

CAPITOLO PRIMO
SULL'ENERGIA POTENZIALE TOTALE

Premessa.

Nel secondo volume di Problemi si è utilizzato il principio dei lavori virtuali nella cosiddetta seconda forma; e cioè si è usato un insieme di forze equilibrato fittizio, ed una δC reale, scrivendo una condizione necessaria di equilibrio. Se il principio si sfrutta nella prima forma, e cioè usando tutte le δC congruenti fittizie (a partire dalla C reale, ovviamente), e come insieme di forze quello reale, si ottiene il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale come condizione sufficiente (e necessaria) di equilibrio delle configurazioni, e cioè come criterio di scelta delle configurazioni di equilibrio fra tutte le possibili configurazioni congruenti.

E' opportuno precisare che le δC devono rispettare ai limiti le sole condizioni di congruenza, e non quelle di equilibrio.

Formalmente si può scrivere

$$C, F_i \text{ eq.} \iff \delta_1 E_t = 0 \quad \forall \delta C \quad (1)$$

dove E_t , *energia potenziale totale*, è la somma dell'*energia potenziale* P delle forze applicate, e dell'*energia di deformazione* L della struttura. Si ricordi che le sole ipotesi sotto cui la (1) è valida sono quelle di materiale elastico, e di vincoli lisci e bilaterali; essa vale quindi anche in presenza di grandi spostamenti, di materiale non linearmente elastico, ed addirittura di forze *non* conservative, poichè si chiamano in gioco le sole variazioni del primo ordine di P e perciò le forze possono essere considerate come gravitazionali.

L'insieme struttura-forze sia conservativo; esista cioè un potenziale $\phi(c_i)$, funzione uniforme delle n coordinate lagrangiane $c_1 c_2 \dots c_n$, tale che nel passaggio da una configurazione C_1 ad un'altra C_2 il lavoro delle forze possa esprimersi come

$$L = \phi(c_{i_2}) - \phi(c_{i_1})$$

o, come spesso si scrive,

$$L = \phi(C_2) - \phi(C_1) \quad (2)$$

L'energia potenziale P è data da $-\phi(c_i)$.

Accettata la definizione di stabilità offerta dalla Meccanica razionale, e data una configurazione C_0 che rispetti la (1), e cioè di equilibrio, si sa che se E_t presenta in C_0 un minimo relativo proprio la C_0 è *stabile*. Se E_t non presenta in C_0 un minimo relativo proprio, e se tale assenza di minimo è riconosciuta attraverso l'esame delle prime derivate non nulle in C_0 di E_t rispetto alle c_i , la C_0 *non è stabile*, o, come si dice, è *instabile*; per esempio, se in C_0 la δE_t è maggiore di zero per qualsiasi δC , fatta eccezione per una o più δC^* per cui δE_t è nulla, non può dirsi nè che C_0 è stabile (non esiste infatti un minimo proprio di E_t in C_0) nè che C_0 è instabile (l'inesistenza del minimo non è riconosciuta attraverso l'esame delle prime derivate di E_t non nulle in C_0).

Data nello spazio delle configurazioni una *sfera* I comunque piccola con centro C_0 , è definita in I la matrice (Hessiana) \mathbf{H} di ordine n

$$\mathbf{H} = \left| \frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} \right|. \quad (3)$$

Se ovunque in $I - C_0$ la \mathbf{H} è definita positiva (e cioè la forma quadratica $\Sigma \frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} c_i c_j$ è maggiore di zero per qualsiasi ennupla $c_1 c_2 \dots c_n$)

la E_t presenta in C_0 un minimo relativo proprio, e quindi la C_0 è stabile.

Se viceversa la E_t presenta in C_0 un minimo relativo, la \mathbf{H} è semidefinita positiva in C_0 ; se ne trae, in particolare, che se una delle derivate seconde $\frac{\partial^2 E_t}{\partial c_j^2}$ in C_0 è negativa, in C_0 la E_t non presenta un minimo

relativo, tanto meno un minimo relativo **proprio**, e quindi C_0 è instabile. Assumendo C_0 come origine dello spazio delle configurazioni, si ha in I , limitandosi ai termini del secondo ordine, ed assumendo $(E_t)_0 = 0$,

$$\begin{aligned} E_t &= (E_t)_0 + \Sigma \left(\frac{\partial E_t}{\partial c_i} \right)_0 c_i^* + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} \right)_0 c_i^* c_j^* \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} \left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} \right)_0 c_i^* c_j^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Una configurazione C^* ($c_i^* \neq C_0$) è di equilibrio se e solo se

$$\frac{\partial E_t}{\partial c_i^*} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (5)$$

le (5), per la (4), si scrivono

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} \right)_0 c_j^* = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

Il sistema (6) ammette soluzione non banale se e solo se

$$\det \mathbf{H}_0 = 0; \quad (7)$$

la soluzione C^* ($c_1^* c_2^* \dots c_n^*$) è definita a meno di una costante.

L'esistenza di configurazioni C^* di equilibrio prossime a C_0 implica che in C_0 e C^* la E_t assume lo stesso valore; ed infatti per i valori $c_1^* c_2^* \dots c_n^*$ che soddisfano il sistema (6) la forma quadratica (4) si annulla. Ciò non esclude però che in C_0 possa esistere un minimo relativo proprio di E_t , e quindi che la C_0 possa essere stabile. Ed infatti il risultato è valido se ci si limita ai termini del secondo ordine; in realtà non esistono configurazioni di equilibrio prossime alla C_0 , e tanto meno una infinità di configurazioni, tutte definite a meno di una costante. Si può dire cioè che se è verificata la (7) esistono più configurazioni di equilibrio. *nell'intorno del secondo ordine di C_0* , e viceversa.

L'espressione approssimata (4) della E_t non è altro che la *variazione seconda* (variazione del secondo ordine) di E_t in I ; con esattezza può quindi scriversi

$$(\delta_2 E_t)_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial c_i \partial c_j} \right)_0 c_i^* c_j^*. \quad (8)$$

Essa è una forma quadratica definita in I , i cui coefficienti sono gli elementi di \mathbf{H} in C_0 . Si ha

$$(\delta_2 E_t)_0 > 0 \quad \forall \delta C \Rightarrow C_0 \text{ stabile} \quad (9)$$

$$\exists \delta C^* : (\delta_2 E_t)_0^* < 0 \Rightarrow C_0 \text{ instabile} .$$

Può anche darsi però che risulti $(\delta_2 E_t)_0 > 0$ per qualsiasi δC , ad eccezione di una o più δC^* per cui $(\delta_2 E_t)_0^* = 0$. In questa evenienza, molto significativa perchè collegata come già detto con la (7), si avverte l'opportunità di distinguere tre casi, estendendo l'indagine ai δE_t di ordine superiore, e dando a tali casi una speciale qualifica:

$$\begin{aligned} \exists \delta C^* : (\delta_2 E_t)_0^* = 0, \quad (\delta E_t)_0^* > 0 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C_0 \text{ è} \\ (\delta_2 E_t)_0 > 0 \quad \forall \delta C \neq \delta C^* & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{neutro stabile} \\ \\ \exists \delta C^* : (\delta_2 E_t)_0^* = 0, \quad (\delta E_t)_0^* = 0 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C_0 \text{ è} \\ (\delta_2 E_t)_0 > 0 \quad \forall \delta C \neq \delta C^* & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{indifferente} \quad (10) \\ \\ \exists \delta C^* : (\delta_2 E_t)_0^* = 0, \quad (\delta E_t)_0^* < 0 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C_0 \text{ è} \\ (\delta_2 E_t)_0 > 0 \quad \forall \delta C \neq \delta C^* & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{neutro instabile} \end{aligned}$$

E' da dire che seguendo la definizione della Meccanica Razionale la configurazione neutro stabile è stabile, la neutro instabile è instabile, mentre nulla può dirsi, come già si è osservato, per l'indifferente.

Problema n. 1.

1) La struttura della fig. 1.1a è costituita da una trave indeformabile AB vincolata in B con un incastro angolarmente ed elasticamente cedevole. Essa rientra nelle cosiddette *strutture rigido-elastiche*, costituite da travi indeformabili collegate tra loro ed al suolo con vincoli di cui qualcuno elasticamente cedevole. Per ottenere il grado i di iperstaticità della struttura occorre irrigidire i vincoli cedevoli. La deformata dovuta alle forze dipende da n parametri; n è il grado di labilità della struttura derivata dalla reale quando si assegna una completa cedevolezza ai vincoli cedevoli. E' ovvio che il grado i di iperstaticità ed il numero n non hanno nulla in comune, nel senso che sono indipendenti l'uno dall'altro. Impropiamente si usa dire che la struttura possiede n gradi di libertà; in realtà la struttura reale *deve* essere isostatica o iperstatica, mentre n è soltanto il numero finito di parametri da cui dipende *univocamente* la deformata. In tal senso soltanto si può parlare di *sistemi olonomi* ad n gradi di libertà, e di *coordinate lagrangiane* di essi. Si assume che i vincoli siano cedevoli elasticamente con elasticità lineare: o meglio, che i cedimenti siano proporzionali alle corrispondenti componenti della reazione. Se si considera come reazione quella

esercitata dalla struttura sul vincolo, il cedimento deve essere dello stesso segno della reazione; se invece, come è d'uso, per reazione si intende quella *esercitata dal vincolo sulla struttura*, il cedimento è di segno contrario alla reazione.

Un vincolo cedevole molto frequente è la *cerniera elastica*, e cioè l'in-

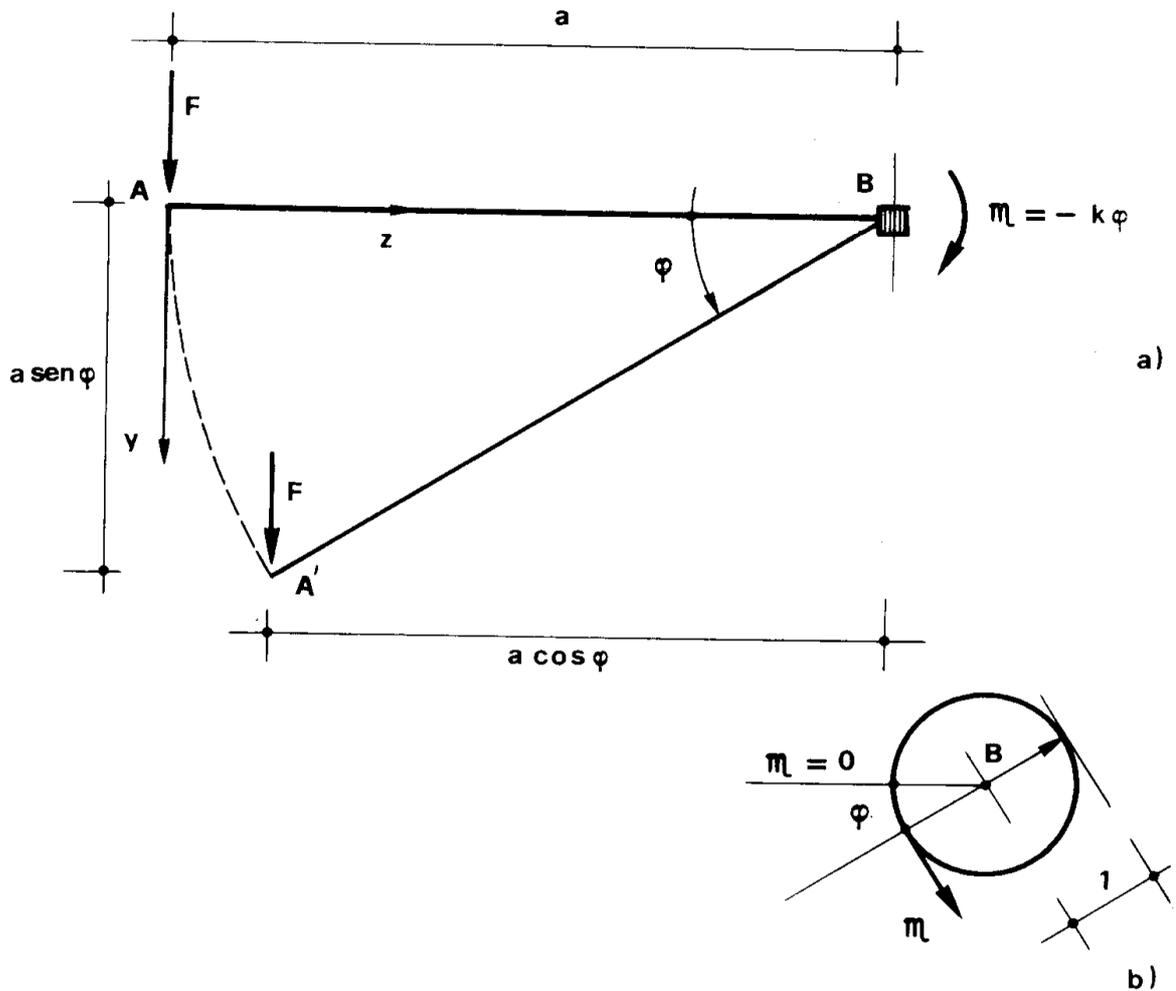


Figura 1.1.

castro angularmente cedevole; se tale vincolo è esterno, può porsi

$$\mathfrak{M} = -k\varphi ; \tag{11}$$

se il vincolo è interno, si ha invece

$$\mathfrak{M}_s = k(\varphi_d - \varphi_s) = k\Delta\varphi$$

$$\mathfrak{M}_d = -k (\varphi_d - \varphi_s) = -k \Delta\varphi$$

e cioè ($M = \mathfrak{M}_s = -\mathfrak{M}_d$)

$$M = k \Delta\varphi . \quad (12)$$

La costante k è la *rigidezza* del vincolo; il suo inverso è la *cedibilità*.

