

Problema n. 11.

Il problema precedente si può risolvere scrivendo le ordinarie equazioni della statica, ed esprimendo  $M_C$  (e quindi  $\Delta\varphi_C$  e  $\varphi$ ) in funzione di

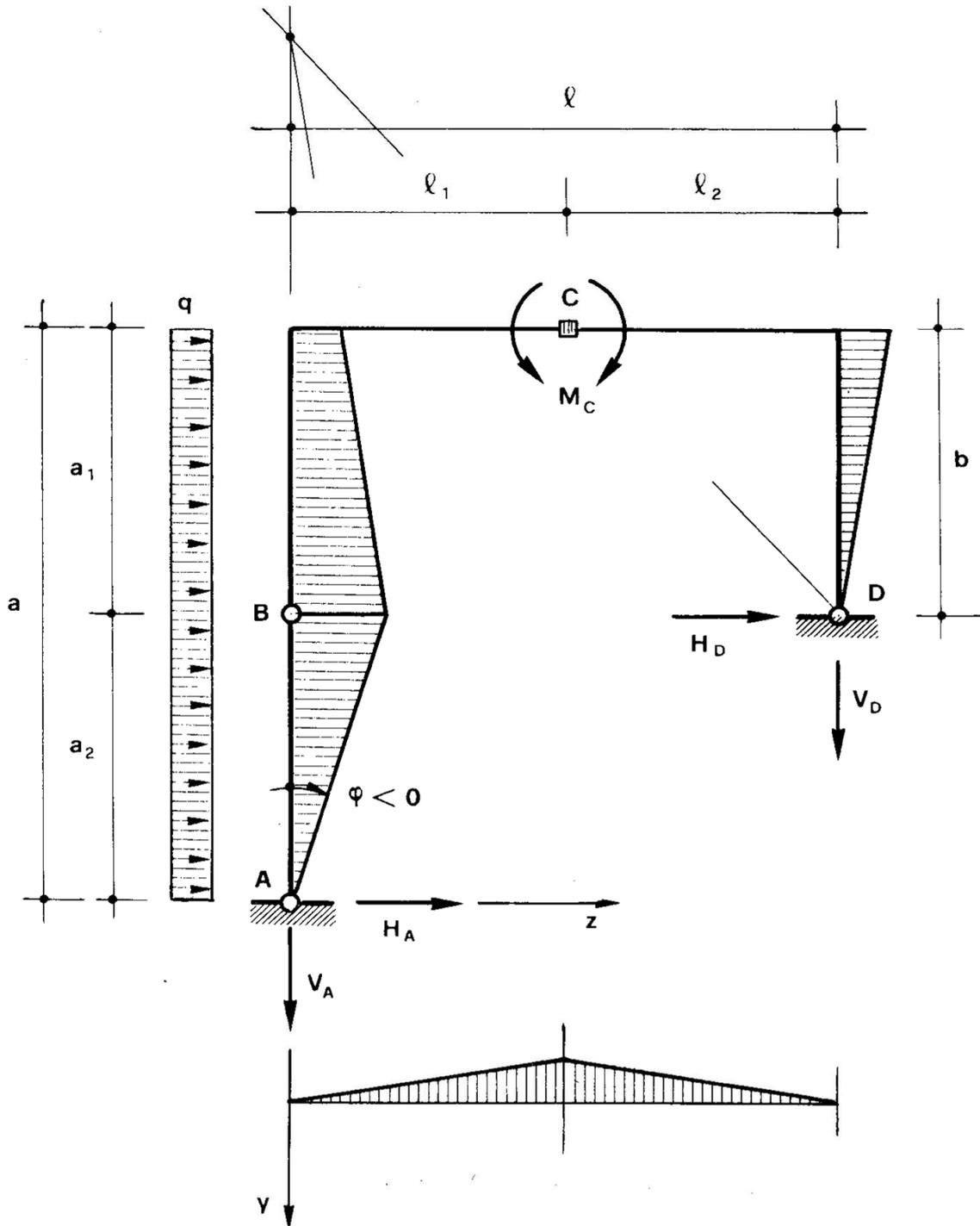


Figura 11.

$q$ . Si ha quindi, per l'equilibrio globale (fig. 11),

$$V_A + V_D = 0$$

$$H_A + H_D + qa = 0$$

$$-\frac{qa^2}{2} - V_D l - H_D (a - b) = 0$$

e, per l'equilibrio alla rotazione del tratto  $AB$  intorno al punto  $B$ ,

$$H_A a_2 + \frac{qa_2^2}{2} = 0 .$$

E' perciò, successivamente,

$$H_A = -\frac{qa_2}{2}$$

$$H_D = q \left( \frac{a_2}{2} - a \right)$$

$$V_D = -V_A = -\frac{q}{2l} (a_2 a - a_2 b - a^2 + 2ab) .$$

Dalla relazione

$$M_C = k_m \Delta' \varphi_C \cdot \varphi = -V_D l_2 + H_D b$$

si trae

$$\varphi = \frac{q}{2lk_m \Delta' \varphi_C} (l_2 a_2 a - l_2 a_2 b - l_2 a^2 + 2l_2 ab + lba_2 - 2lab).$$

(43)

Per  $a_1 = a_2 = l_1 = l_2 = b$  si ha

$$\Delta' \varphi_C = 1$$

$$A'_q = -\frac{5}{4} b^2$$



$$\Delta\varphi_C = \varphi_{Cd} - \varphi_{Cs} = \varphi + \frac{b}{a} \varphi = \frac{l}{a} \varphi$$

$$BB' = AA' = c\varphi_{Cs} = -\frac{b}{a} c\varphi$$

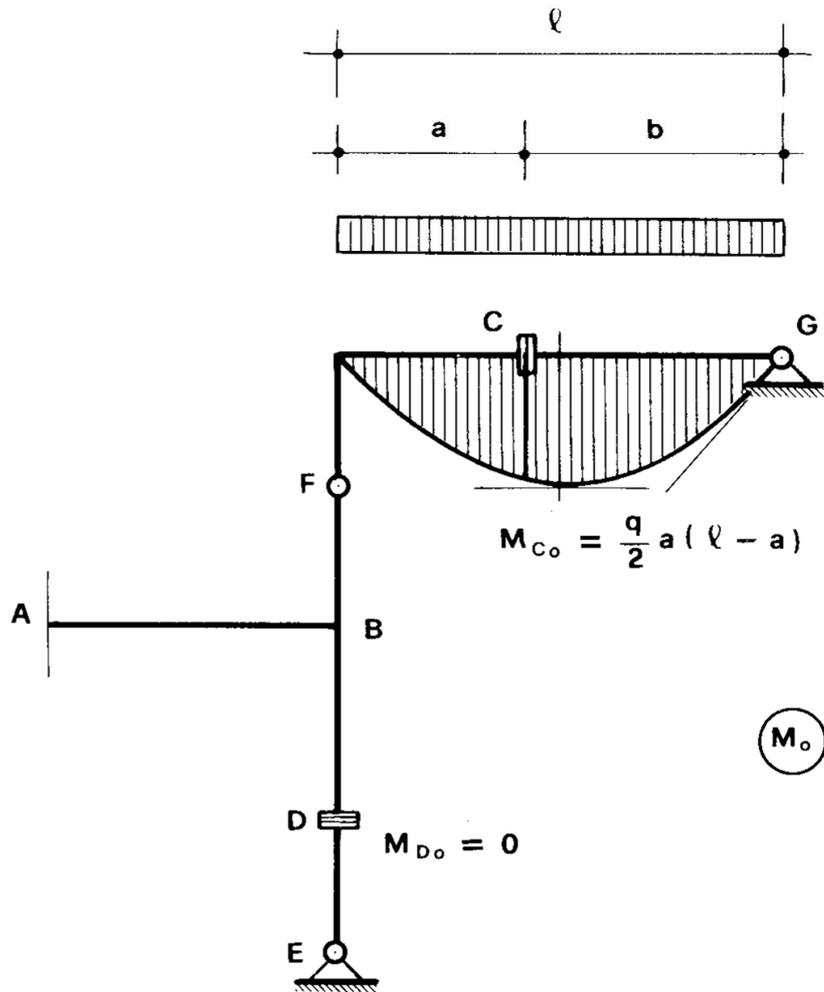


Figura 12.2

$$\Delta\varphi_D = \frac{BB'}{d} = -\frac{bc}{ad} \varphi ;$$

se  $k_D$  e  $k_C$  sono le rigidità dei conchi elastici in  $D$  e  $C$ , si ha

$$E_l = q \frac{bl}{2} \varphi + \frac{k_D}{2} \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \varphi^2 + \frac{k_C}{2} \frac{l^2}{a^2} \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -q \frac{bl}{2} + \left( k_D \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} + k_C \frac{l^2}{a^2} \right) \varphi$$

da cui

$$\varphi_0 = q \frac{bla^2 d^2}{2 (k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2)}$$

2) Lo stesso problema si risolve con il *metodo delle forze* (vedi

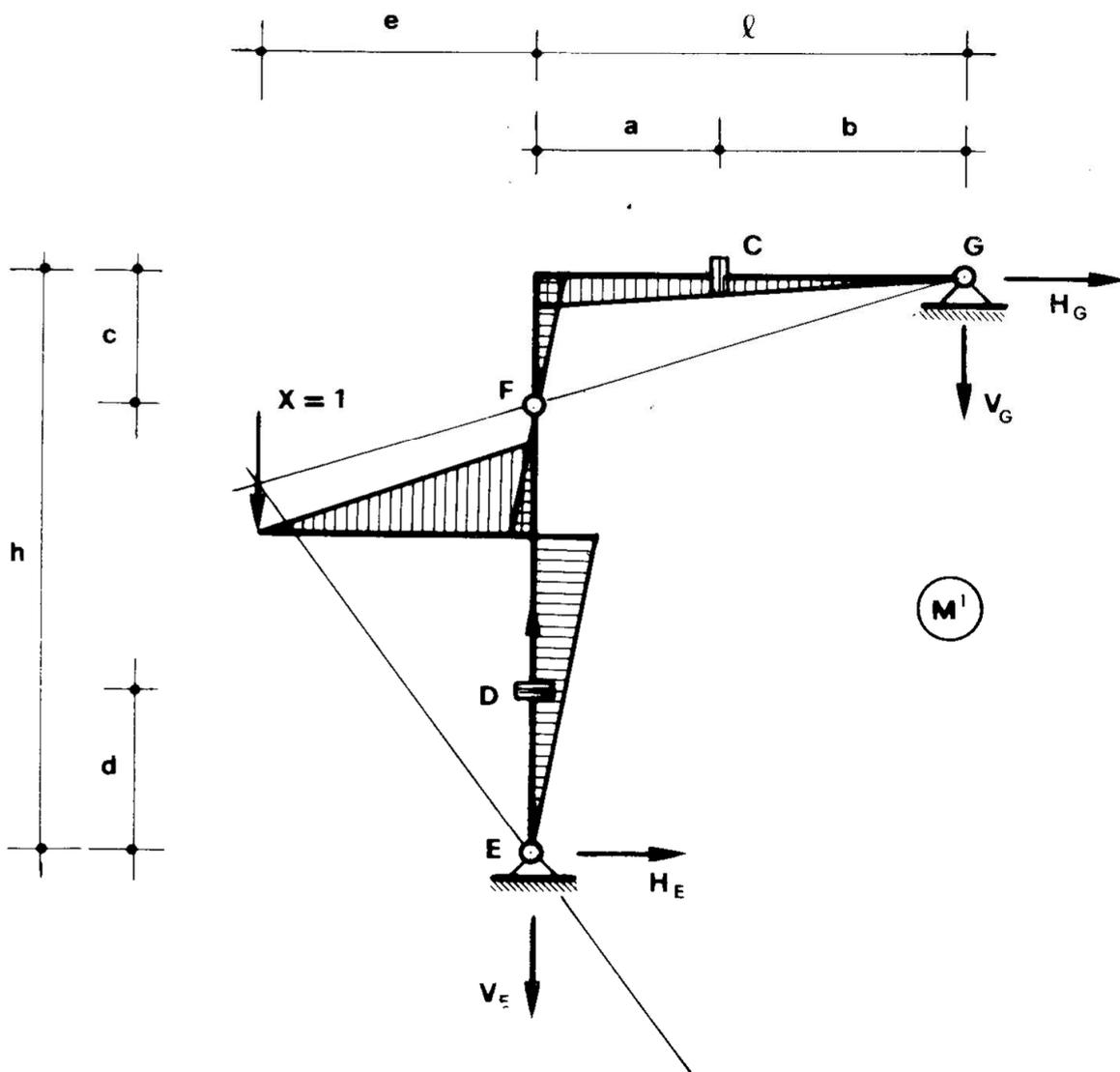


Figura 12.3.

Problemi di Scienza delle Costruzioni, vol. 2) assumendo come incognita iperstatica  $X$  la reazione del carrello  $A$ . Il sistema principale caricato dalle

forze applicate (sistema  $S_0$ ) appare nella fig. 12.2; si ha

$$M_{C_0} = \frac{q}{2} a (l - a) = \frac{q}{2} ab$$

$$M_{D_0} = 0 .$$

Il sistema principale caricato dalla incognita  $X = 1$  (sistema  $S_1$ ) appare nella fig. 12.3. Per l'equilibrio di tutta la struttura si scrivono le due equazioni nei riguardi della traslazione orizzontale e della verticale

$$H_E + H_G = 0 \tag{44}$$

$$V_E + V_G + 1 = 0$$

e quella nei riguardi della rotazione intorno ad  $E$

$$e - H_G h - V_G l = 0 . \tag{45}$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno ad  $F$  del tratto  $FG$  si ha poi

$$- H_G c - V_G l = 0 . \tag{46}$$

Dalla (46) si trae

$$V_G = - H_G \frac{c}{l}$$

e quindi dalla (45)

$$H_G = \frac{e}{h - c} ;$$

successivamente si trae

$$V_G = - \frac{e}{h - c} \frac{c}{l}$$

$$V_E = \frac{cl + ce - hl}{(h - c) l}$$

$$H_E = - \frac{e}{h - c} .$$

E' perciò

$$M'_C = - V_G b = \frac{ebc}{(h - c)l}$$

$$M'_D = - H_E d = \frac{ed}{h - c} .$$

L'espressione del principio dei lavori virtuali è

$$0 = M'_C \Delta\varphi_C + M'_D \Delta\varphi_D ,$$

e cioè

$$0 = \frac{M'_C M_C}{k_C} + \frac{M'_D M_D}{k_D} ,$$

da cui

$$0 = \frac{M'_C}{k_C} (M_{C_0} + X M'_C) + \frac{M'_D}{k_D} (M_{D_0} + X M'_D) .$$

L'equazione in  $X$  si scrive perciò

$$X \left( \frac{M_D'^2}{k_C} + \frac{M_D'^2}{k_D} \right) = - \frac{M_{C_0} M'_C}{k_C}$$

da cui

$$X = - M_{C_0} M'_C \frac{k_D}{k_D M_C'^2 + k_C M_D'^2}$$

e infine

$$X = -\frac{q}{2} \frac{k_D (h - c) a b^2 c l}{e (k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2)} \quad (47)$$

E' quindi

$$M_C = M'_C X + M_{C_0} = \frac{q}{2} \frac{k_C l^2 a b d^2}{k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2} \quad (48)$$

$$M_D = M'_D X = -\frac{q}{2} \frac{k_D l a b^2 c d}{k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2} ,$$

ambidue indipendenti dai valori di  $e$  ed  $h$ .

3) Dalla trattazione eseguita attraverso il principio di stazionarietà della E.P.T. si ha d'altro canto

$$M_C = k_C \Delta \varphi_C = k_C \varphi \frac{l}{a} = \frac{q}{2} \frac{k_C l^2 a b d^2}{k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2}$$

$$M_D = k_D \Delta \varphi_D = -k_D \varphi \frac{bc}{ad} = -\frac{q}{2} \frac{k_D l a b^2 c d}{k_D b^2 c^2 + k_C d^2 l^2} ,$$

valori coincidenti con i (48).

Si mette in evidenza come il calcolo della struttura iperstatica attraverso il principio di stazionarietà della E.P.T. non sia stato altro che il calcolo secondo il *metodo dei cedimenti* (vedi Problemi di Scienza delle Costruzioni, vol. 2), ove il vincolo che si è bloccato è la cerniera in  $C$  e

la relativa equazione di equilibrio si è scritta sfruttando la  $\frac{dE_t}{d\varphi} = 0$ . Come

quindi il principio dei lavori virtuali è lo strumento per eccellenza del metodo delle forze, così il principio di stazionarietà dell'E.P.T. è lo strumento deputato del metodo dei cedimenti; usando il primo si adottano come incognite le  $n$  reazioni iperstatiche, si scrivono le  $n$  equazioni di congruenza, e si sceglie così la soluzione equilibrata e congruente tra le  $\infty$  equilibrate e non congruenti; usando il secondo si adottano come incognite i cedimenti degli  $m$  vincoli bloccati, si scrivono le  $m$  equazioni di equilibrio, e si scelgono così le soluzioni congruenti ed equilibrate tra le  $\infty$  congruenti e non equilibrate.

**Problema n. 13.**

La struttura della fig. 13 è una volta iperstatica, con  $n = 1$ . Il procedimento delle catene cinematiche permette di costruire la deformata; da essa risulta

$$A_q = 5,480 \varphi \text{ m}^2$$

$$\Delta\varphi_B = - 1,187 \varphi$$

$$\Delta\varphi_C = 0,250 \varphi$$

e quindi

$$E_t = - 5,480 q \varphi + \left( \frac{k_B}{2} 1,187^2 + \frac{k_C}{2} 0,250^2 \right) \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - 5,480 q + \varphi (1,409 k_B + 0,062 k_C)$$

$$\varphi_0 = q \frac{5,480}{1,409 k_B + 0,062 k_C}$$

Per

$$q = 2 \text{ tm}^{-1}$$

$$k_B = k_C = 1000 \text{ tm}$$

risulta

$$\varphi_0 = 0,0074 \text{ rad.} = 0,42^\circ$$

e quindi

$$\Delta\varphi_B = - 0,0088$$

$$\Delta\varphi_C = 0,0018$$

$$M_B = - 8,8 \text{ tm}$$

$$M_C = 1,8 \text{ tm}$$

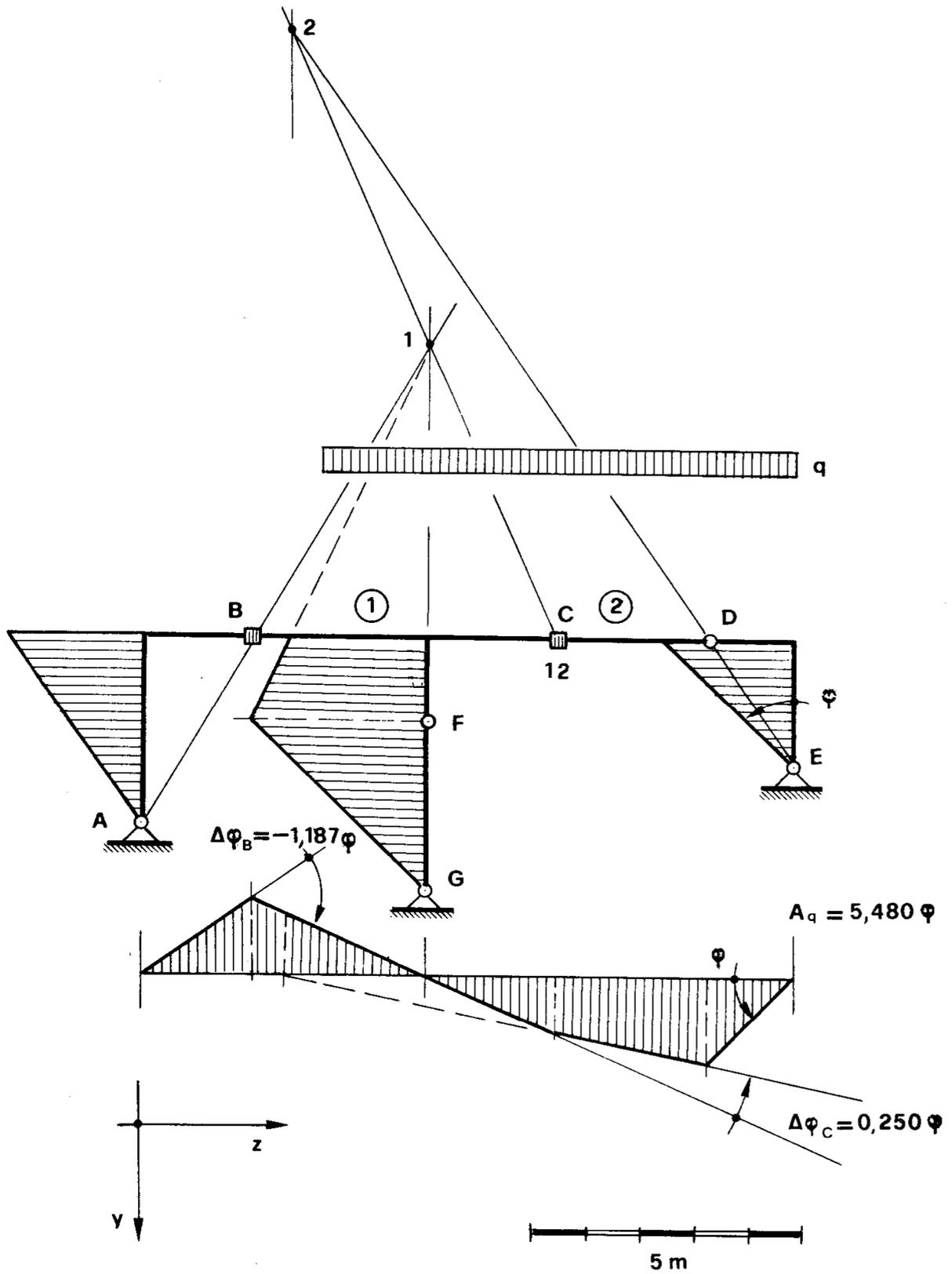


Figura 13

Se si vuole tracciare il diagramma dei momenti basta rendere la struttura isostatica sostituendo uno dei conchi elastici, per es.  $B$ , con una cerniera, e far agire sulle due facce due coppie pari a  $\pm M_B$ : i momenti reali sono quelli generati sulla struttura resa isostatica da  $q$  e dalle coppie  $\pm M_B$ . Per verifica, in  $C$  deve attingersi il valore  $M_C$  già calcolato.

