

APPENDICE AL CAPITOLO PRIMO

1. Ricerca numerica del moltiplicatore critico per una trave incastrata agli estremi, con incastri angolarmente cedevoli.

a) Formule generali.

La trave si divide (fig. 1) in $n + 1$ tratti rigidi, di lunghezza costante $l' = \frac{l}{n + 1}$, collegati da concetti elastici di lunghezza trascurabile. Questi concetti, che chiameremo *interni*, sono in numero di n ; il loro comportamento elastico è caratterizzato dalla rigidità

$$k = \frac{M}{\Delta\varphi} \quad (1)$$

La rigidità del concetto interno i -esimo si pone pari a quella dell'elemento di trave compreso tra le mezzerie dei due tronchi adiacenti; essa è fornita quindi dalla relazione

$$\frac{M}{k} = \frac{Ml'}{EI} = \frac{Ml}{EI(n + 1)}$$

e cioè

$$k = \frac{EI(n + 1)}{l} \quad (2)$$

dove E ed I sono la media dei valori relativi alle estremità del concetto. Naturalmente la (2) è valida per travi a sezione non fortemente variabile (e cioè nei limiti di validità dei risultati del De Saint-Venant), e l'errore da cui è affetta è tanto più piccolo quanto più grande è il numero dei tratti. Inoltre, la trattazione esclude l'influenza del taglio. Ai concetti *interni*