Per la forma delle (11) e (12), φ e $\Delta\varphi$ vanno misurati dalla posizione per cui \mathfrak{M} ed M sono nulli. Si osservi pure che una cerniera elastica può essere realizzata con una molla, con un concio elastico, o simili.

L'effetto di una coppia \mathfrak{M} agente su una cerniera elastica è assimilabile a quello di una forza di \mathfrak{M} tonnellate, tangente al cerchio di raggio unitario ($1m$) e centro nella cerniera (fig. 1.1b). Se φ è misurato in *radianti*, per effetto di un $d\varphi$ la \mathfrak{M} compie il lavoro

$$dL = \mathfrak{M} ds = k \varphi d\varphi \quad tm ,$$

e quindi il lavoro totale fatto da \mathfrak{M} nell'intervallo $[0, \varphi]$ è

$$L = \int_0^\varphi k \varphi d\varphi = \frac{k\varphi^2}{2} ; \quad (13)$$

questa è anche l'energia elastica immagazzinata nella cerniera elastica. Se il vincolo è interno, si ha analogamente

$$L = \frac{k (\Delta\varphi)^2}{2} . \quad (14)$$

2) La struttura della fig. 1.1a è isostatica, e per essa $n = 1$. Nella posizione AB è $\varphi = 0$, e quindi $\mathfrak{M} = 0$. La forza F è di direzione fissa, ortogonale ad AB , ed il suo punto A di applicazione è solidale alla trave; quindi F è conservativa. La posizione AB è la *configurazione indeformata* della trave.

Adottando AB come *quota iniziale* per il calcolo dell'energia potenziale P di F , si ha

$$P = -F v_A = -F a \operatorname{sen} \varphi , \quad (15)$$

L'energia elastica L non risiede che nel vincolo, poichè la trave è rigida, ed è fornita dalla (13). Quindi si ha

$$E_t = P + L = -F a \operatorname{sen} \varphi + \frac{k\varphi^2}{2} \quad (16)$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -Fa \cos \varphi + k\varphi .$$

Se φ_0 è angolo di equilibrio sotto F , si ha

$$\left(\frac{dE_t}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 ,$$

e viceversa. Quindi l'angolo φ_0 è fornito dalla relazione

$$-Fa \cos \varphi_0 + k\varphi_0 = 0$$

da cui

$$F = \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} . \quad (17)$$

Si preferisce ottenere la F (φ_0) invece della φ_0 (F) per la maggiore semplicità dell'operazione.

Il diagramma F (φ_0) è riportato nella fig. 1.2a; esso è antisimmetrico rispetto all'asse delle F , e infatti dalle (17) si osserva che se F , φ_0 è soluzione, lo è pure $-F$, $-\varphi_0$. Per

$$\varphi_0 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$$

risulta

$$F \rightarrow \pm \infty ,$$

quindi le due parallele all'asse delle F nei punti di ascissa $\pm \frac{\pi}{2}$ sono asintoti.

Il diagramma F (φ_0) è quello della restrizione della funzione $\varphi_0 \rightarrow F$, fornita dalla (17), nell'intervallo di definizione $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La funzione $\varphi_0 \rightarrow F$ è definita in $R - S$, dove

$$S = \left\{ (2c + 1) \frac{\pi}{2}, c \in Z \right\};$$

essa è una applicazione da $R - S$ su R (suriettiva) non iniettiva. Il diagramma di $\varphi_0(F)$ presenta gli asintoti verticali definiti da

$$\varphi \in S .$$

La costruzione del diagramma può farsi agevolmente modificando la (17) in

$$\cos \varphi_0 = \frac{k}{Fa} \varphi_0 ,$$

e trovando le intersezioni dei diagrammi delle due funzioni di φ_0 per varii valori di F (fig. 1.3a); si osserva (fig. 1.3b) che esiste una successione F_i non superiormente limitata in R^+ , tale che per

$$F \in] F_n , F_{n+1} [\quad (n \in N)$$

esistono $2n + 1$ soluzioni della (17) in R^+ , e per

$$F \in] - F_n - F_{n+1} [$$

esistono $2n + 1$ soluzioni della (10), opposte alle precedenti, in R^- . Così pure esiste una successione F'_i non superiormente limitata in R^+ , tale che per

$$F \in] F'_n , F'_{n+1} [\quad (n \in N)$$

esistono $2n + 1$ soluzioni della (17), in R^- , e per

$$F \in] - F'_n , - F'_{n+1} [$$

esistono $2n + 1$ soluzioni della (10), opposte alle precedenti, in R^+ ,

Dalla (17) si ha

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{k}{a} \frac{\varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} ;$$

è interessante il valore della pendenza nell'origine

$$\left(\frac{dF}{d\varphi_0} \right)_{\varphi_0=0} = \frac{k}{a} . \quad (18)$$

Per $\varphi_0 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ si ha, come ovvio, $\frac{dF}{d\varphi_0} \rightarrow \infty$. Nel diagramma $F\varphi_0$ gli

angoli, per ragioni di calcolo, sono stati riportati in gradi nonagesimali anzichè in radianti.

Nella fig. 1.2b è riportato anche il diagramma $E_t(\varphi)$; per tracciare

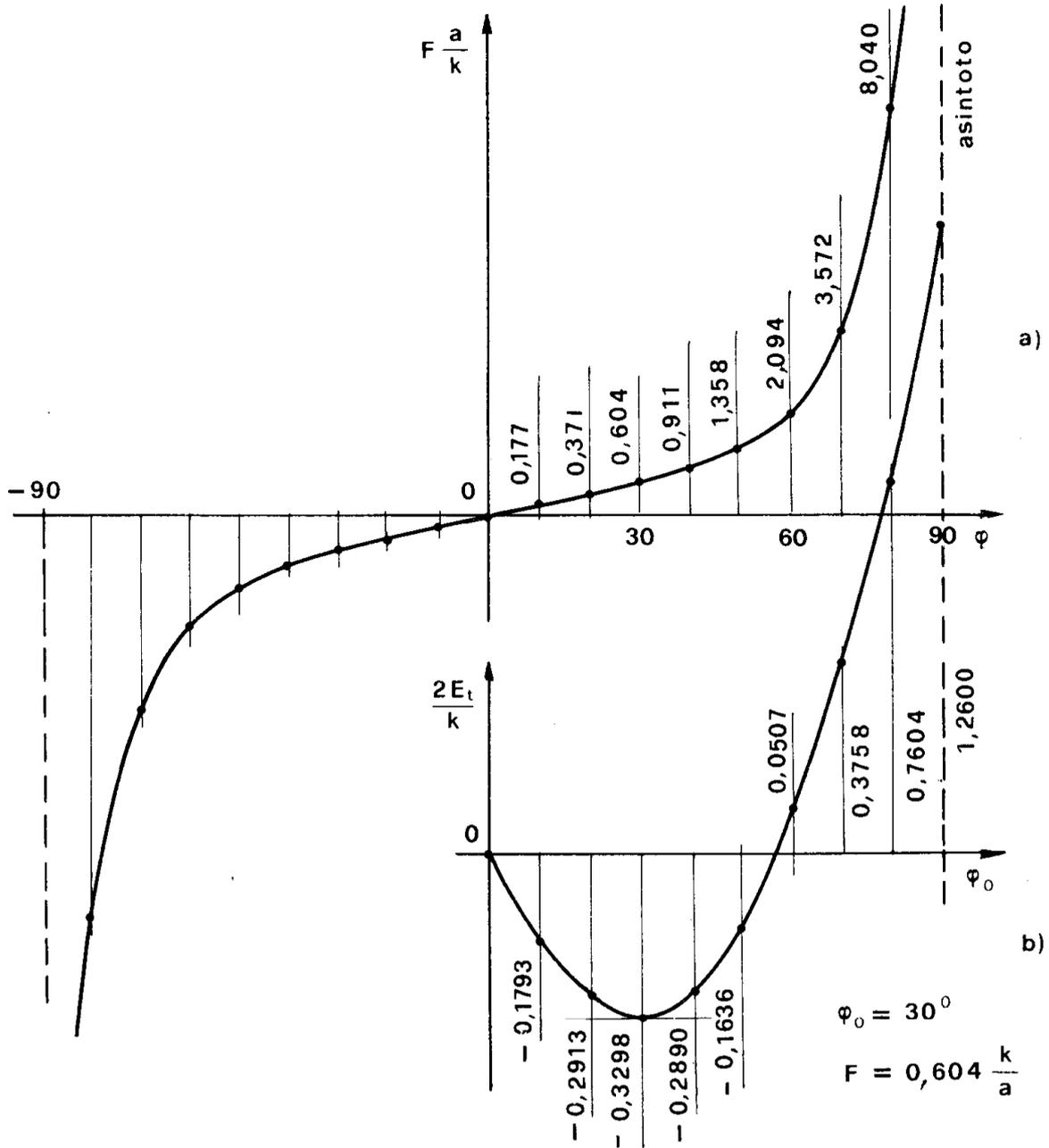


Figura 1.2.

tale diagramma occorre fissare F (16); ed al variare di F si ha una famiglia di diagrammi $E_t(\varphi)$. Nel nostro caso si è preso il valore di F corrispon-

dente ad un angolo di equilibrio $\varphi_0 = 30^\circ$, e cioè

$$F = 0,604 \frac{k}{a}$$

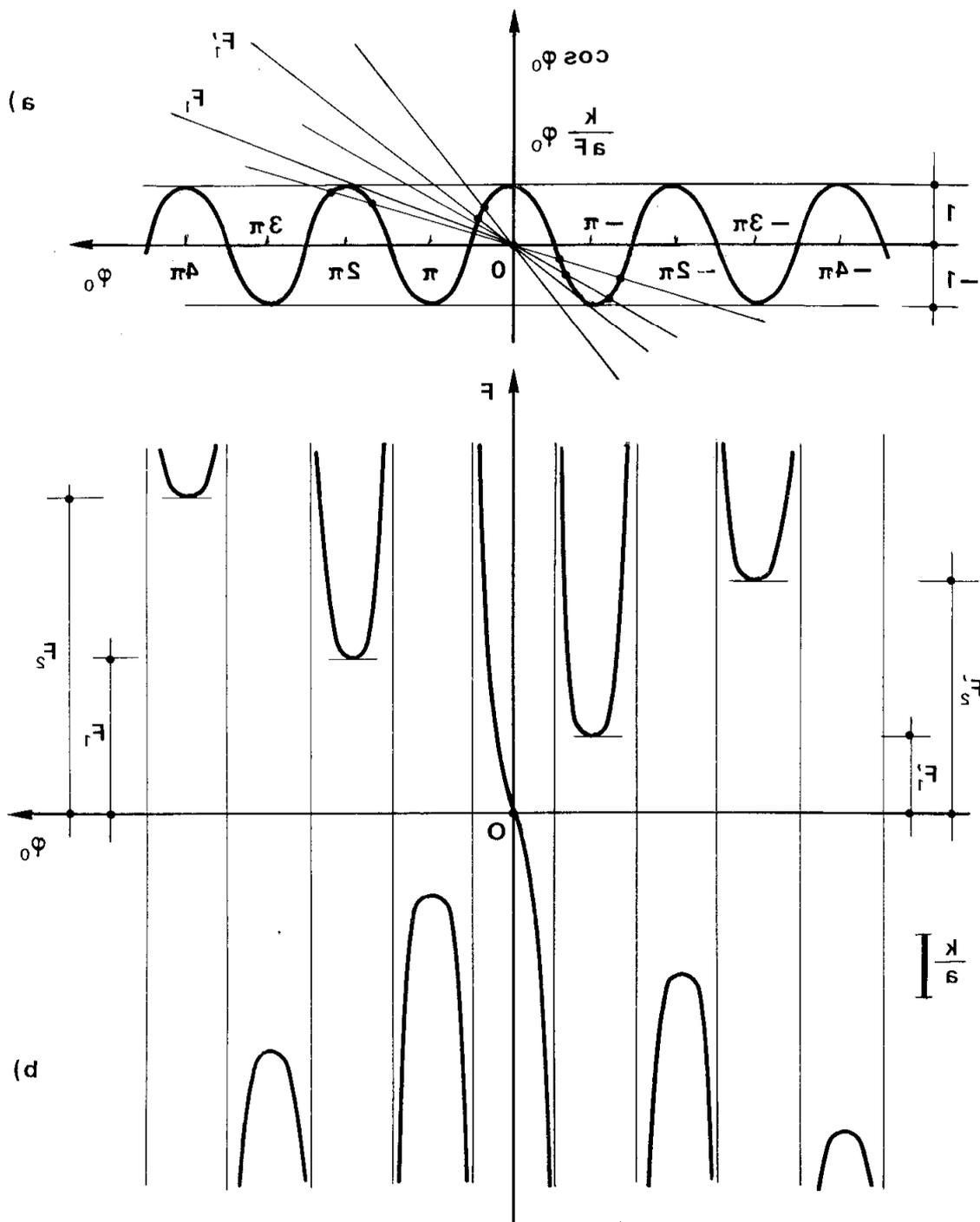


Figura 1.3.a, b.