**Problema n. 14.**

La struttura della fig. 14a è una volta iperstatica, con  $n = 1$ . La ri-

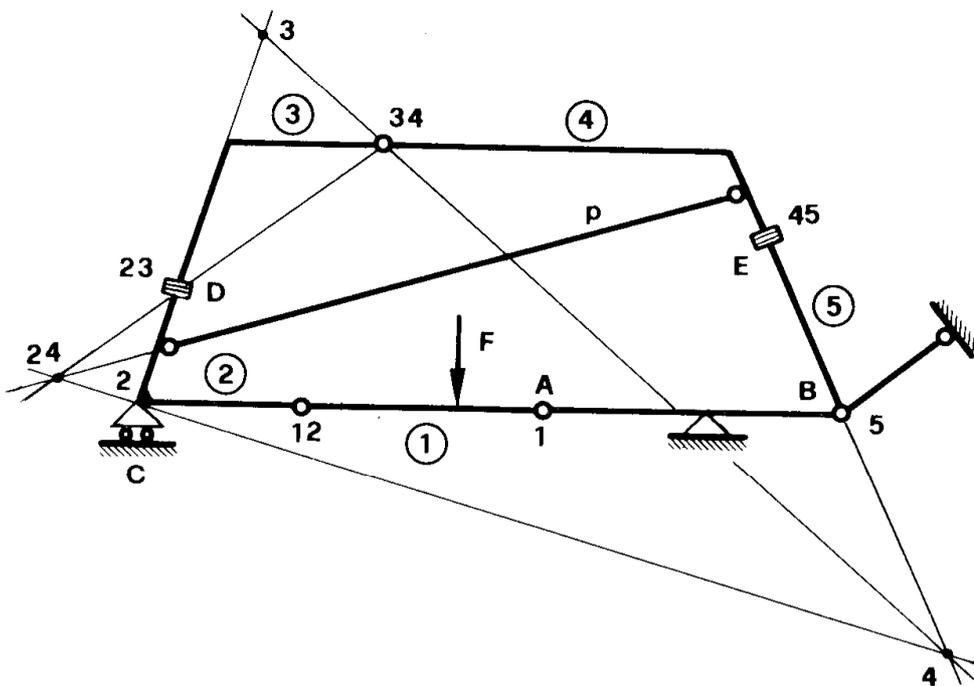


Figura 14.a.

cerca dei centri è effettuata nella fig. 14a, le deformate sono tracciate nella fig. 14b. Si ha, poichè  $AB$  è fisso,

<i>noti</i>	<i>incogniti</i>
1	$2 = r_c \cap 1 \cdot 12$
5	$24 = p \cap 23 \cdot 34$
12	$4 = 2 \cdot 24 \cap 5 \cdot 45$
23	$3 = 2 \cdot 23 \cap 4 \cdot 34$
34	
45	

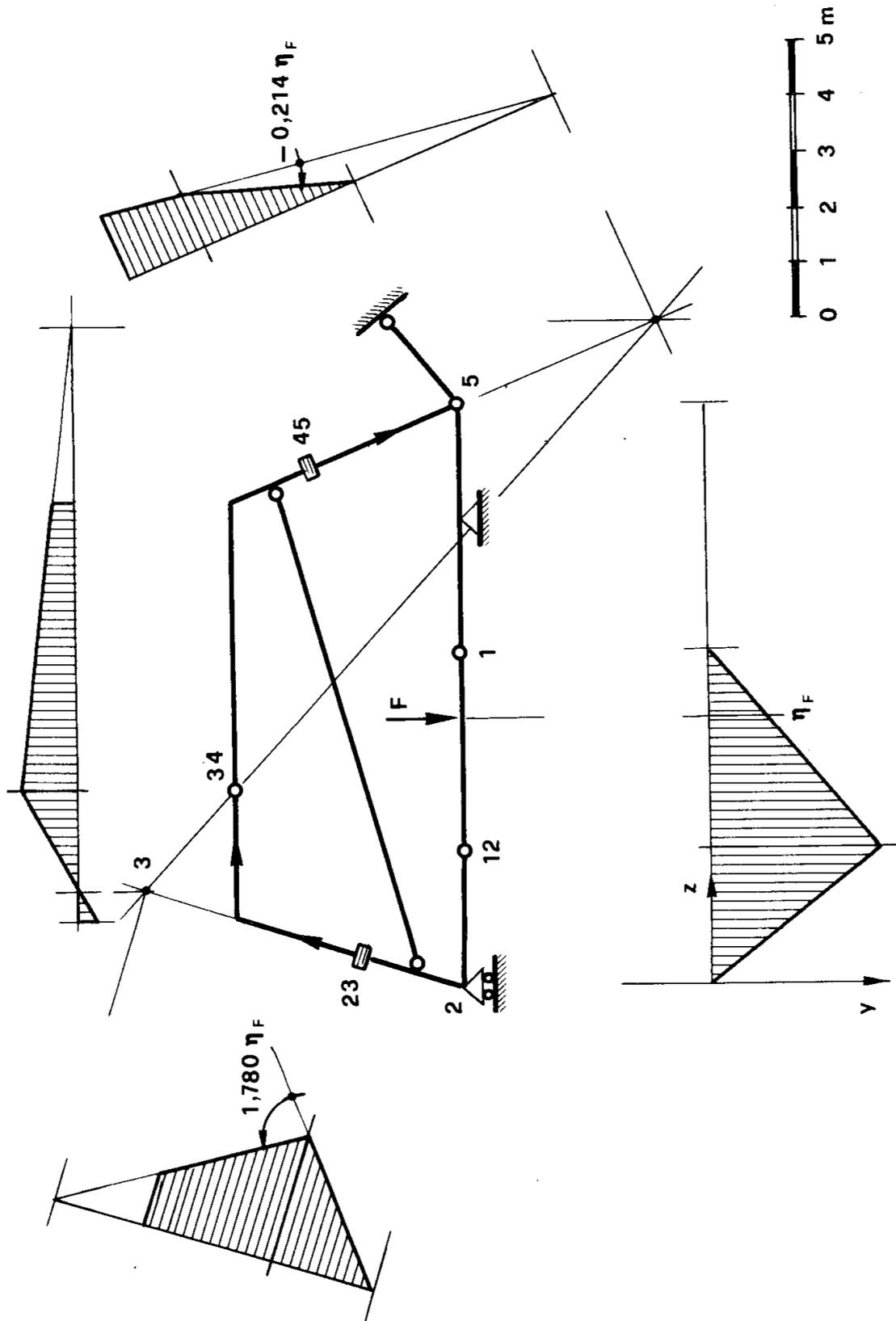


Figura 14b

Dalla fig. 14b si trae

$$\Delta\varphi_D = 1,780 \eta_F$$

$$\Delta\varphi_E = - 0,124 \eta_F ;$$

$\eta_F$  è misurata in metri; il verso di  $t$  è quello riportato nella figura. E' quindi

$$\begin{aligned} E_t &= - F\eta_F + \frac{k_D (\Delta\varphi_D)^2}{2} + \frac{k_E (\Delta\varphi_E)^2}{2} = \\ &= - F\eta_F + (1,584 k_D + 0,023 k_E) \eta_F^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_t}{d\eta_F} = - F + (3,168 k_D + 0,046 k_E) \eta_F$$

da cui

$$\eta_{F_0} = \frac{F}{3,168 k_D + 0,046 k_E} .$$

Per

$$F = 20 t$$

$$k_D = k_E = 1000 tm$$

risulta

$$\eta_{F_0} = \frac{20}{3214} = 6,22 \cdot 10^{-3} m$$

e quindi

$$\Delta\varphi_D = 0,0111$$

$$\Delta\varphi_E = - 0,0013$$

$$M_D = 11,1 tm$$

$$M_E = - 1,3 tm .$$

## Problema n. 15.

La struttura della fig. 15 è tre volte iperstatica, con  $n = 1$ . La deformata è tracciata con il procedimento delle catene cinematiche. Risulta

$$A_q = 5,580 \varphi \text{ m}^2$$

$$\varphi_A = 0,480 \varphi$$

$$\Delta\varphi_B = -1,176 \varphi$$

$$\Delta\varphi_C = 1,714 \varphi$$

$$\varphi_D = \varphi$$

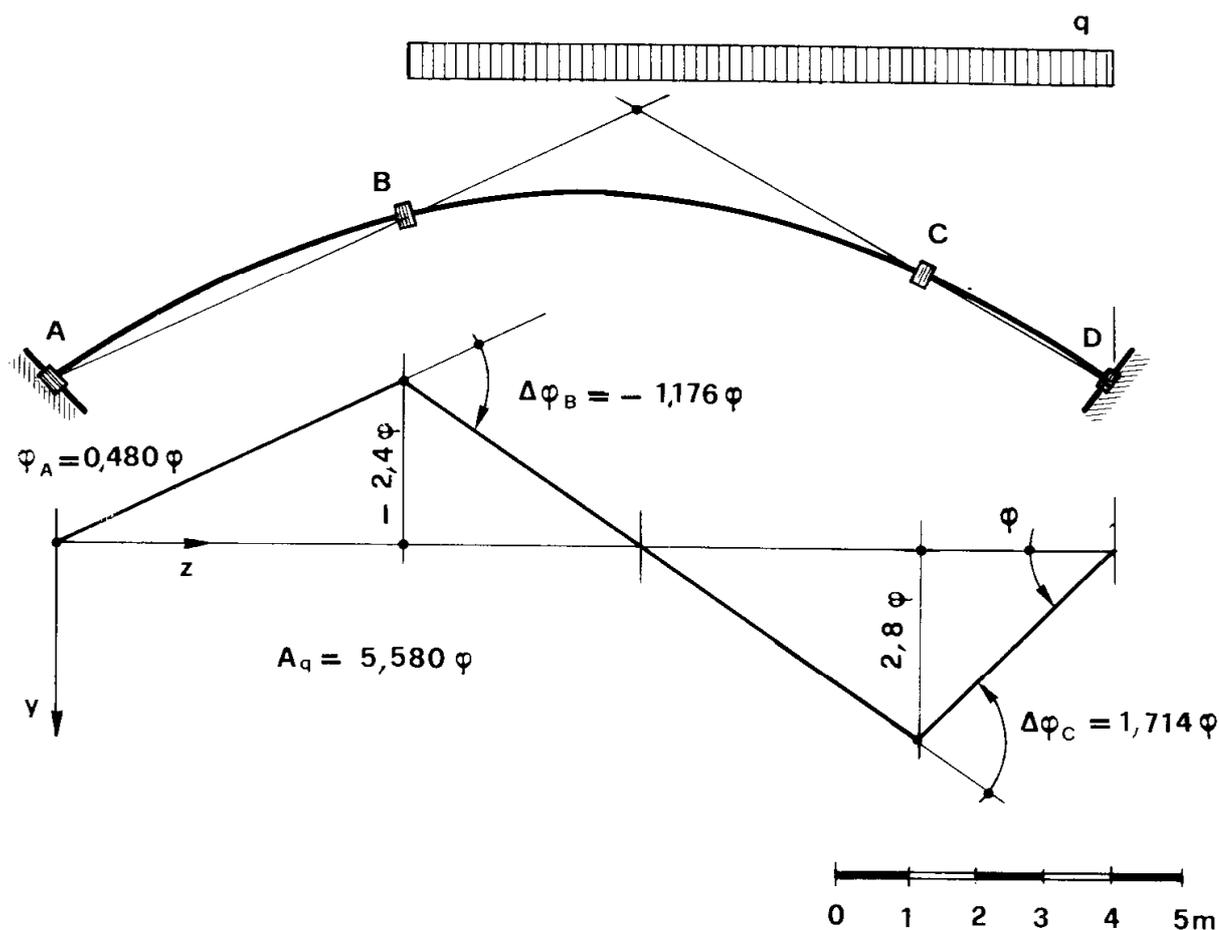


Figura 15.

da cui

$$E_t = -5,580 q \varphi + (0,115 k_A + 0,691 k_B + 1,469 k_C + 0,500 k_D) \varphi^2$$

$$\frac{dE_I}{d\varphi} = -5,580 q + (0,230 k_A + 1,382 k_B + 2,938 k_C + k_D) \varphi$$

$$\varphi_0 = \frac{q}{0,041 k_A + 0,248 k_B + 0,527 k_C + 0,179 k_D}$$

Per

$$q = 3 \text{ tm}^{-1}$$

$$k_A = k_B = k_C = k_D = 1000 \text{ tm}$$

è

$$\varphi_0 = 0,0030 \text{ rad} = 0,17^\circ$$

$\varphi_A = 1,440 \cdot 10^{-3}$	$M_A = 1,440 \text{ tm}$
$\Delta\varphi_B = -3,528 \cdot 10^{-3}$	$M_B = -3,528 \text{ tm}$
$\Delta\varphi_C = 5,142 \cdot 10^{-3}$	$M_C = 5,142 \text{ tm}$
$\varphi_D = 3,015 \cdot 10^{-3}$	$M_D = -3,015 \text{ tm}$

Volendo operare con il metodo delle forze, così come si è fatto nel problema 12, occorre risolvere tre equazioni, di congruenza; è evidente, in questo caso, la convenienza del metodo dei cedimenti, come ogniqualvolta  $n < i$ .

#### Problema n. 16.

La struttura della fig. 16 è tre volte iperstatica, con  $n = 1$ . Risulta

$$w_B = w_C = -\varphi h_2$$

$$\varphi_A = \frac{h_2}{h_1} \varphi$$

$$v_B = h_1 \frac{\varphi_A^2}{2} = \frac{h_2^2}{2 h_1} \varphi^2 = v_B'' \varphi^2$$

$$v_C = \frac{h_2}{2} \varphi^2$$

$$v_D = v_C + \frac{v_B - v_C}{l} b = \frac{h_2 (h_1 a + h_2 b)}{2 h_1 l} \varphi^2 = v_D'' \varphi^2$$

$$E_t = - F v_B - 2 F v_D + 2 k_2 \frac{\varphi^2}{2} + 2 k_1 \frac{\varphi_A^2}{2} =$$

$$= (- F v_B'' - 2 F v_D'' + k_2 + \frac{h_2^2}{h_1^2} k_1) \varphi^2$$

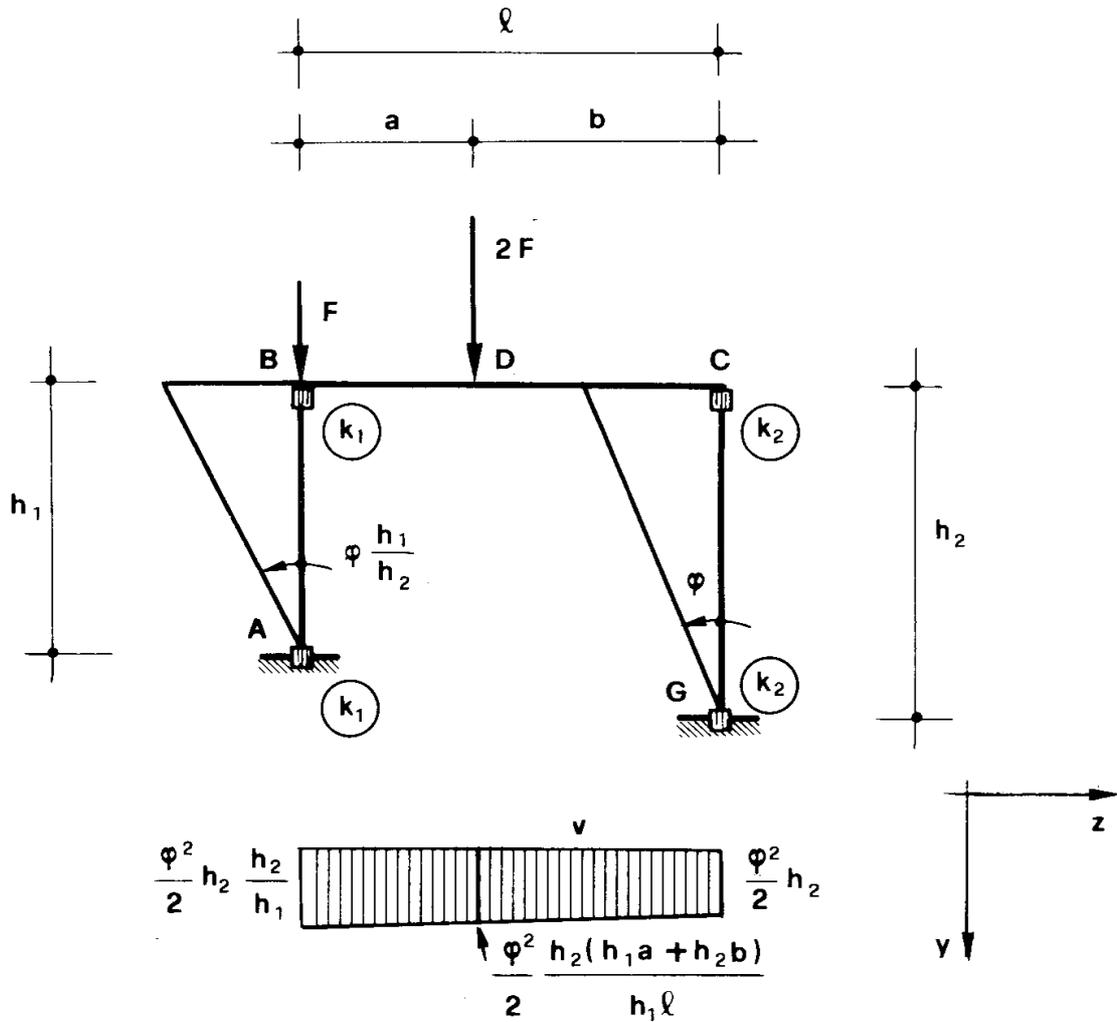


Figura 16.

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = 2 \left( -Fv_B'' - 2Fv_D'' + k_2 + \frac{h_2^2}{h_1^2} k_1 \right) \varphi .$$

Il carico applicato è assiale; il carico critico (di prima specie) è

$$F_c = \frac{k_1 h_2^2 + k_2 h_1^2}{h_1^2 (v_B'' + 2v_D'')} .$$

**Problema n. 17.**

La trave della fig. 17 è costituita da due tratti rigidi  $AC$  e  $CB$  uniti

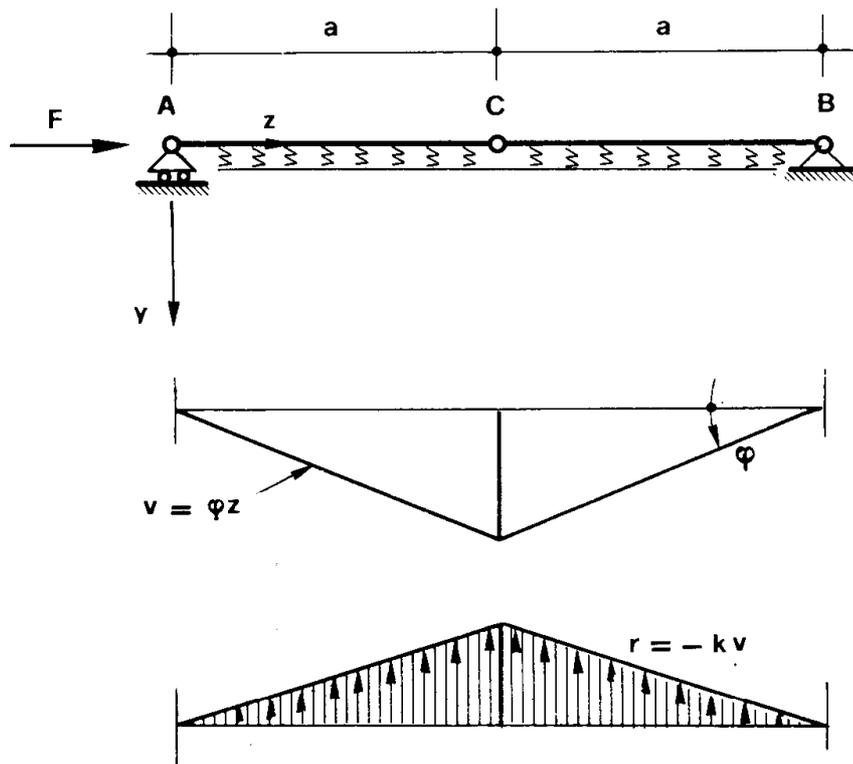


Figura 17.

con cerniera in  $C$ , e poggianti su un letto elastico alla Winkler, tale cioè che

$$r = -k v .$$

L'energia potenziale è

$$P = -F \cdot 2a \frac{\varphi^2}{2} = -Fa \varphi^2 .$$

L'energia di deformazione è ubicata nel letto elastico; essa è fornita da

$$L = 2 \frac{1}{2} \int_0^a r dz \cdot v = k \int_0^a v^2 dz ;$$

poichè nell'intervallo  $[0, a]$  è

$$v = \varphi z ,$$

si ha pure

$$L = k \varphi^2 \int_0^a z^2 dz = k \varphi^2 \left( \frac{z^3}{3} \right)_0^a = k \varphi^2 \frac{a^3}{3} .$$

E' perciò

$$E_t = - Fa \varphi^2 + \frac{ka^3}{3} \varphi^2 .$$

Il carico è quindi del tipo assiale. Risulta

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = \left( - 2Fa + \frac{2}{3} ka^3 \right) \varphi ,$$

e quindi il carico critico (di prima specie) è

$$F_c = \frac{ka^2}{3} .$$

Dalla espressione esatta

$$E_t = - 2Fa (1 - \cos \varphi) + \frac{ka^3}{3} \varphi^2$$

per  $\varphi = 0$  si ha

$$E_t' = - 2Fa \operatorname{sen} \varphi + 2 \frac{ka^3}{3} \varphi = 0$$

$$E_t'' = -2Fa \cos \varphi + 2 \frac{ka^3}{3} \gtrless 0 \leftrightarrow F \gtrless F_c$$

$$E_t''' = 2Fa \sin \varphi = 0 \quad (49)$$

$$E_t^{IV} = 2Fa \cos \varphi = 2Fa > 0 ;$$

quindi per  $F = F_c$  l'equilibrio è neutro stabile, per  $F < F_c$  stabile, per  $F > F_c$  instabile.

