677) qa^2 - T_{EF} \cdot \frac{5}{4} a = 0$$

da cui

$$T_{EF} = 1,383 qa$$

L'equilibrio alla rotazione di CD si traduce in

$$(0,152 + 0,629) qa^2 - T_{CD} \cdot \frac{5}{4} a = 0$$

da cui

$$T_{CD} = 0,625 qa = T_{DL}$$

L'equilibrio di *DEG* alla rotazione intorno ad *L* si scrive

$$\begin{aligned} (-0,629 - 0,536 - 1,052) qa^2 - T_{CD} \cdot \frac{5}{4} a + 2 qa \cdot \frac{6}{4} a - \\ - T_{EF} \cdot \frac{6}{4} a - T_{GM} \cdot \frac{3}{4} a = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$T_{GM} = -2,763 qa .$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad *H* di *GH* fornisce

$$(0,536 + 0,161) qa^2 - T_{GM} \cdot \frac{7}{4} a + N_{GM} \cdot \frac{7}{4} a = 0$$

da cui

$$N_{GM} = -3,161 qa = N_{LG} .$$

Tornando a *DEG*, l'equilibrio alla traslazione secondo *z* permette di scrivere

$$N_{LG} - N_{DL} - T_{EF} + 2 qa = 0$$

da cui

$$N_{DL} = -2,544 qa .$$

L'equilibrio di *BC* alla traslazione secondo *z* conduce a

$$N_{IC} + qa + q \cdot \frac{5}{4} a - T_B = 0$$

da cui

$$T_B = -0,294 qa .$$

Si verifica che la condizione di equilibrio di CB alla rotazione intorno a C è rispettata:

$$\begin{aligned} & (-0,152 - 0,054) qa^2 + \frac{5}{4} qa \cdot \frac{5}{8} a + \\ & + 0,294 qa \cdot \frac{5}{4} a - 0,625 qa \cdot \frac{6}{4} a = 0 . \end{aligned}$$

L'equilibrio di AB alla traslazione secondo z impone

$$T_B - T_A + q \cdot a = 0$$

da cui

$$T_A = 0,706 qa .$$

Si verifica che la condizione di equilibrio di AB alla rotazione intorno a B è rispettata

$$(0,054 + 0,155) qa^2 + qa \cdot \frac{a}{2} - 0,706 qa \cdot a = 0 .$$

Dai valori calcolati sopra si trae

$$\begin{aligned} M_{IB} &= 0,054 qa^2 - 0,294 qa \cdot \frac{5}{4} a - \frac{5}{4} qa \cdot \frac{5}{8} a = \\ &= 1,090 qa^2 \end{aligned}$$

$$M_{IC} = -0,152 qa^2 - 0,625 qa \cdot \frac{6}{4} a = -1,090 qa^2$$

$$M_{LD} = 0,629 qa^2 + 0,625 qa \cdot \frac{5}{4} a = 1,410 qa^2$$

$$M_{LE} = 1,052 qa^2 - 0,617 qa \cdot \frac{6}{4} a = 0,126 qa^2$$

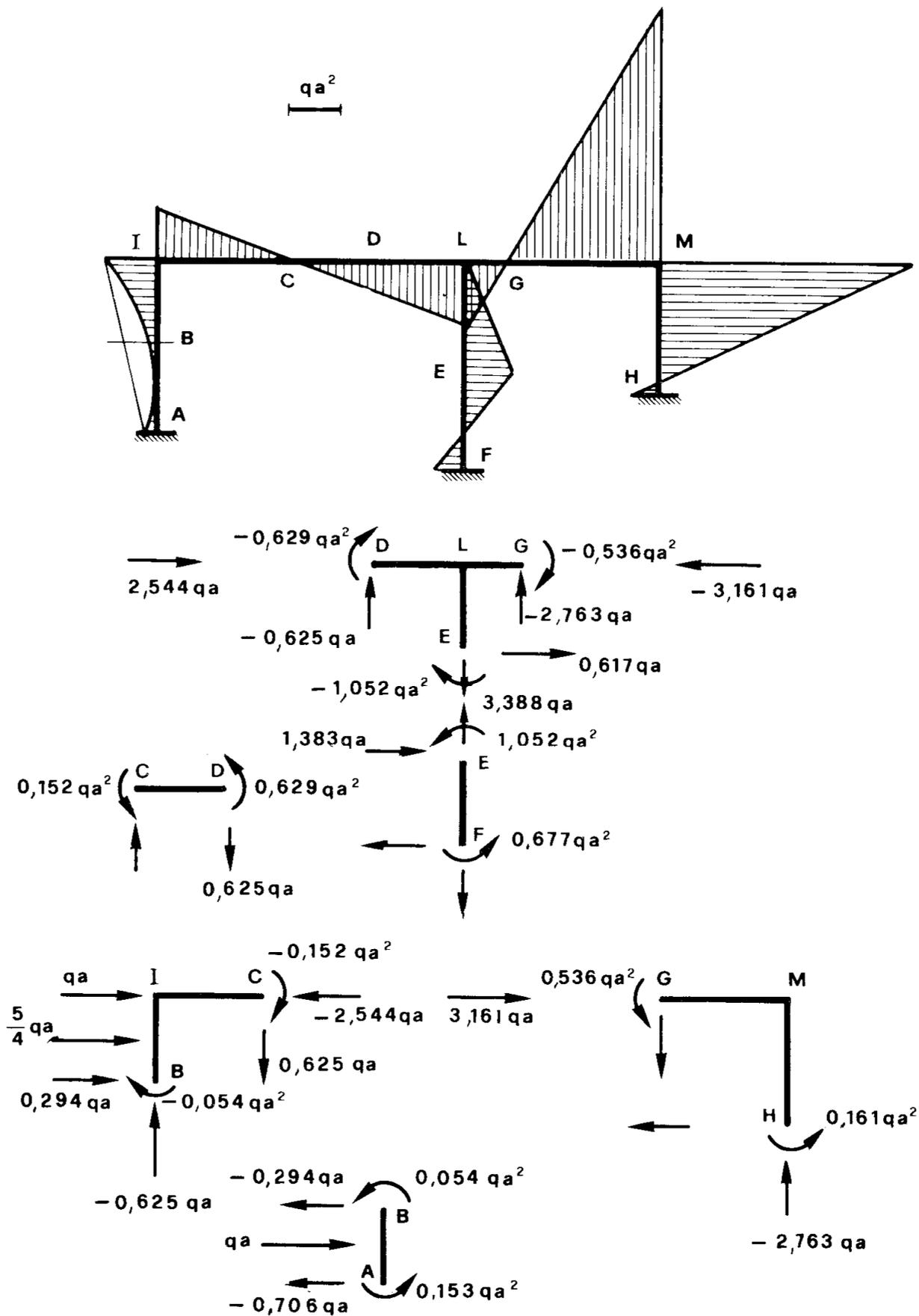


Figura 28.3

$$M_{LG} = - 0,536 qa^2 + 2,763 qa \cdot \frac{3}{4} a = 1,536 qa^2$$

$$M_{MG} = - 0,536 qa^2 - 2,763 qa \cdot \frac{7}{4} a = 5,371 qa^2 .$$

Si ha inoltre che l'ordinata massima della superficie semplice dei momenti in AI è

$$\frac{q}{8} \cdot \left(\frac{9}{4} a \right)^2 = 0,632 qa^2 .$$

Con i suddetti valori dei momenti si è tracciato il diagramma dei momenti della fig. 28.3.

b) sul nodo I agisce una forza F secondo z . Risulta

$$P = - F \cdot \Pi' = 1,75 Fa \varphi_2$$

e quindi (71)

$$E_t = 1,75 Fa \varphi_2 + \frac{k}{2} (8,26 \varphi_1^2 + 83,8 \varphi_2^2 - 1,96 \varphi_1 \varphi_2)$$

da cui

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = 8,26 k \varphi_1 - 0,98 k \varphi_2 = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = - 0,98 k \varphi_1 + 83,77 k \varphi_2 + 1,75 aF = 0 .$$

La soluzione del sistema è

$$\varphi_1 = - 0,00248 \frac{Fa}{k}$$

$$\varphi_2 = - 0,02092 \frac{Fa}{k} .$$

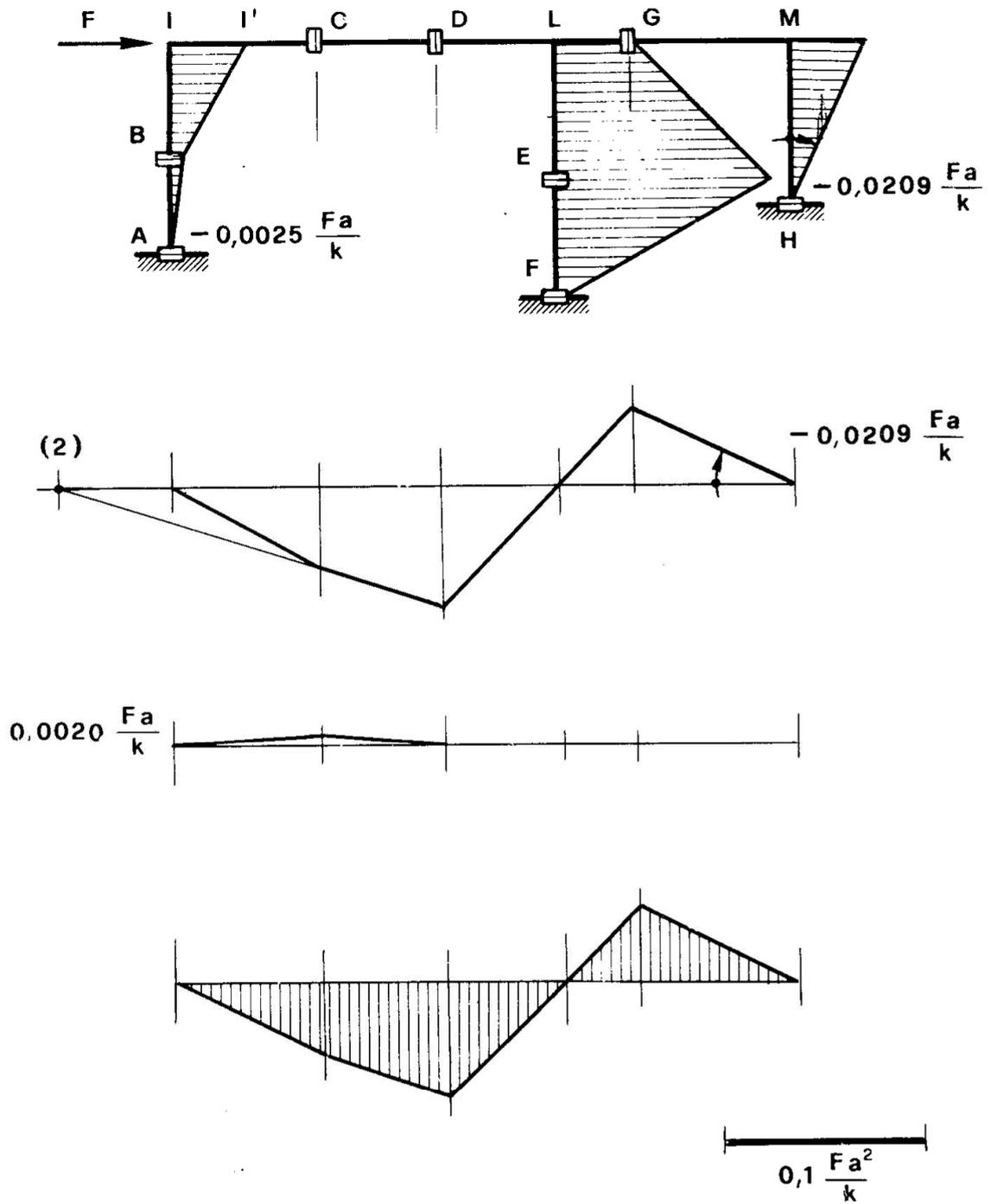


Figura 28.4

Nella fig. 28.4 è disegnata la deformata.