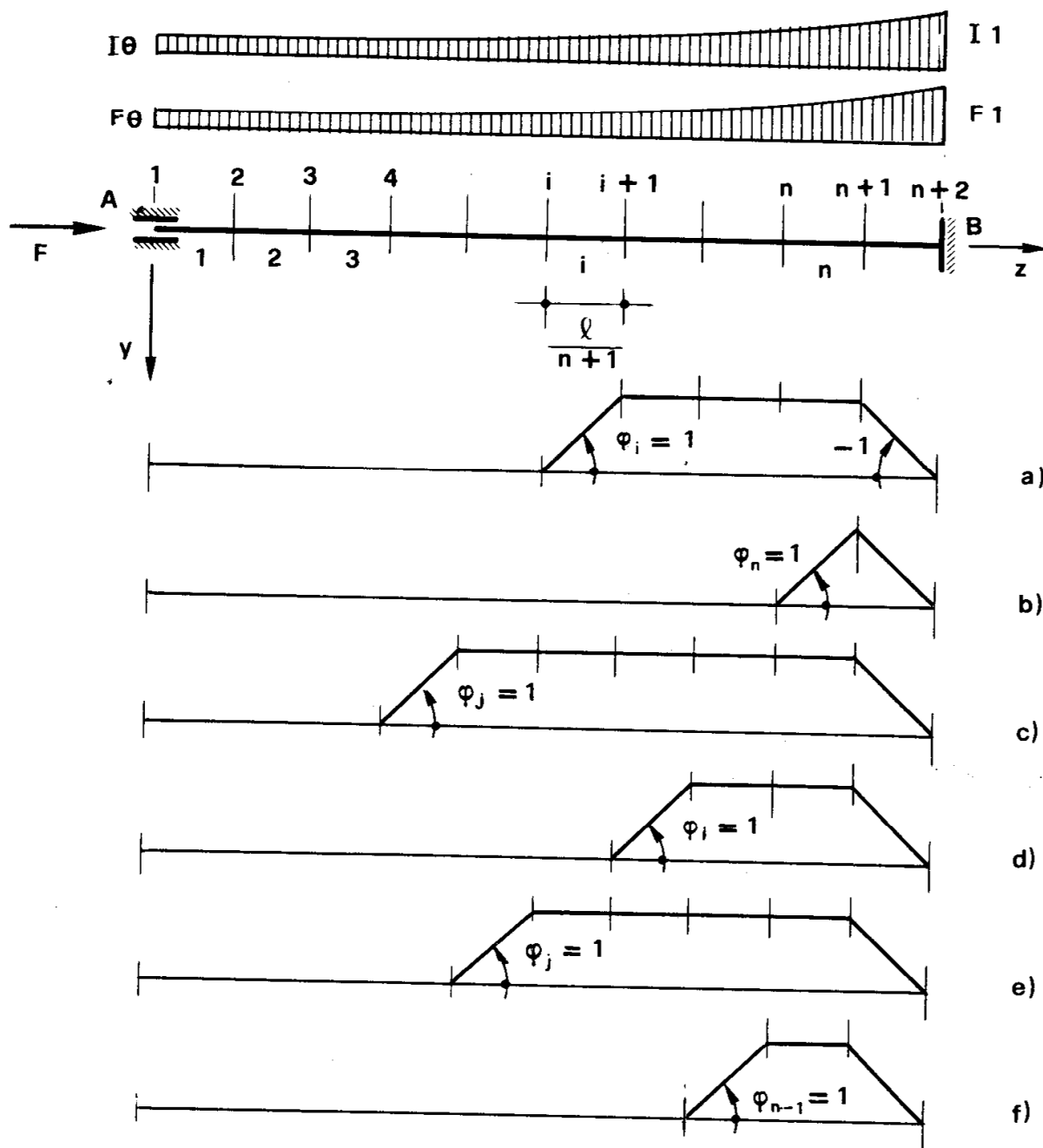


Figura 1

vanno aggiunti i due *esterni*, ubicati agli estremi *A* e *B*, ove si concentra la deformabilità elastica del mezzo tratto adiacente, e quella del vincolo. In *A* quindi è (fig. 2)

$$\varphi_A = \frac{Ml'}{2EI} + Mc_A = \frac{M}{k_A},$$

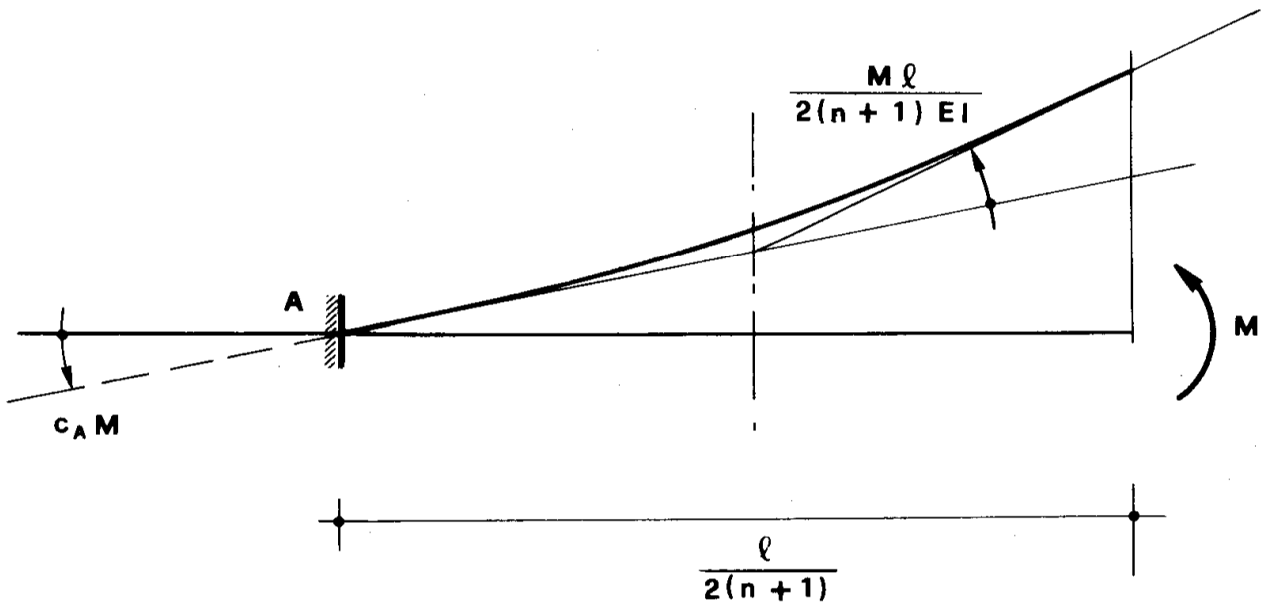


Figura 2.