**Problema n. 18.**

La posizione di riposo della trave  $AB$  della fig. 18.1 corrisponde al-

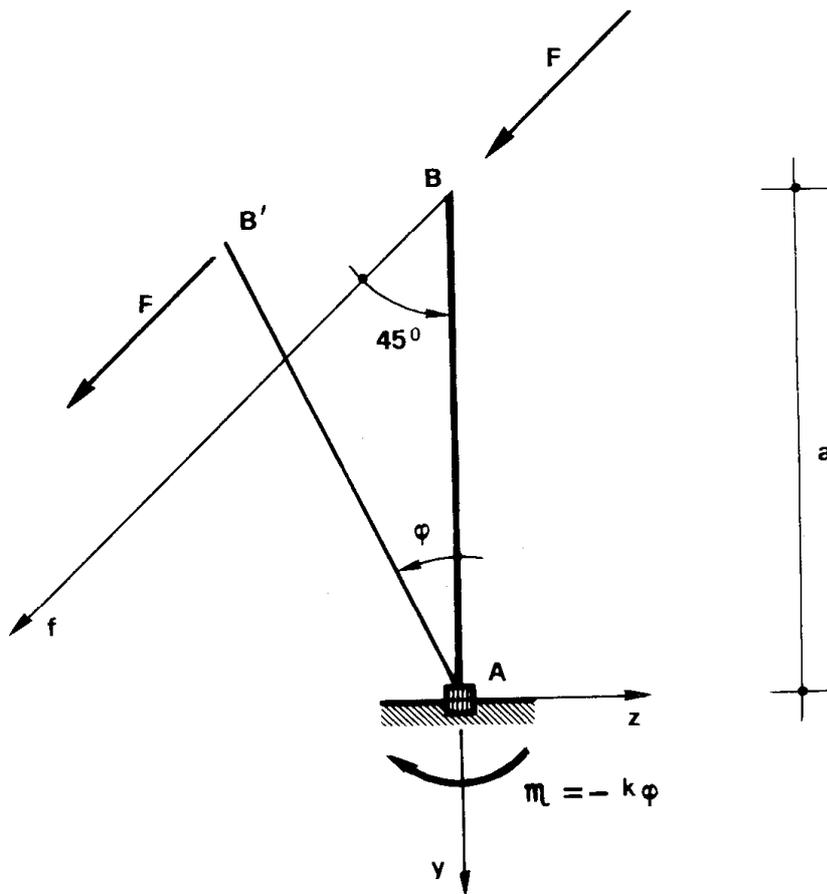


Figura 18.1.

l'angolo  $\varphi = 0$ ; la forza  $F$  è applicata nell'estremo  $B$ , è ad esso solidale,

ed ha direzione costante, tale che  $(F y) = 45^\circ$ . Si rimuove l'ipotesi di piccoli spostamenti.

Considerando le due componenti di  $F$  secondo  $y$  e  $z$ , è

$$v_B = a (1 - \cos \varphi)$$

$$w_B = - a \operatorname{sen} \varphi$$

e quindi

$$\begin{aligned} P &= - F_y v_B - F_z w_B = - \frac{F}{\sqrt{2}} a (1 - \cos \varphi) - \frac{F}{\sqrt{2}} a \operatorname{sen} \varphi = \\ &= - \frac{Fa}{\sqrt{2}} (1 - \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi). \end{aligned}$$

Quindi può scriversi

$$E_t = - \frac{Fa}{\sqrt{2}} (1 - \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) + \frac{k \varphi^2}{2}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - \frac{Fa}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi) + k \varphi.$$

La condizione di equilibrio

$$- \frac{Fa}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi_0) + k \varphi_0 = 0$$

porge

$$F = \frac{k \sqrt{2}}{a} \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi_0}. \quad (50)$$

L'equazione

$$\operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi_0 = 0$$

e cioè

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -1$$

ha soluzione

$$\varphi_0 = \dots 45^\circ \pm c 180^\circ . \quad (51)$$

La funzione  $\varphi_0 \rightarrow F$  è definita quindi in  $R - S$ , dove

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} \pm c\pi, c \in \mathbb{Z} \right\} :$$

il suo diagramma presenta gli asintoti verticali forniti da

$$\varphi \in S .$$

La restrizione di  $\varphi_0 \rightarrow F$  in

$$\left] -\frac{5}{4}\pi, -\frac{\pi}{4} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right[ \quad (52)$$

è (fig. 18.2) una applicazione non iniettiva da tale intervallo su  $R$ . Invece la restrizione di  $\varphi_0 \rightarrow F$  in

$$\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right[$$

è una applicazione biettiva da tale intervallo su  $R$ . Nella fig. 18.2 è disegnato il diagramma della restrizione della  $\varphi_0 \rightarrow F$  in (52); in esso compaiono i tre asintoti alle ascisse

$$\varphi_0 = -\frac{5}{4}\pi = -225^\circ$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4}\pi = -45^\circ$$

$$\varphi_0 = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ .$$

Per  $F$  variabile staticamente da 0 a  $\pm \infty$ , l'unica restrizione che interessa è quella in  $]-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi[$ ; essa verifica il principio di Kirchhoff,

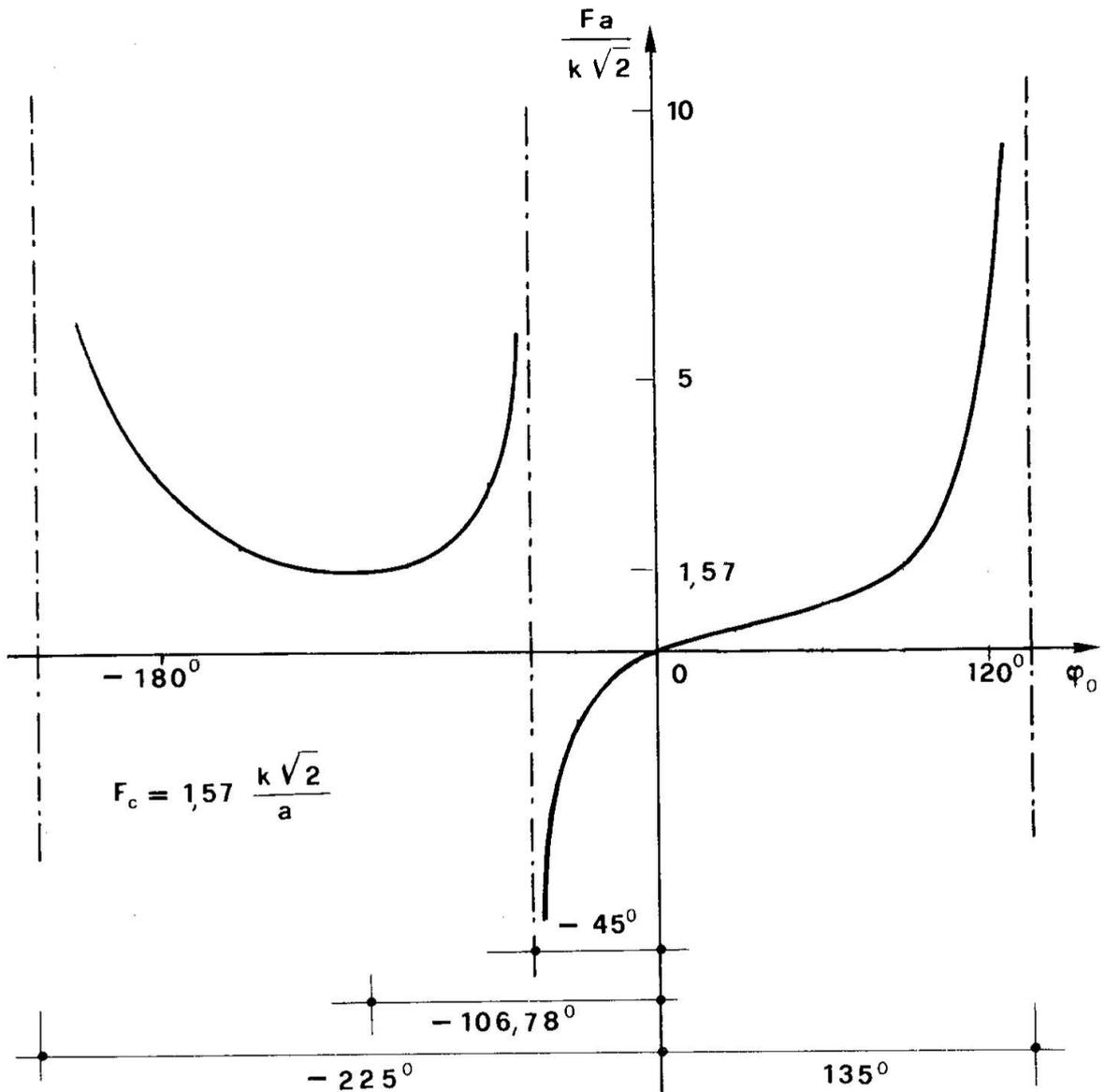


Figura 18.2.

pur non essendone valide le premesse.

I rami affiancati, come quello disegnato nella fig. 18.2, si presentano solo se intervengono (per scomparire alla fine) altre forze, diverse da  $F$ . I rami affiancati sono tutti del tipo disegnato nella fig. 18.2; le quote dei punti di stazionarietà crescono in modulo, man mano che ci si allontana da 0 in un verso o nell'altro dell'asse delle ascisse, e ciò si intuisce dalla struttura stessa della (50), oltre che dall'ovvio comportamento fisico della molla in  $A$ . La quota più bassa in  $R^+$  è quella che compare nell'in-

tervallo (52), e si ottiene annullando la derivata  $dF/d\varphi_0$ :

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{k\sqrt{2}}{a} \frac{\operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi_0 - \varphi_0(\cos\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi_0)}{(\operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi_0)^2}$$

L'equazione

$$\operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi_0 - \varphi_0(\cos\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi_0) = 0$$

ha radice in radianti

$$\varphi_0 = -1,8636$$

e, in gradi,

$$\varphi_0 = -106,779 ;$$

ad essa corrisponde (50)

$$F = F_c = 1,4956 \frac{k\sqrt{2}}{a} . \quad (53)$$

E' questo un carico critico di *quarta specie* (fig. 18.2).

Si ha poi, in  $F_c$ ,

$$E_t'' = -\frac{Fa}{\sqrt{2}} (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) + k = 0$$

$$E_t''' = -\frac{Fa}{\sqrt{2}} (-\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) = -1,8636 k < 0 ,$$

e quindi in  $F_c$  l'equilibrio è *neutro instabile*.

Nella fig. 18.3 sono riportati i valori dell'applicazione  $\varphi_0 \rightarrow F$  ottenuti da elaboratore; nella fig. 18.4 gli stessi valori in un intervallo più ampio.

Operando nell'ambito dei piccoli spostamenti si può scrivere

$$E_t = -\frac{Fa}{\sqrt{2}} \left( \frac{\varphi^2}{2} + \varphi \right) + \frac{k\varphi^2}{2}$$

Fa/1,414k

-280	-4.219
-270	-4.713
-260	-5.595
-250	-7.301
-240	-11.444
-230	-32.569
-220	31.152
-210	10.013
-200	5.84
-190	4.088
-180	3.141
-170	2.561
-160	2.178
-150	1.916
-140	1.734
-130	1.61
-120	1.533
-110	1.497
-100	1.506
-90	1.57
-80	1.721
-70	2.044
-60	2.86
-50	7.08
-40	-5.665
-30	-1.431
-20	-1.585
-10	-1.216
0	0
10	.15
20	.272
30	.383
40	.495
50	.619
60	.766
70	.953
80	1.205
90	1.57
100	2.151
110	3.212
120	5.721
130	18.408
140	-19.825
150	-7.153
160	-4.673
170	-3.658
180	-3.142
190	-2.863
200	-2.724
210	-2.684
220	-2.726
230	-2.85
240	-3.067
250	-3.405
260	-3.918
270	-4.713
280	-6.025

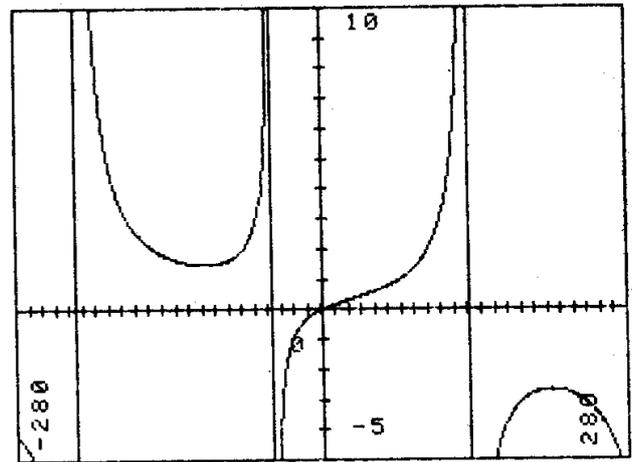


Figura 18.3

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -\frac{Fa}{\sqrt{2}}(\varphi + 1) + k\varphi$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{Fa}{k\sqrt{2} - Fa} \quad (54)$$

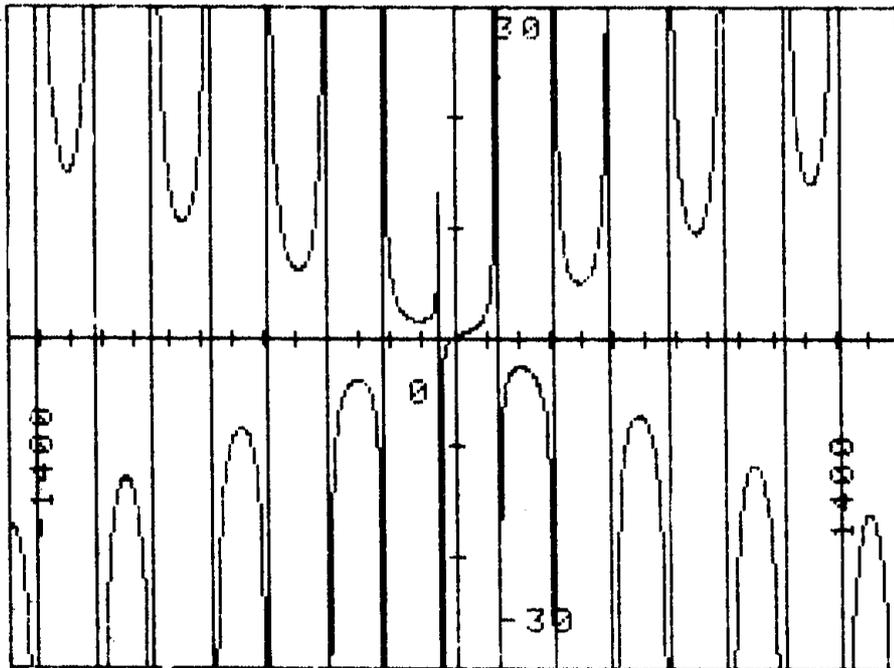


Figura 18.4.

La  $\varphi_0(F)$  è un'iperbole (fig. 18.5) con gli asintoti

$$F = \frac{k\sqrt{2}}{a} \quad (55)$$

$$\varphi_0 = -1 = -57,29^\circ .$$

Si noti che, pur essendo in presenza di grandi eccentricità, il valore (55) approssima bene, e per difetto, il valore critico (53).

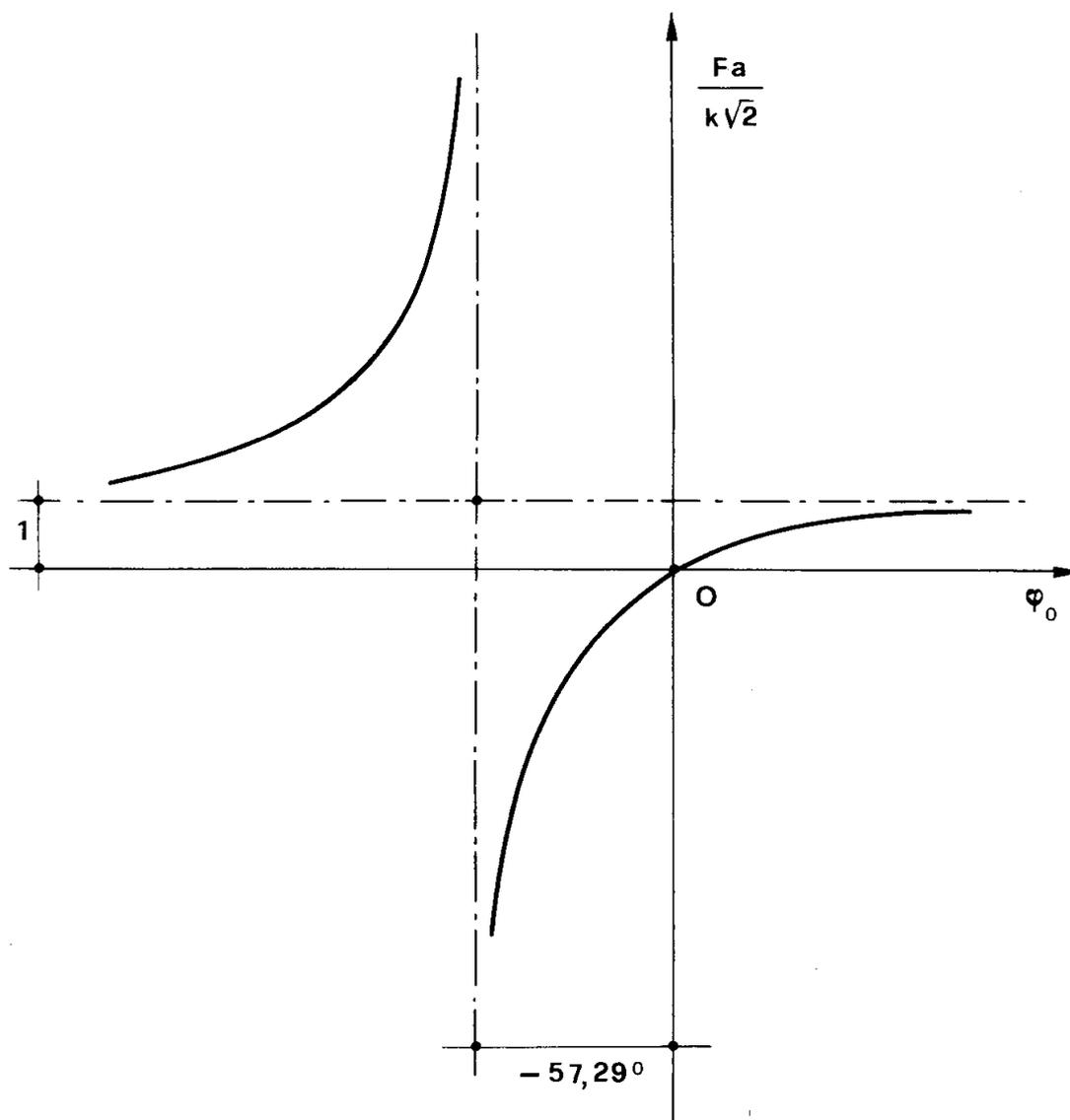


Figura 18.5.

### Problema n. 19.

La struttura della fig. 19.1 è costituita da due aste  $AC$  e  $CB$  deformabili assialmente, ma non flessionalmente; ciò può essere realizzato, per esempio, facendo scorrere le aste in due manicotti rigidi ed internamente lubrificati, di lunghezza inferiore ad  $l$ .