c) sul traverso IM agisce un carico q uniformemente distribuito, secondo la direzione y . Risulta

$$\begin{aligned}
 A_q &= \frac{CC'}{2} \cdot \frac{6}{4} a + \frac{CC' + DD'}{2} \cdot \frac{5}{4} a + \frac{DD'}{2} \cdot \frac{5}{4} a + \\
 &+ \frac{GG'}{2} \cdot \frac{10}{4} a = \frac{a^2}{2} \left[(1,20\varphi_1 - 2,10\varphi_2) \frac{6}{4} + \right. \\
 &+ (1,20\varphi_1 - 5,02\varphi_2) \frac{5}{4} - 2,92\varphi_2 \cdot \frac{5}{4} + 1,75\varphi_2 \frac{10}{4} \left. \right] = \\
 &= a^2 (1,65\varphi_1 - 4,35\varphi_2)
 \end{aligned}$$

e quindi (126)

$$\begin{aligned}
 E_t &= -qa^2 (1,65\varphi_1 - 4,35\varphi_2) + \\
 &+ \frac{k}{2} (8,26\varphi_1^2 + 83,8\varphi_2^2 - 1,96\varphi_1\varphi_2) .
 \end{aligned}$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

porgono il sistema

$$\begin{aligned}
 8,260\varphi_1 - 0,980\varphi_2 &= 1,65 \frac{qa^2}{k} \\
 -0,980\varphi_1 + 83,77\varphi_2 &= -4,35 \frac{qa^2}{k}
 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 0,1939 \frac{qa^2}{k} \\
 \varphi_2 &= -0,0497 \frac{qa^2}{k} .
 \end{aligned}$$

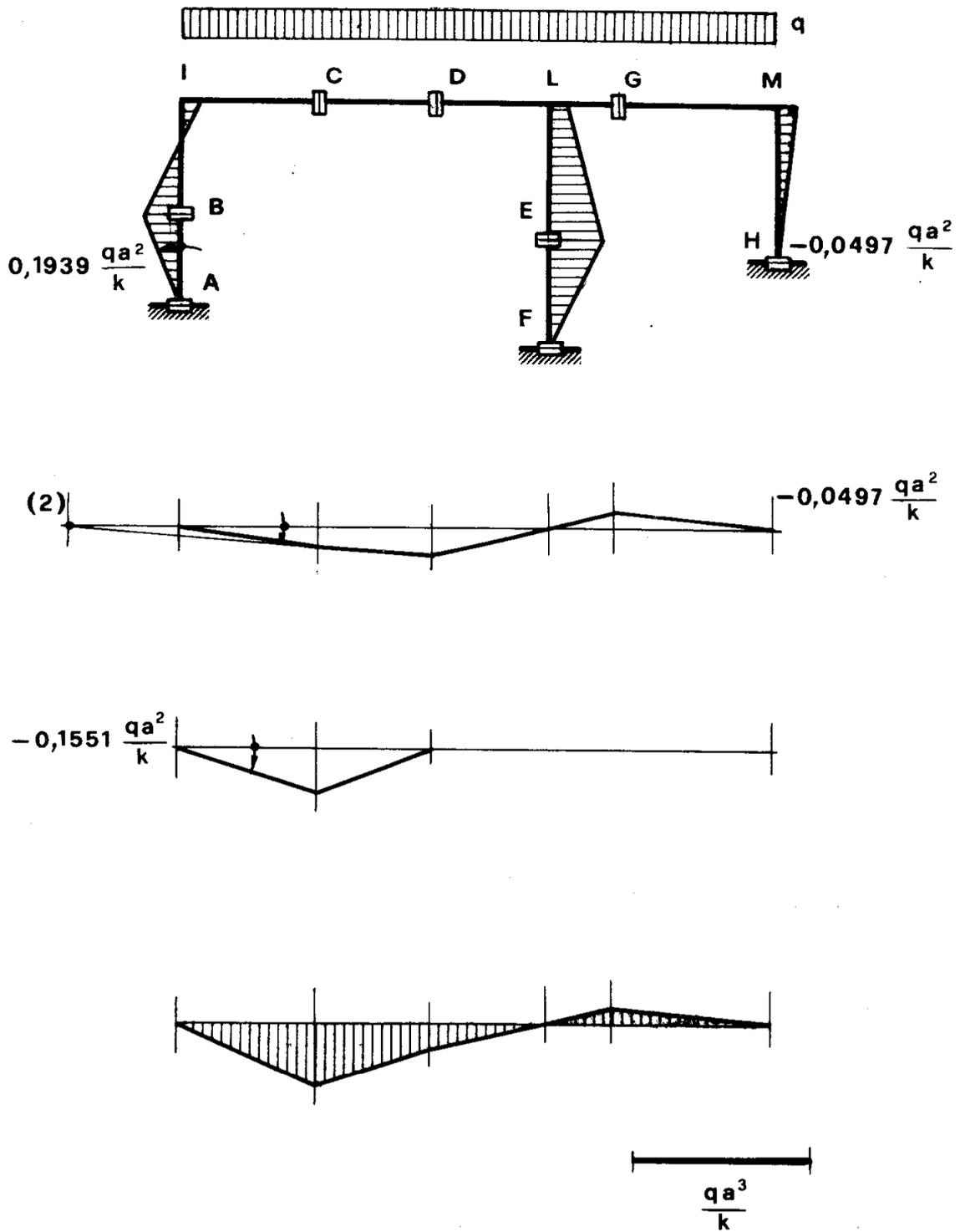


Figura 28.5

Nella fig. 28.5 è disegnata la deformata.

d) in I , L ed M agiscono (fig. 28.6) le forze dirette secondo y

$$F_I = 0,615 F$$

$$F_L = F$$

$$F_M = 0,385 F$$

Risulta

$$v_I = a \frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{5}{4} a \cdot \frac{\varphi_{BC}^2}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} [\varphi_1^2 + \frac{5}{4} (-0,80 \varphi_1 + 1,40 \varphi_2)^2] =$$

$$= a (0,9 \varphi_1^2 + 1,22 \varphi_2^2 - 1,40 \varphi_1 \varphi_2)$$

$$v_L = \frac{5}{4} a \cdot \frac{\varphi_{EF}^2}{2} + \frac{6}{4} a \cdot \frac{\varphi_{DEG}^2}{2} = \frac{a}{8} [5 (4,20 \varphi_2)^2 + 6 (2,33 \varphi_2)^2] =$$

$$= 15,10 a \varphi_2^2$$

$$v_M = \frac{7}{4} a \cdot \frac{\varphi_2^2}{2} = 0,875 a \varphi_2^2$$

da cui

$$P = - F_I v_I - F_L v_L - F_M v_M =$$

$$= Fa (-0,553 \varphi_1^2 - 16,176 \varphi_2^2 + 0,861 \varphi_1 \varphi_2)$$

e quindi

$$E_t = Fa (-0,55 \varphi_1^2 - 16,2 \varphi_2^2 + 0,86 \varphi_1 \varphi_2) +$$

$$+ \frac{k}{2} (8,26 \varphi_1^2 + 83,8 \varphi_2^2 - 1,96 \varphi_1 \varphi_2) .$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

porgono il sistema

$$\varphi_1 (-1,11 Fa + 8,26k) + \varphi_2 (0,86 Fa + 0,98k) = 0 \quad (127)$$

$$\varphi_1 (0,86 Fa - 0,98k) + \varphi_2 (-32,3 Fa + 83,8k) = 0 .$$

Questo sistema presenta soluzioni non banali per

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1,11 Fa + 8,26 k & 0,86 Fa - 0,98 k \\ 0,86 Fa - 0,98 k & -32,3 Fa + 83,8 k \end{vmatrix} = 0 ,$$

e cioè per

$$F = F_1 = 2,58554 \frac{k}{a}$$

$$F = F_2 = 7,61371 \frac{k}{a} .$$

Sostituendo il valore F_1 nel sistema (127) si ha

$$5,3900 \varphi_1 + 1,2436 \varphi_2 = 0$$

$$1,2436 \varphi_1 + 0,2869 \varphi_2 = 0$$

da cui

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} = -0,2307 .$$

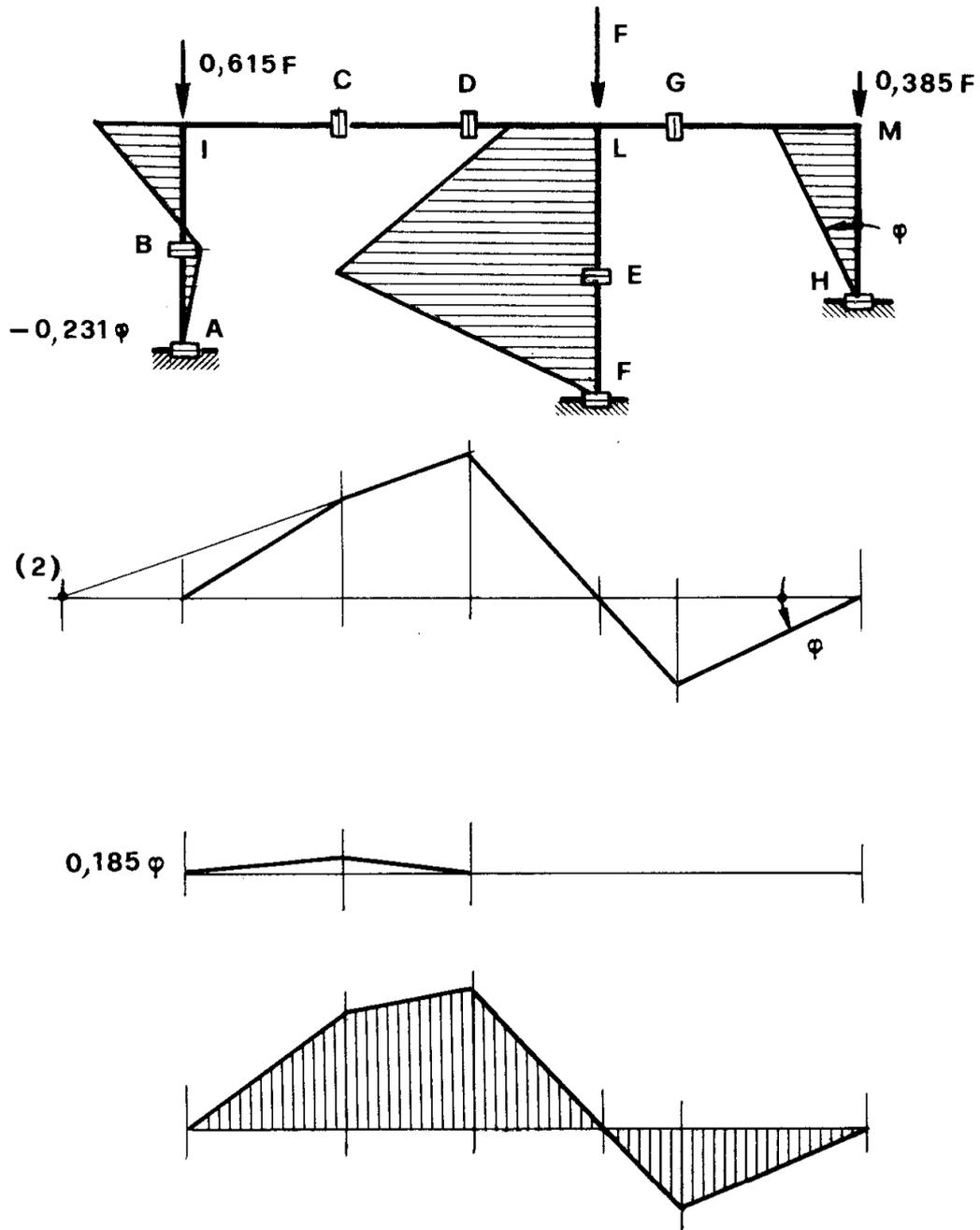


Figura 28.6

Sostituendo il valore F_2 nel sistema (127) si ha

$$- 0,1912 \varphi_1 + 5,5678 \varphi_2 = 0$$

$$5,5678 \varphi_1 - 162,12 \varphi_2 = 0$$

da cui

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = 29,12 .$$

Nella fig. 28.6 è riportata la soluzione non banale sotto F_1 .

e) In I agisce una forza F diretta secondo z , in L una forza cF diretta secondo y (fig. 28.7).