Si vede che il diagramma $E_f(\varphi)$ passa per l'origine, e presenta un *mi-*

nimo in corrispondenza dell'ascissa

$$\varphi = \varphi_0 (F) = 30^\circ ;$$

il fatto che a tale ascissa il diagramma dovesse presentare tangente orizzontale era un fatto scontato, poichè φ_0 è angolo di equilibrio sotto F ; il fatto poi che ci sia un minimo significa che in φ_0 si verificano le due condizioni

$$\begin{aligned} d_1 E_t &= 0 \\ d_2 E_t &> 0 \end{aligned} \tag{19}$$

e quindi in φ_0 l'equilibrio è stabile.

3) La (17) non è che un'equazione di equilibrio, come si verifica scrivendo (fig. 1.1) la condizione di equilibrio alla rotazione intorno al punto B :

$$Fa \cos \varphi_0 - k \varphi_0 = 0 .$$

4) Se avessimo eseguito lo studio nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e cioè fermandoci ai termini del secondo ordine in φ , avremmo scritto

$$\text{sen } \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots \cong \varphi$$

$$E_t = - Fa \varphi + \frac{k \varphi^2}{2} \tag{20}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - Fa + k \varphi$$

da cui

$$- Fa + k \varphi_0 = 0$$

$$F = \frac{k}{a} \varphi_0 . \tag{21}$$

In questo caso il diagramma $F(\varphi_0)$ è lineare, e la sua pendenza coincide con la pendenza (18) del diagramma esatto in $\varphi_0 = 0$; in altre parole, operando nell'ambito dei piccoli spostamenti si confonde il diagramma

reale con la sua tangente in $\varphi_0 = 0$, e quindi i risultati sono esatti nell'ambito dell'intorno del primo ordine di $\varphi_0 = 0$.

Problema n. 2.

1) La stessa struttura elementare del problema precedente è soggetta nell'estremo A ad una forza F , di direzione costante parallela alla posi-

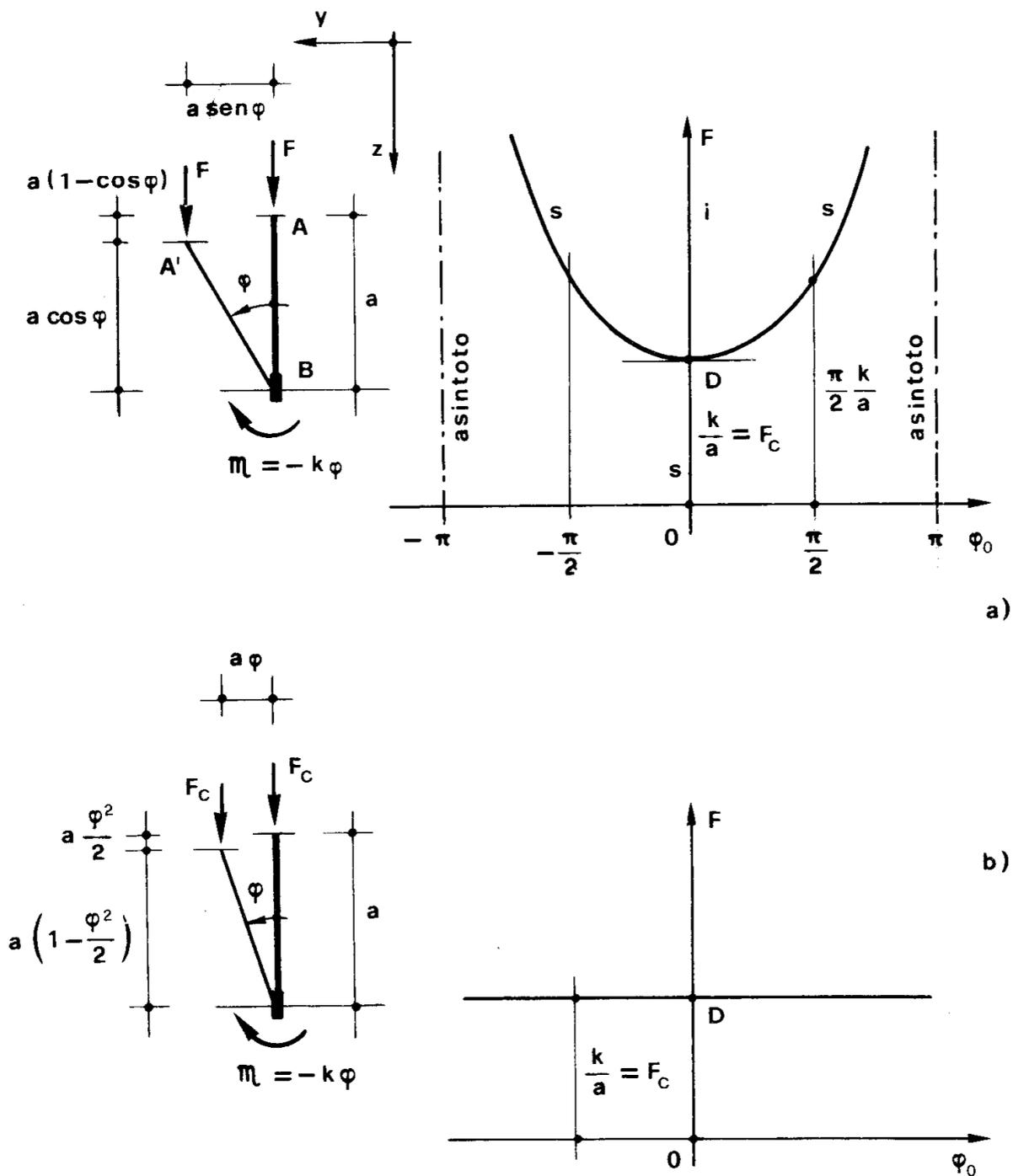


Figura 2.1.

zione indeformata AB della trave, e con punto di applicazione solidale alla trave stessa. Dal riferimento adottato, F risulta positiva se genera compressione (fig. 2.1a).

Scegliendo come quota iniziale per il calcolo di P la retta per A ed ortogonale ad AB , si ha

$$P = - F w_A .$$

Dall'esame della fig. 2.1 si trae

$$w_A = a - a \cos \varphi = a (1 - \cos \varphi) .$$

E' perciò

$$E_t = - Fa (1 - \cos \varphi) + \frac{k \varphi^2}{2} \quad (22)$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - Fa \operatorname{sen} \varphi + k \varphi .$$

Se φ_0 è angolo di equilibrio sotto F , si ha

$$- Fa \operatorname{sen} \varphi_0 + k \varphi_0 = 0 , \quad (23)$$

e viceversa. Quindi si può scrivere, se $\operatorname{sen} \varphi_0 \neq 0$,

$$F = \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} . \quad (24)$$

Una soluzione della (23), per qualsiasi valore di F , è $\varphi_0 = 0$; quindi una parte del diagramma $F(\varphi_0)$ è certamente tutto l'asse delle F . Tale soluzione coincide con la posizione AB indeformata, che è sempre quindi posizione di equilibrio. La (24) però assicura che ad ogni

$$\varphi_0 \in] - \pi, 0 [\cup] 0, \pi [\quad (25)$$

corrisponde un valore di F diverso da zero, e ai due valori opposti generici $\pm \varphi_0$ corrisponde lo stesso F . La corrispondenza che porta φ_0 in F dall'intervallo (25) è una applicazione sull'intervallo

$$F \in] \frac{k}{a}, \rightarrow : \quad (26)$$

ad ogni F della (26) corrispondono due valori di φ_0 .

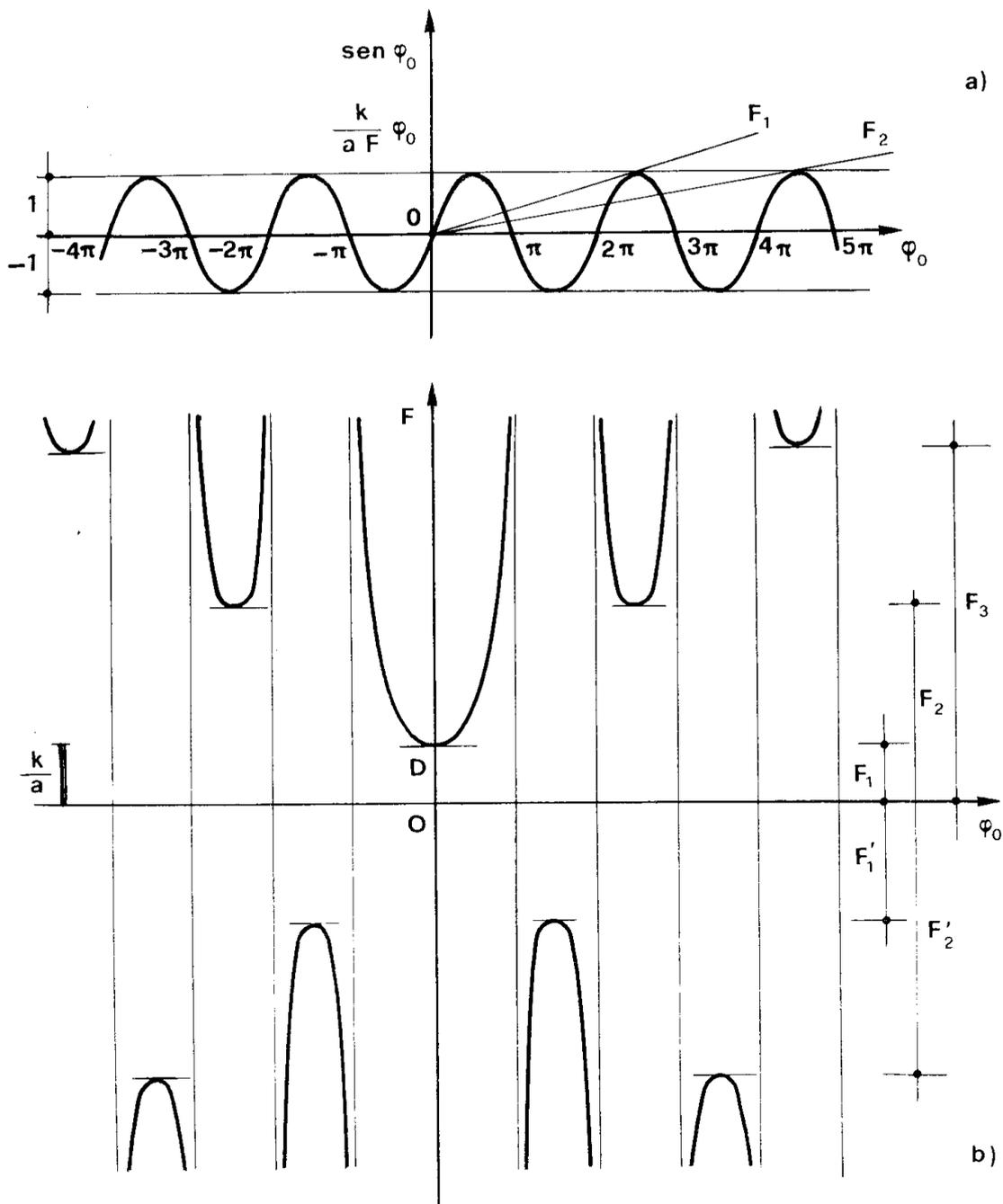


Figura 2.2

Il diagramma $F(\varphi_0)$ è quello della restrizione della funzione $\varphi_0 \rightarrow F$, fornito dalla (24), nell'intervallo di definizione (25).

La funzione $\varphi_0 \rightarrow F$ è definita in $R \rightarrow S$, dove

$$S = \left\{ c\pi, c \in Z \right\};$$

il suo diagramma presenta gli asintoti verticali forniti da (fig. 2.2)

$$\varphi \in S - \left\{ 0 \right\}.$$

Esiste una successione F_i non superiormente limitata in R^+ , tale che per

$$F \in] F_n, F_{n+1} [\quad (n \in N)$$

esistono $2n + 1$ soluzioni della (17) in R^+ , e $2n + 1$ in R^- .

Analogamente, esiste una successione F'_i non inferiormente limitata in R^- , tale che per

$$F \in] F'_n, F'_{n+1} [\quad (n \in N)$$

esistono $2n$ soluzioni della (17) in R^+ , e $2n$ in R^- . La $\varphi_0 \rightarrow F$ è una applicazione da $R \rightarrow S$ su $R -] F'_1, F_1 [$, non iniettiva; il suo diagramma è simmetrico rispetto all'asse delle F .

Il diagramma $F(\varphi_0)$, disegnato nella fig. 2.1, mostra appunto che per ogni

$$F < \frac{k}{a}$$

esiste la sola soluzione $\varphi_0 = 0$, mentre per ogni

$$F > \frac{k}{a}$$

alla soluzione $\varphi_0 = 0$ si affiancano due soluzioni simmetriche rispetto all'asse delle F . Si osserva che per

$$\varphi_0 \rightarrow \pm \pi$$

risulta

$$F \rightarrow +\infty,$$

quindi le due parallele all'asse delle F nei punti di ascissa $\pm \pi$ sono asintoti.