Sia  $\alpha$  l'angolo che le aste formano con la retta  $AB$  in assenza di  $F$ ; la lunghezza delle aste indeformate è

$$l = \frac{a}{\cos \alpha} .$$

Il sistema è isostatico, e per esso  $n = 1$ ; come coordinata lagrangiana si assume l'angolo  $\varphi$  di rotazione dell'asta  $BC$  rispetto alla sua posizione indeformata. Sotto deformazione la lunghezza dell'asta è

$$l' = \frac{a}{\cos(\alpha - \varphi)},$$

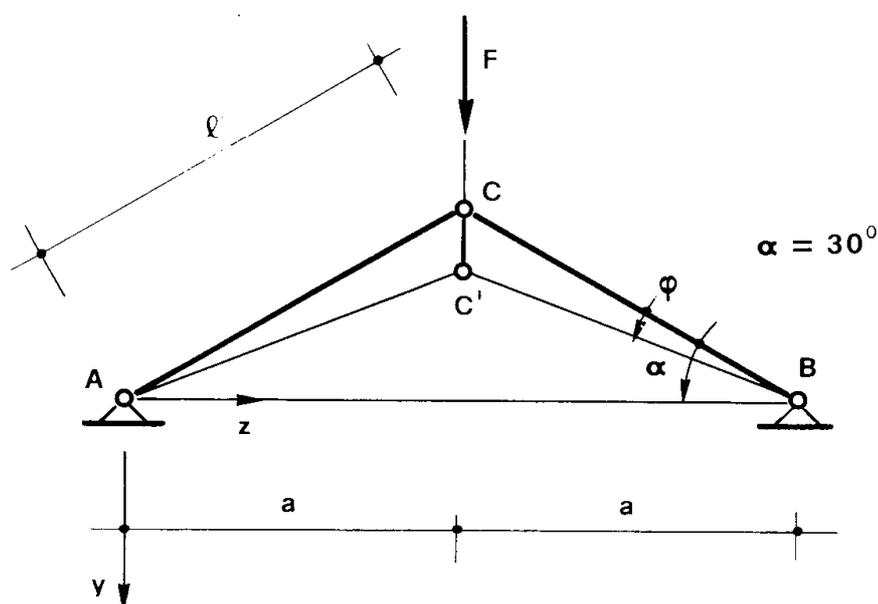


Figura 19.1.

da cui

$$\Delta l = l' - l = a \left( \frac{1}{\cos(\alpha - \varphi)} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = a \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) \cos \alpha}.$$

L'energia di deformazione è perciò

$$L = 2 \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2 EA}{l}$$

e cioè

$$L = \frac{EA a^2}{l} \left[ \frac{\cos \alpha - \cos (\alpha - \varphi)}{\cos (\alpha - \varphi) \cos \alpha} \right]^2.$$

E' poi

$$CC' = a \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$$

e quindi

$$P = - Fa [\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)].$$

Come si vede, l'ipotesi di piccoli spostamenti è rimossa.

Dalla condizione di equilibrio  $\frac{dE_t}{d\varphi} = \frac{d(P + L)}{d\varphi} = 0$  si trae

$$-\frac{Fa}{\cos^2 (\alpha - \varphi_0)} - 2EA a \cos \alpha \frac{\cos \alpha - \cos (\alpha - \varphi_0) \operatorname{sen} (\alpha - \varphi_0)}{\cos (\alpha - \varphi_0) \cos \alpha \cos^2 (\alpha - \varphi_0)} = 0$$

da cui

$$F = 2EA [\cos (\alpha - \varphi_0) - \cos \alpha] \operatorname{tg} (\alpha - \varphi_0). \quad (56)$$

Dalla (56) si trae

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = 2EA \left[ \frac{\cos \alpha}{\cos^2 (\alpha - \varphi)} - \cos (\alpha - \varphi) \right]; \quad (57)$$

così pure è

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = & \frac{2EA}{\cos^4 (\alpha - \varphi)} \left[ \frac{F}{EA} \operatorname{sen} (\alpha - \varphi) \cos (\alpha - \varphi) - \right. \\ & - 2 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha - \varphi) - \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 (\alpha - \varphi) \cos (\alpha - \varphi) + \\ & \left. + \cos \alpha \cos (\alpha - \varphi) \right]. \end{aligned}$$

L'angolo  $\varphi$  può variare nell'intervallo

$$\left] \alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2} \right[ ;$$

in questo intervallo si ha ( $\alpha = 30^\circ$ ).

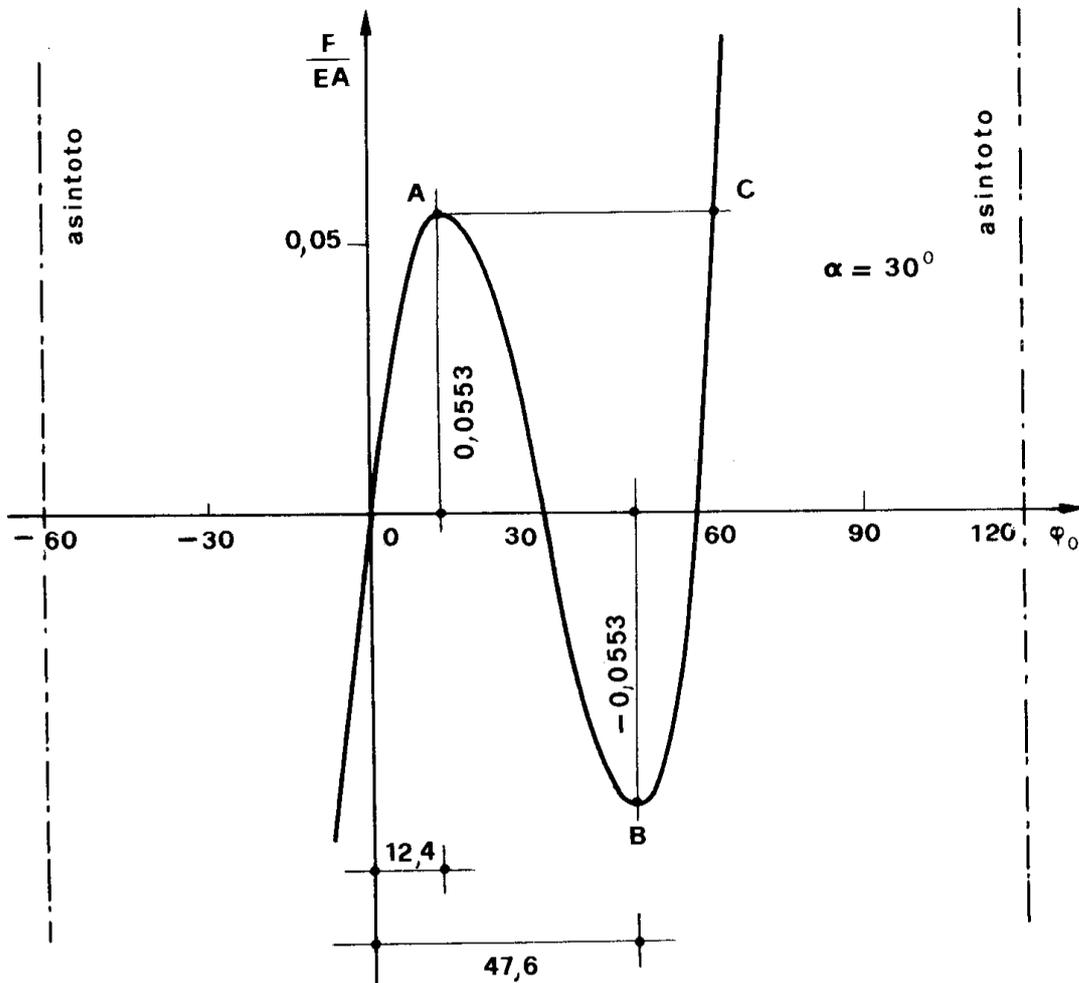


Figura 19.2.

Nella fig. 19.2 è disegnato il diagramma del grafico della funzione

$\varphi_0 \rightarrow F$ , parzialmente riportato nella tab. 19.1; si osservano i due asintoti verticali

$$\varphi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2} = \dots 60^\circ$$

$$\varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2} = \dots 120^\circ .$$

Tabella 19.1

$\varphi_0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	0	12,4°	$\alpha$	47,6°	2 $\alpha$	$\alpha + \frac{\pi}{2}$
$\frac{F}{EA}$	$\infty$	0	0,0553	0	0,0553	0	$\infty$
$\frac{1}{EA} \frac{dF}{d\varphi_0}$	$\infty$	0,5773	0	0,2679	0	0,5773	$\infty$

Per  $F = 0$  si hanno le tre soluzioni

$$\varphi_{01} = 0$$

$$\varphi_{02} = \alpha = 30^\circ$$

$$\varphi_{03} = 2\alpha = 60^\circ ;$$

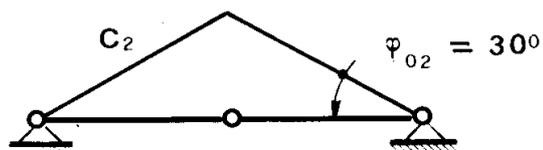
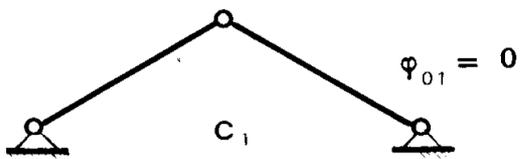
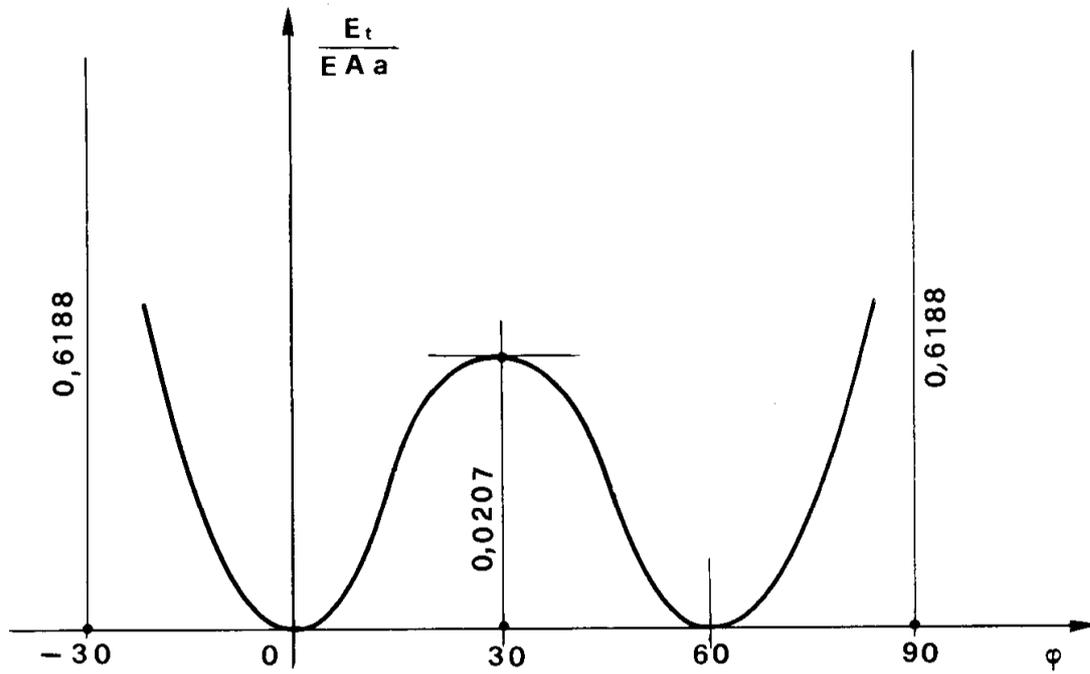
nella fig. 19.3 è disegnato il diagramma  $E(\varphi)$  della funzione  $\varphi \rightarrow E_t$  per  $F = 0$ , con le tre configurazioni di equilibrio. In questo caso è  $P = 0$ , e quindi  $E_t = L$ . La  $E(\varphi)$  presenta due minimi in  $\varphi_{01}$  e  $\varphi_{03}$ , un massimo in  $\varphi_{02}$ :  $C_1$  e  $C_3$  sono configurazioni di equilibrio stabile ( $d_2 E_t > 0$ ),  $C_2$  di equilibrio instabile ( $d_2 E_t < 0$ ).

Per  $F = 0,03 EA$  si hanno le tre soluzioni

$$\varphi_{01} = 3,70^\circ$$

$$\varphi_{02} = 23,25^\circ$$

$$\varphi_{03} = 62,60^\circ ;$$



$F = 0$

$E_t = L$

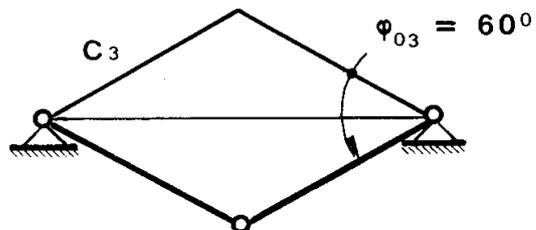


Figura 19.3'

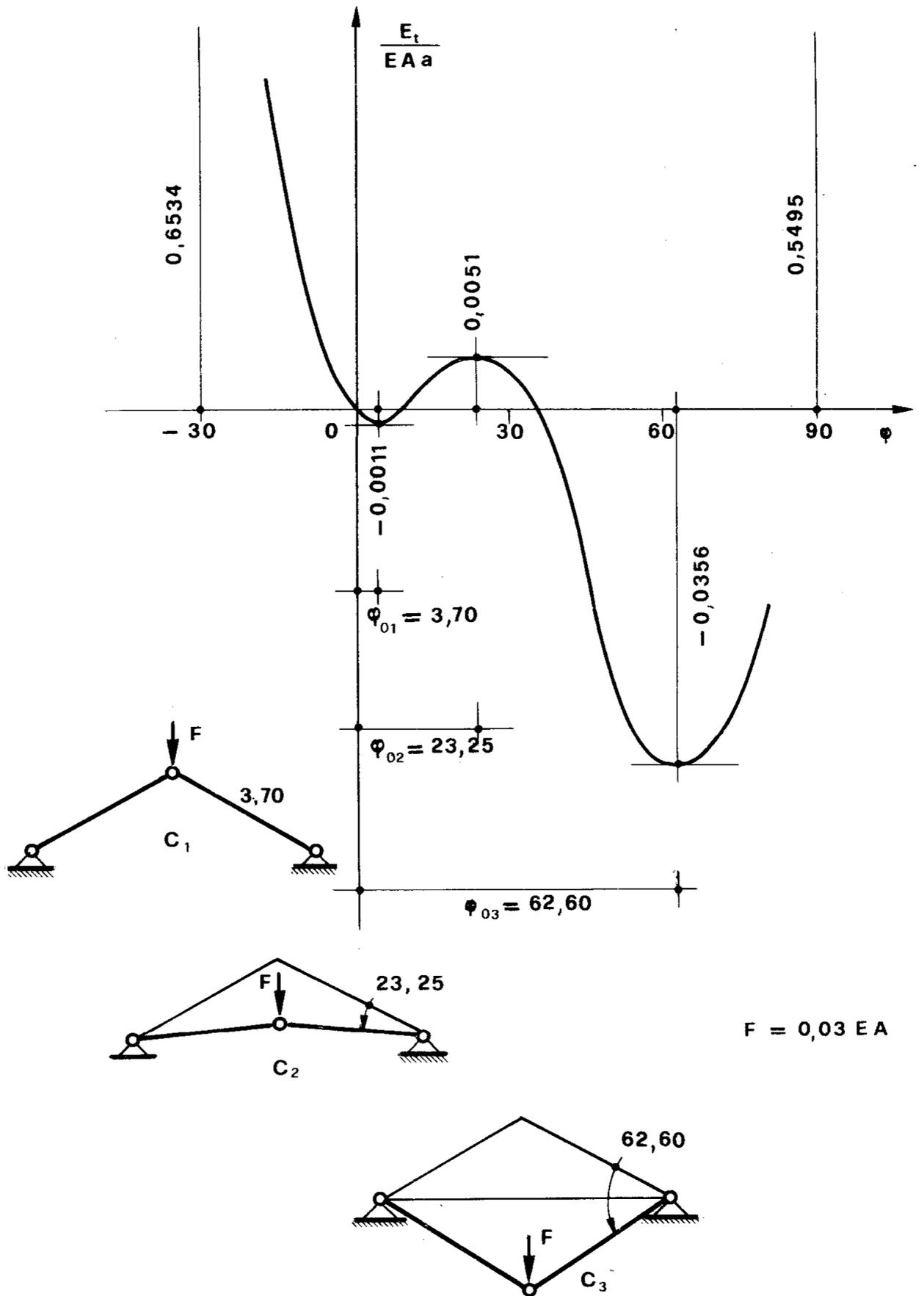


Figura 19.4

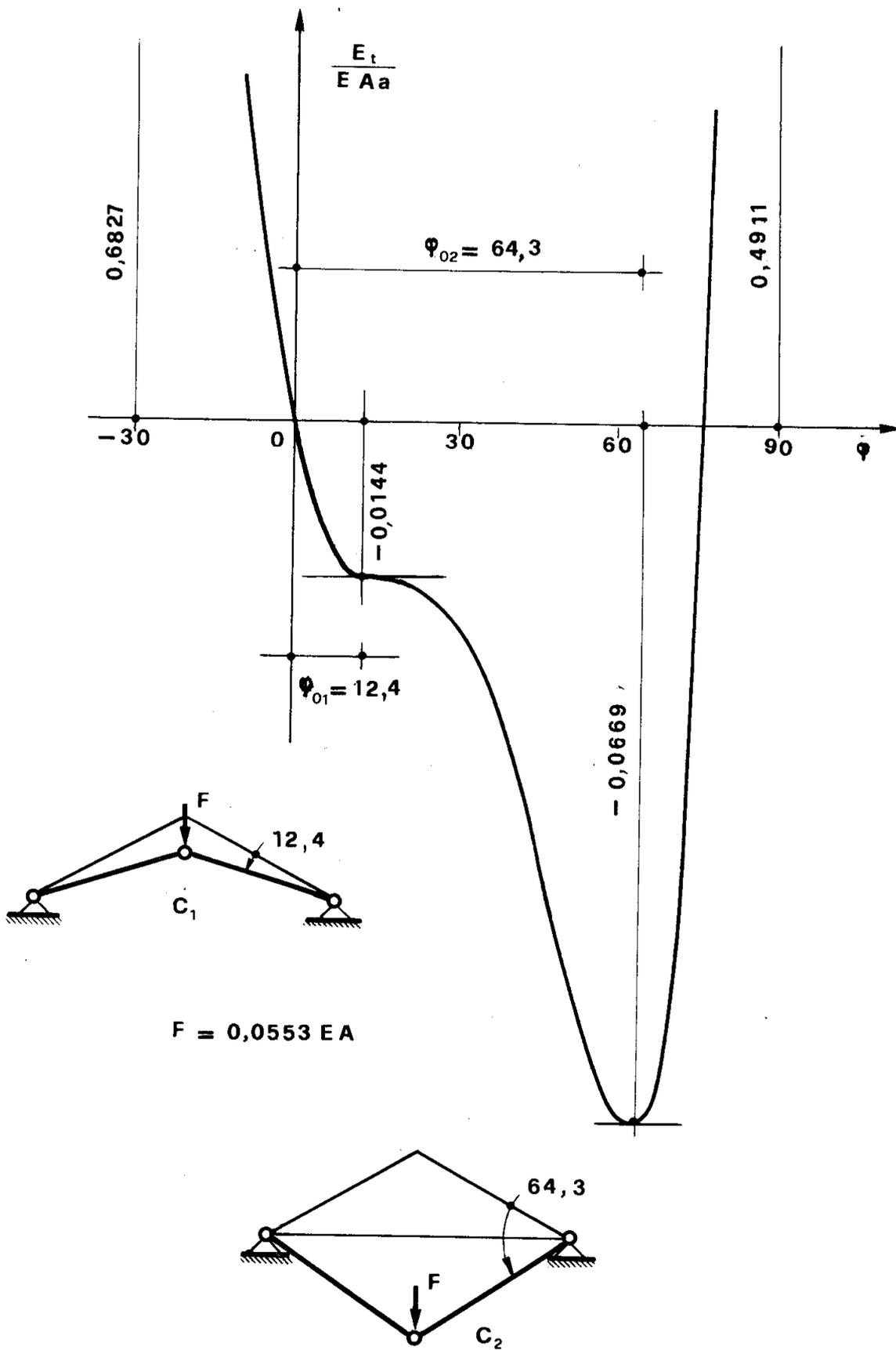


Figura 19.5

nella fig. 19.4 è disegnato il diagramma  $E(\varphi)$  per tale valore di  $F$ , con le tre configurazioni di equilibrio. Le  $C_1$  e  $C_3$  sono stabili, la  $C_2$  è instabile.

Per  $F = 0,0553 EA$  si hanno (fig. 19.5) le due soluzioni

$$\varphi_{01} = 12,40^\circ$$

$$\varphi_{02} = 64,30^\circ ;$$

la  $C_2$  è stabile, la  $C_1$  non è nè stabile, nè instabile. In  $C_1$  è infatti

$$d_2 E = 0$$

$$d_3 E \neq 0 ,$$

$d_3 E$  è negativo per una delle due variazioni  $\pm d\varphi$ , nel nostro caso per  $+d\varphi$  quindi l'equilibrio è *neutro-instabile*. Se  $F$  aumenta staticamente da zero a  $0,0553 EA$ , corrispondente all'ordinata del punto  $A$  (fig. 19.2) si passa per configurazioni tutte stabili; giunti in  $A$ , per un piccolo aumento di  $F$  la configurazione scatta da  $A$  a  $C$ , con effetti drammatici. Il valore  $F_c$  di  $F$  per cui ciò accade è quindi caratteristico: il fenomeno prende nome di *instabilità di seconda specie*, ed  $F_c$  di *carico critico di seconda specie*.