L'energia potenziale connessa con F è quella già calcolata nel caso b :

$$P' = 1,75 Fa \varphi_2 .$$

L'energia potenziale connessa con cF è fornita (vedi caso d) da

$$P'' = - cF v_L = - 15,10 cFa \varphi_2^2 .$$

Quindi è

$$E_t = 1,75 Fa \varphi_2 - 15,1 cFa \varphi_2^2 + \\ + \frac{k}{2} (8,26 \varphi_1^2 + 83,8 \varphi_2^2 - 1,96 \varphi_1 \varphi_2) .$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

si traducono nel sistema

$$8,28 k \varphi_1 - 0,98 k \varphi_2 = 0 \\ - 0,98 k \varphi_1 + (83,8 k - 30,2 cFa) \varphi_2 = - 1,75 Fa ,$$

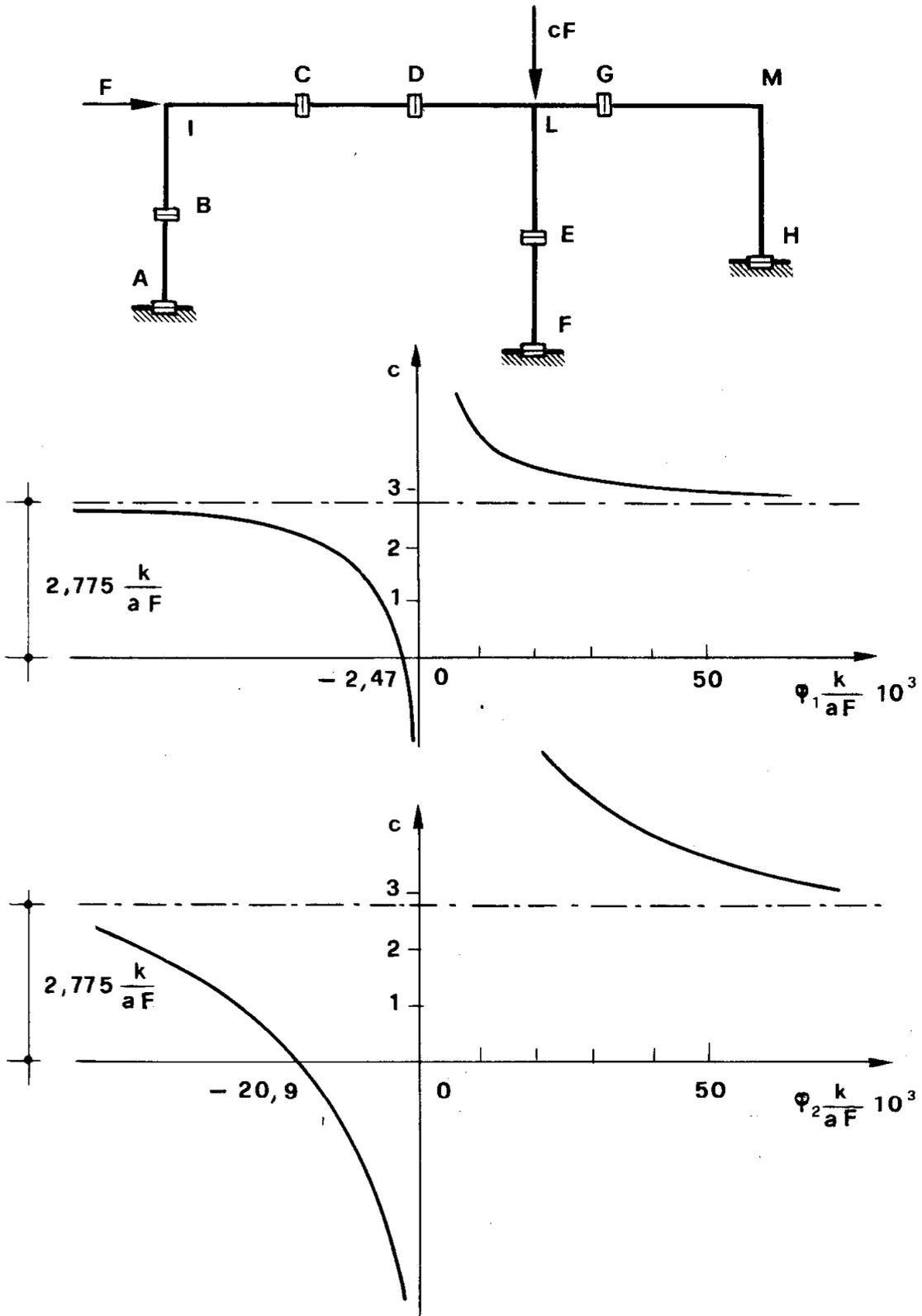


Figura 28.7

la cui soluzione è

$$\varphi_1 = -\frac{Fa}{k} \frac{1,71 k}{691 k - 249 cFa} \quad (128)$$

$$\varphi_2 = -\frac{Fa}{k} \frac{14,455 k}{691 k - 249 cFa}$$

Per $c = 0$ si ritrovano i valori φ_1 e φ_2 del caso b).

Nella fig. 28.7 sono riportati, per F costante, i diagrammi $\varphi_1(c)$ e $\varphi_2(c)$. Si osserva che per

$$cF \rightarrow 2,775 \frac{k}{a} \quad (129)$$

si ha

$$\varphi_1 \rightarrow \infty$$

$$\varphi_2 \rightarrow \infty ;$$

il valore (129), carico critico della struttura soggetta solo ad una forza in L diretta secondo y (come può agevolmente verificarsi), è più elevato del valore F_1 del caso d).

Le (128) sono due iperboli, con asintoti

$$c = 2,775 \frac{k}{aF}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 .$$

Si osservi che nel caso in esame esiste un solo carico critico, in luogo di due, perchè in E_t non compare alcun termine in $cF\varphi_1^2$ e $cF\varphi_1\varphi_2$ (si noti pure, dalla fig. 28.1, che v_L è indipendente da φ_1).

Problema n. 29.

Il telaio della fig. 29.1 è sei volte iperstatico, con $n = 2$; la rigidezza k è la stessa per tutti i conci elastici. Come coordinate lagrangiane si scel-

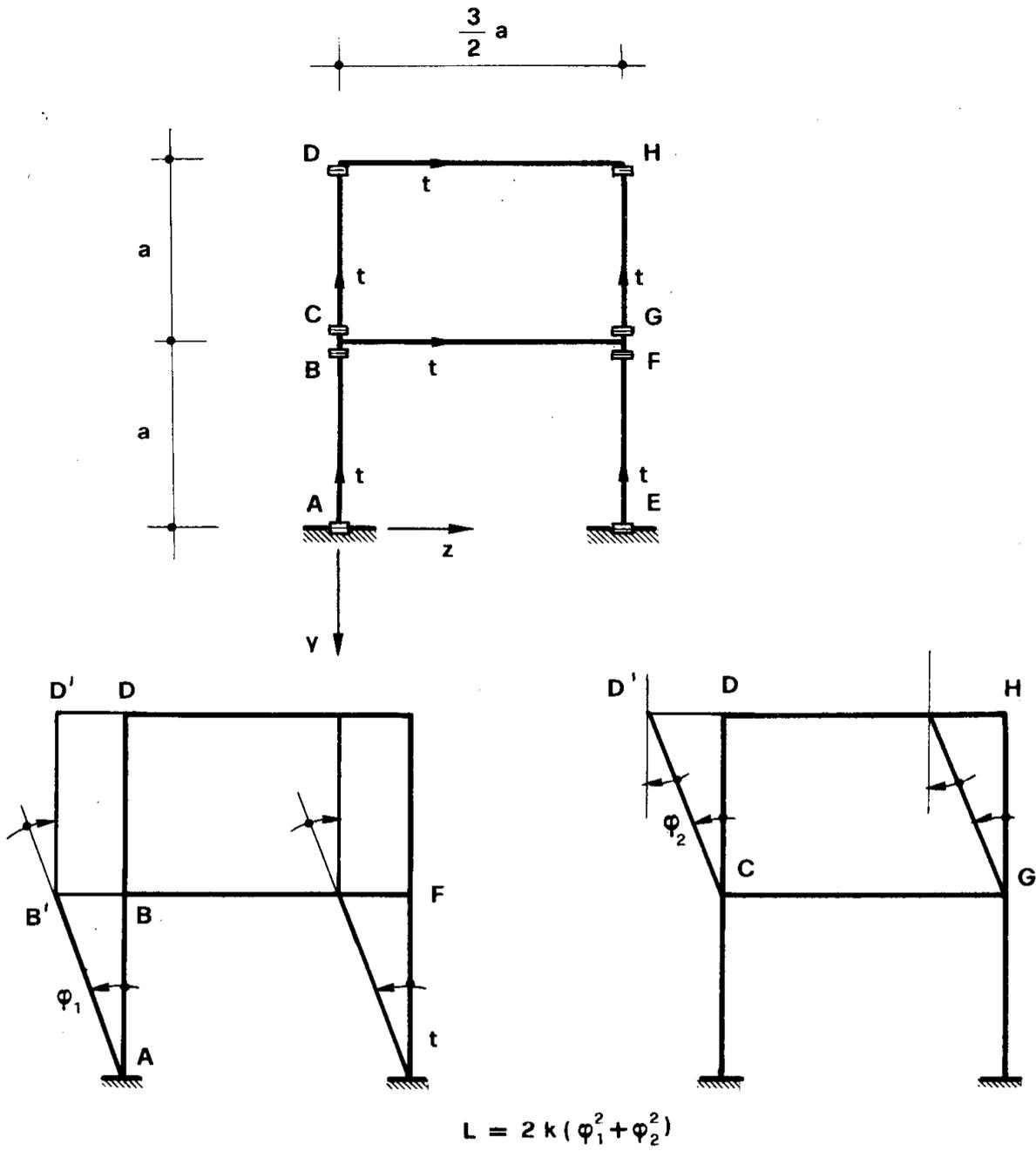


Figura 29.1

gono gli angoli di rotazione φ_1 e φ_2 del tratto AB e del tratto CD .
Ponendo $\varphi_2 = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_A &= \Delta\varphi_E = \varphi_1 \\ \Delta\varphi_B &= \Delta\varphi_F = -\varphi_1 \\ BB' &= DD' = -\varphi_1 a.\end{aligned}$$

Ponendo $\varphi_1 = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_C &= \Delta\varphi_G = \varphi_2 \\ \Delta\varphi_D &= \Delta\varphi_H = -\varphi_2 \\ DD' &= \quad = -\varphi_2 a.\end{aligned}$$

Si può quindi scrivere

$$L = \frac{k}{2} \sum_i (\Delta\varphi_i)^2 = 2k (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Si esaminano i seguenti casi di carico applicato:

a) una forza F secondo z agisce sul traverso inferiore, una forza $\frac{F}{2}$ secondo z agisce sul traverso superiore (fig. 29.2).