ove c_A è la cedibilità del vincolo, e quindi

$$k_A = \frac{2EI}{l' + 2EIc_A} \quad (3)$$

Dalla (3) si trae

$$c_A = 0 \rightarrow k_A = \frac{2EI}{l'} \quad (\text{incastro})$$

$$c_A = \infty \rightarrow k_A = 0 \quad (\text{appoggio})$$

Analogamente è

$$k_B = \frac{2EI}{l' + 2EI c_B} \quad (4)$$

I conci sono quindi in tutto $n + 2$. La numerazione dei conci e dei tratti è quella della fig. 1; il tratto i -esimo è ubicato tra il concio i -esimo ed il concio $(i + 1)$ -esimo.

Si assumono come parametri lagrangiani le rotazioni $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ dei primi n tratti. Il termine K_{ii} della matrice \mathbf{K} che fornisce l'energia elastica attraverso l'espressione

$$L = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{K} \varphi \quad (5)$$

è il doppio dell'energia connessa con la deformata $\varphi_i = 1$:

$$K_{ii} = 2 L_i \quad (6)$$

e cioè (fig. 1a, b)

$$K_{ii} = \begin{cases} k_i + k_{i+1} + k_{n+1} + k_{n+2} & \text{se } i \neq n \end{cases} \quad (7)$$

$$K_{ii} = \begin{cases} k_n + 4k_{n+1} + k_{n+2} & \text{se } i = n \end{cases} \quad (8)$$

Il termine K_{ij} di \mathbf{K} è invece l'energia mutua connessa con le deformate $\varphi_i = 1$ e $\varphi_j = 1$:

$$K_{ij} = L_{ij} \quad (9)$$

Quindi si ha (fig. 1c, d; 1c, b; 1c, e; 1f, b)

$$j \neq i + 1 \begin{cases} j \neq n & K_{ij} = k_{n+1} + k_{n+2} \end{cases} \quad (10)$$

$$j \neq i + 1 \begin{cases} j = n & K_{in} = 2k_{n+1} + k_{n+2} \end{cases} \quad (11)$$

D'altro canto, chiamando N_i la risultante delle forze assiali di esercizio agenti alla sinistra del concio i -esimo, e cioè sui conci 1, 2, ... i , si ha (fig. 4)

$$L_e = N_{n+1} l' \frac{\varphi_B^2}{2} + N_n l' \frac{\varphi_n^2}{2} + \dots + N_1 l' \frac{\varphi_1^2}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n N_i \frac{l}{2(n+1)} \varphi_i^2 + N_{n+1} \frac{l}{2(n+1)} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right)^2$$