Le configurazioni del ramo  $AB$  (fig. 19.2) sono tutte instabili; si dimostra in rigore che nei sistemi ad un grado di libertà i rami ascendenti (in  $\varphi_0 > 0$ ) del diagramma  $F(\varphi_0)$  sono stabili, i rami discendenti (sempre in  $\varphi_0 > 0$ ) instabili.

Si vuol mettere in buona evidenza la sostanziale differenza tra l'instabilità di prima e di seconda specie. La prima si ha in quei punti del diagramma  $F(\varphi_0)$  dove appare una diramazione, cioè dove dal ramo principale si distaccano rami secondari; quando il ramo principale è quello corrispondente a deformazione nulla, il carico critico può calcolarsi nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e cioè limitandosi a chiamare in gioco i termini del secondo ordine di  $P$ . La seconda invece si ha in quei punti del diagramma  $F(\varphi_0)$  dove nel ramo la pendenza cambia di segno; il valore del carico critico non può calcolarsi che considerando gli spostamenti in tutto il loro valore.

Spesso l'instabilità di prima specie è chiamata istantanea, quella di seconda progressiva; i due aggettivi andrebbero scambiati per essere aderenti alla realtà del fenomeno.

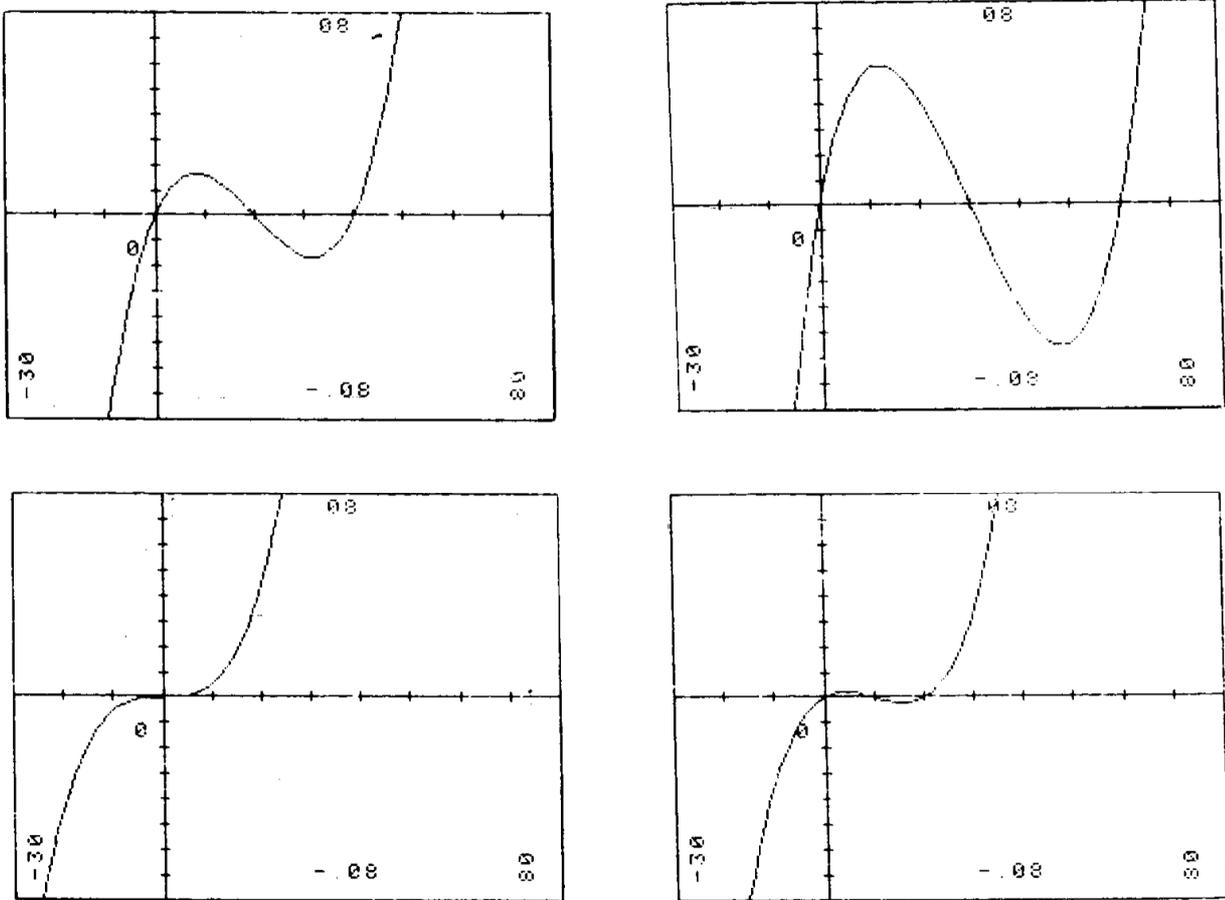


Figura 19.6.

Nella fig. 19.6 sono riportati i diagrammi  $\varphi_0 \rightarrow \frac{F}{EA}$  per  $\alpha = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 0^\circ$ .

**Problema n. 20.**

La struttura della fig. 20 è simile a quella della fig. 19.1; le aste  $AC$  e  $BC$  sono questa volta indeformabili, mentre l'asta  $AB$  (di modulo elastico  $E$  e di sezione  $A$ ) è deformabile. Per  $F = 0$  è  $\varphi = 0$ , e l'asta  $AB$  ha lunghezza

$$l = 2b \cos \alpha ;$$

a deformazione avvenuta è invece

$$l' = 2b \cos(\alpha - \varphi) .$$

E' quindi

$$\Delta l = l' - l = 2b [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha]$$

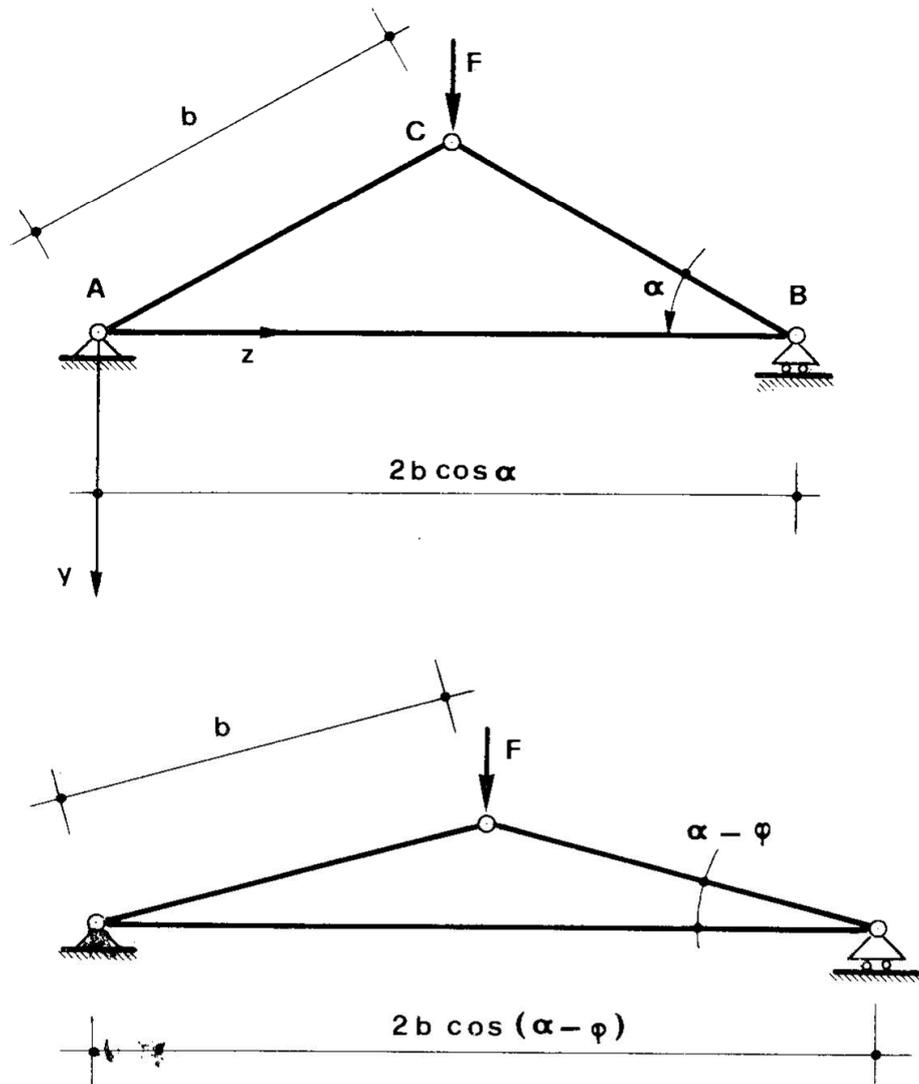


Figura 20.

da cui

$$L = \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2 EA}{l} = \frac{EA b}{\cos \alpha} [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha]^2 .$$

L'abbassamento di  $C$  è

$$CC' = b \operatorname{sen} \alpha - b \operatorname{sen} (\alpha - \varphi)$$

da cui

$$P = - Fb [\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} (\alpha - \varphi)] .$$

E' perciò

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - Fb \cos (\alpha - \varphi) + \frac{2 EA b}{\cos \alpha} [\cos (\alpha - \varphi) - \cos \alpha] \operatorname{sen} (\alpha - \varphi) ;$$

la solita condizione di equilibrio porge quindi

$$F = \frac{2 EA}{\cos \alpha} [\cos (\alpha - \varphi_0) - \cos \alpha] \operatorname{tg} (\alpha - \varphi_0)$$

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{2 EA}{\cos \alpha} \frac{\cos \alpha - \cos^3 (\alpha - \varphi)}{\cos^2 (\alpha - \varphi)}$$

Queste due relazioni coincidono con le (56) e (57) del precedente problema, a meno di  $\cos \alpha$ , quindi i risultati di esso sono ripetibili in questa sede.

### Problema n. 21.

La trave della fig. 21.1 è vincolata in  $B$  con un carrello elastico che genera una reazione sempre diretta secondo la parallela ad  $y$  per  $B'$ . Sia  $k$  la rigidezza del carrello. L'ipotesi di piccoli spostamenti è rimossa. Si ha

$$v_B = a \operatorname{sen} \varphi$$

$$R_B = - k v_B = - k a \operatorname{sen} \varphi$$

$$E_t = - Fa (1 - \cos \varphi) + \frac{k}{2} a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - Fa \operatorname{sen} \varphi + k a^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

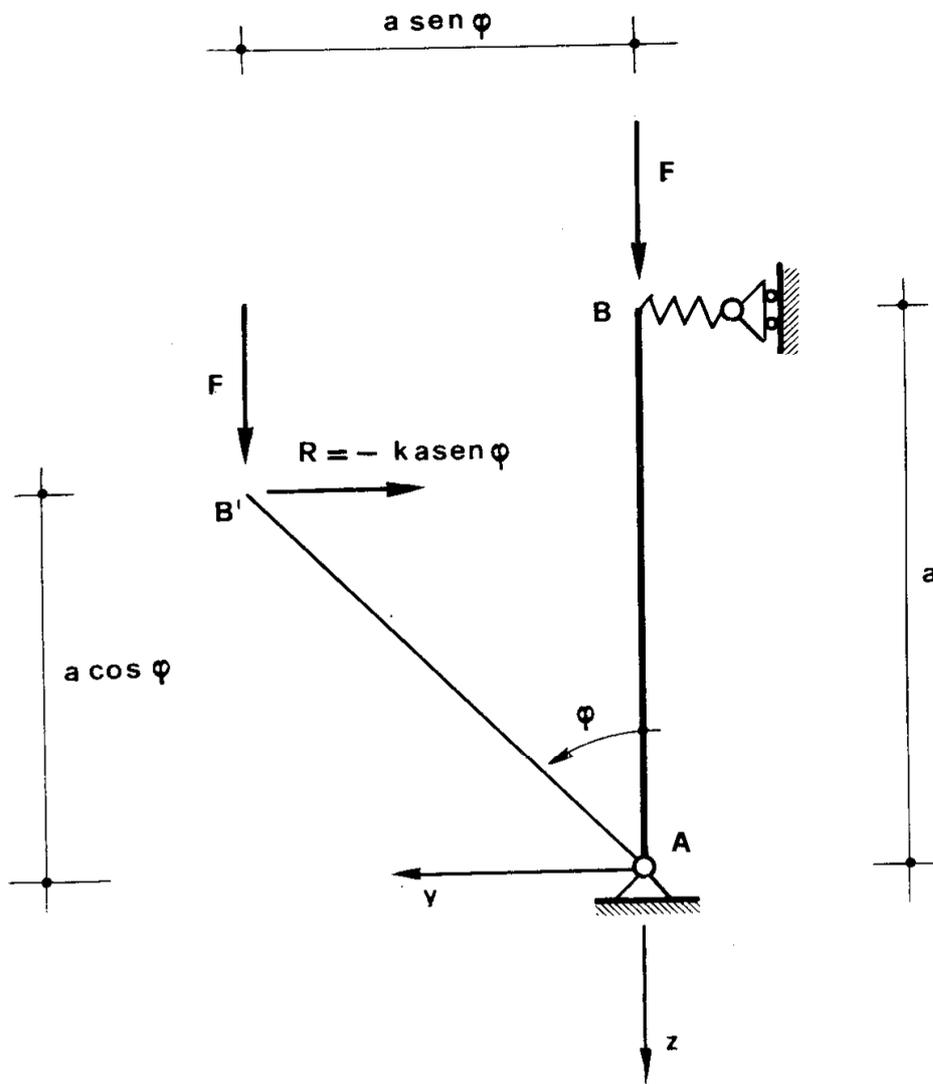


Figura 21.1.

e quindi la condizione di equilibrio è

$$- Fa \operatorname{sen} \varphi_0 + k a^2 \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 (- Fa + k a^2 \cos \varphi_0) = 0$$

le cui soluzioni sono

a)  $\text{sen } \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = c\pi, \forall c \in \mathbb{Z}$  (58)

b)  $-Fa + ka^2 \cos \varphi_0 = 0 \rightarrow F = ka \cos \varphi_0$  . (59)

Si ha ancora

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = -Fa \cos \varphi + ka^2 \cos 2\varphi$$

$$\frac{d^3 E_t}{d\varphi^3} = Fa \text{sen } \varphi - 2ka^2 \text{sen } 2\varphi$$

$$\frac{d^4 E_t}{d\varphi^4} = Fa \cos \varphi - 4ka^2 \cos 2\varphi$$

La soluzione a) è valida per qualsiasi valore di  $F$ ; essa presenta

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = \begin{cases} +Fa + ka^2 & \text{per } c \text{ dispari} \\ -Fa + ka^2 & \text{per } c \text{ pari o nullo,} \end{cases}$$

e quindi si ha

$$c \text{ dispari} \begin{cases} F > -ka & \text{eq. stabile} \\ F < -ka & \text{eq. instabile} \end{cases}$$

$$c \text{ pari o nullo} \begin{cases} F < ka & \text{eq. stabile} \\ F > ka & \text{eq. instabile} \end{cases}$$

(60)

La soluzione b) conduce alla soluzione  $\varphi_0 \rightarrow F$  periodica di periodo

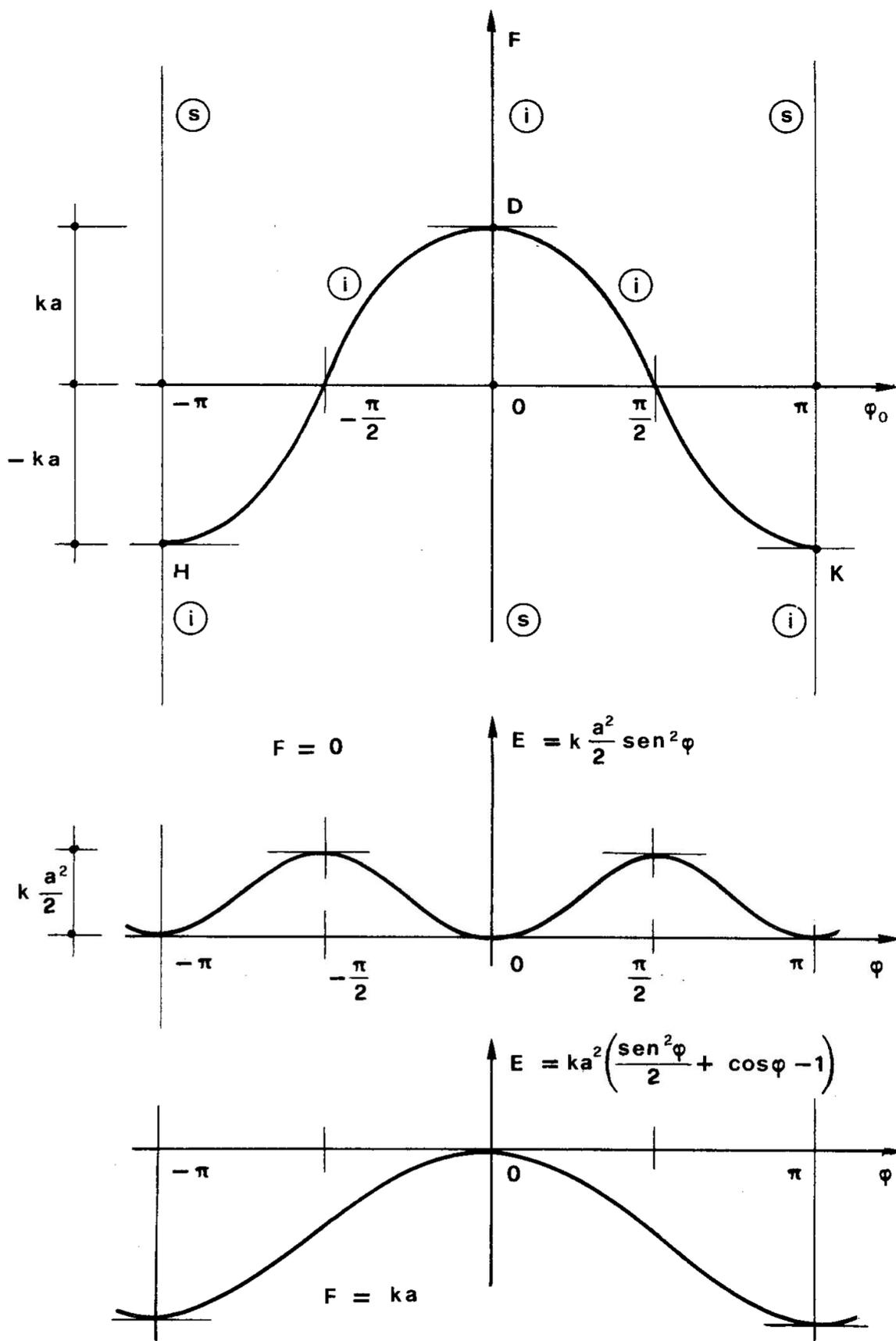


Figura 21.2

$2\pi$ , definita in  $R$ , la cui immagine è l'intervallo  $[-ka, ka]$ .

Nella fig. 21.2 è disegnata la soluzione a) circoscritta ai valori  $-\pi$ ,  $0$ ,  $\pi$ , e il diagramma della restrizione della (59) in  $[-\pi, \pi]$ .

Ci si limita, data la periodicità, a studiare tale restrizione. Per  $F = 0$ , in  $\varphi_0 = 0$  e  $\varphi_0 = \pm \pi$  è

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = ka^2 > 0$$

e quindi la configurazione è stabile; in  $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  è

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = -ka^2 < 0$$

e quindi la configurazione è instabile.

Per  $F = ka$  in  $\varphi_0 = 0$  è

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = -ka^2 + ka^2 = 0$$

$$\frac{d^3 E_t}{d\varphi^3} = 0$$

$$\frac{d^4 E_t}{d\varphi^4} = ka^2 - 4ka^2 < 0$$

e quindi la configurazione è neutro instabile; in  $\varphi_0 = \pm \pi$  è

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = ka^2 + ka^2 > 0$$

e quindi la configurazione è stabile.

Il punto  $D$  è punto di diramazione, ed  $F_c = ka$  è perciò un carico critico; esso apparentemente è di prima specie, ma il ramo secondario in  $D$  piega verso il basso, e ciò conferisce al fenomeno gli stessi drammatici caratteri dell'instabilità di seconda specie. Si preferisce perciò chiamare

questo fenomeno come *instabilità di terza specie*, il carico  $F_c$  come *carico critico di terza specie*.

Nell'ambito dei piccoli spostamenti è

$$E_t = - Fa \frac{\varphi^2}{2} + \frac{k}{2} a^2 \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = (- Fa + ka^2) \varphi$$

da cui

$$F_c = ka .$$

### Problema n. 22.

La struttura della fig. 22 è costituita da cinque aste tutte collegate a cerniera in  $R$ ; essa è tre volte iperstatica, con  $n = 2$ ; le due coordinate lagrangiane sono le componenti  $u$  e  $v$  dello spostamento di  $R$ . Si noti che, quale che sia il numero delle aste,  $n$  è sempre pari a due.