Risulta

$$P = Fa \varphi_1 + \frac{F}{2} a (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$E_t = Fa \frac{3\varphi_1 + \varphi_2}{2} + 2k (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

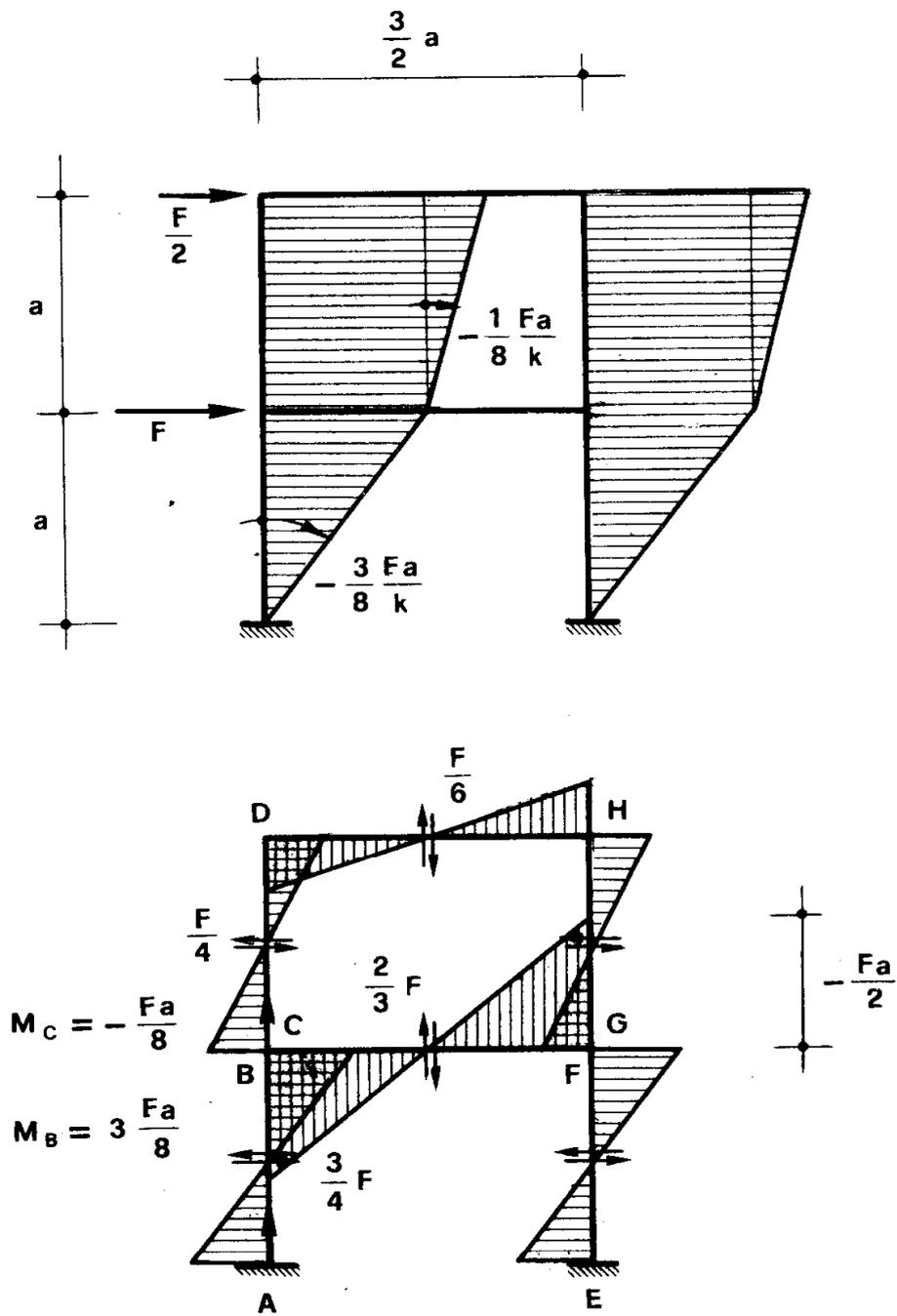


Figura 29.2

conducono al sistema

$$\frac{3}{2} Fa + 4k\varphi_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} Fa + 4k\varphi_2 = 0$$

da cui

$$\varphi_1 = -\frac{3}{8} \frac{Fa}{k}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{8} \frac{Fa}{k}$$

Si ha poi

$$\Delta\varphi_A = \Delta\varphi_E = -\frac{3}{8} \frac{Fa}{k}$$

$$M_A = M_E = -\frac{3}{8} Fa$$

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_F = \frac{3}{8} \frac{Fa}{k}$$

$$M_B = M_F = \frac{3}{8} Fa$$

$$\Delta\varphi_C = \Delta\varphi_G = -\frac{1}{8} \frac{Fa}{k}$$

$$M_C = M_G = -\frac{1}{8} Fa$$

$$\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_H = \frac{1}{8} \frac{Fa}{k}$$

$$M_D = M_H = \frac{1}{8} Fa$$

Si può scrivere infine

$$T_{AB} = T_{FE} = 2 \cdot \frac{3Fa}{8} : a = \frac{3}{4} F$$

$$T_{CD} = T_{GH} = 2 \cdot \frac{Fa}{8} : a = \frac{1}{4} F$$

$$T_{CG} = 2 \cdot \frac{Fa}{2} : \frac{3}{2} a = -\frac{2}{3} F$$

$$T_{DH} = 2 \cdot \frac{Fa}{8} : \frac{3}{2} a = -\frac{1}{6} F$$

$$N_{CD} = -T_{DH} = \frac{1}{6} F$$

$$N_{GH} = T_{DH} = -\frac{1}{6} F$$

$$N_{AB} = -T_{DH} - T_{CG} = \frac{5}{6} F$$

$$N_{EG} = T_{DH} + T_{CG} = \frac{5}{6} F$$

$$N_{DH} = T_{CD} - \frac{F}{2} = -\frac{1}{4} F$$

$$N_{CG} = -T_{CD} + T_{AB} - F = -\frac{1}{2} F$$

b) un carico q agente secondo z impegna i due ritti di sinistra; q è uniformemente distribuito su AD (fig. 29.3).

Risulta

$$A_q = \frac{BB' \cdot a}{2} + \frac{BB' + DD'}{2} a =$$

$$= -\varphi_1 \frac{a^2}{2} - (2\varphi_1 + \varphi_2) \frac{a^2}{2} =$$

$$= -\frac{3}{2} a^2 \varphi_1 - \frac{1}{2} a^2 \varphi_2 ,$$

$$E_t = \frac{qa^2}{2} (3\varphi_1 + \varphi_2) + 2k (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) .$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

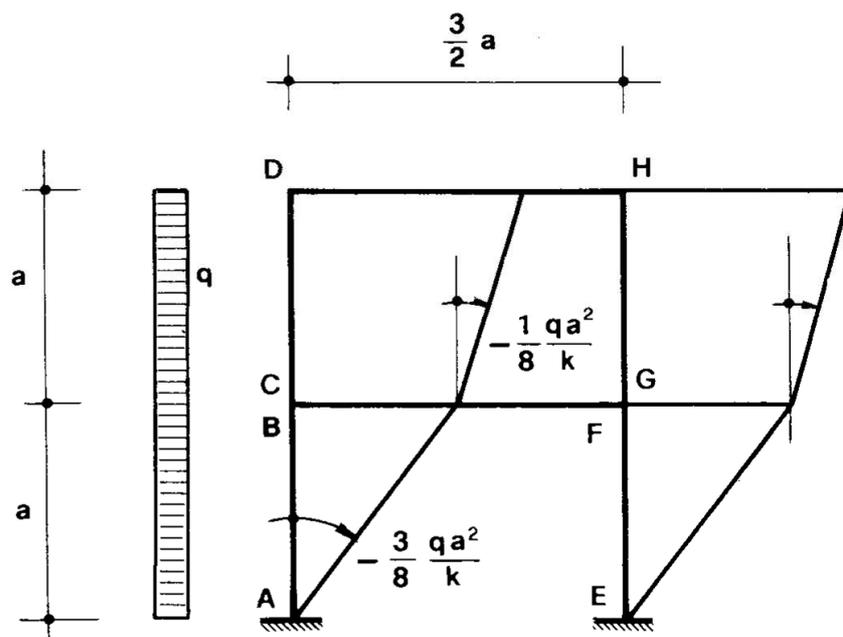


Figura 29.3.

conducono al sistema

$$\frac{3}{2} qa^2 + 4k\varphi_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} qa^2 + 4k\varphi_2 = 0$$

da cui

$$\varphi_1 = -\frac{3}{8} \frac{qa^2}{k}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{8} \frac{qa^2}{k}$$

c) un carico q agente secondo y impegna il traverso superiore; q è uniformemente distribuito (fig. 29.4).

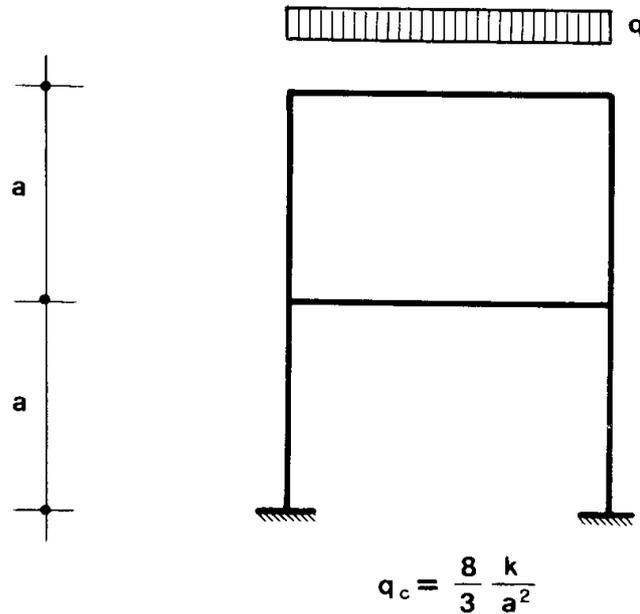


Figura 29.4.

Risulta

$$\begin{aligned} v_D = v_H &= a \frac{\varphi_1^2}{2} + a \frac{\varphi_{CD}^2}{2} = \\ &= \frac{a}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned}$$

$$E_t = -\frac{qa}{2} \cdot \frac{3}{2} a (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 2k (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

conducono al sistema

$$2\varphi_1 (-3qa^2 + 8k) = 0$$

$$2\varphi_2 (-3qa^2 + 8k) = 0.$$

Per

$$q = \frac{8}{3} \frac{k}{a^2}$$

è $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$; nessun legame esiste tra φ_1 e φ_2 .