Dalla (24) si trae

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{k}{a} \frac{\operatorname{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi_0}{\operatorname{sen}^2 \varphi_0} \quad (27)$$

Per $\varphi_0 \rightarrow \pm \pi$ è $\frac{dF}{d\varphi_0} \rightarrow \pm \infty$; per $\varphi_0 \rightarrow 0$ è

$$\lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{k}{a} \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \frac{\varphi_0}{2 \operatorname{cos} \varphi_0} = 0.$$

2) Si passi adesso a saggiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio. Dalla (22) si trae, per un F prefissato,

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -Fa \operatorname{sen} \varphi + k\varphi$$

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = -Fa \operatorname{cos} \varphi + k$$

$$\frac{d^3 E_t}{d\varphi^3} = Fa \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{d^4 E_t}{d\varphi^4} = Fa \operatorname{cos} \varphi. \quad (28)$$

Per $\varphi = 0$ è

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = -Fa + k;$$

si trae da queste

$$F < \frac{k}{a} \rightarrow d_1 E_t = 0, d_2 E_t > 0$$

$$F > \frac{k}{a} \rightarrow d_1 E_t = 0, d_2 E_t < 0,$$

e quindi la configurazione $\varphi_0 = 0$ è di equilibrio stabile per $F < \frac{k}{a}$, instabile per $F > \frac{k}{a}$.

Per $\varphi = \varphi_0$ (soluzione non nulla sotto F)

$$\left(\frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} a \cos \varphi_0 + k = k \left(1 - \frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} \right);$$

quindi, con riferimento all'intervallo (25), in $\varphi_0 \neq 0$ è $d_1 E_t = 0, d_2 E_t > 0$, l'equilibrio è comunque stabile.

Dunque, può riassumersi dicendo che per $F < \frac{k}{a}$ esiste la sola soluzione di equilibrio $\varphi_0 = 0$; stabile; per $F > \frac{k}{a}$ esiste la soluzione $\varphi_0 = 0$, instabile, e due soluzioni $\pm \varphi_0$, diverse da zero, stabili. Il valore $\frac{k}{a}$ si chiama *valore critico (di prima specie)* di F :

$$F_c = \frac{k}{a}, \quad (29)$$

ed il punto D del diagramma, ad esso corrispondente, si chiama *punto di diramazione*. Il fenomeno prende nome di *instabilità (di prima specie)*.

Finora, si è escluso dai ragionamenti tale punto D , di coordinate $0, \frac{k}{a}$; in esso è (28).

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = 0 \quad \frac{d^2 E_t}{d\varphi^2} = 0 \quad \frac{d^3 E_t}{d\varphi^3} = 0 \quad \frac{d^4 E_t}{d\varphi^4} = k > 0.$$

(30)

In D si ha quindi $d_1 E_t = d_2 E_t = d_3 E_t = 0$, $d_4 E_t > 0$. L'equilibrio è neutro stabile.

Nella fig. 2.3 è riportato, limitatamente all'intervallo $[-\pi, \pi]$, il dia-

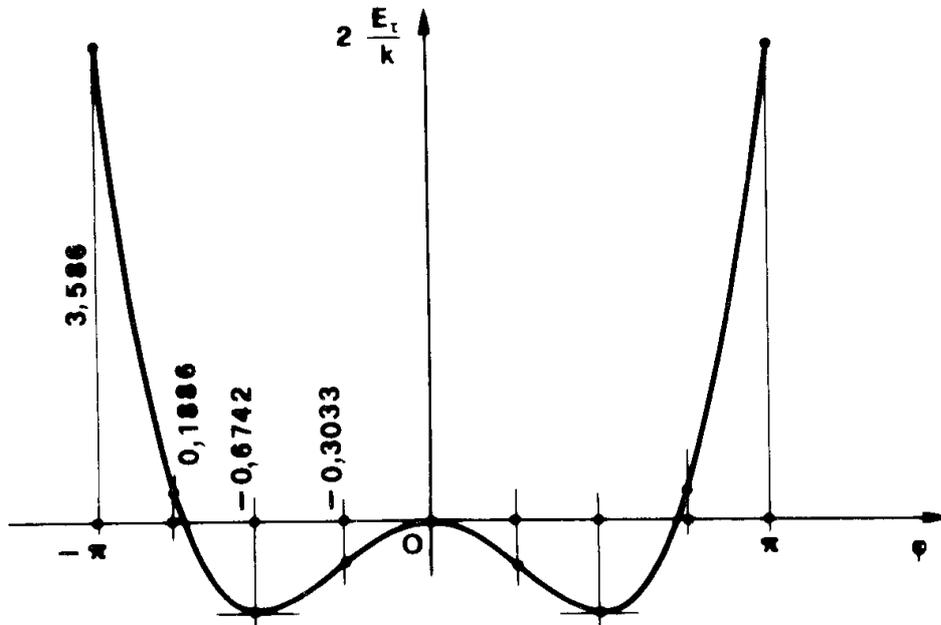


Figura 2.3.

gramma $E_t(\varphi)$ per $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, e cioè per $F = \frac{\pi}{2} \frac{k}{a}$; dalla (22) si ha in tal caso

$$E_t = \frac{k}{2} [\pi (\cos \varphi - 1) + \varphi^2]$$

Si osserva che E_t attinge un massimo in corrispondenza della soluzione $\varphi = 0$, che è instabile, ed un minimo in corrispondenza delle due soluzioni $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, che sono stabili.

Andamento analogo presentano tutte le curve $E(\varphi)$ calcolate per $F > \frac{k}{a}$; invece quelle calcolate per $F < \frac{k}{a}$ presentano solo un minimo in $\varphi = 0$, e sono decrescenti a sinistra, crescenti a destra.

3) Alla (24) può giungersi direttamente scrivendo l'equazione di equilibrio intorno al punto B (fig. 2.1):

$$Fa \sin \varphi_0 - k \varphi_0 = 0.$$

4) Se si opera nell'ambito dei piccoli spostamenti, ci si limita ai termini del primo e secondo ordine in φ . Lo sviluppo in serie di $\cos \varphi$ è

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

e perciò può scriversi (fig. 2.1b)

$$w_A = a (1 - \cos \varphi) = a \frac{\varphi^2}{2}$$

da cui

$$E_t = - Fa \frac{\varphi^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = \varphi (-Fa + k).$$

La condizione $\frac{dE_t}{d\varphi} = 0$ ha soluzione $\varphi = 0$ per qualsiasi valore di F , e soluzione $\varphi \neq 0$ (peraltro indeterminata) per $-Fa + k = 0$, e cioè per $F = \frac{k}{a}$. Il diagramma $F(\varphi_0)$ è quello della fig. 2.1b, costituito dall'asse delle ordinate, e dalla parallela all'asse delle ascisse alla quota $\frac{k}{a}$. Il raffronto tra tale diagramma e quello reale (fig. 2.1a) mostra che la posizione del punto D è la stessa, mentre il calcolo approssimato fornisce la tangente al diagramma reale in D ; cioè il calcolo approssimato è esatto, se si desidera conoscere il solo intorno del primo ordine di $\varphi = 0$; esso fornisce il valore esatto del carico critico.

I carichi come quello della fig. 1, che nel calcolo approssimato danno solo contributi del primo ordine in φ all'energia potenziale, si chiamano *trasversali*; i carichi invece che nel calcolo approssimato danno solo contributi del secondo ordine in φ all'energia potenziale si chiamano *assiali*. Se i carichi sono tutti del tipo assiale, la condizione $\frac{dE_t}{d\varphi} = 0$ si traduce sempre in una

relazione del tipo

$$\varphi b(F_i) = 0,$$

e dunque esiste una soluzione di equilibrio $\varphi = 0$, ed altre diverse da zero per quei valori di F_i (*carichi critici*) che annullano la funzione $b(F_i)$. Se c'è almeno un carico trasversale, la condizione

$\frac{dE_t}{d\varphi} = 0$ si traduce in una relazione del tipo

$$a(F_{it}) + \varphi b(F_{ia}) = 0$$

e quindi esiste la soluzione, unica,

$$\varphi = -\frac{a}{b}$$

Tale soluzione, per quei valori dei carichi assiali che annullano b (e che quindi darebbero soluzioni finite in assenza di carichi trasversali), diviene infinitamente grande.

Di ciò si darà esempio nel seguito (vedi per esempio il problema 6).

Problema n. 3.

1) Si prende in esame lo stesso caso trattato nel precedente problema; la forza F agisce in C anziché in A (fig. 3.1), e cioè con una *eccentricità* e .

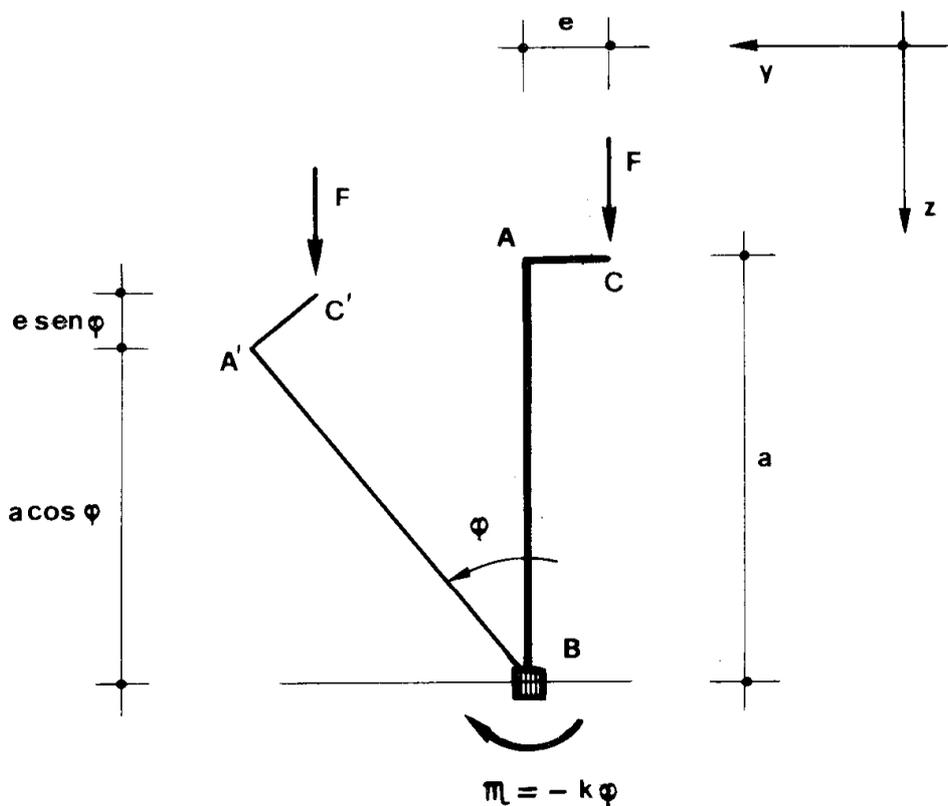


Figura 3.1

La F è diretta sempre secondo z , e segue il punto C nel suo movimento. La posizione AB della trave (asse parallelo a z) è la posizione indeformata; quindi $M = -k\varphi$, dove φ è la rotazione di AB su z . La quota iniziale per il calcolo di P è la retta parallela ad y e passante per A .

Nel caso in esame è

$$w_A = a - a \cos \varphi - e \sin \varphi$$

e quindi

$$E_t = -Fa(1 - \cos \varphi) + Fe \sin \varphi + \frac{k\varphi^2}{2} \quad (31)$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -Fa \sin \varphi + Fe \cos \varphi + k\varphi .$$

La condizione di equilibrio è perciò

$$F(a \sin \varphi_0 - e \cos \varphi_0) = k\varphi_0 .$$

Posto

$$\epsilon = \frac{e}{a} \quad (32)$$

si ottiene

$$F = \frac{k}{a} \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0 - \epsilon \cos \varphi_0} . \quad (33)$$

Dalla (33) si ha pure

$$\frac{dF}{d\varphi_0} = \frac{k}{a} \frac{(1 - \epsilon \varphi_0) \sin \varphi_0 - (\epsilon + \varphi_0) \cos \varphi_0}{(\sin \varphi_0 - \epsilon \cos \varphi_0)^2} . \quad (34)$$

Poichè per

$$\varphi_0 \rightarrow \arctg \epsilon$$

è $F \rightarrow \infty$, il diagramma presenta gli asintoti verticali di ascissa $\arctg \epsilon$.