Sia  $l_i$  la lunghezza dell'asta  $iR$ ,  $\alpha_i$  l'angolo  $(iR, y)$  supponendo  $iR$  orientata come il vettore  $iR$ . Nell'ipotesi di piccoli spostamenti può supporre che  $\Delta l_i$  sia fornita dalla proiezione normale  $RR''$  del vettore spostamento  $RR'$  di  $R$  sull'asse  $iR$ ; ciò confondendo l'arco di cerchio di raggio  $iR'$  e centro  $i$  con il segmento  $R'R''$  della normale ad  $iR$  passante per  $R'$ .

Quindi può porsi

$$\Delta l_i = u \operatorname{sen} \alpha_i + v \operatorname{cos} \alpha_i \quad (61)$$

e l'energia di deformazione  $L_i$  contenuta nell'asta  $iR$  è

$$L_i = \frac{1}{2} N_i \Delta l_i ;$$

dalla relazione

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (62)$$

si trae successivamente

$$L_i = \frac{1}{2} \frac{E_i A_i}{l_i} \Delta l_i^2 .$$

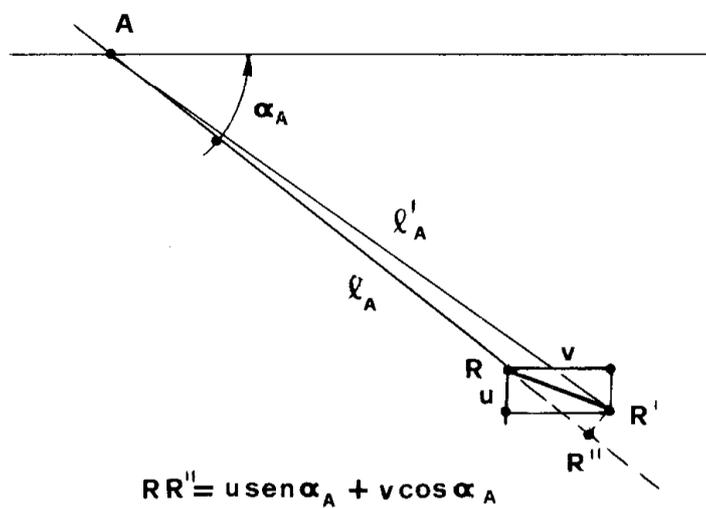
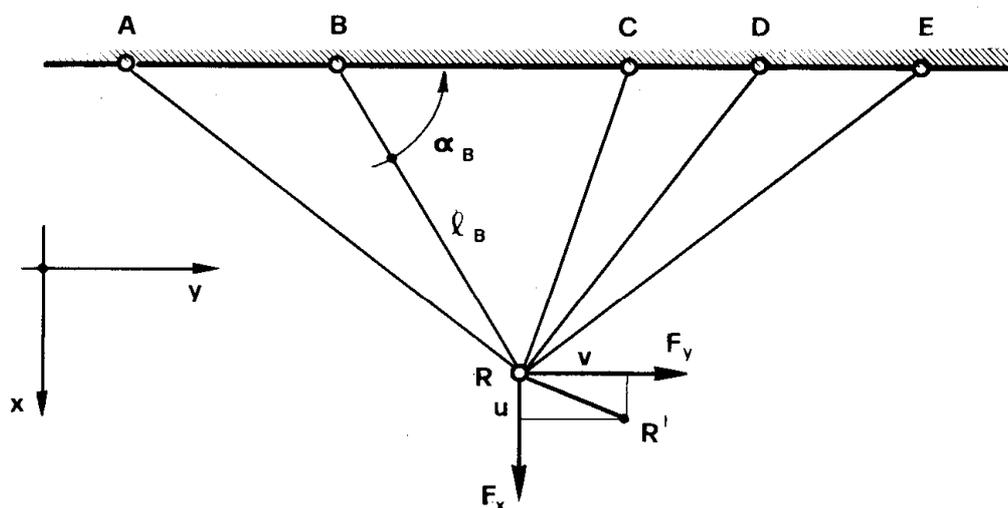


Figura 22.

E' perciò

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} (u \operatorname{sen} \alpha_i + v \operatorname{cos} \alpha_i)^2$$

e quindi

$$L = u^2 \sum_i \frac{E_i A_i}{2l_i} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + v^2 \sum_i \frac{E_i A_i}{2l_i} \operatorname{cos}^2 \alpha_i + \\ + uv \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{cos} \alpha_i .$$

E' poi

$$P = - F_x u - F_y v .$$

La  $E_t$  è perciò una funzione quadratica in  $u$  e  $v$ . La condizione di stazionarietà di  $E_t$  si traduce nelle due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial v} = 0 ,$$

e cioè nelle due equazioni

$$F_x = u \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + v \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{cos} \alpha_i \tag{63}$$

$$F_y = u \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{cos} \alpha_i + v \sum_i \frac{E_i A_i}{l_i} \operatorname{cos}^2 \alpha_i .$$

Ottenuti  $u$  e  $v$ , per ogni asta si calcolano  $\Delta l_i$  ed  $N_i$  attraverso le (61) e (62).

### Problema n. 23.

La struttura della fig: 23.1 è isostatica, con  $n = 2$ . La deformata

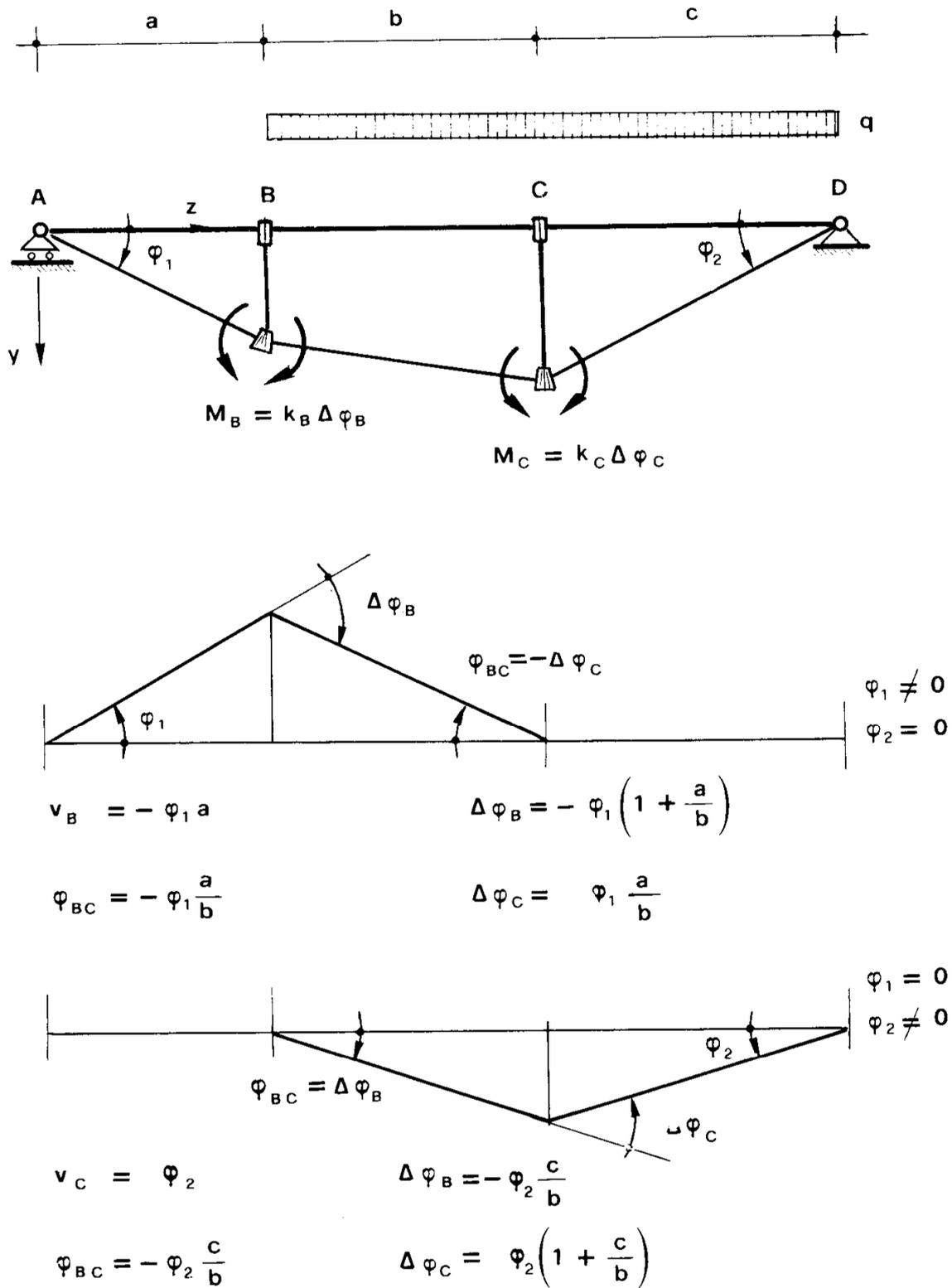


Figura 23.1

dipende dalle due coordinate lagrangiane, che sono state scelte nei due angoli di rotazione  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  rispettivamente dei tratti  $AB$  e  $CD$ . Trattandosi di piccoli spostamenti, si può operare per sovrapposizione; si disegna cioè prima la deformata relativa alla sola  $\varphi_1$ , bloccando quindi l'asta  $CD$ , per soddisfare la condizione  $\varphi_2 = 0$ ; poi si disegna la deformata relativa alla sola  $\varphi_2$ , e si esegue la somma. Si ha così

$$\Delta\varphi_B = -\varphi_1 \frac{a+b}{b} - \varphi_2 \frac{c}{b}$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 \frac{a}{b} + \varphi_2 \frac{b+c}{b}$$

$$v_B = -\varphi_1 a$$

$$v_C = \varphi_2 c$$

$$A_q = \frac{v_B + v_C}{2} b + \frac{v_C}{2} c = -\varphi_1 \frac{ab}{2} + \varphi_2 \frac{c(b+c)}{2}$$

da cui

$$\begin{aligned} E_t &= k_B \frac{(\Delta\varphi_B)^2}{2} + k_C \frac{(\Delta\varphi_C)^2}{2} - q A_q = \\ &= \varphi_1 \frac{qab}{2} - \varphi_2 \frac{qc(b+c)}{2} + \\ &+ \varphi_1^2 \frac{k_B(a+b)^2 + k_C a^2}{2b^2} + \varphi_2^2 \frac{k_B c^2 + k_C(b+c)^2}{2b^2} + \\ &+ \varphi_1 \varphi_2 \frac{k_B c(a+b) + k_C a(b+c)}{b^2} . \end{aligned} \quad (64)$$

La condizione di stazionarietà importa

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0 ;$$

per le (64) queste si scrivono

$$\varphi_1 K_{11} + \varphi_2 K_{12} = Q_1 \quad (66)$$

$$\varphi_1 K_{21} + \varphi_2 K_{22} = Q_2$$

dove

$$K_{11} = k_B \frac{(a+b)^2}{b^2} + k_C \frac{a^2}{b^2}$$

$$K_{22} = k_B \frac{c^2}{b^2} + k_C \frac{(b+c)^2}{b^2} \quad (67)$$

$$K_{12} = K_{21} = k_B \frac{c(a+b)}{b^2} + k_C \frac{a(b+c)}{b^2}$$

e ancora

$$Q_1 = -q \frac{ab}{2}$$

$$Q_2 = q \frac{c(b+c)}{2} \quad (68)$$

In forma matriciale la (66) si scrive

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{q}$$

dove

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}, \quad (69)$$

$\varphi$  è il vettore colonna delle incognite coordinate lagrangiane, e

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} \quad (70)$$

Per una migliore comprensione del significato fisico delle equazioni (66), e delle matrici (69) e (70), si procede a bloccare con opportuni *vincoli aggiunti* tutti gli  $n$  parametri di libertà del sistema olonomo, ottenendo quello che chiameremo *sistema di base*; per esempio, nel caso in esame, si fissano con due morsetti le sezioni  $A$  e  $D$  della trave della fig. 23.1. I parametri di libertà  $\varphi_i$  sono quindi da considerare, se diversi da zero, come dei cedimenti vincolari; sia poi  $R_i$  la reazione corrispondente al generico parametro  $\varphi_i$ . Se vale il principio di sovrapposizione degli effetti, può porsi, *in assenza di forze applicate*,

$$R_i^* = \Sigma K_{ij} \varphi_j ; \quad (71)$$

matricialmente

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{K} \varphi . \quad (72)$$

Si osserva che  $K_{ij}$  è la reazione *sul sistema di base* in  $i$  per effetto di un cedimento unitario in  $j$ ; per il teorema di Betti (meglio, di Volterra) si ha (fig. 23.2)

$$K_{ij} = K_{ji} ; \quad (73)$$

e cioè la matrice  $\mathbf{K}$  è simmetrica. I termini  $K_{ij}$  si chiamano *rigidità*, e la matrice  $\mathbf{K}$ , di ordine  $n \times n$ , è la *matrice delle rigidità*.

Considerando la struttura reale, senza cioè i vincoli aggiunti, si facciano agire su di essa le forze  $R_i^*$  generate sul sistema di base come reazioni esercitate dai vincoli aggiunti per effetto dei cedimenti  $\varphi_i$ ; può porsi, sempre per il principio di sovrapposizione degli effetti,

$$\varphi_i = \Sigma C_{ij} R_j^* ; \quad (74)$$

matricialmente

$$\varphi = \mathbf{C} \mathbf{r}^* . \quad (75)$$

Sempre per il principio di Betti è

$$C_{ij} = C_{ji} , \quad (76)$$

e quindi la matrice  $C$  è simmetrica. Il termine  $C_{ij}$  è lo spostamento sulla struttura reale in  $i$  per effetto di una forza unitaria in  $j$ , e si chiama *cedibilità*;  $C$  è la *matrice delle cedibilità*.

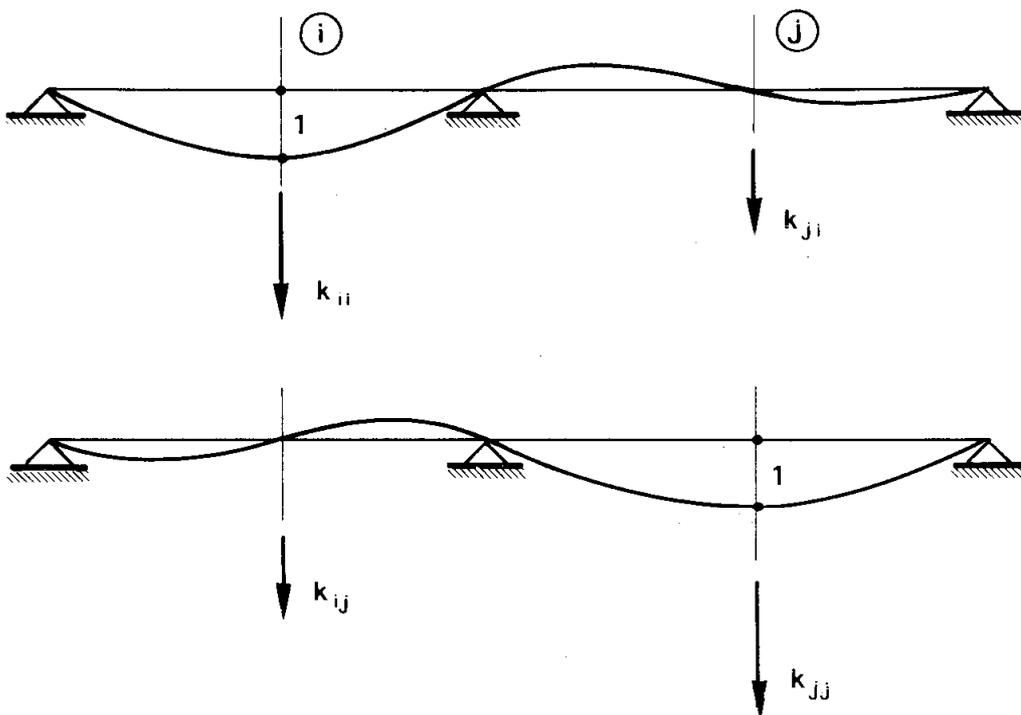


Figura 23.2.

Se  $\det C \neq 0$ , dalla (75) si ha, premoltiplicando per  $C^{-1}$ ,

$$C^{-1} \varphi = r^*$$

e, confrontando con la (72),

$$K = C^{-1} , \quad (77)$$

da cui pure

$$C = K^{-1} . \quad (78)$$

Le matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sono quindi una l'inversa dell'altra.

Le due matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  non dipendono dai carichi applicati, e si costruiscono quindi una volta per sempre.

L'energia di deformazione  $L$  è funzione uniforme della configurazione, e quindi è nota una volta assegnate  $\mathbf{C}$  o  $\mathbf{K}$ . Ed infatti

$$L = \frac{1}{2} \sum R_i^* \varphi_i \quad (79)$$

e quindi, per le (71),

$$L = \frac{1}{2} \sum K_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (80)$$

e, per le (74),

$$L = \frac{1}{2} \sum C_{ij} R_i^* R_j^* . \quad (81)$$

Matricialmente le (80) e (81) si scrivono

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \quad (82)$$

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{r}^{*T} \mathbf{C} \mathbf{r}^* . \quad (83)$$

Poichè  $L > 0$ , per qualsiasi n-pla delle  $\varphi_i$  o delle  $R_i$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{C}$  sono definite positive, e, a fortiori, invertibili.

Dalla (80) si ha, per la (71),

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = \sum K_{ij} \varphi_j = R_i^* \quad (84)$$

ed ancora

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = K_{ij} . \quad (85)$$

Dalla (84) si trae che i coefficienti delle  $\varphi_i$ , derivanti dalla parte

$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i}$  dell'equazione  $\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0$ , non sono altro che le rigidità  $K_{ij}$ .

Si consideri ora l'espressione dell'energia potenziale  $P$  dei carichi  $q(s)$  applicati:

$$P = - \sum \varphi_i \int_s q(s) v_i(s) ds, \quad (86)$$

dove  $v_i(s)$  sono gli spostamenti corrispondenti a  $q(s)$  provocati sul sistema di base da  $\varphi_i = 1$ . Si ha dalla (86)

$$- \frac{\partial P}{\partial \varphi_i} = \int_s q(s) v_i(s) ds. \quad (87)$$

D'altro canto, il teorema di Betti (meglio, di Colonnetti), con riferimento al sistema di base ed ai due insiemi di sollecitazioni esterne costituiti uno dalle forze  $F$  applicate, l'altro dal cedimento  $\varphi_i = 1$ , consente di scrivere

$$0 = R_{iF} \cdot 1 + \int_s q(s) v_i(s) ds;$$

si ha perciò

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_i} = R_{iF}, \quad (88)$$

e cioè la derivata  $\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}$  è pari alla reazione  $R_{iF}$  che nel sistema di base è provocata in  $i$  dai carichi  $q(s)$ .

La

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_i} = 0$$

si scrive quindi, per le (84) ed (88),

$$R_i^* + R_{iF} = 0 ; \quad (89)$$

essa esprime la condizione (*di equilibrio*) che la somma della reazione  $R_i^*$  provocata in  $i$  dai cedimenti  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) sul sistema di base, e della reazione  $R_{iF}$  provocata sullo stesso sistema dai carichi applicati  $q(s)$ , è nulla.

La quantità

$$Q_i = \int_s q(s) v_i(s) ds \quad (90)$$

si è già chiamata *componente generalizzata delle forze applicate* relativa alla coordinata lagrangiana  $\varphi_i$ ; risulta così

$$R_{iF} = - Q_i . \quad (91)$$

L'espressione di  $E_t$  può scriversi, attraverso tale definizione, e per la (80), come segue

$$E_t = \frac{1}{2} \sum K_{ij} \varphi_i \varphi_j - \sum Q_i \varphi_i \quad (92)$$

o, matricialmente,

$$E_t = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{K} \varphi - \mathbf{q}^T \varphi . \quad (93)$$

Il sistema

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0$$

si traduce così nell'altro

$$\mathbf{K} \varphi = \mathbf{q} ; \quad (94)$$

e cioè, nel caso particolare che si sta trattando, nella (66).

La (89) si scrive pure, attraverso la definizione (90),

$$R_i^* = Q_i ; \quad (95)$$

e cioè, con riferimento al sistema di base, le  $\varphi_i$  di equilibrio inducono in ognuno dei vincoli aggiunti una reazione sulla struttura pari alla corrispondente componente generalizzata delle forze.

Le  $R_{iF}$  sono le reazioni generate dai carichi applicati  $q(s)$  sul sistema di base; quindi la struttura reale, sotto i  $q(s)$  e le  $R_{iF}$ , presenta valori nulli per tutte le coordinate lagrangiane, e quindi deformazioni nulle nei conci elastici. Ciò significa che i diagrammi delle caratteristiche, e quindi il regime statico sul sistema di base, possono essere ottenuti senza scrivere le equazioni di congruenza, ma soltanto sfruttando la circostanza che esse devono essere nulle in corrispondenza dei conci elastici. Si tenga presente, infatti, che annullando le rigidità di tali conci la struttura reale diviene  $n$  volte labile, ove  $n$  è il numero dei parametri di libertà  $\varphi_i$ ; quindi il sistema di base diviene isostatico, essendo  $n$  anche il numero dei vincoli aggiunti.