Problema n. 30.

La trave della fig. 30.1 poggia su un letto elastico alla Winkler, dove quindi

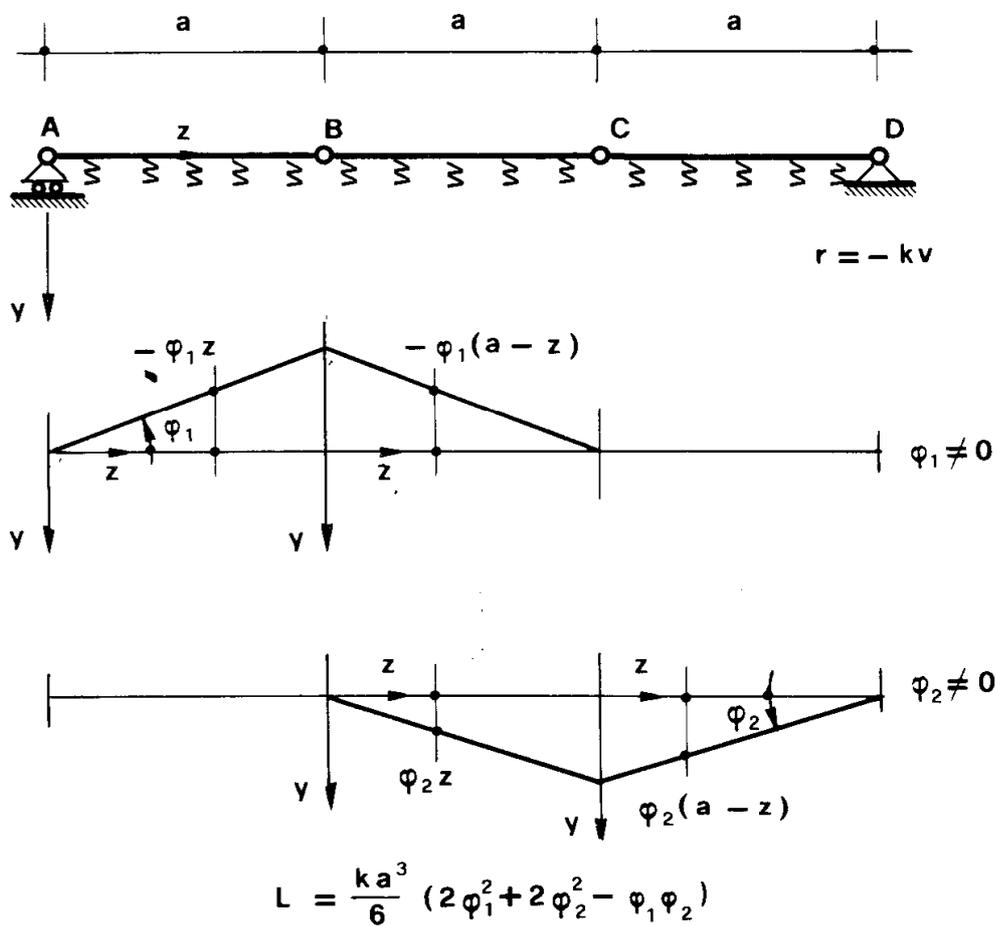


Figura 30.1.

$$r = -kv$$

E' questo il caso della trave di fondazione molto rigida su un suolo molto cedevole, o anche del ponte su galleggianti, classico in arte mi-

litare. La struttura presenta $n = 2$; come coordinate lagrangiane si assumono le rotazioni dei tratti estremi AB e CD .

Nel tratto AB è

$$v = -\varphi_1 z$$

$$L_{AB} = \frac{1}{2} \int_0^a r v dz = \frac{k}{2} \int_0^a v^2 dz = \frac{ka^3}{6} \varphi_1^2.$$

Nel tratto BC è, spostando l'origine del riferimento in B ,

$$v = -\varphi_1 (a - z) + \varphi_2 z$$

$$\begin{aligned} L_{BC} &= \frac{k}{2} \int_0^a [\varphi_1^2 (a - z)^2 + \varphi_2^2 z^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 z (a - z)] dz = \\ &= \frac{ka^3}{6} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2). \end{aligned}$$

Nel tratto CD è, spostando l'origine del riferimento in C ,

$$v = \varphi_2 (a - z)$$

$$L_{CD} = \frac{k}{2} \int_0^a \varphi_2^2 (a - z)^2 dz = \frac{ka^3}{6} \varphi_2^2.$$

Quindi il letto contiene un'energia di deformazione fornita da

$$L = \frac{ka^3}{6} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2). \quad (130)$$

a) una forza F verticale agisce sulla cerniera B (fig. 30.2).

Si ha

$$E_t = Fa\varphi_1 + \frac{ka^3}{6} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2)$$

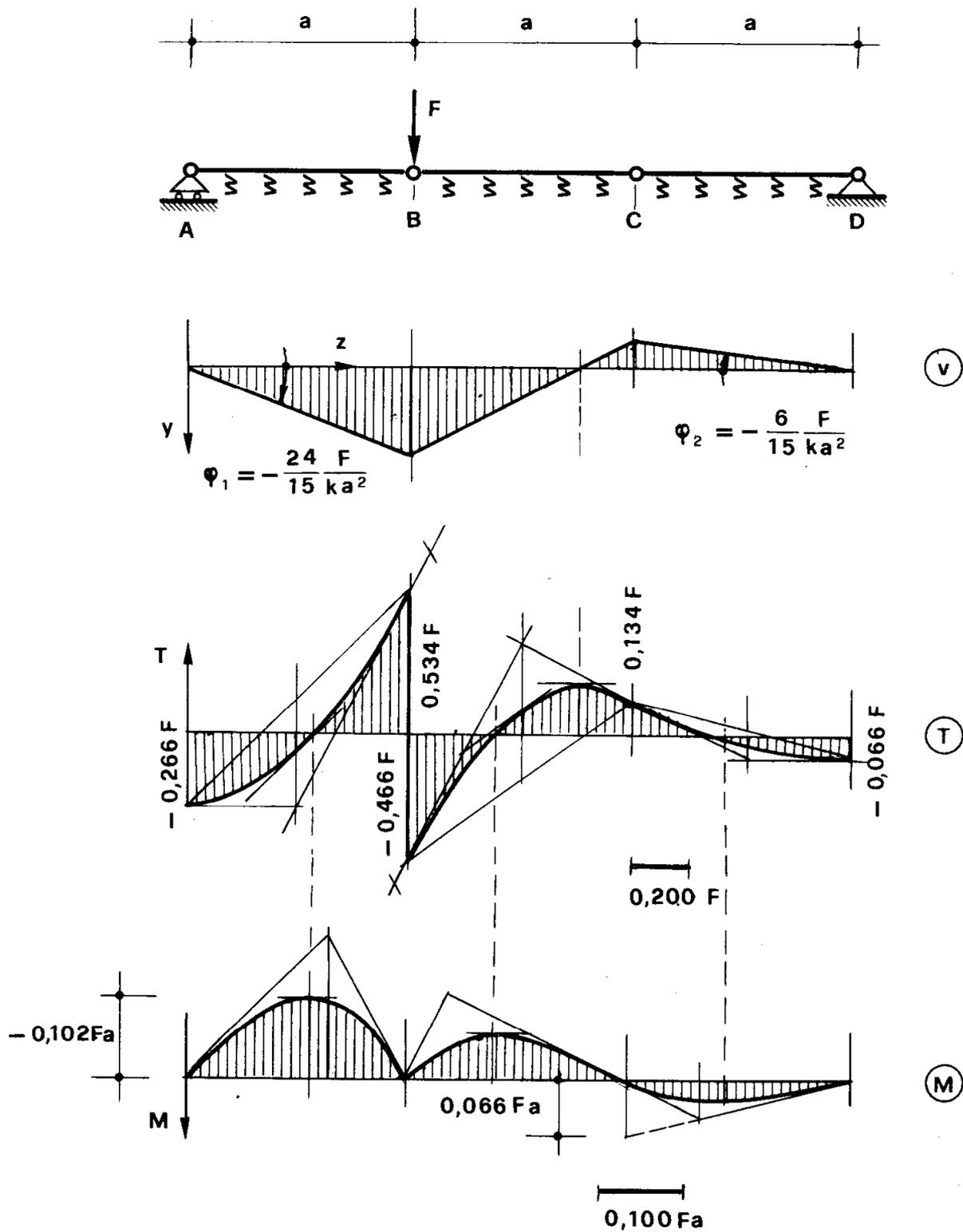


Figura 30.2

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = Fa + \frac{ka^3}{6} (4\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = \frac{ka^3}{6} (4\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

da cui

$$\varphi_1 = -\frac{24}{15} \frac{F}{ka^2}$$

$$\varphi_2 = -\frac{6}{15} \frac{F}{ka^2}$$

I carichi r presentano i seguenti estremi

$$r_B = -k v_B = -\frac{24}{15} \frac{F}{ka^2} ka = -\frac{24}{15} \frac{F}{a}$$

$$r_C = -k v_C = \frac{6}{15} \frac{F}{ka^2} ka = \frac{6}{15} \frac{F}{a}$$

Quindi i carichi rdz equivalgono, sui tre tratti rigidi, alle forze concentrate

	S	d'	d''
AB	$-0,8F$	$\frac{2}{3} a$	$\frac{1}{3} a$
BC	$-0,8F$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{2}{3} a$
	$0,2F$	$\frac{2}{3} a$	$\frac{1}{3} a$
CD	$0,2F$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{2}{3} a$

dove d' e d'' sono i moduli delle distanze della forza dagli estremi di sinistra e di destra del tratto.

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno a B del tratto AB si scrive

$$R_A a - 0,8 F \cdot \frac{a}{3} = 0$$

da cui

$$R_A = 0,266 F .$$

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno a C del tratto CD si scrive

$$- R_D a - 0,2 F \cdot \frac{a}{3} = 0$$

da cui

$$R_D = - 0,066 F .$$

Si ha quindi

$$T_A = - R_A = - 0,266 F$$

$$T_{Bs} = T_A + 0,8 F = 0,534 F$$

$$T_{Bd} = T_{Bs} - F = - 0,466 F$$

$$T_C = T_{Bd} + 0,8 F - 0,2 F = 0,134 F$$

$$T_D = R_D = - 0,066 F .$$

Nella fig. 30.2 è disegnato il diagramma del taglio; esso, poichè $r = - kv$ è una funzione lineare in ciascuno dei tratti AB , BC e CD , è una funzione parabolica quadratica in ciascuno degli stessi tratti. Poichè le tangenti a $T(z)$ in A e D sono orizzontali ($r_A = r_D = 0$), risultano note anche le tangenti in B e C , ed il diagramma si costruisce agevolmente.

Nella stessa fig. 30.2 è disegnato il diagramma del momento $M(z)$; esso è costituito da tre parabole cubiche nei tratti AB , BC e CD . La sezione di estremo del momento in AB è quella dove $T = 0$; l'ascissa z di tale sezione è quindi definita dalla condizione

$$- 0,266 F + \frac{24}{15} \frac{F}{a^2} z \cdot \frac{z}{2} = 0$$

da cui

$$z = 0,576 a$$

dove risulta

$$\begin{aligned} M &= - 0,266 Fz + \frac{24}{15} \frac{F}{a^2} \frac{z^2}{2} \frac{z}{3} = \\ &= - 0,266 Fz + \frac{4}{15} \frac{Fz^3}{a^2} = - 0,102 Fa . \end{aligned}$$

Analogamente si opera in BC e CD .