Dalla (34) si ha poi che la $F(\varphi_0)$ è stazionaria in

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\epsilon + \varphi_0}{1 - \epsilon \varphi_0} .$$

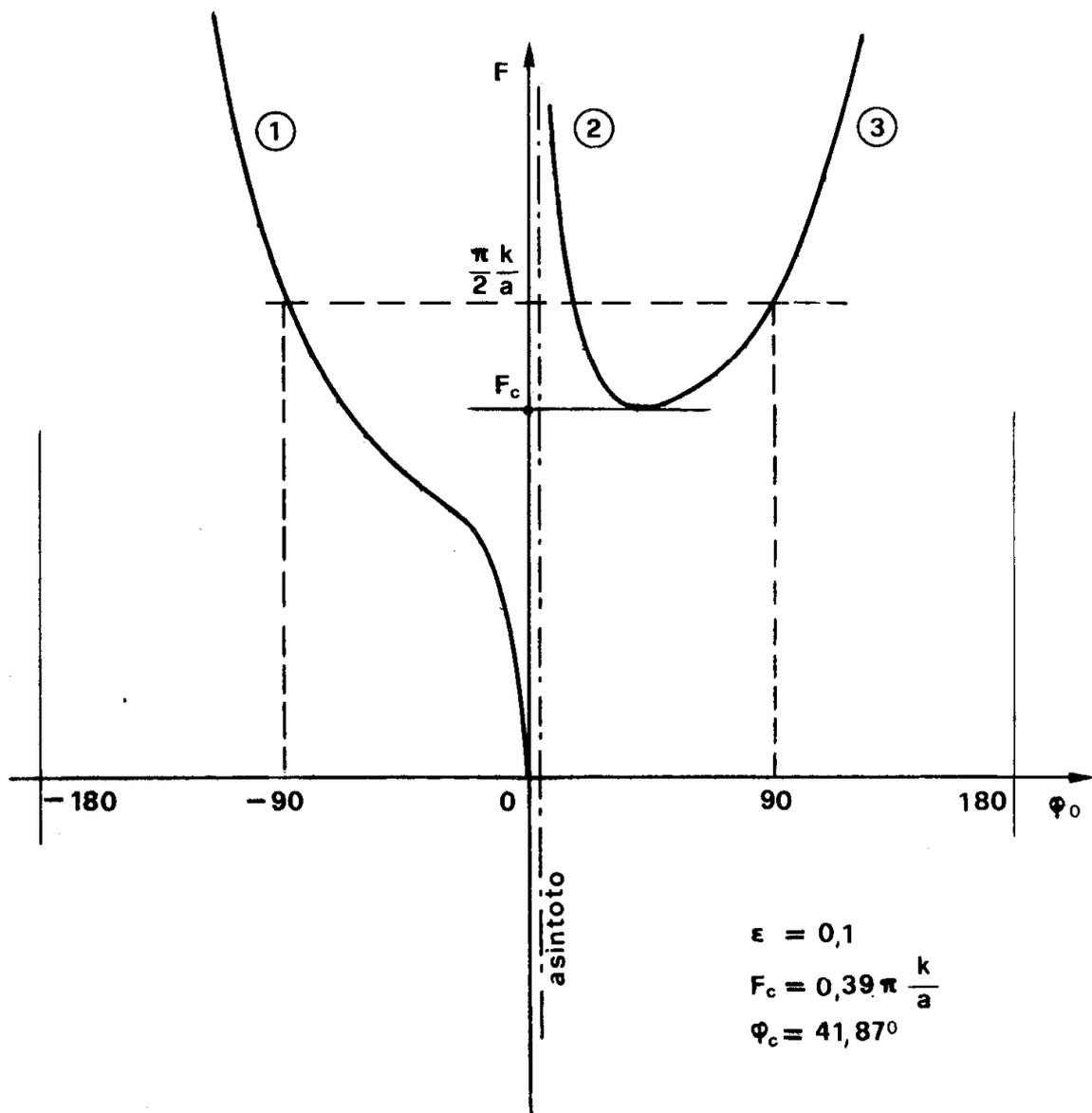
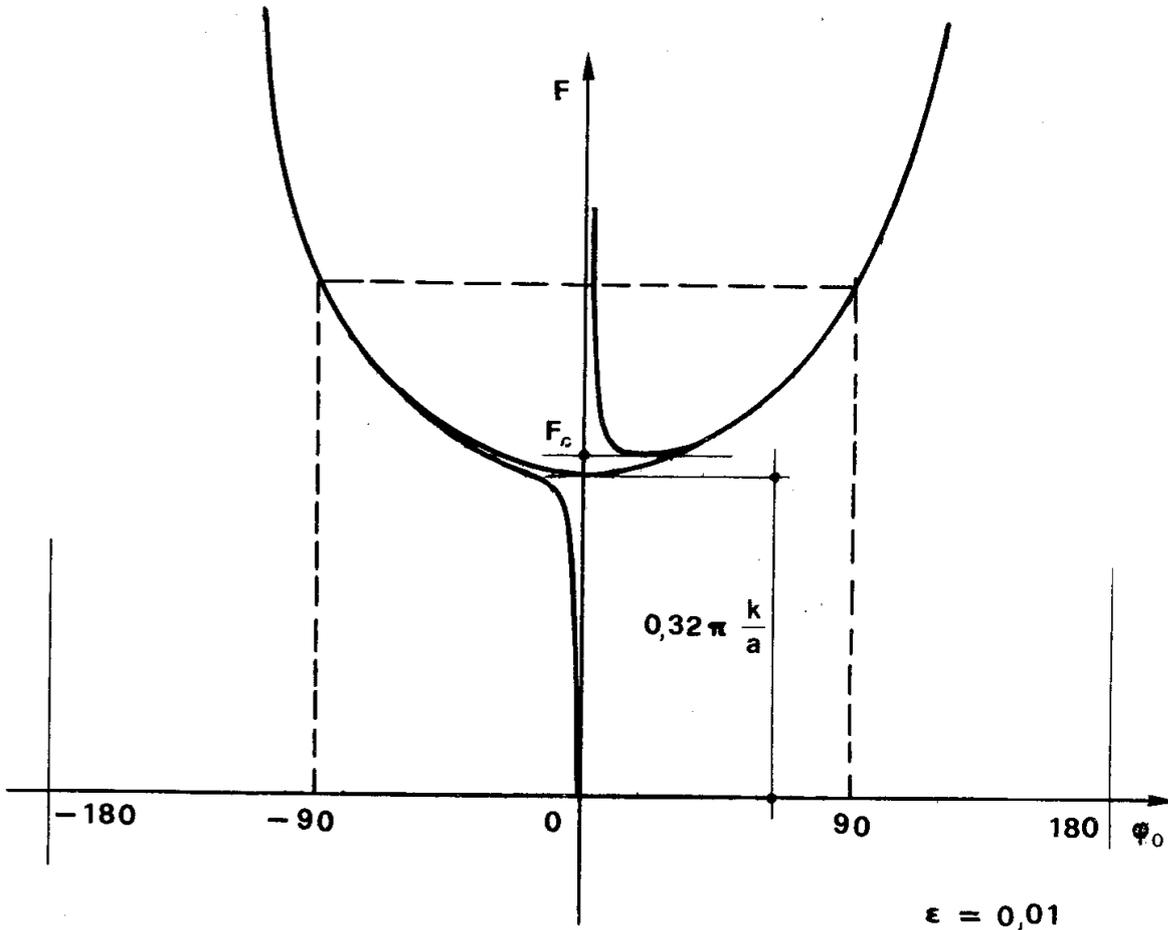


Figura 3.2.



$$\varepsilon = 0,01$$

$$F_c = 0,33 \pi \frac{k}{a}$$

$$\varphi_c = 18,15^\circ$$

Figura 3.3.

Nelle fig. 3.2 e 3.3 sono disegnati i diagrammi della restrizione della $\varphi_0 \rightarrow F$ nell'intervallo $[-130^\circ, 130^\circ]$, per $\epsilon = 0,1$ e per $\epsilon = 0,01$; nelle fig. 3.4, 3.5 e 3.6 sono riportati i grafici per $\epsilon = 0,1$, $\epsilon = 0,01$, $\epsilon = 0$. Si osserva che esiste un valore F_c tale che per $F < F_c$ la soluzione è unica, mentre per $F > F_c$ le soluzioni sono tre; il diagramma si compone di due rami distaccati, non esiste perciò punto di diramazione.

epsilon = 0.1

φ	Fa/k
-180	-31.416
-170	39.472
-160	11.257
-150	6.332
-140	4.315
-130	3.233
-120	2.566
-110	2.12
-100	1.804
-90	1.57
-80	1.393
-70	1.254
-60	1.143
-50	1.05
-40	.97
-30	.892
-20	.8
-10	.641
0	0
10	2.321
20	1.407
30	1.266
40	1.233
50	1.243
60	1.283
70	1.349
80	1.443
90	1.57
100	1.741
110	1.971
120	2.286
130	2.732
140	3.396
150	4.462
160	6.405
170	10.903
180	31.415

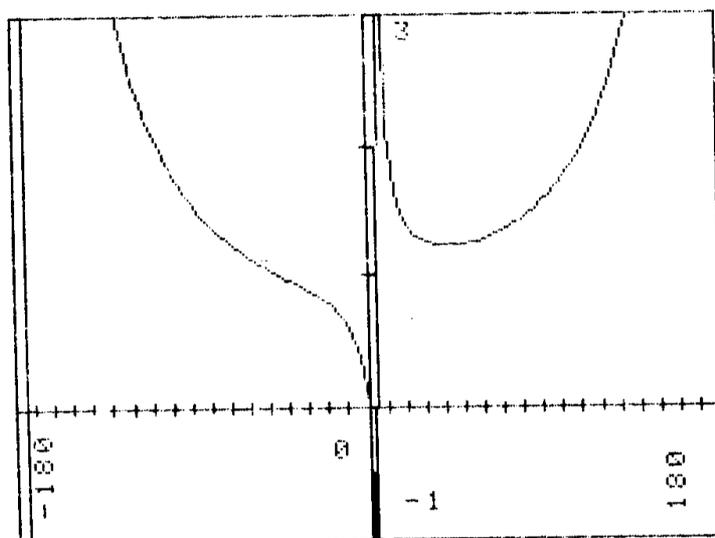


Figura 3.4.

epsilon = 0.01

Fa/k

-180	-314.16
-170	18.113
-160	8.395
-150	5.328
-140	3.847
-130	2.986
-120	2.432
-110	2.05
-100	1.775
-90	1.57
-80	1.415
-70	1.295
-60	1.202
-50	1.129
-40	1.073
-30	1.029
-20	0.993
-10	0.951
0	0
10	1.055
20	1.049
30	1.065
40	1.099
50	1.148
60	1.216
70	1.304
80	1.42
90	1.57
100	1.769
110	2.035
120	2.404
130	2.937
140	3.756
150	5.146
160	7.946
170	16.169
180	314.159

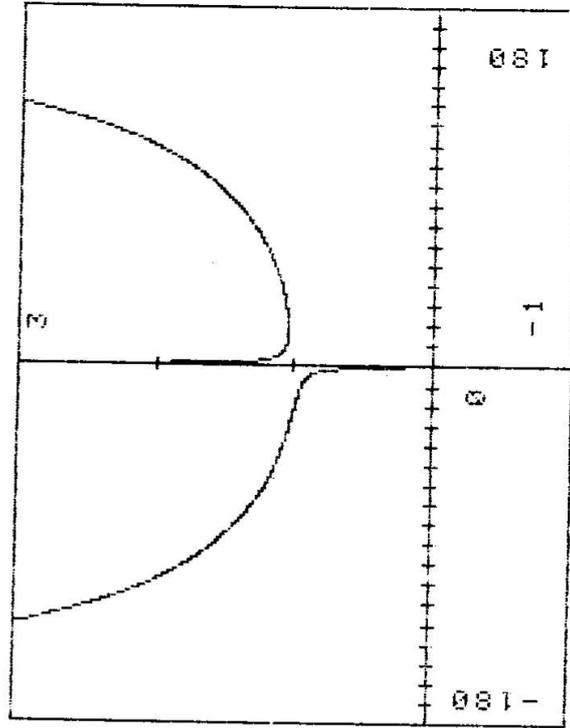


Figura 3.5.

epsilon = 0

ϵ Fa/k

-180	9.999999999999999E496
-170	17.086
-160	8.164
-150	5.235
-140	3.801
-130	2.961
-120	2.418
-110	2.043
-100	1.772
-90	1.57
-80	1.417
-70	1.3
-60	1.209
-50	1.139
-40	1.086
-30	1.047
-20	1.02
-10	1.005
0	0
10	9.999999999999999E496
20	1.005
30	1.02
40	1.047
50	1.086
60	1.139
70	1.209
80	1.3
90	1.417
100	1.57
110	1.772
120	2.043
130	2.418
140	2.961
150	3.801
160	5.235
170	8.164
180	17.086
	9.999999999999999E496

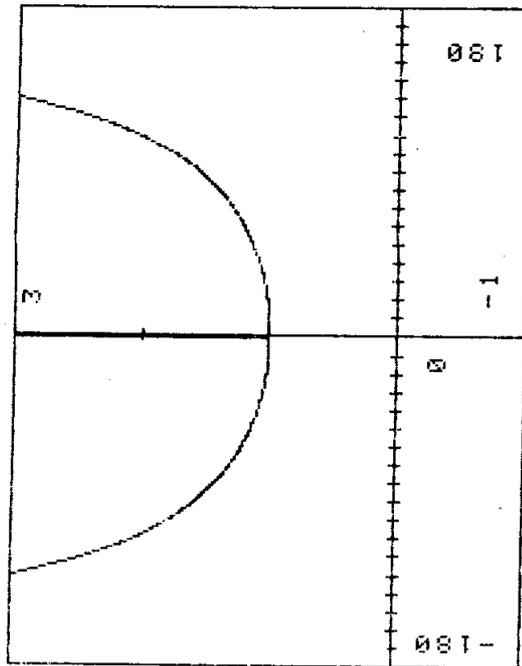


Figura 3.6.