E' interessante verificare quanto sopra sulla struttura della fig. 23.3a; operando sulla struttura isostatica è

$$M_0(z) = \frac{ql^2}{2} \varphi (1 - \varphi)$$

e quindi

$$\Delta \varphi_{B_0} = \frac{ql^2}{2k} \bar{\varphi} (1 - \bar{\varphi}) .$$

E' poi, per  $x = 1$ ,

$$\Delta' \varphi_B = - \frac{1}{k} .$$

L'equazione di congruenza è

$$\frac{ql^2}{2k} \bar{\varphi} (1 - \bar{\varphi}) - \frac{x}{k} = 0$$

da cui

$$x = \frac{ql^2}{2} \bar{\varphi} (1 - \bar{\varphi}) ;$$

in  $B$  è

$$M_B = - X + M_0(\bar{\varphi}) = 0 .$$

Il diagramma dei momenti è quindi quello che può ottenersi dalla struttura isostatica della fig. 23.3d.

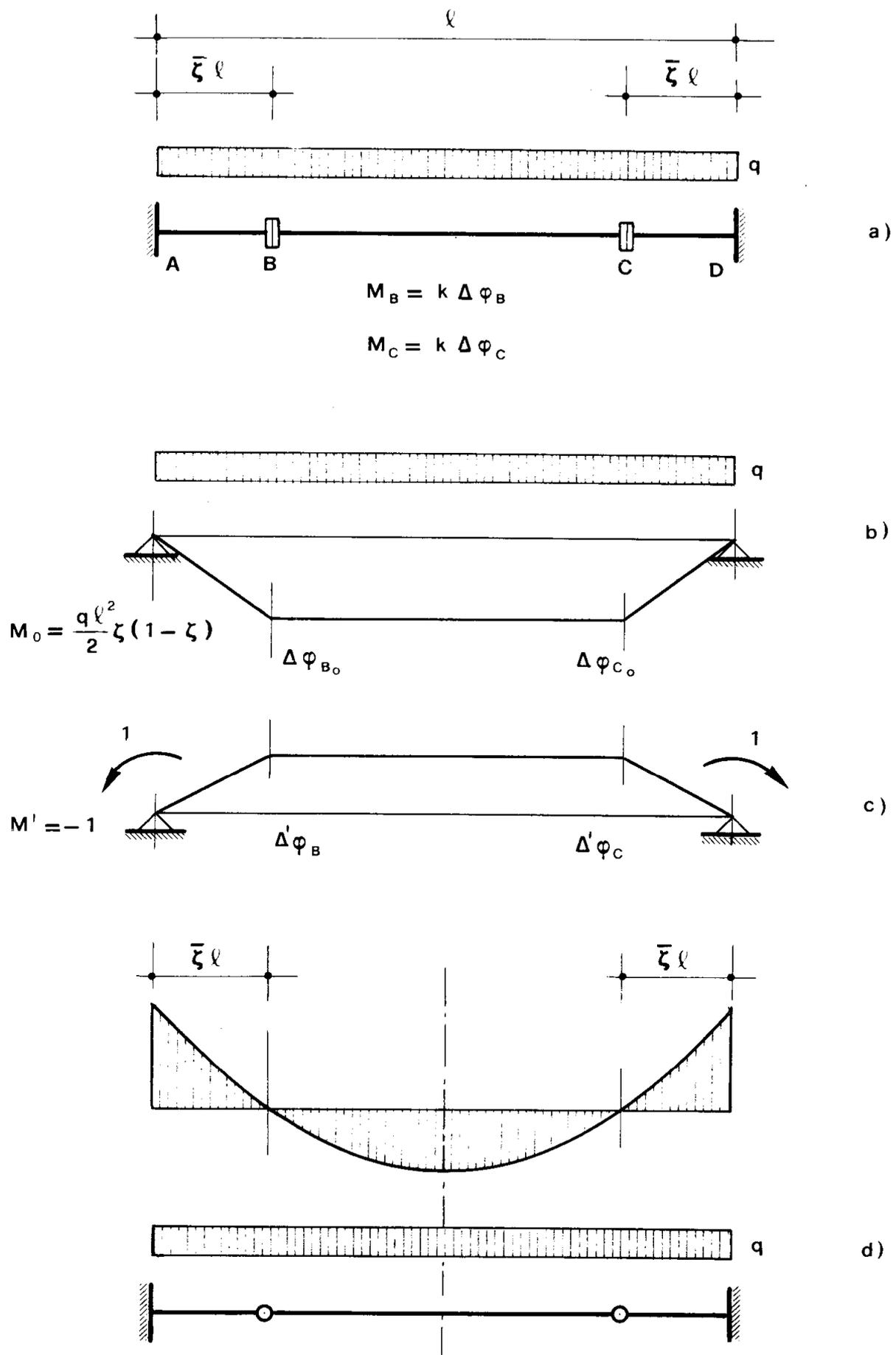


Figura 23.3

Nel caso particolare di

$$b = c = a$$

$$k_B = k_C = k$$

si ha

$$K_{11} = 5k$$

$$K_{22} = 5k$$

$$K_{33} = 4k ;$$

il sistema (58) si scrive

$$5k\varphi_1 + 4k\varphi_2 = -q \frac{a^2}{2}$$

$$4k\varphi_1 + 5k\varphi_2 = qa^2$$

la cui soluzione è

$$\varphi_1 = -\frac{13}{18} \frac{qa^2}{k}$$

$$\varphi_2 = \frac{14}{18} \frac{qa^2}{k}$$

Si verifica che risulta

$$\Delta\varphi_B = \frac{12}{18} \frac{qa^2}{k}$$

$$\Delta\varphi_C = \frac{15}{18} \frac{qa^2}{k}$$

da cui

$$M_B = \frac{12}{18} qa^2 \qquad M_C = \frac{15}{18} qa^2 ;$$

con ragionamento diretto si ha

$$R_A = \frac{2}{3} qa$$

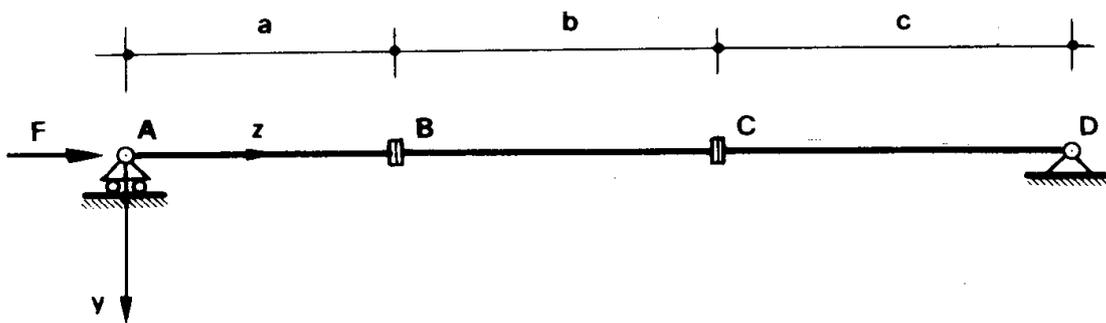
$$M_B = \frac{2}{3} qa^2$$

$$M_C = \frac{5}{6} qa^2 ,$$

e quindi i risultati collimano.

#### Problema n. 24.

La stessa struttura del problema precedente è soggetta ad una forza



*Figura 24.1.*

assiale  $F$  in  $A$  (fig. 24.1). Si ha

$$\varphi_{BC} = \frac{v_B - v_C}{b} = -\varphi_1 \frac{a}{b} - \varphi_2 \frac{c}{b}$$

$$\begin{aligned}
 w_A &= a \frac{\varphi_1^2}{2} + b \frac{\varphi_{BC}^2}{2} + c \frac{\varphi_2^2}{2} = \\
 &= \varphi_1^2 \frac{a(a+b)}{2b} + \varphi_2^2 \frac{c(c+b)}{2b} + \varphi_1 \varphi_2 \frac{ac}{b}
 \end{aligned}$$

L'energia potenziale è  $-Fw_A$ ; l'energia di deformazione è la stessa del problema precedente; quindi può scriversi

$$\begin{aligned}
 E_t &= \frac{1}{2} (K_{11} \varphi_1^2 + K_{22} \varphi_2^2 + 2K_{12} \varphi_1 \varphi_2) - \\
 &- \frac{F}{2} (p_{11} \varphi_1^2 + p_{22} \varphi_2^2 + 2p_{12} \varphi_1 \varphi_2)
 \end{aligned} \tag{96}$$

dove i  $K_{ij}$  sono dati ancora dalle (67), e

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= 2 \frac{ab(a+b)}{b^2} \\
 p_{22} &= 2 \frac{cb(b+c)}{b^2} \\
 p_{12} &= \frac{abc}{b^2}
 \end{aligned} \tag{97}$$

Le condizioni di stazionarietà si scrivono come segue

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = (K_{11} - Fp_{11}) \varphi_1 + (K_{12} - Fp_{12}) \varphi_2 = 0 \tag{98}$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = (K_{21} - Fp_{21}) \varphi_1 + (K_{22} - Fp_{22}) \varphi_2 = 0,$$

con  $p_{21} = p_{12}$ .

Matricialmente il sistema (98) si scrive

$$(\mathbf{K} - F\mathbf{P}) \varphi = 0 ; \quad (99)$$

esso è omogeneo, e presenta soluzioni diverse dalla banale — e in questo caso ciascuna a meno di una costante — se e solo se

$$\det |\mathbf{K} - F\mathbf{P}| = 0 . \quad (100)$$

Nel caso più generale la (100) è un'equazione algebrica di grado  $n$  in  $\lambda$ , moltiplicatore unico dei carichi assiali; premoltiplicando per  $\mathbf{P}^{-1}$  la (100) si scrive

$$\det |\bar{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (101)$$

dove

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K} . \quad (102)$$

La (101) si scrive pure

$$\det |K_{ij} - \lambda \delta_i^j| = 0 \quad (103)$$

dove  $\delta_i^j$  è il simbolo di Kronecker, e, per esteso,

$$\det \begin{vmatrix} \bar{K}_{11} - \lambda & \bar{K}_{12} & \dots & \bar{K}_{1n} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} - \lambda & \dots & \bar{K}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{K}_{n1} & \bar{K}_{n2} & \dots & \bar{K}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad (104)$$

L'equazione (104) traduce il classico problema della ricerca degli autovalori di una matrice  $\mathbf{K}$ . Se  $\mathbf{K}$  è simmetrica, o simmetrizzabile (intendendo come tale il prodotto di due matrici simmetriche, di cui una almeno definita positiva o negativa) le  $n$  radici della (104), e cioè gli *autovalori*, sono tutti reali (anche se non necessariamente distinti).

Alle due radici  $F_1$  ed  $F_2$ , reali e positive per quanto detto nella precedente nota, corrispondono le due soluzioni non banali del sistema (98):

$$F_1 \rightarrow C_1 (c \varphi'_1, c \varphi'_2) \tag{105}$$

$$F_2 \rightarrow C_2 (c \varphi''_1, c \varphi''_2) ;$$

esse sono rappresentate da due rette  $c_1$  e  $c_2$  del piano  $\varphi_1\varphi_2$ , passanti per l'origine (fig. 24.2). Naturalmente, come già detto nella premessa al capitolo, la presenza sotto  $F_1$  ed  $F_2$  di soluzioni di equilibrio  $C^*$  accanto alla  $C_0$  rettilinea (che è di equilibrio per qualsiasi valore di  $F$ ) dipende dall'essersi limitati ai termini del secondo ordine in  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ; in realtà il diagramma  $F\varphi_1$  non presenta due rette orizzontali in  $P_1$  e  $P_2$  (fig. 24.2), ma queste rette sono solo le tangenti ai due rami biforcati effettivi.

Alla soluzione  $C_0$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) corrisponde sempre  $\delta_1 E_t = 0$ , come si trae dalla (98). In  $C_0$  la  $E_t$  ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) è perciò stazionaria, quale che sia il valore di  $F$ .

Dalla (96) si evince che la  $E_t$  ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) è un paraboloide (fig. 24.3); la  $E_t$  infatti compare in essa alla sola prima potenza. Ad ogni valore di  $F$  corrisponde un paraboloide; essi sono tutti tangenti in  $O$  al piano  $\varphi_1, \varphi_2$ . Per  $F = 0$ ,  $E_t$  è positiva per qualsiasi valore di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , essendo limitato al termine  $L$ ; quindi in  $O$  la  $E_t$  attinge un minimo proprio, e la configurazione è stabile. Il paraboloide  $E_t$  ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) è ellittico, essendo ellittico il punto  $O$  (fig. 24.3a); in  $O$  è  $\delta_2 E_t > 0, \forall \delta C$ . Aumentando il valore di  $F$ , il pa-

paraboloide si schiaccia, ma la situazione non cambia aspetto finchè, per  $F = F_1$ , il paraboloido diviene un cilindro, con generatrici parallele alla

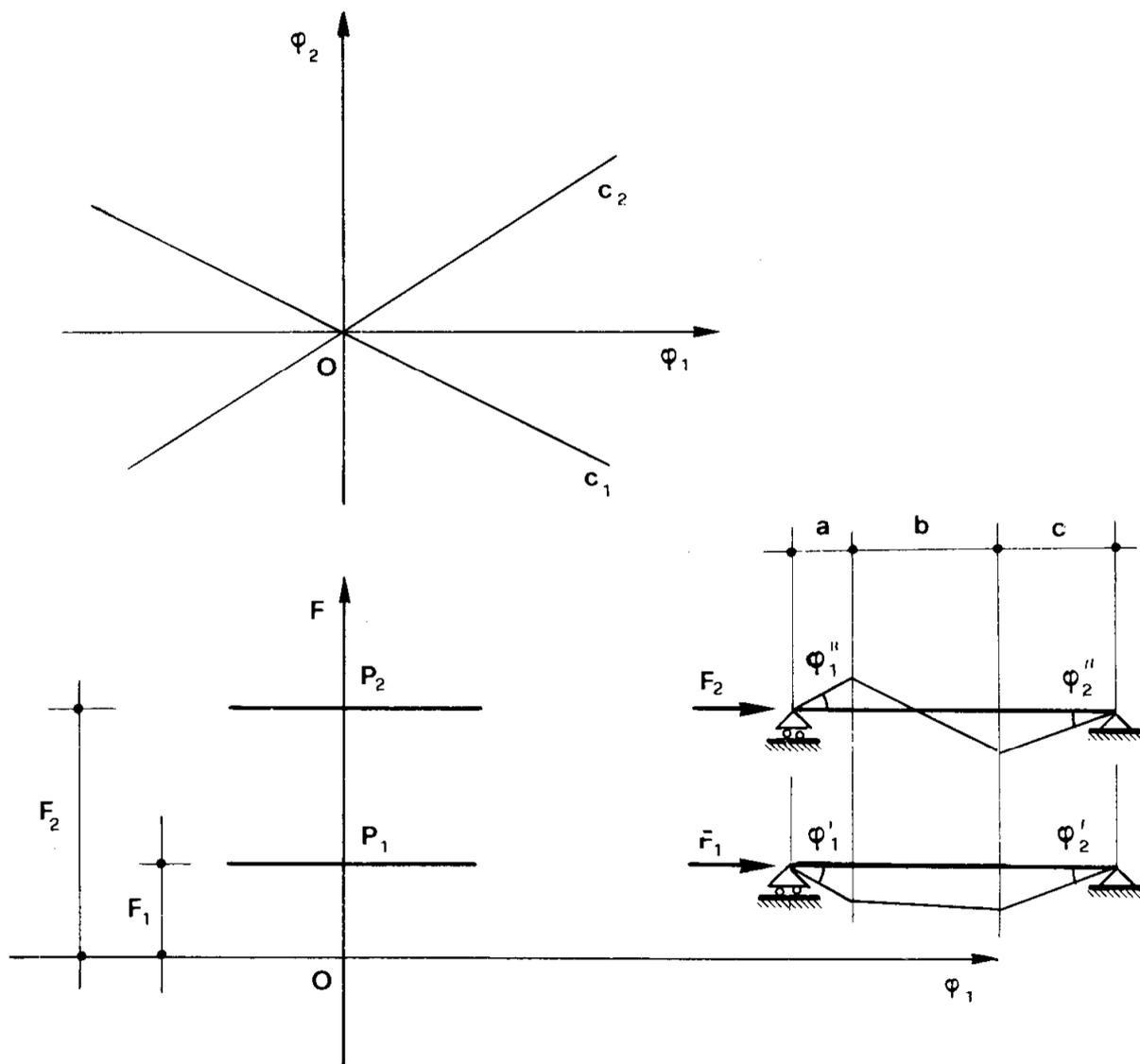


Figura 24.2.

retta  $c_1$  (fig. 24.3b); esso si trova ancora tutto al disopra del piano  $\varphi_1\varphi_2$ , ed ha in comune con tale piano tutta la retta  $c_1$ . In tutti i punti della  $c_1$  è  $\delta_1 E_t = 0, \forall \delta C$ , e quindi tutti questi punti rappresentano configurazioni  $C^*$  di equilibrio. Nei punti della retta  $c_1$  si ha pure  $\delta_2 E_t > 0$  per qualsiasi variazione  $\delta C$ , fatta eccezione per la  $\delta^* C$  lungo  $c_1$ , per cui  $\delta^* E_t = 0$ ; l'equi-

librio è neutro indifferente. Anche questo risultato è dipendente dal fatto che ci si limita ai termini del secondo ordine nelle  $\varphi_i$ , e quindi l'effettiva funzione  $E_t$  è sostituita dall'espressione quadratica (96)

$$E_t = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (106)$$

con

$$a_{ij} = K_{ij} - F p_{ij} ; \quad (107)$$

risulta

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = a_{ij} ,$$

e quindi la matrice Hessiana è indipendente dalle  $\varphi_i$ :

$$\mathbf{H} = |a_{ij}| . \quad (108)$$

La condizione (100) si traduce nell'altra

$$\det \mathbf{H} = 0 ,$$

e cioè nella (7). Per  $F < F_1$  la  $E_t$ , e quindi  $\mathbf{H}$ , sono definite positive, e quindi la  $C_0$  è stabile. Per  $F = F_1$  la  $E_t$  è invece semidefinita positiva, e quindi non può più dirsi che la  $C_0$ , e con essa le  $C^*$ , sono stabili.

Se  $F$  aumenta oltre  $F_1$ , alcuni valori di  $E_t$ , a cominciare dai punti in prossimità della  $c_1$ , diventano negativi; il paraboloide diviene iperbolico, essendo iperbolico il punto  $O$  (fig. 24.3c). Esso è sempre tangente in  $O$  al piano  $\varphi_1\varphi_2$ , e quindi ha con esso in comune due rette passanti per  $O$ ; in queste è  $\delta_1 E_t \neq 0$  per tutte le  $\delta C$  che non siano rappresentate da vettori paralleli alle rette stesse, e quindi queste non rappresentano configurazioni di equilibrio.

Per  $F = F_2$ , tutti i valori di  $E_t$  sono negativi; il paraboloide è un cilindro con generatrici parallele a  $c_2$ , si trova tutto sotto il piano  $\varphi_1\varphi_2$ , e ha in comune con il piano  $\varphi_1\varphi_2$  tutta la retta  $c_2$  (fig. 24.3d). Di nuovo quindi, per  $F = F_2$ , si hanno delle configurazioni di equilibrio  $C^*$  affiancate alla  $C_0$ , e precisamente quelle rappresentate dalla  $c_2$ . Esse però sono instabili, poichè in esse la  $E_t$  non ha un minimo.