Le tangenti in $ABCD$ sono fornite dai corrispondenti valori del taglio

$$\left(\frac{dM}{dz} = T \right) .$$

b) una distorsione $D_{\varphi S} < 0$ agisce nella sezione S del tratto BC (fig. 30.3).

Poichè non agiscono forze applicate, è $P = 0$. D'altro canto, in L compaiono i termini in $\Delta\varphi^* = D_{\varphi S}$: l'equazione generica

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$$

contiene perciò un termine noto.

La deformata dipende da tre coordinate lagrangiane, φ_1 , φ_2 , e $\Delta\varphi^*$. Effettuando l'integrale

$$L = \frac{k}{2} \int_A^B v^2 dz + \frac{k}{2} \int_B^C v^2 dz + \frac{k}{2} \int_C^D v^2 dz$$

si ha

$$\begin{aligned} L &= ka^3 (0,3333 \varphi_1^2 + 0,3333 \varphi_2^2 - 0,1666 \varphi_1 \varphi_2 + \\ &+ 0,0082 \Delta\varphi^{*2} - 0,0617 \varphi_1 \Delta\varphi^* + 0,0493 \varphi_2 \Delta\varphi^*) . \end{aligned}$$

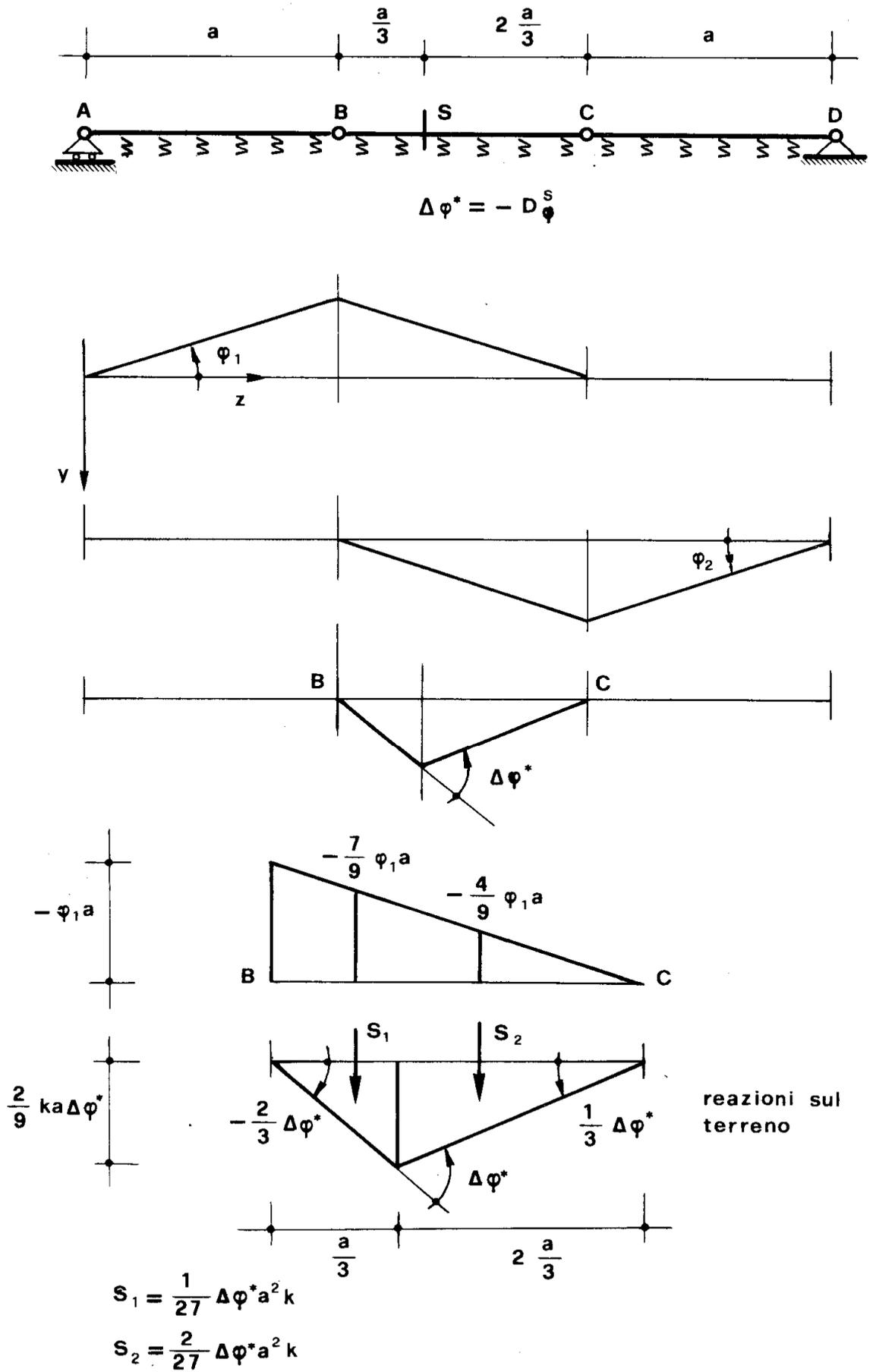


Figura 30.3

Alla stessa espressione può giungersi sommando alla (130) i termini dovuti all'energia propria di $\Delta\varphi^*$, ed a quella di scambio tra $\Delta\varphi^*$ e φ_1 , e tra $\Delta\varphi^*$ e φ_2 . Le reazioni sul terreno dovute a $\Delta\varphi^*$ (fig. 30.3) equivalgono tra B ed S alla forza concentrata

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2}{9} k a \Delta\varphi^* = \frac{1}{27} k a^2 \Delta\varphi^* ,$$

e tra S e C alla forza concentrata

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{9} k a \Delta\varphi^* = \frac{2}{27} k a^2 \Delta\varphi^* .$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} L_{\Delta\varphi} &= \frac{1}{2} S_1 \cdot \frac{2}{3} \frac{2}{9} a \Delta\varphi^* + \frac{1}{2} S_2 \cdot \frac{2}{3} \frac{2}{9} a \Delta\varphi^* = \\ &= \frac{2}{27} a \Delta\varphi^* (S_1 + S_2) = 0,00823 k a^3 \Delta\varphi^{*2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\Delta\varphi, \varphi_1} &= - S_1 \cdot \frac{7}{9} \varphi_1 a - S_2 \cdot \frac{4}{9} \varphi_1 a = \\ &= - \frac{\varphi_1 a}{9} (7 S_1 + 4 S_2) = - 0,06172 k a^3 \varphi_1 \Delta\varphi^* , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\Delta\varphi, \varphi_2} &= S_1 \cdot \frac{2}{9} \varphi_2 a + S_2 \cdot \frac{5}{9} \varphi_2 a = \\ &= \frac{\varphi_2 a}{9} (2 S_1 + 5 S_2) = 0,04938 k a^3 \varphi_2 \Delta\varphi^* . \end{aligned}$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

conducono al sistema

$$\begin{aligned} 0,6666 \varphi_1 - 0,1666 \varphi_2 &= 0,0617 \Delta\varphi^* \\ - 0,1666 \varphi_1 + 0,6666 \varphi_2 &= - 0,0494 \Delta\varphi^* \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\varphi_1 = 0,0790 \Delta\varphi^*$$

$$\varphi_2 = - 0,0543 \Delta\varphi^* .$$

Si osservi che φ_1 e φ_2 sono indipendenti sia dalla rigidezza k che dalla lunghezza a .

I carichi r (sulla terra) presentano i seguenti estremi

$$r_B = + k v_B = 0,0790 k a \Delta\varphi^*$$

$$r_C = + k v_C = 0,0543 k a \Delta\varphi^*$$

$$r_S = + k v_S = \frac{2}{3} r_B + \frac{1}{3} r_C = 0,2222 k a \Delta\varphi^* .$$

I carichi rdz equivalgono, sui tre tratti rigidi, alle forze concentrate

	$S : \Delta\varphi^* a^2 k$	d'	d''
AB	0,03950	$\frac{2}{3} a$	$\frac{1}{3} a$
BC	0,03950	$\frac{1}{3} a$	$\frac{2}{3} a$
	0,02715	$\frac{2}{3} a$	$\frac{1}{3} a$
	- 0,03703	$\frac{2}{9} a$	$\frac{7}{9} a$
	- 0,07407	$\frac{5}{9} a$	$\frac{4}{9} a$
CD	0,02715	$\frac{1}{3} a$	$\frac{2}{3} a$

dove d' e d'' sono i moduli delle distanze della forza dagli estremi di sinistra e di destra del tratto. La condizione di equilibrio alla rotazione intorno a B del tratto AB si scrive

$$R_A a + 0,0395 \Delta\varphi^* a^2 k \cdot \frac{a}{3} = 0$$

da cui

$$R_A = - 0,0132 \Delta\varphi^* a^2 k .$$

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno a C del tratto CD si scrive

$$- R_D a - 0,0272 \Delta\varphi^* a^2 k \cdot \frac{a}{3} = 0$$

da cui

$$R_D = - 0,0090 \Delta\varphi^* a^2 k .$$

Si ha quindi

$$T_A = - R_A = 0,0132 \Delta\varphi^* a^2 k$$

$$T_B = T_A - S_{AB} = - 0,0263 \Delta\varphi^* a^2 k$$

$$T_C = T_B - S_{BC} = 0,0181 \Delta\varphi^* a^2 k$$

$$T_D = R_D = - 0,0090 \Delta\varphi^* a^2 k .$$

Nella fig. 30.4 è disegnato il diagramma del taglio; esso è costituito da una parabola quadratica in ciascuno dei tratti AB , BS , SC , e CD . Le tangenti sotto A e D sono orizzontali, quindi si costruiscono ovviamente le tangenti in B e C (le tangenti in A e B si intersecano sulla mezzeria di AB , le tangenti in C e D sulla mezzeria di CD). Poichè le tangenti in B ed S si intersecano sulla mezzeria di BS , e le tangenti in S e C sulla mezzeria di SC , è nota anche la tangente in S .

Nella fig. 30.4 è disegnato anche il diagramma del momento: esso si annulla in A , B , C e D , ed è costituito da parabole cubiche in ciascuno dei tratti AB , BS , SC e CD ; le tangenti in $ABCD$ sono fornite dai corrispondenti valori del taglio. I valori estremi di M sono in corrispondenza dei tre punti di taglio nullo, i flessi in corrispondenza dei due punti di massimo e minimo taglio.

c) un carico q agente secondo y è distribuito uniformemente su tutta la luce AD (fig. 30.5).