2) Si vuole il diagramma $E_t(\varphi)$ per

$$F = \frac{\pi}{2} \frac{k}{a}$$

nel caso in cui $\epsilon = 0,1$. Dalla (33) si trae che le tre soluzioni sono quelle dell'equazione

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{\operatorname{sen} x - 0,1 \operatorname{cos} x} = 0$$

e cioè, in radianti,

$$x_1 = -1,5708$$

$$x_2 = 0,2743$$

$$x_3 = 1,5708,$$

ed in gradi $\varphi_{01} = -90^\circ$ sul *ramo principale* (e cioè quello valido per qualsiasi valore di F), e

$$\varphi_0 = \begin{cases} 16^\circ = \varphi_{02} \\ 90^\circ = \varphi_{03} \end{cases}$$

sul secondo ramo, valido per $F > F_c$ (*ramo affiancato*). La (31) fornisce

$$E_t = \frac{k\pi}{2} \left(\operatorname{cos} \varphi - 1 + 0,1 \operatorname{sen} \varphi + \frac{\varphi^2}{\pi} \right).$$

Si è tracciato il diagramma $E_t(\varphi)$ attraverso tale espressione (fig. 3.7), e si osserva che in φ_{01} e φ_{03} si ha un minimo di E_t (con $d_2 E_t > 0$), in φ_{02} un massimo di E_t (con $d_2 E_t < 0$): le configurazioni φ_{01} e φ_{03} sono stabili; la φ_{02} è instabile. Tale situazione si ripete quale che sia il valore di F ; chiamando ① il ramo principale, e suddividendo il ramo affiancato in ② e ③, rispettivamente a sinistra e a destra del punto di minimo, si può dimostrare che ① e ③ sono *rami stabili*, mentre ② è *ramo instabile* (fig. 3.2).

Si osservi che se sulla struttura agisce solo la F , con applicazione statica, l'unica soluzione possibile è quella del ramo ①; le soluzioni

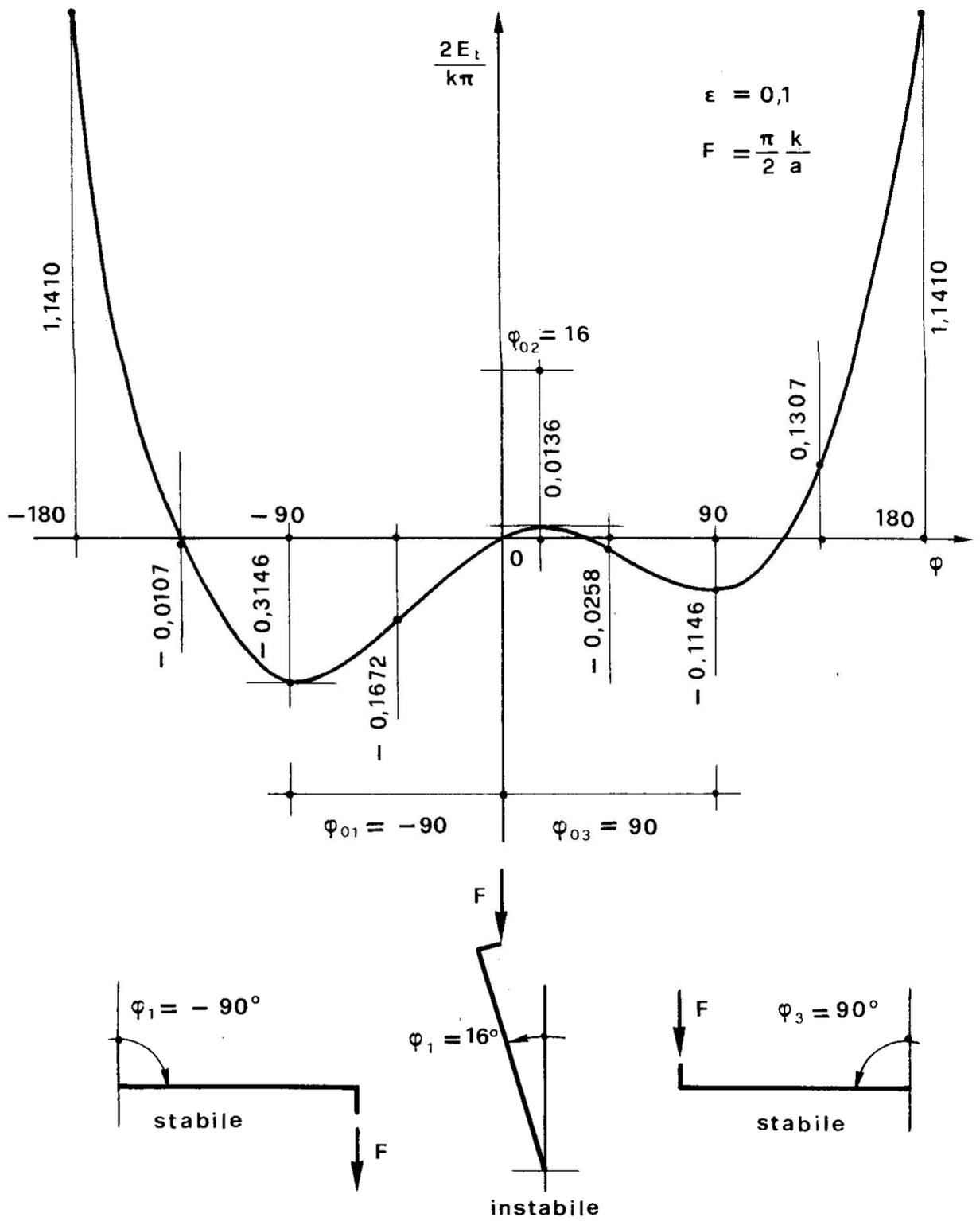


Figura 3.7

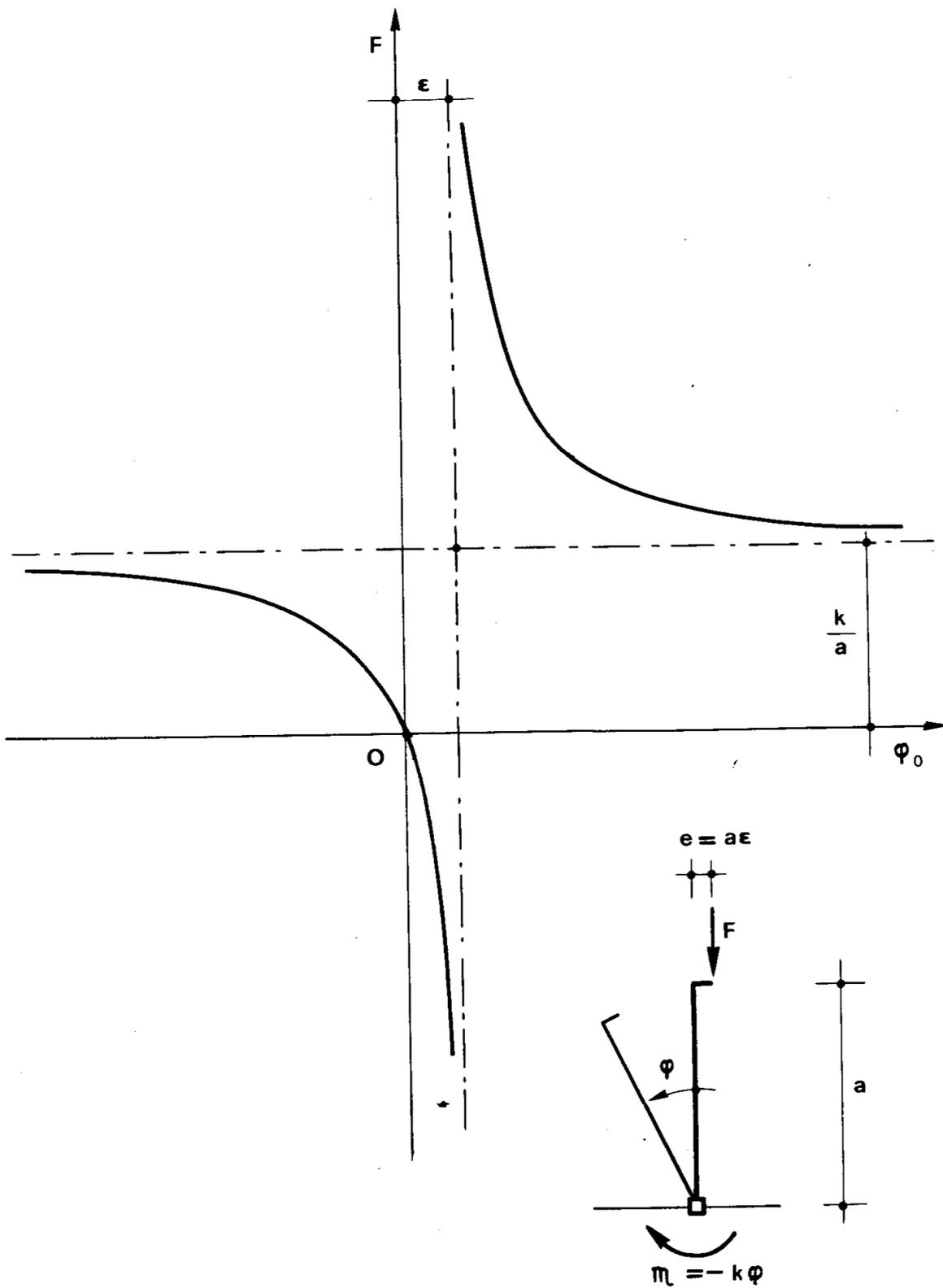


Figura 3.8

del ramo ② e ③ sono possibili soltanto se agiscono altre cause deformanti, per esempio forze orizzontali che crescano fino ad un certo valore per poi scomparire. Nella fig. 3.3 è disegnato il diagramma $F(\varphi_0)$ per $\epsilon = 0,01$ e per $\epsilon = 0$; quest'ultimo coincide con il diagramma della fig. 2.1. Dall'esame delle fig. 3.2 e 3.3 si riconosce che, al diminuire dell'eccentricità, il valore di F_c diminuisce, e, per $\epsilon \rightarrow 0$, tende al valore critico già definito nel problema 2. Così pure i due rami separati tendono a confluire nell'unica soluzione diramata del problema 2. Va anche detto che nella realtà non può mai eliminarsi una certa eccentricità, e perciò i diagrammi da carico assiale si presentano sempre come nel problema presente. Il carico F_c corrispondente ad una diramazione (prob. 2) si chiama *carico critico di prima specie*, quello al disopra del quale appare un ramo affiancato (prob. 3) si chiama *carico critico di quarta specie*. Il fenomeno prende nome di *instabilità di quarta specie*.

3) Studiando la struttura della fig. 3.1 nell'ambito dei piccoli spostamenti si ha (31)

$$E_t = -Fa \frac{\varphi^2}{2} + Fe\varphi + \frac{k\varphi^2}{2}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -Fa\varphi + Fe + k\varphi.$$

La condizione di equilibrio diviene perciò

$$-Fa\varphi_0 + Fe + k\varphi_0 = 0 \quad (35)$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{Fe}{Fa - k} \quad (36)$$

$$F = \frac{k\varphi_0}{a(\varphi_0 - \epsilon)}$$

La curva $F(\varphi_0)$ è un'iperbole di asintoti (fig. 3.8)

$$F = \frac{k}{a} \quad (37)$$

$$\varphi_0 = \epsilon.$$

La validità della (36) è ovviamente limitata ad un intorno del primo ordine di $\varphi_0 = 0$; la F è contemporaneamente assiale e trasversale, e la prima delle (37) approssima il valore del carico critico di quarta specie.

Problema n. 4.

In tutti i problemi che seguono si procederà, salvo esplicito avviso, nell'ambito dei piccoli spostamenti, e cioè ci si limiterà a tener conto dei termini di E_t del primo e del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane.

La trave della fig. 4 è isostatica, e per essa $n = 1$. Si assume come coordinata lagrangiana la rotazione φ del tratto CB ; il tratto AC ruota di $-\varphi$, e risulta $\Delta\varphi_C = 2\varphi$.

Per il calcolo di w_A si scrive

$$w_A = 2a - 2(a \cos \varphi) = 2a(1 - \cos \varphi) \cong a\varphi^2 .$$

E' perciò

$$P = -Fa\varphi^2$$

$$L = \frac{k(\Delta\varphi_C)^2}{2} = 2k\varphi^2$$

$$E_t = -Fa\varphi^2 + 2k\varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = (-2aF + 4k)\varphi ;$$

la condizione di equilibrio è

$$(-2aF + 4k)\varphi_0 = 0 ,$$

la cui soluzione è $\varphi_0 = 0$, oppure $\varphi_0 \neq 0$ (e indeterminata) per

$$-2aF + 4k = 0 ,$$

e cioè per

$$F = F_c = \frac{2k}{a}.$$

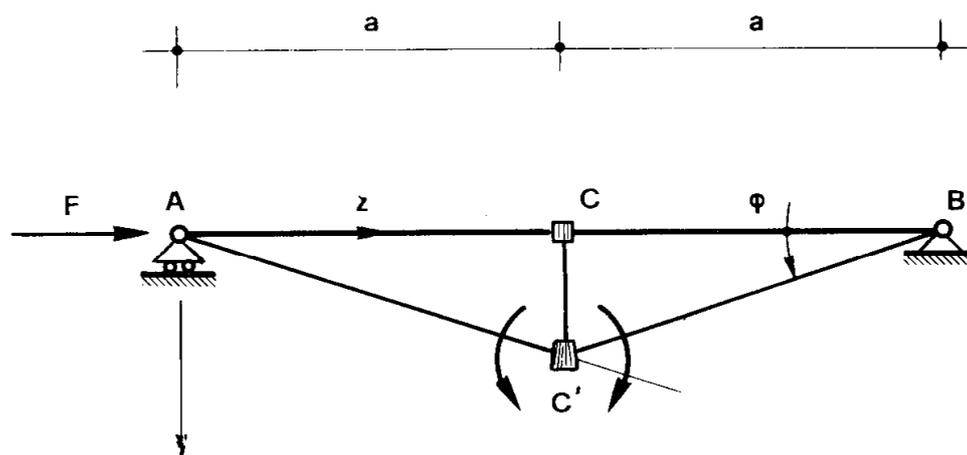


Figura 4.