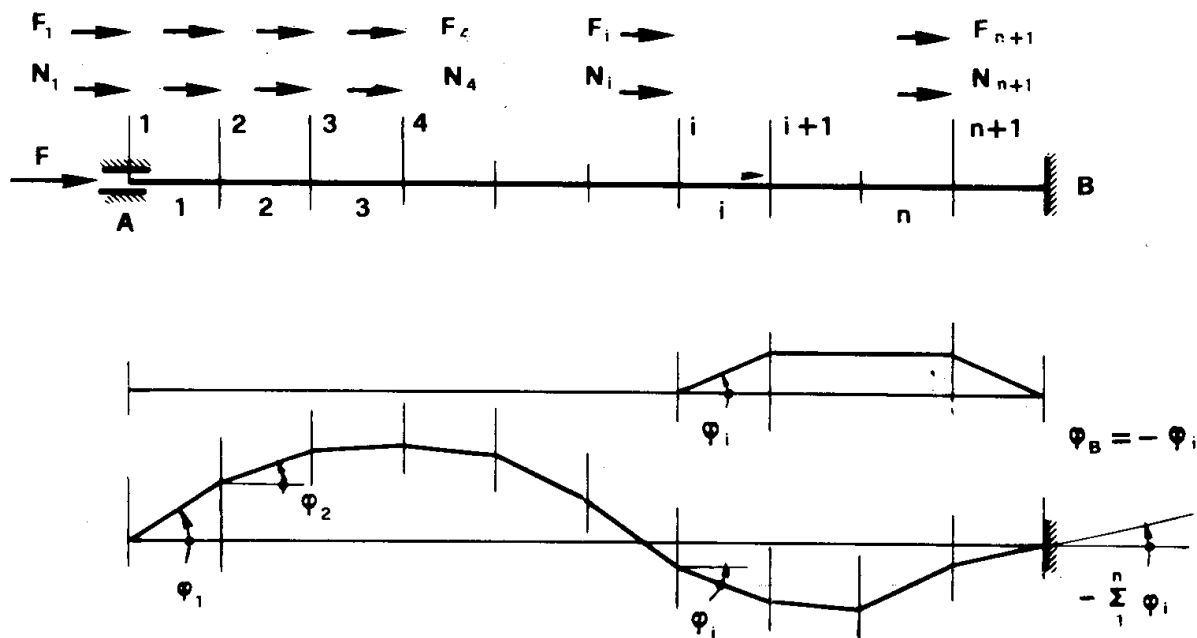


Figura 4.

E' quindi

$$B_{ii} = \frac{l}{n+1} (N_i + N_{n+1}) \tag{16}$$

$$B_{ij} = \frac{l}{n+1} N_{n+1} \tag{17}$$

$$B_{ji} = B_{ij} \tag{18}$$

La E_t è perciò

$$E_t = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{K} \varphi - \frac{\lambda}{2} \varphi^T \mathbf{B} \varphi . \quad (19)$$

e le condizioni di equilibrio sono

$$\mathbf{K} \varphi - \lambda \mathbf{B} \varphi = 0$$

e cioè ancora

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} \varphi - \lambda \mathbf{I} \varphi = 0 ; \quad (20)$$

soluzioni non banali del sistema (20) si hanno se e solo se

$$\det |\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}| = 0 . \quad (21)$$

La (21) può scriversi pure

$$\det |\bar{\mathbf{K}}_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 , \quad (22)$$

dove

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j ; \end{cases}$$

essa è un'equazione algebrica di grado n in λ , che fornisce i valori λ_1 , λ_2 ... λ_n di λ per cui il sistema (20) ammette soluzione non banale.

b) *Programmazione.*

Nella fig. 5 è riportato il programma.

La frase 40 impegna a numerare gli array da 1 anzichè da zero. Le frasi da 50 a 320 richiedono i dati dal display; le frasi da 330 a 600 stampano gli stessi dati.

Le 610 e 620 definiscono le funzioni $I(z)$ ed $f(z)$, rispettivamente momento d'inerzia e carico assiale distribuito; esse sono di tipo parabolico, ed i valori estremi I_0 ed I_1 , F_0 ed F_1 , sono dati di input. Si ricorda che le funzioni possono essere definite in qualsiasi parte del programma. Se le funzioni sono diverse dalla parabolica, ma dipendenti sempre dai due valori estremi, basta variare le frasi 610 e 620; per esempio, le funzioni lineari sono

$$FNI(Z) = I_0 + (I_1 - I_0) * Z/L$$

$$FNF(Z) = F_0 + (F_1 - F_0) * Z/L .$$

Se invece le funzioni dipendono da altri parametri, occorre fornire questi ultimi nell'input.

La 630 calcola il numero dei parametri lagrangiani dal numero di tratti in cui si è suddivisa la trave.