Poichè esiste simmetria rispetto alla mezzeria, si può semplificare la (130) ponendo $\varphi_2 = - \varphi_1 = \varphi$:

$$L = \frac{5}{6} k a^3 \varphi^2 .$$

Inoltre è

$$A_q = 2 \frac{1}{2} \varphi a \cdot a + \varphi a \cdot a = 2 \varphi a^2 .$$

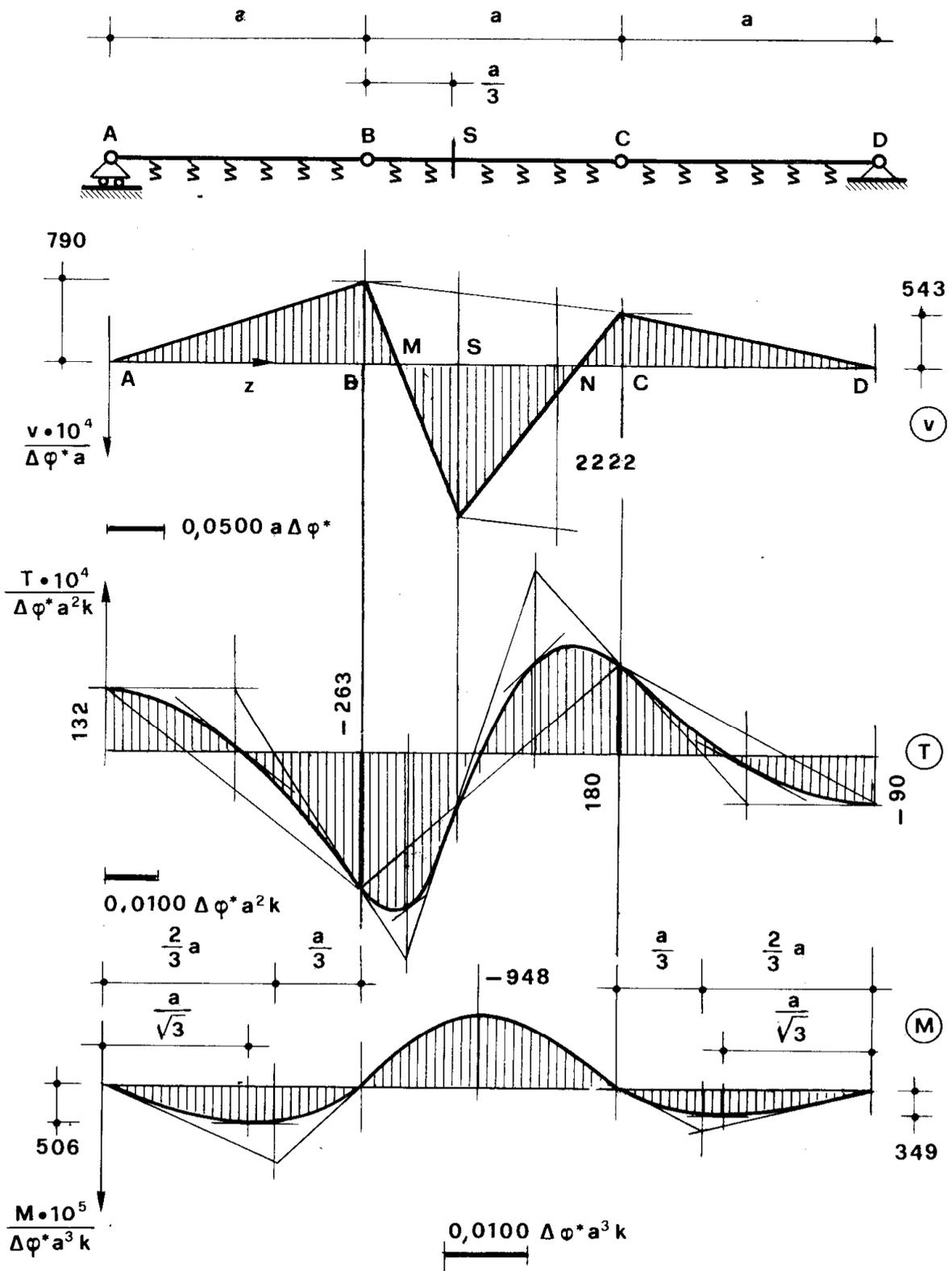


Figura 30.4

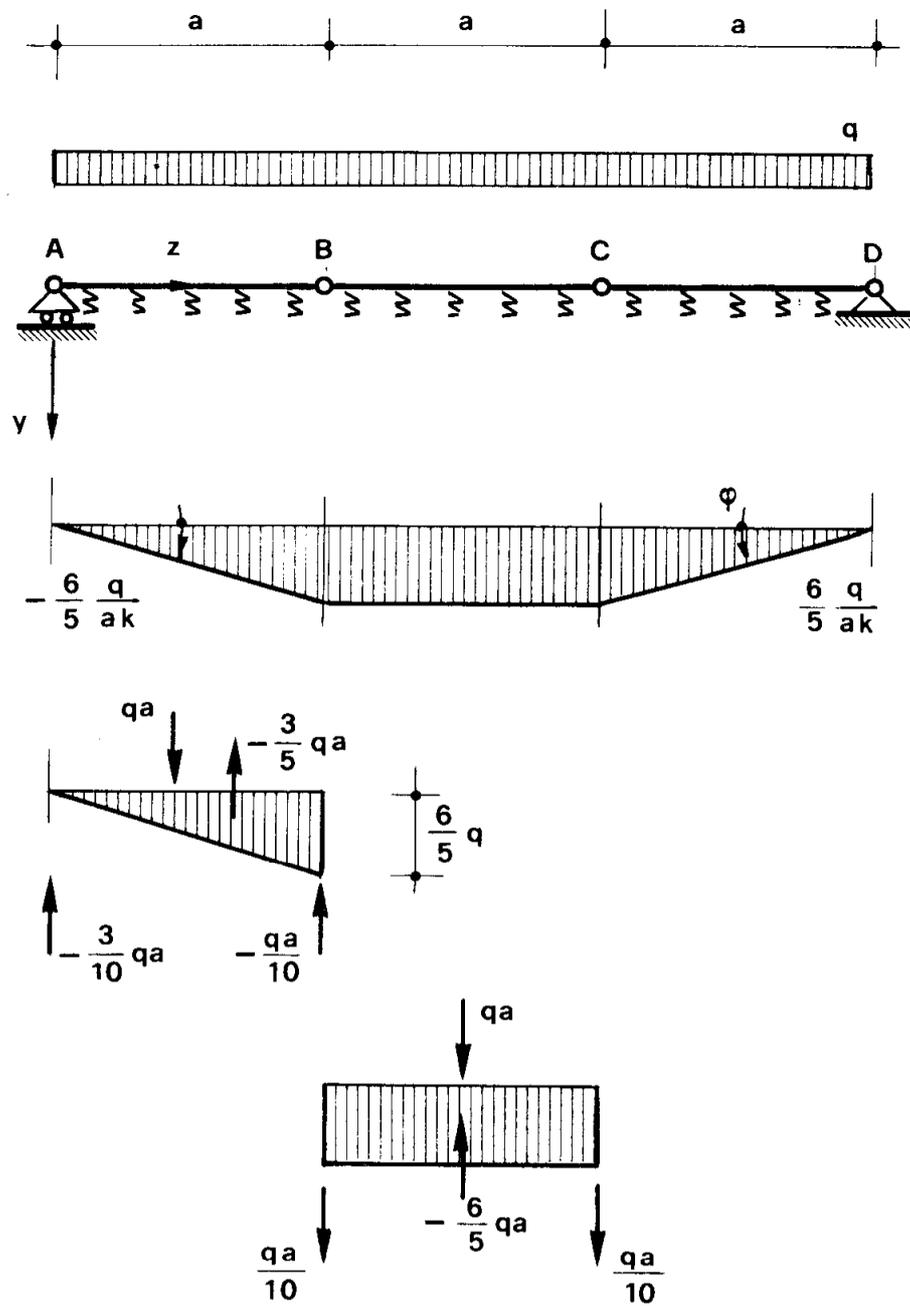


Figura 30.5

Quindi

$$E_t = - 2 q \varphi a^2 + \frac{5}{6} k a^3 \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - 2 q a^2 + \frac{5}{3} k a^3 \varphi$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{6}{5} \frac{q}{a k} .$$

Nella fig. 30.5 sono riportate le risultanti dei carichi e le reazioni per i singoli tratti; si affida al lettore la costruzione dei diagrammi $T(z)$ ed $M(z)$.

d) una coppia \mathfrak{M} agisce nella mezzeria del tratto BC (fig. 30.6). Per l'antisimmetria si può semplificare la (130) ponendo $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$

$$L = \frac{1}{2} k a^3 \varphi^2$$

Poichè è

$$\varphi_{BC} = - 2 \varphi$$

si può scrivere

$$P = 2 \mathfrak{M} \varphi$$

$$E_t = 2 \mathfrak{M} \varphi + \frac{1}{2} k a^3 \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = 2 \mathfrak{M} + k a^3 \varphi$$

da cui

$$\varphi_0 = - \frac{2 \mathfrak{M}}{k a^3} .$$

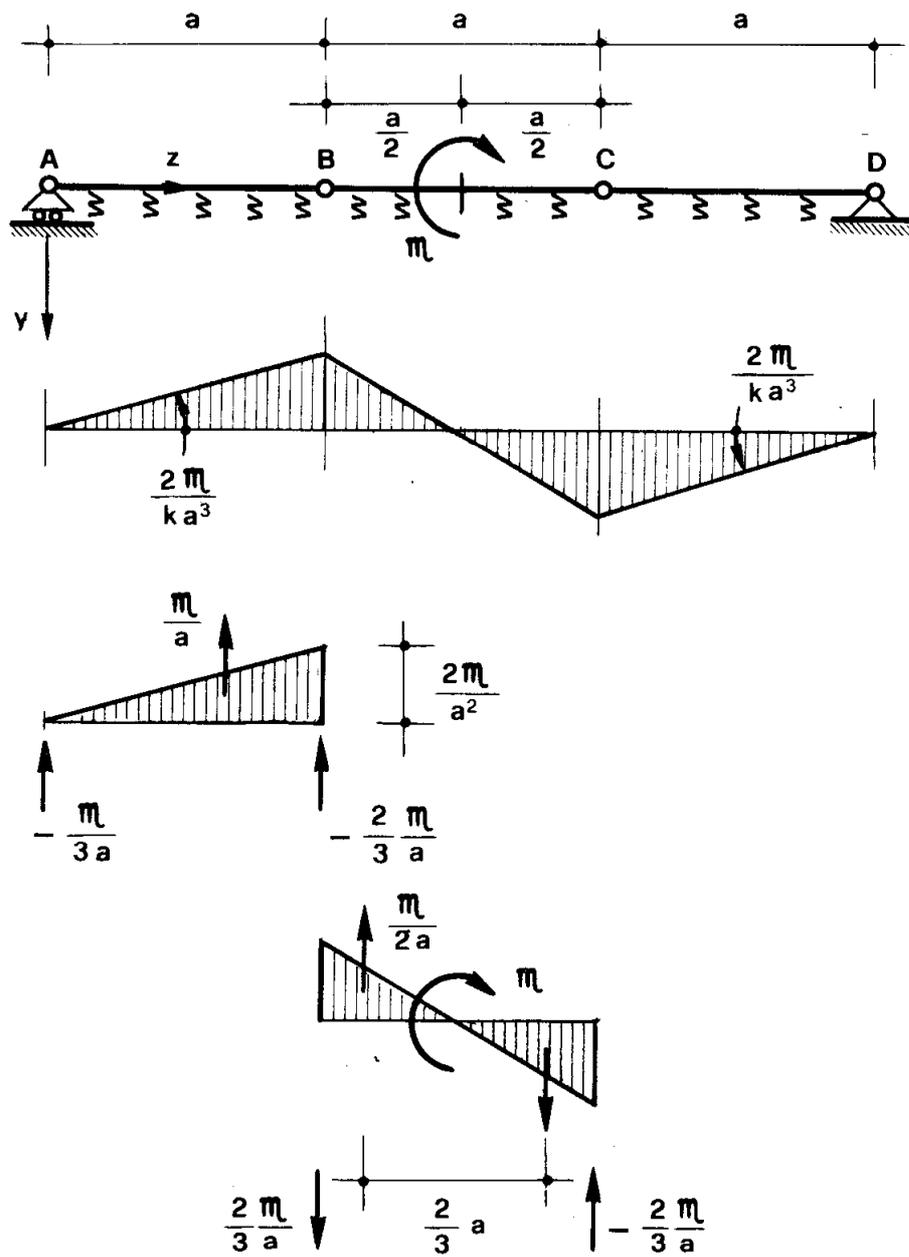


Figura 30.6

Nella fig. 30.6 la coppia \mathfrak{M} è negativa, φ_0 risulta positiva: tracci il lettore i diagrammi $T(z)$ ed $M(z)$, sulla scorta dei valori delle reazioni e dei carichi che appaiono nella stessa fig. 30.6.