Se  $F$  aumenta oltre  $F_2$ , il paraboloide ridiventa ellittico, ma si trova tutto sotto il piano  $\varphi_1\varphi_2$  (fig. 24.3e). L'unica configurazione, stabile, è

perciò la  $C_0$ , per  $F < F_1$ ; per  $F > F_1$  essa è instabile, mentre per  $F = F_1$

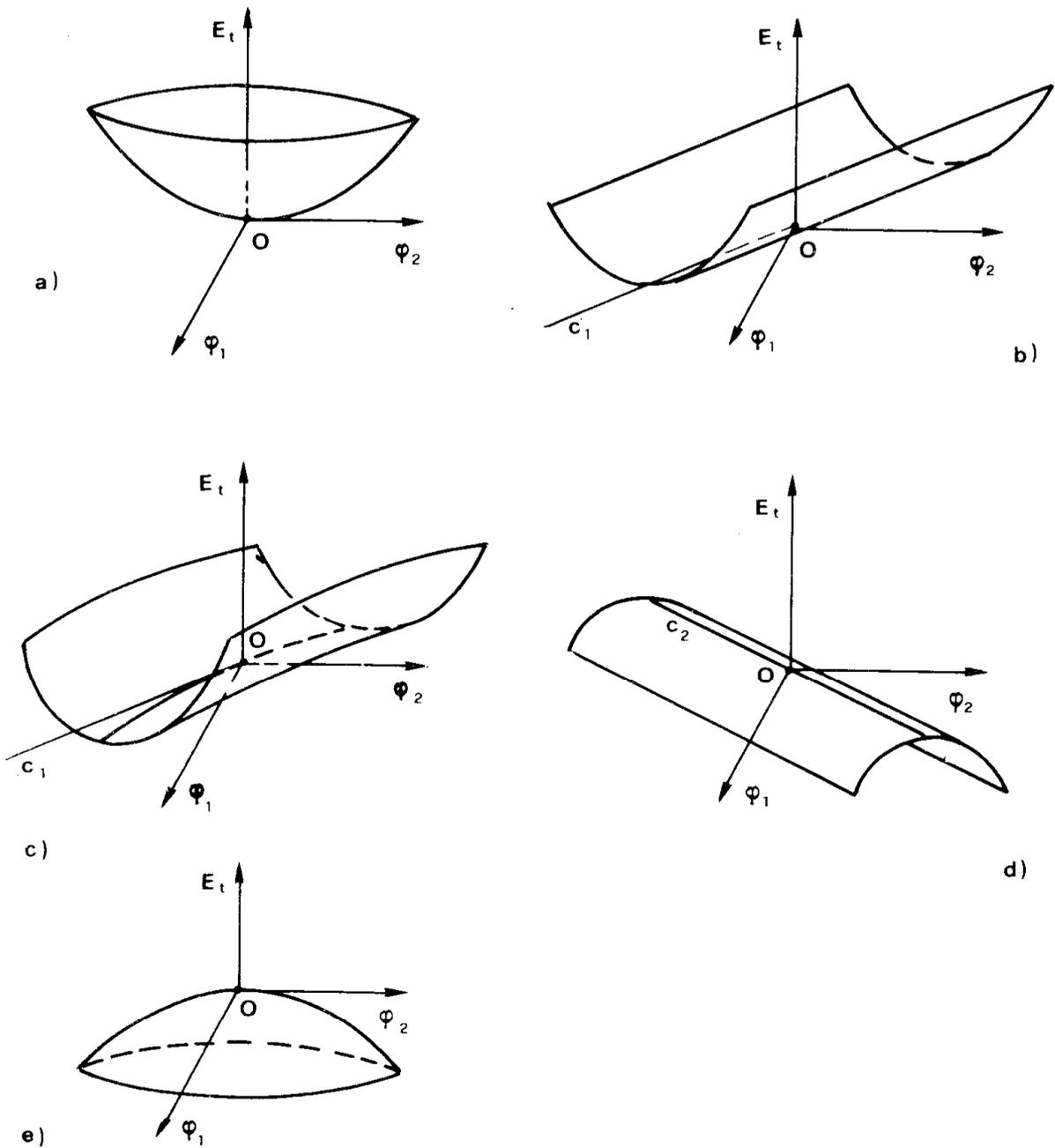


Figura 24.3.

non può dirsi nulla in merito alla stabilità (equilibrio neutro indifferente) se non si passa all'esame dei termini di  $E_t$  di ordine superiore a due.

Di quanto segue sopra si ha conferma analitica studiando l'intersezione della quadrica (106) con un piano  $E_t = \frac{c^2}{2}$ ; essa è una conica di equazione

$$a_{11} \varphi_1^2 + 2a_{12} \varphi_1 \varphi_2 + a_{22} \varphi_2^2 - c^2 = 0 . \quad (109)$$

Vale la classificazione

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \begin{array}{ll} > 0 & \text{ellisse} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{iperbole .} \end{array} \quad (110)$$

Inoltre la conica degenera in due rette se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 , \quad (111)$$

condizione che nel caso in esame si scrive

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix} = -c^2 \Delta = 0 ;$$

quindi la (110) si modifica in

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \begin{array}{ll} > 0 & \text{ellisse} \\ = 0 & \text{coppia di rette} \\ < 0 & \text{iperbole.} \end{array} \quad (112)$$

In particolare, se  $\Delta = 0$  la (109) si scrive

$$a_{11} \varphi_1^2 + a_{22} \varphi_2^2 - 2 \sqrt{a_{11} a_{22}} \varphi_1 \varphi_2 = c^2$$

da cui

$$(\varphi_1 \sqrt{a_{11}} - \varphi_2 \sqrt{a_{22}})^2 = c^2$$

e quindi la (109) si spezza nelle due rette parallele

$$\varphi_1 \sqrt{a_{11}} - \varphi_2 \sqrt{a_{22}} = \pm c ; \quad (113)$$

si tenga presente che, essendo

$$a_{11} a_{22} = a_{12}^2 > 0 ,$$

$a_{11}$  ed  $a_{22}$  devono essere dello stesso segno, e quindi le due rette (113) sono ambedue reali, o ambedue immaginarie. Esse sono inclinate di

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} &= \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{a_{12}}{a_{22}} = \operatorname{arctg} \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{aligned} \quad (114)$$

sull'asse delle  $\varphi_1$ , e sono equidistanti da 0.

Per  $F = 0$  è

$$\Delta = K_{11} K_{12} - K_{12}^2 > 0,$$

perchè  $\mathbf{K}$  è definita positiva; l'ellisse è reale, perchè  $k_{11}$  e  $k_{22}$  sono ambedue positivi.

La  $\Delta$  è una funzione quadratica di  $F$  (fig. 24.4), che si annulla in  $F_1$  ed  $F_2$ , ed è positiva in  $F = 0$ ; è quindi

$$\Delta > 0 \quad \text{se} \quad F \in ] - \infty , F_1 [$$

$$\Delta < 0 \quad \text{se} \quad F \in ] F_1 , F_2 [$$

$$\Delta > 0 \quad \text{se} \quad F \in ] F_2 , \infty [ .$$

D'altro canto,  $a_{11}$  ed  $a_{22}$  sono funzioni lineari di  $F$ , ed ambedue positive, o negative; nei due intervalli  $] - \infty , F_1 [$  e  $] F_2 , \infty [$ ; infatti in questi intervalli è

$\Delta > 0$ , e quindi  $a_{11} a_{22} > 0$ . Il loro segno non può invertirsi nei suddetti intervalli perchè, se si invertisse, in un punto si avrebbe  $a_{11} = a_{22} = 0$ , e quindi  $\Delta < 0$ . Se ne trae che  $a_{11}(F)$  ed  $a_{22}(F)$  si annullano in  $] F_1, F_2 [$ ; e quindi i due termini  $a_{11}$  ed  $a_{22}(F)$  si annullano in  $] F_1, F_2 [$ ; e quindi i due termini  $a_{11}$  ed  $a_{22}$  sono ambedue positivi in  $] -\infty, F_1 [$ , perchè positivi in  $F = 0$ ; e sono ambedue negativi in  $] F_2, \infty [$ . La (109) è perciò una ellisse reale in  $] -\infty, F_1 [$ , immaginaria in  $] F_2, \infty [$ .

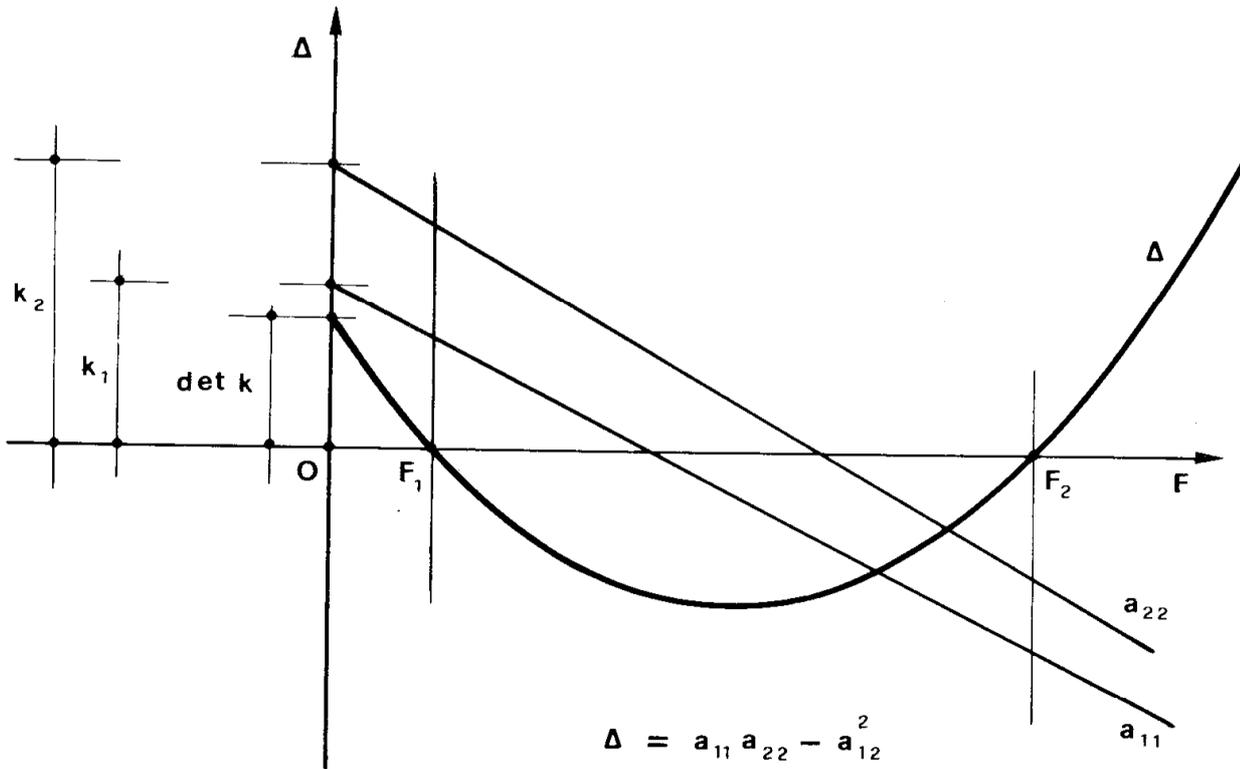


Figura 24.4.

Per  $F \in ] F_1, F_2 [$  la conica è una iperbole, poichè  $\Delta < 0$ . Gli asintoti, forniti dall'equazione

$$a_{11} \varphi_1^2 + 2 a_{12} \varphi_1 \varphi_2 + a_{22} \varphi_2^2 = 0, \quad (115)$$

sono due rette passanti per l'origine; la loro inclinazione sull'asse delle  $\varphi_1$  è data dalle due radici dell'equazione

$$a_{22} \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)^2 + 2 a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + a_{11} = 0,$$

e cioè da

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1}{a_{22}} \left( a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} \right). \quad (116)$$

Per  $F = F_1$  e per  $F = F_2$  è  $\Delta = 0$ , e la (116) porge

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}; \quad (117)$$

i due asintoti coincidono tra loro, e rispettivamente con la retta  $c_1$  se  $F = F_1$ , con la retta  $c_2$  se  $F = F_2$ .

Se  $\Delta = 0$ , e cioè per  $F = F_1$  e per  $F = F_2$ , la (109), come già detto, rappresenta in ciascuno dei due casi due rette parallele (113); esse sono reali e parallele alla  $c_1$  se  $a_{11}$  ed  $a_{22}$  sono positivi, e cioè per  $F = F_1$ , immaginaria e parallele alla  $c_2$  se  $a_{11}$  ed  $a_{22}$  sono negativi, e cioè per  $F = F_2$ .

Da quanto sopra deriva la seguente considerazione generale, valevole per un sistema con un numero  $n$  qualsiasi di parametri di libertà, soggetto ai carichi assiali  $\lambda F_i$ . La configurazione  $C_0$  ( $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ) è comunque di equilibrio, quale che sia il valore del moltiplicatore  $\lambda$  dei carichi assiali. Dall'espressione di  $E_t$

$$E_t = \frac{1}{2} \sum a_{ij} c_i c_j, \quad (118)$$

ove

$$a_{ij} = K_{ij} - \lambda p_{ij}, \quad (119)$$

si trae che  $E_t$  è funzione quadratica delle  $c_i$ , con coefficienti dipendenti dal parametro  $\lambda$ . Per  $\lambda = 0$ ,  $E_t$  si limita ad  $L$ , e perciò è positiva per qualsiasi punto diverso da  $C_0$ ; se  $\lambda$  aumenta, si perviene ad un suo valore  $\lambda_1$  per cui tale proprietà non è più valida. Naturalmente ciò non può accadere in un solo punto  $C^*$  (fig. 24.5), perchè se la (118) si annulla per l'ennupla  $c_1 c_2 \dots c_n$ , si annulla anche per l'ennupla  $rc_1, rc_2 \dots rc_n$ , ove  $r$  è un qualsiasi reale. La condizione quindi per cui cade la proprietà suddetta (e cioè cade la proprietà che in  $C_0$  la  $E_t$  abbia un minimo proprio, e cioè che

la  $C_0$  sia stabile) è che esistano  $\infty$  configurazioni  $C^*$ , definite dal vettore  $c_1^*$ , per cui sia  $E_t = 0$ , mentre  $E_t > 0$  per tutti gli altri vettori  $c$ . Per il

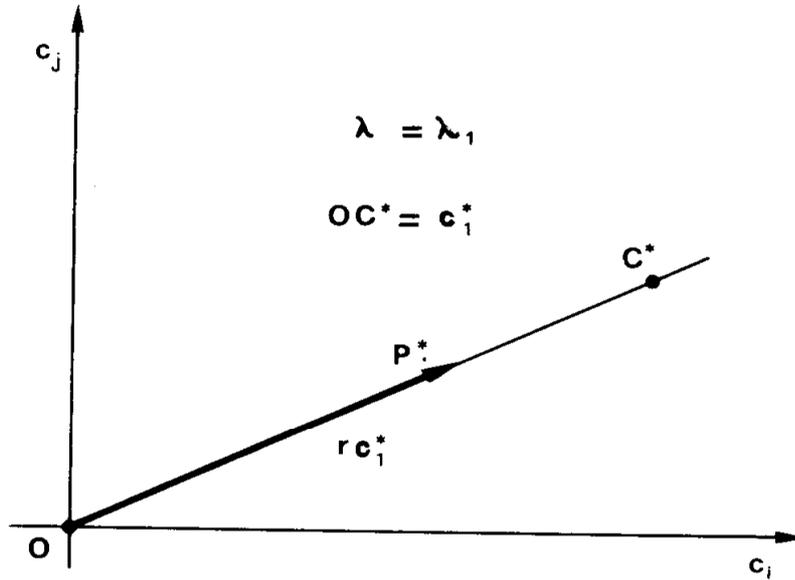


Figura 24.5.

generico  $OP^* = r c_1^*$  deve quindi aversi

$$\delta_1 E_{tP^*} = 0$$

per qualsiasi possibile variazione di  $c_1^*$ , e cioè.

$$\frac{\partial E_{tP^*}}{\partial c_{1i}^*} = 0 \tag{120}$$

per  $i = 1, 2, \dots n$ .

Poichè è

$$E_{tP^*} = \frac{r^2}{2} \sum a_{ij} c_{1i}^* c_{1j}^*$$

le (120) si scrivono

$$\sum_j a_{ij} c_{1j}^* = 0 \tag{121}$$

per  $i, j = 1, 2, \dots n$ .

La (121) offre soluzioni  $c^*$  non banali se e solo se

$$\det \mathbf{A} = \det (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{P}) = 0 . \quad (122)$$

La (122) è un'equazione di grado  $n$  in  $\lambda$ ; poichè il vettore  $c_1^*$  per cui la  $C_0$  passa da stabile ad instabile è da ricercarsi tra le soluzioni non banali della (121), e poichè per  $\lambda > \lambda_1$  la  $C_0$  è comunque instabile verificandosi comunque  $E_t < 0$  in  $c_1^*$ , ne discende che  $\lambda_1$  è la più piccola delle radici della (122), e la  $c^*$  corrispondente si trae dal sistema (121) per tale valore di  $\lambda$ . La condizione (122) è anche quella necessaria e sufficiente per l'esistenza di configurazioni di equilibrio  $C^*$  affiancate alla  $C_0$  (vedi (7)).

Nel caso particolare di

$$\begin{aligned} b &= c = a \\ k_B &= k_C = k \end{aligned}$$

il sistema (96) si scrive

$$\begin{aligned} (5k - 2Fa)\varphi_1 + (4k - Fa)\varphi_2 &= 0 \\ (4k - Fa)\varphi_1 + (5k - 2Fa)\varphi_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (123)$$

e quindi l'equazione che fornisce  $F_1$  ed  $F_2$  è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5k - 2Fa & 4k - Fa \\ 4k - Fa & 5k - 2Fa \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$F_1 = \frac{k}{a}$$

$$F_2 = 3 \frac{k}{a} .$$

Per  $F = \frac{k}{a}$  la soluzione non banale del sistema (123) è

$$\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'} = -1;$$

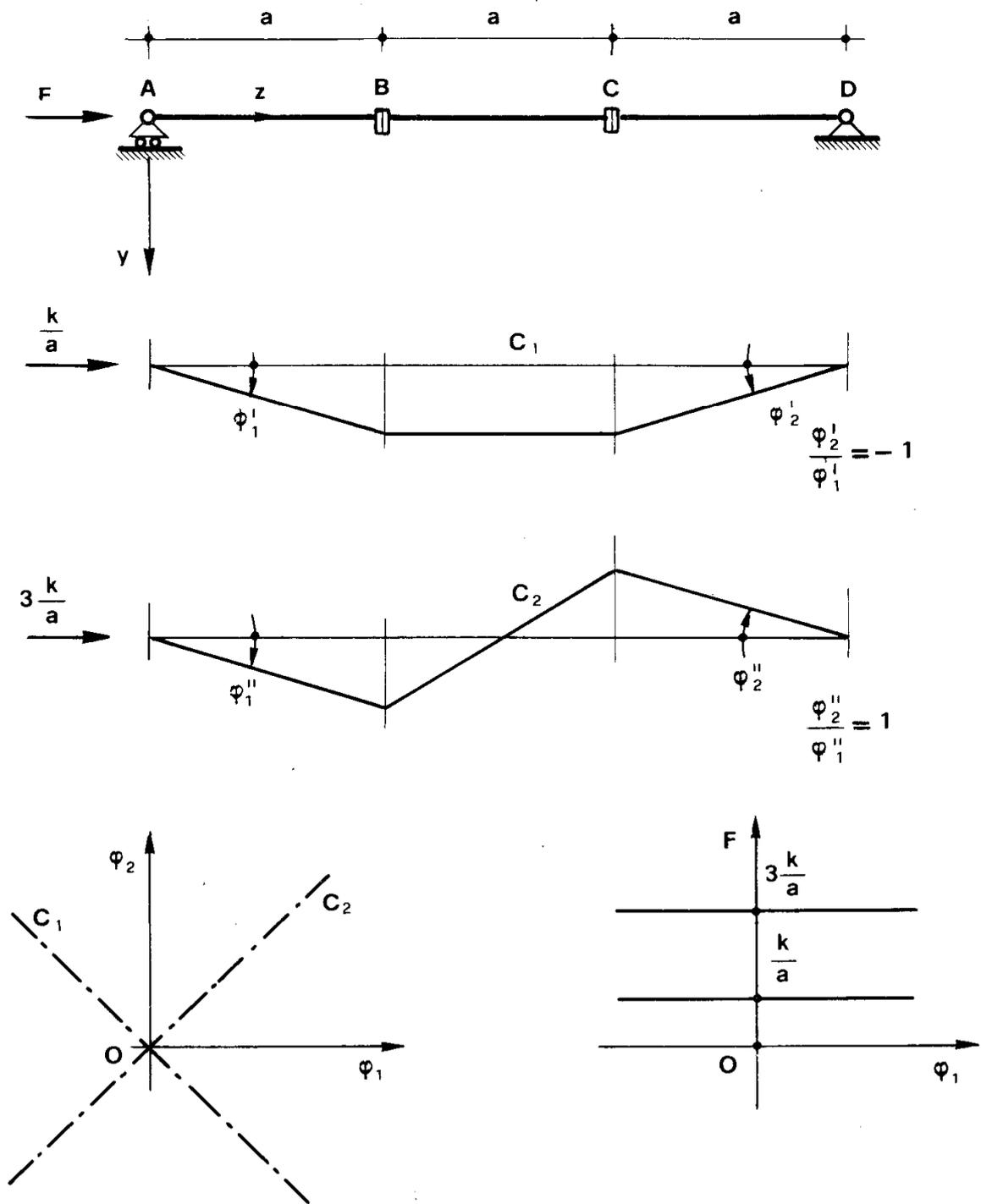


Figura 24.6

per  $F = 3 \frac{k}{a}$  è

$$\frac{\varphi_2''}{\varphi_1''} = 1 .$$

Tali soluzioni sono disegnate nella fig. 24.6 a meno di una costante ciascuna.

### Problema n. 25.

La struttura della fig. 25 è soggetta sia a  $q$  che ad  $F$ . L'espressione di  $L$  è quella già ottenuta nel problema 23; l'espressione di  $P$  è somma di quella del problema 23 (termine lineare in  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ), e di quella del problema 24 (termine quadratico in  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ). Le due condizioni

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_2} = 0$$

conducono così ad un sistema di equazioni in  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dove i coefficienti sono quelli (123) del problema 24, ed i termini noti quelli del problema 23:

$$(5k - 2Fa) \varphi_1 + (4k - Fa) \varphi_2 = -q \frac{a^2}{2} \quad (124)$$

$$(4k - Fa) \varphi_1 + (5k - 2Fa) \varphi_2 = qa^2 .$$

La soluzione di tale sistema è

$$\varphi_1 = \frac{qa^4}{2} \frac{4Fa^3 - 13ka^2}{3F^2 a^6 - 12Fka^5 + 9k^2 a^4} \quad (125)$$

$$\varphi_2 = \frac{qa^4}{2} \frac{-5Fa^3 + 14ka^2}{3F^2 a^6 - 12Fka^5 + 9k^2 a^4} .$$