Problema n. 5.

La trave della fig. 5 è la stessa della fig. 4; la forza F è però applicata in C anzichè in A .

Si ha

$$w_C = a - a \cos \varphi = a (1 - \cos \varphi) \cong \frac{a\varphi^2}{2}$$

$$\Delta\varphi_C = 2\varphi$$

$$P = -Fa \frac{\varphi^2}{2}$$

$$L = 2k\varphi^2$$

$$E_t = -Fa \frac{\varphi^2}{2} + 2k\varphi^2$$

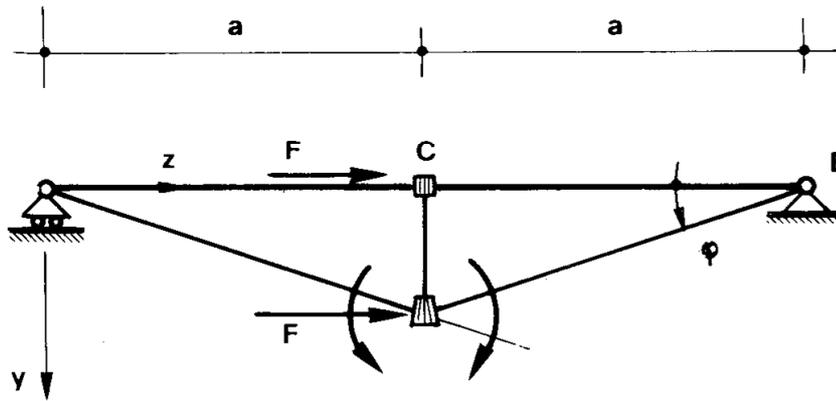


Figura 5a.

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = (-Fa + 4k)\varphi$$

da cui

$$F_c = \frac{4k}{a}.$$

Problema n. 6.

La trave è ancora quella delle fig. 4 e 5; essa è soggetta ad una forza assiale in A, e ad un carico q trasversale uniformemente distribuito (figura 6a). L'energia potenziale di F è già stata calcolata (prob. 4); per ottenere quella di q si consideri il carico elementare qdz all'ascissa z , cui corrisponde lo spostamento v , e quindi l'energia potenziale $-qdz \cdot v$; integrando si ha

$$P_q = - \int_A^B qvdz = -q \int_A^B vdz = -qA_q,$$

dove A_q è l'area della deformata sottostante il carico q . Nel caso in esame si ha

$$A_q = \frac{1}{2} CC' \cdot 2a = \varphi a^2$$

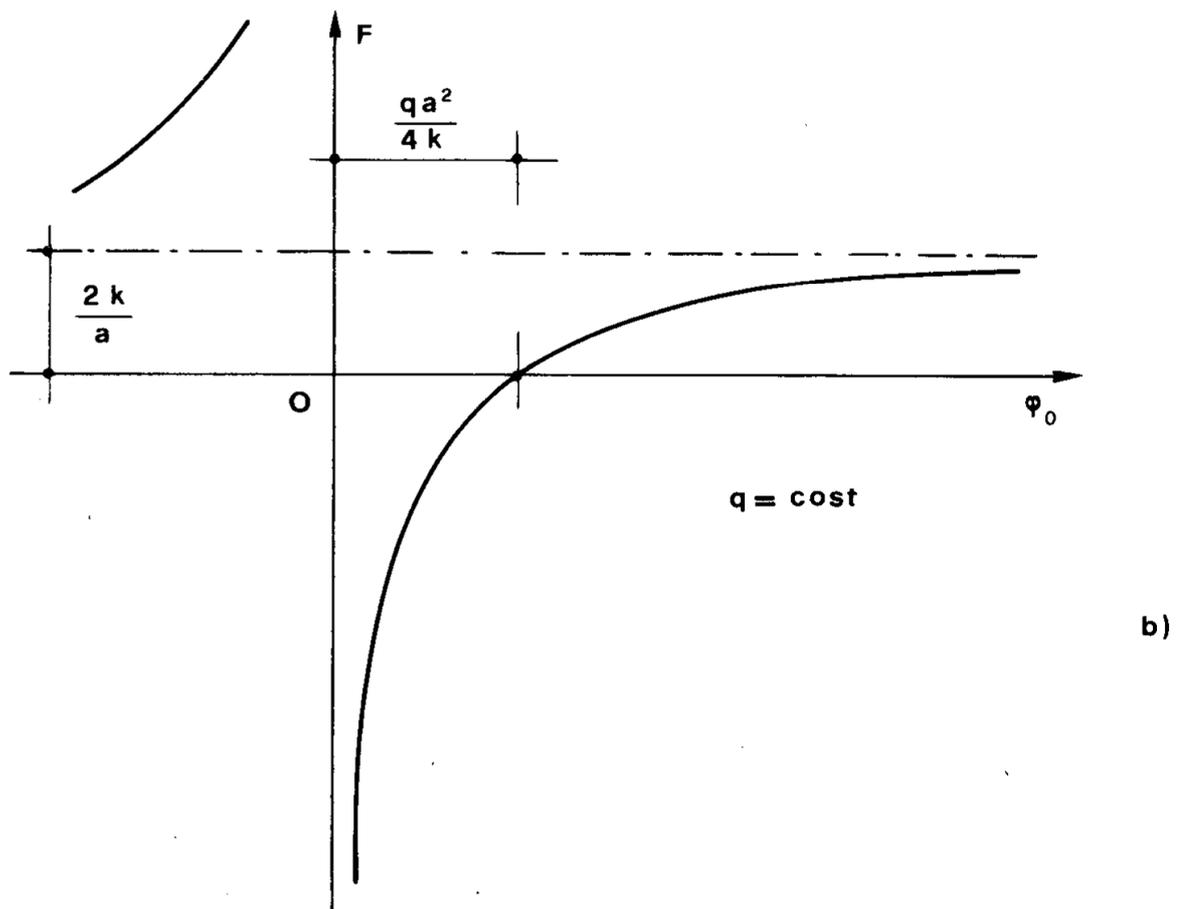
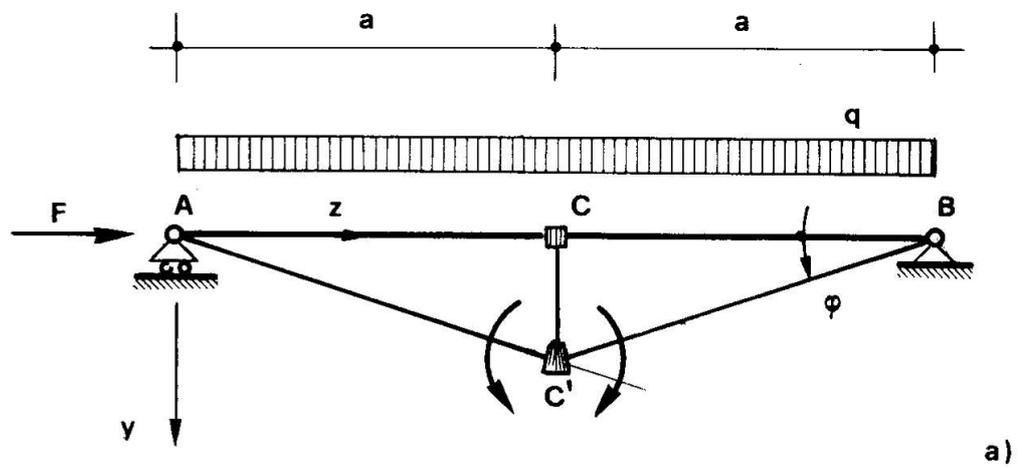


Figura 6.

E' perciò

$$E_t = - Fa\varphi^2 - qa^2\varphi + 2k\varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - 2Fa\varphi - qa^2 + 4k\varphi$$

e la condizione di equilibrio si scrive

$$(- 2Fa + 4k)\varphi_0 - qa^2 = 0$$

da cui

$$\varphi_0 = \frac{qa^2}{4k - 2Fa} \quad (38)$$

$$F = \frac{4k\varphi_0 - qa^2}{2a\varphi_0}$$

La (38) è un'iperbole equilatera, di asintoti (fig. 6b)

$$F = \frac{2k}{a}$$

$$\varphi_0 = 0 ;$$

il valore di F per cui φ_0 diviene infinitamente grande coincide con quello critico del prob. 4.

Problema n. 7.

La trave della fig. 7 è isostatica, con $n = 1$; in C esiste, oltre alla cerniera, un appoggio cedevole di rigidezza k , tale cioè che

$$R_C = - kv_C .$$

L'energia potenziale di F è quella già calcolata nel problema 4; l'ener-

già immagazzinata nel vincolo elastico è

$$L = - \frac{R_C v_C}{2} = \frac{k v_C^2}{2}.$$

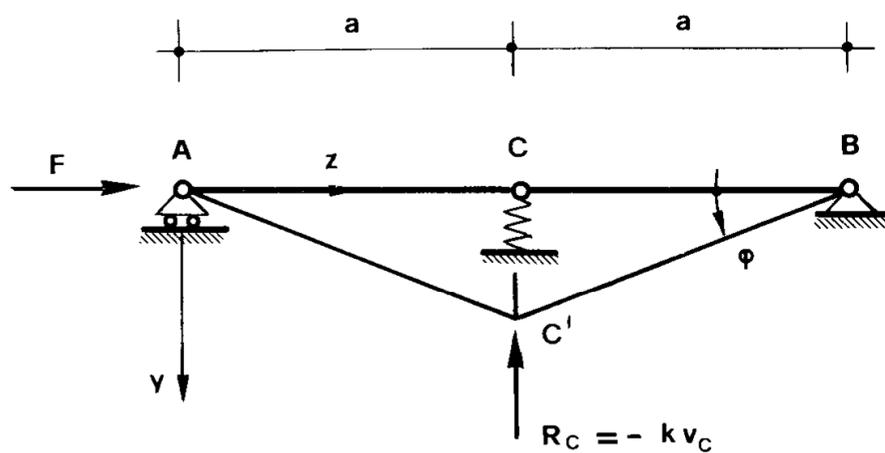


Figura 7.

Nel caso in esame è $v_C = a\varphi$, e quindi

$$L = \frac{k a^2 \varphi^2}{2}.$$

Si scrive perciò

$$E_t = - F a \varphi^2 + \frac{k a^2 \varphi^2}{2}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - 2 F a \varphi + k a^2 \varphi ;$$

la condizione di equilibrio è

$$(- 2 F a + k a^2) \varphi_0 = 0$$

da cui

$$F_c = \frac{ka}{2}.$$

Problema n. 8.

La trave della fig. 8 è una volta iperstatica, con $n = 1$. Si ha

$$w_A = a(1 - \cos \varphi) + (a + b)(1 - \cos \varphi) \cong a \frac{\varphi^2}{2} + (a + b) \frac{\varphi^2}{2}.$$

Si fa notare, a questo proposito, che data una successione di travi rettilinee $AB, BC, \dots HK$, con gli assi allineati, vincolate al suolo con

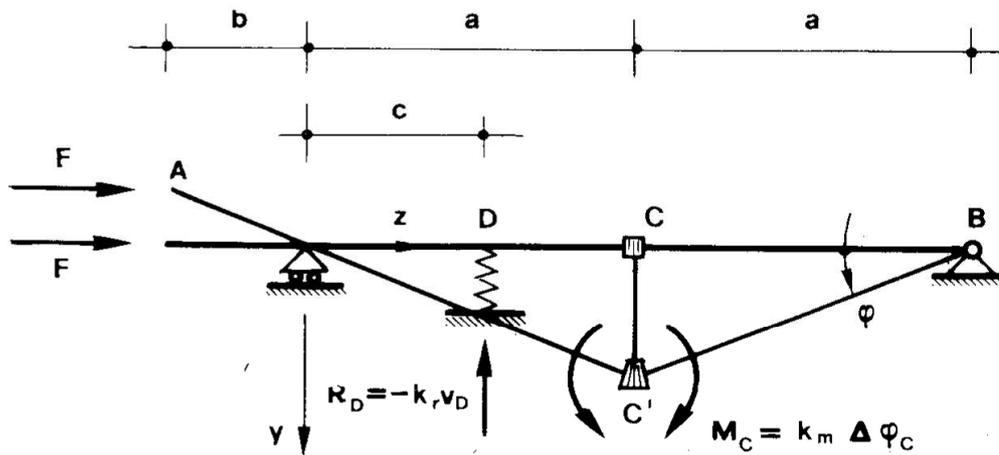


Figura 8.

un appoggio in A e con una cerniera in K , e reciprocamente con cerniera in $B, C \dots H$, nell'ipotesi di piccoli spostamenti A si avvicina a K della quantità

$$\Delta_{AK} = \sum l_i \frac{\varphi_i^2}{2}, \quad (39)$$

dove l_i è la lunghezza della trave generica, e φ_i la sua rotazione sull'allineamento d'origine.