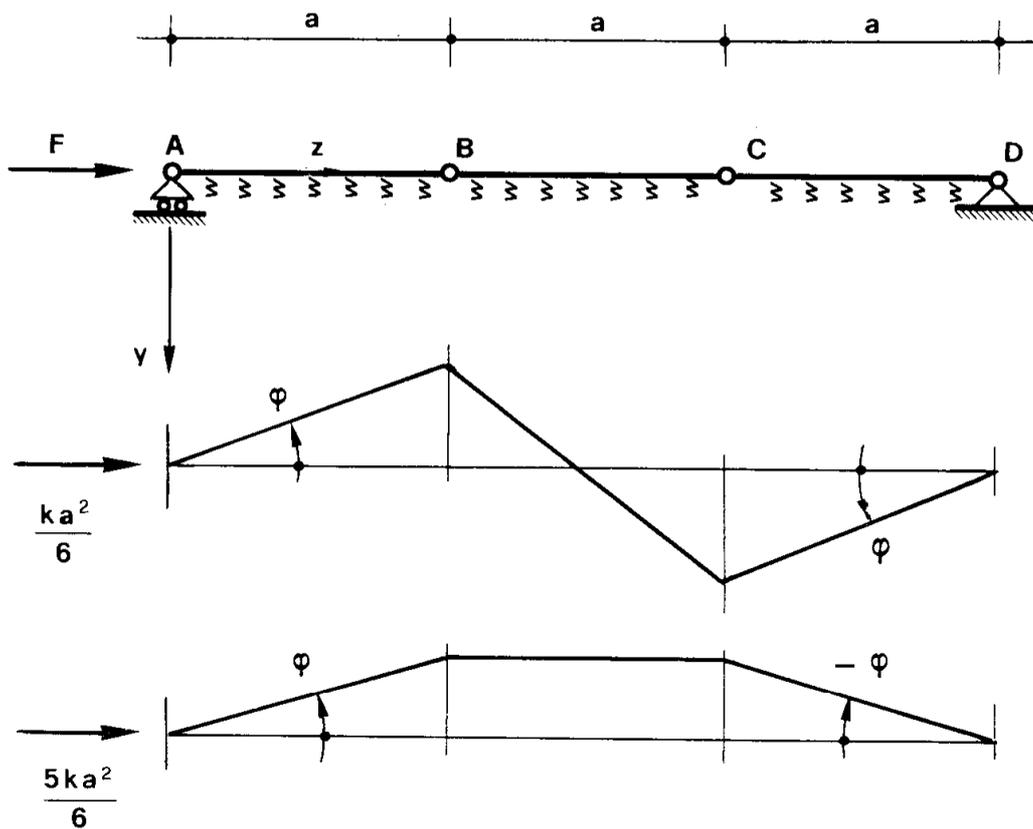


Figura 30.7.

e) una forza F agisce in A secondo z (fig. 30.7).
Risulta (fig. 30.7)

$$\begin{aligned}
 w_A &= a \frac{\varphi_1^2}{2} + a \frac{\varphi_{BC}^2}{2} + a \frac{\varphi_2^2}{2} = \\
 &= \frac{a}{2} [\varphi_1^2 + (-\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \varphi_2^2] = \\
 &= a (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2)
 \end{aligned}$$

e quindi (130)

$$E_t = -Fa (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2) + \frac{ka^3}{6} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

conducono al sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1 (4ka^3 - 12Fa) - \varphi_2 (ka^3 + 6Fa) &= 0 \\ -\varphi_1 (ka^3 + 6Fa) + \varphi_2 (4ka^3 - 12Fa) &= 0 \end{aligned} \quad (131)$$

L'equazione $\Delta = 0$ presenta le soluzioni

$$F = F_1 = \frac{1}{6} ka^2$$

$$F = F_2 = \frac{5}{6} ka^2.$$

Per $F = \frac{1}{6} ka^2$ (carico critico) il sistema (131) si scrive

$$\begin{aligned} 2ka^3 \varphi_1 - 2ka^3 \varphi_2 &= 0 \\ -2ka^3 \varphi_1 + 2ka^3 \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'} = 1.$$

Per $F = \frac{5}{6} ka^2$ il sistema (131) si scrive

$$-6ka^3\varphi_1 - 6ka^3\varphi_2 = 0$$

$$-6ka^3\varphi_1 - 6ka^3\varphi_2 = 0$$

la cui soluzione è

$$\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'} = -1.$$

Quindi al carico critico corrisponde una deformata antisimmetrica, al carico F_2 una deformata simmetrica.

Problema n. 31.

La trave rigida su letto elastico della fig. 31 presenta una defor-

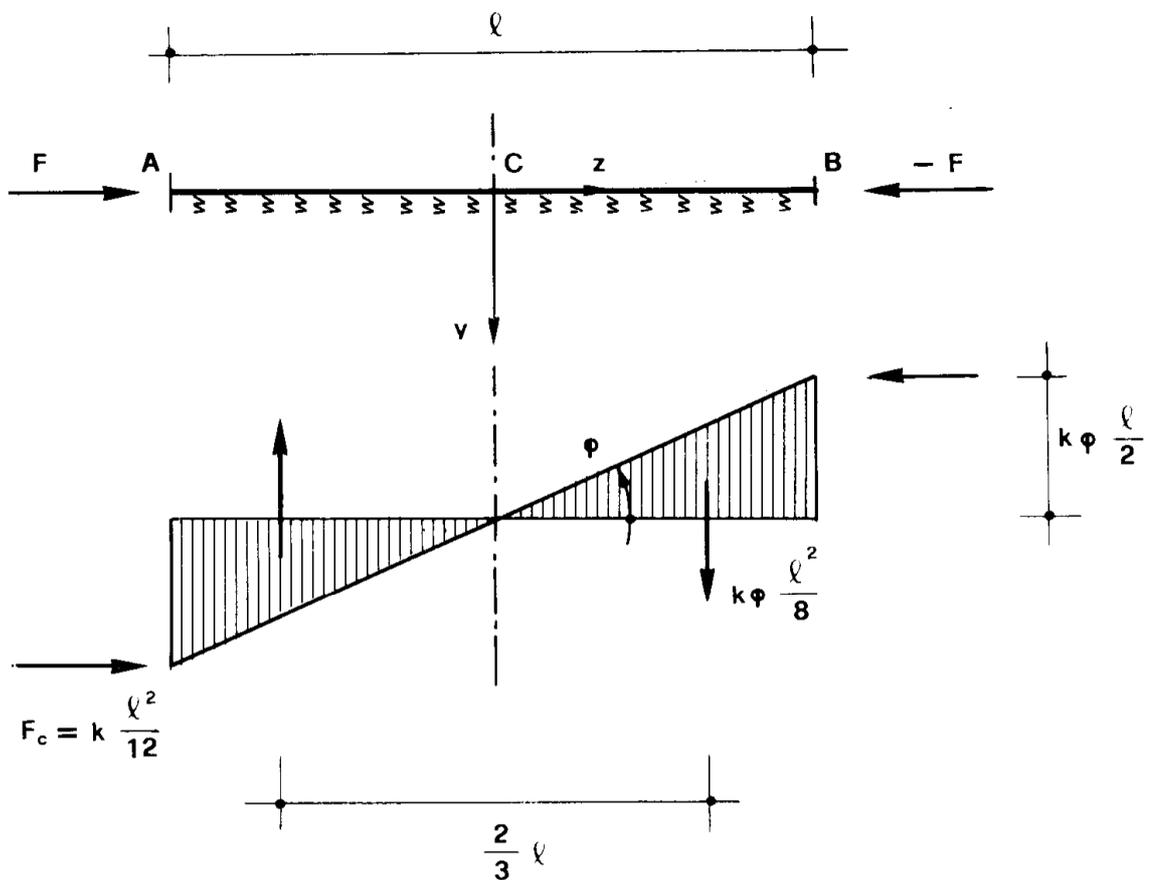


Figura 31.

mata dipendente da due coordinate lagrangiane; come tali possono essere

scelte lo spostamento v_C del punto C di mezzeria e la rotazione φ intorno a tale punto.

Il carico applicato che appare nella fig. 31 è costituito da due forze uguali e contrarie F e $-F$, applicate alle due estremità A e B ; esse sono chiaramente del tipo assiale. Risulta

$$w_B - w_A = -l \frac{\varphi^2}{2}$$

e quindi

$$P = -Fw_A + Fw_B = -Fl \frac{\varphi^2}{2}.$$

E' poi

$$L = \frac{k}{2} \int_{-l/2}^{l/2} v^2 dz = \frac{k}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (v_C - \varphi z)^2 dz = k \left(v_C^2 \frac{l}{2} + \varphi^2 \frac{l^3}{24} \right).$$

E' quindi

$$E_t = -Fl \frac{\varphi^2}{2} + k \left(v_C^2 \frac{l}{2} + \varphi^2 \frac{l^3}{24} \right).$$

Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_t}{\partial v_C} = 0$$

si traducono nelle equazioni

$$-\varphi Fl + \varphi \frac{kl^3}{12} = 0$$

$$v_C kl = 0$$

da cui

$$v_C = 0,$$

e $\varphi \neq 0$ se e solo se

$$F = F_c = \frac{kl^2}{12}. \quad (133)$$

Alla (133) può giungersi attraverso il metodo euleriano. Data la simmetria della struttura, possibili deformate sono quelle simmetriche o antisimmetriche (e cioè nel nostro caso, una caratterizzata dalla sola v_C , l'altra dalla sola φ). Se la struttura non fosse simmetrica, tali deformate non potrebbero esistere, almeno in genere. Poichè poi una deformata non antisimmetrica non rispetterebbe la condizione di equilibrio alla traslazione secondo y , l'unica possibile è quella antisimmetrica ($v_C = 0$). Dato φ , si ha (fig. 31)

$$r_A = -k v_A = -k \varphi \frac{l}{2}$$

$$r_B = -k v_B = k \varphi \frac{l}{2};$$

le risultanti dei carichi rdz su AC e BC sono perciò

$$S_1 = k \varphi \frac{l^2}{8}$$

$$S_2 = k \varphi \frac{l^2}{8}.$$

La condizione di equilibrio intorno a C fornisce

$$-k \varphi \frac{l^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l + F \cdot 2 \varphi \frac{l}{2} = 0$$

da cui

$$F = \frac{kl^2}{12}.$$