Dalle relazioni

$$v_D = c \varphi$$

$$\Delta \varphi_C = 2 \varphi$$

si ha poi

$$L = \frac{k_r c^2 \varphi^2}{2} + 2 k_m \varphi^2 .$$

E' perciò

$$E_t = - F (2a + b) \frac{\varphi^2}{2} + \frac{k_r c^2 \varphi^2}{2} + 2 k_m \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - F (2a + b) \varphi + k_r c^2 \varphi + 4 k_m \varphi ;$$

la condizione di equilibrio è

$$[- F (2a + b) + k_r c^2 + 4 k_m] \varphi_0 = 0$$

da cui

$$F_c = \frac{k_r c^2 + 4 k_m}{2a + b}$$

Lo stesso problema si vuole adesso risolvere scrivendo direttamente le condizioni di equilibrio. Per l'equilibrio di tutto il sistema alla rotazione intorno a B si ha

$$- F \cdot b \varphi + R_A \cdot 2a - k_r c \varphi \cdot (2a - c) = 0$$

da cui

$$R_A = \frac{k_r c (2a - c) + Fb}{2a} \varphi .$$

Per l'equilibrio del tratto di sinistra alla rotazione intorno a C' si ha

$$- F \cdot (a + b) \varphi + R_A a - k_r c \varphi \cdot (a - c) + 2 \varphi k_m = 0$$

da cui, sostituendo il valore di R_A , eliminando φ e semplificando, si ottiene

$$F (2a + b) = k_r c^2 + 4 k_m .$$

Il metodo di calcolo del carico critico attraverso l'energia potenziale totale si chiama *energetico*, quello attraverso la scrittura diretta delle equazioni di equilibrio sulla struttura deformata si chiama *geometrico*, o anche *euleriano*.

Problema n. 9.

La trave della fig. 9 è due volte iperstatica, con $n = 1$. Si può scrivere

$$w_C = a \frac{\varphi^2}{2} \qquad v_1 = \frac{a}{2} \varphi$$

$$w_A = (2a + b) \frac{\varphi^2}{2} \qquad v_2 = \frac{a}{2} \varphi$$

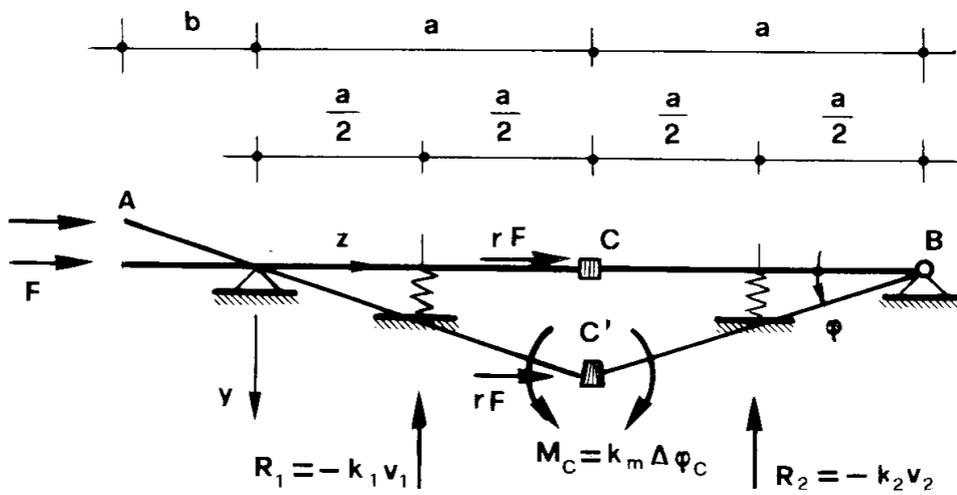


Figura 9

$$P = - F w_A - r F w_C = - F (2a + b + ra) \frac{\varphi^2}{2}$$

$$L = 2 k_m \varphi^2 + k_1 \frac{v_1^2}{2} + k_2 \frac{v_2^2}{2} =$$

$$= \left(2 k_m + \frac{k_1 + k_2}{8} a^2 \right) \varphi^2$$

$$E_t = - F (2a + b + ra) \frac{\varphi^2}{2} + \left(2 k_m + \frac{k_1 + k_2}{8} a^2 \right) \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = \left[- F (2a + b + ra) + 4 k_m + \frac{k_1 + k_2}{4} a^2 \right] \varphi$$

La condizione di equilibrio porge

$$F_c = \frac{16 k_m + (k_1 + k_2) a^2}{4 (2a + ra + b)}$$

Si proceda per via geometrica anzichè energetica. Per l'equilibrio globale alla rotazione intorno al punto B si ha

$$- F \cdot b \varphi + rF \cdot a \varphi + R_A \cdot 2a - k_1 \frac{a}{2} \varphi \cdot \frac{3}{2} a - k_2 \frac{a}{2} \varphi \cdot \frac{a}{2} = 0$$

da cui

$$R_A = \left(\frac{3}{8} a k_1 + \frac{a}{8} k_2 + F \frac{b}{2a} + r \frac{F}{2} \right) \varphi.$$

Per l'equilibrio della parte di sinistra alla rotazione intorno a C' si ha

$$- F \cdot (a + b) \varphi + R_A a - k_1 \frac{a}{2} \varphi \frac{a}{2} + 2 \varphi k_m = 0$$

da cui, sostituendo il valore di R_A , eliminando φ e semplificando, si ottiene l'espressione di F_c già ricavata con il metodo energetico.

Problema n. 10.

Il portale della fig. 10 è isostatico, con $n = 1$. Si assume come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione φ del tratto AB ; per ottenere le espressioni degli spostamenti in funzione di φ si utilizza il procedimento delle catene cinematiche (vedi Problemi vol. 1 Cap. 2). Si ha così

$$w_B = - a_2 \varphi$$

$$\varphi_{BC} = \frac{w_B}{\frac{b}{l_2} l_1 + a_1} = - \frac{a_2 l_2}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi$$

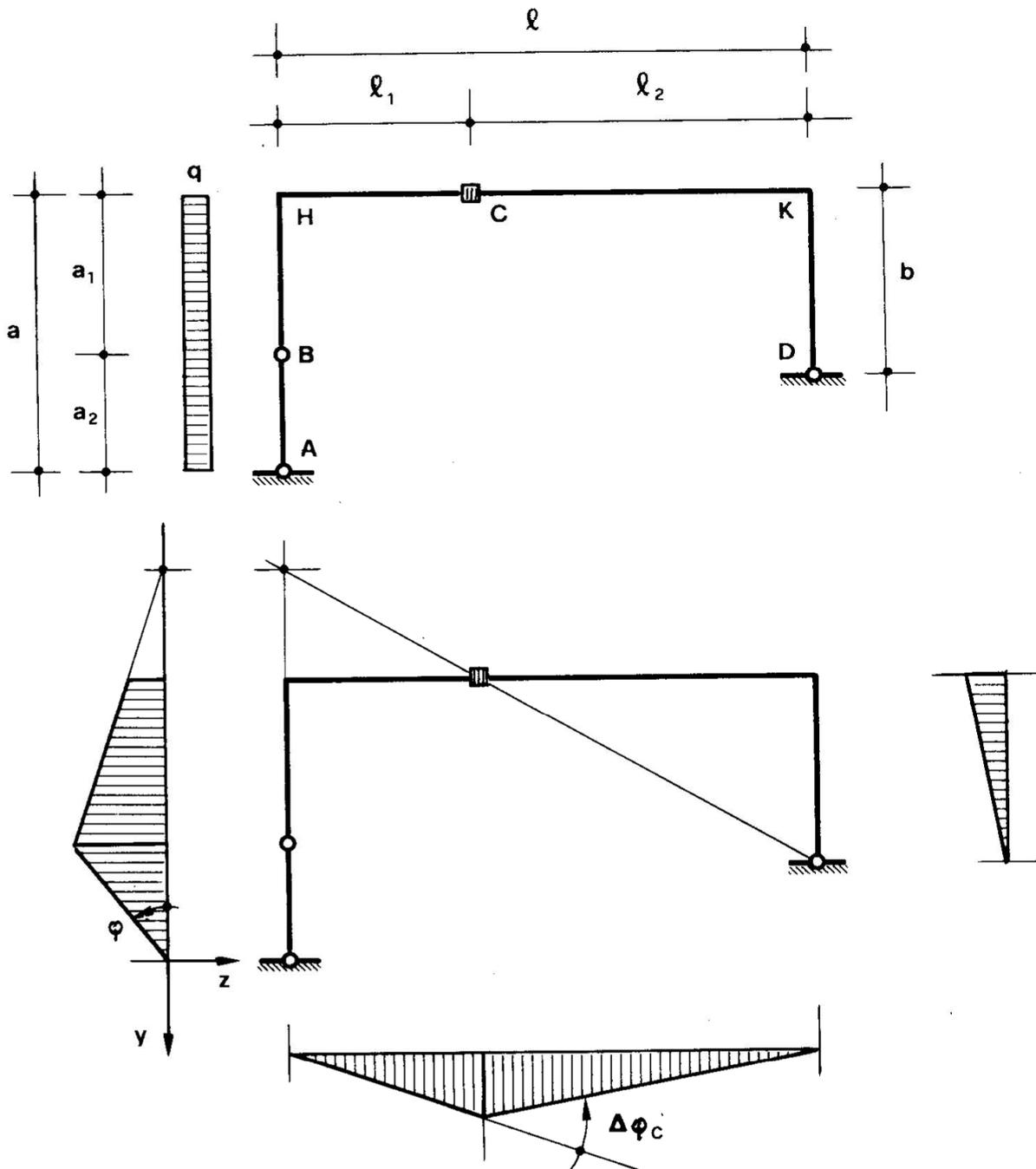


Figura 10.

$$v_C = -\varphi_{BC} l_1 = \frac{a_2 l_1 l_2}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi$$

$$\varphi_{CD} = \frac{v_C}{l_2} = \frac{a_2 l_1}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{BC} = \frac{a_2 l}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi$$

$$w_C = -b \varphi_{CD} = -\frac{a_2 b l_1}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi$$

$$\begin{aligned} A_q &= \frac{w_B a_2}{2} + \frac{w_B + w_C}{2} a_1 = \frac{w_B a}{2} + \frac{w_C a_1}{2} = \\ &= -\frac{a a_2 b l_1 + a a_2 a_1 l_2 + a_1 a_2 b l_1}{2 (b l_1 + a_1 l_2)} \varphi. \end{aligned}$$

Ponendo

$$\Delta\varphi_C = \Delta' \varphi_C \cdot \varphi$$

$$A_q = A'_q \cdot \varphi$$

si può scrivere

$$E_t = -q A'_q \varphi + \frac{k_m (\Delta' \varphi_C)^2}{2} \varphi^2$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -q A'_q + k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi;$$

la condizione di equilibrio

$$- q A'_q + k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi_0 = 0$$

porge

$$\varphi_0 = q \frac{A'_q}{k_m (\Delta' \varphi_C)^2} . \quad (40)$$

Se il carico q agisce invece secondo y , ed impegna tutto il traverso HK , φ_0 è sempre fornito dalla (40), ma A_q è l'area della deformata sotto HK ; in questo caso è quindi

$$A_q = \frac{l v_C}{2} = \frac{l a_2 l_1 l_2}{2 (b l_1 + a_1 l_2)} \varphi$$

$$A'_q = \frac{l a_2 l_1 l_2}{2 (b l_1 + a_1 l_2)} .$$

Se il portale è soggetto ad una forza orizzontale F sul traverso, è

$$\begin{aligned} E_t &= - F w_C + \frac{k_m (\Delta \varphi_C)^2}{2} = \\ &= F \frac{a_2 b l_1}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi + \frac{k_m (\Delta' \varphi_C)^2}{2} \varphi^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = F \frac{a_2 b l_1}{b l_1 + a_1 l_2} + k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi$$

$$\varphi_0 = - F \frac{a_2 b l_1}{(b l_1 + a_1 l_2) k_m (\Delta' \varphi_C)^2} .$$

Se il portale è soggetto ad una coppia \mathfrak{M} sul tratto CK è

$$\begin{aligned} E_t &= - \mathfrak{M} \varphi_{CD} + \frac{k_m (\Delta \varphi_C)^2}{2} = \\ &= - \mathfrak{M} \frac{a_2 l_1}{b l_1 + a_1 l_2} \varphi + \frac{k_m (\Delta' \varphi_C)^2}{2} \varphi^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = -\mathfrak{M} \frac{a_2 l_1}{b l_1 + a_1 l_2} + k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi$$

$$\varphi_0 = \mathfrak{M} \frac{a_2 l_1}{(b l_1 + a_1 l_2) k_m (\Delta' \varphi_C)^2} .$$

Nei tre casi considerati l'espressione di E_t può sempre porsi sotto l'aspetto

$$E_t = - Q \varphi + \frac{1}{2} k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi^2 \quad (41)$$

dove, successivamente,

$$Q = A'_q q$$

$$Q = - F \frac{a_2 b l_1}{b l_1 + a_1 l_2}$$

$$Q = \mathfrak{M} \frac{a_2 l_1}{b l_1 + a_1 l_2} .$$

In generale si ha quindi

$$\frac{dE_t}{d\varphi} = - Q + k_m (\Delta' \varphi_C)^2 \varphi$$

da cui

$$\varphi = \frac{Q}{k_m (\Delta' \varphi_C)^2} . \quad (42)$$

La Q è la *componente del sistema di forze applicate secondo la coordinata lagrangiana φ* , o anche la *componente generalizzata delle forze*.

La definizione è valida anche per un sistema olonomo a più parametri di libertà.