Le 640 e 660 dimensionano le matrici al massimo, le 650 e 670 le ridimensionano per il valore di n già calcolato nella 630.

Le frasi da 680 a 710 formano gli elementi di posto 2, 3 ... $n + 1$ delle matrici colonna K_0 . (dim. $n + 2$) ed F_0 (dim. $n + 1$) delle rigidità dei conci e delle forze assiali equivalenti concentrate nei conci stessi. La formula seguita per la K_0 . è la (2); analogamente si opera per la F_0 . Gli elementi di posto 1 ed $n + 2$ della K_0 . (formule 3 e 4) sono forniti dalle frasi 720 ÷ 750; l'elemento di posto 1 della F_0 . dalla 760.

Le frasi da 770 a 800 costruiscono la matrice N_0 . (dim. $n + 1$) della risultante delle forze a sinistra di ogni concio.

Se le forze sono concentrate, si sopprimono le frasi 620, 690, 760, e la matrice F_0 . si costruisce in input.

Le frasi 810 ÷ 840 forniscono la diagonale principale della matrice $\mathbf{K} = K$ (dim. $n \times n$) secondo le formule (7) ed (8); le frasi 850 ÷ 1000 completano la matrice, secondo le formule (10), (11), (12) e (13). Le frasi 1010 ÷ 1090 forniscono la matrice $\mathbf{B} = B_0$. (dim. $n \times n$) secondo le formule (16) e (17). La frase 1100 fornisce in K (dim. $n \times n$) la matrice $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}$ della (22); naturalmente la \mathbf{K} (precedenti valori di K) è perduta.

c) *Ricerca degli autovalori e dei relativi autovettori.*

La sequenza 1110 ÷ 1450 è di carattere generale per la ricerca degli


```

10 REM PROGRAMMA "DOG A1"
20 REM Analisi modale statica
   di una trave con incastri
   solo angolarmente cedevoli.
30 REM 4 marzo      A.D.1982 D.G

40 OPTION BASE 1
50 DISP "Luce ";
60 INPUT L
70 DISP "Modulo di Young ";
80 INPUT E
90 DISP "Forza assiale concentr
   ata di esercizio all'estrem
   o di sinistra ";
100 INPUT F
110 DISP "Numero dei tratti ";
120 INPUT W
130 DISP "Cedibilita' angolare
   sinistra ";
140 INPUT C8
150 DISP "Cedibilita' angolare
   destra ";
160 INPUT C9
170 DISP "Momento d'inerzia di
   sinistra ";
180 INPUT I0
190 DISP "Momento d'inerzia di
   destra ";
200 INPUT I1
210 DISP "Forza assiale di eserc
   izio specifica di sinistra "
   ;
220 INPUT F0
230 DISP "Forza assiale di eserc
   izio specifica di destra ";
240 INPUT F1
250 DISP "Estremo inf.T1 dell'in
   tervallo di saggio ";
260 INPUT T1
270 DISP "Estremo sup.T2 dell'in
   tervallo di saggio ";
280 INPUT T2
290 DISP "Passo iniziale T0 del
   saggio ";
300 INPUT T0
310 DISP "Passo finale del saggi
   o ";
320 INPUT E1
330 PRINT "Luce = ";L
340 PRINT
350 PRINT "Modulo di Young = ";E
360 PRINT
370 PRINT "Forza assiale concent
   rata di esercizio all'estre
   mo di sinistra =";F
380 PRINT
390 PRINT "Numero dei tratti = "
   ;W
400 PRINT
410 PRINT "Cedibilita' angolare
   sinistra = ";C8

```

Figura 5.a

```

420 PRINT
430 PRINT "Cedibilita' angolare
      destra = ";C9
440 PRINT
450 PRINT "Momento d'inerzia di
      sinistra = ";I0
460 PRINT
470 PRINT "Momento d'inerzia di
      destra = ";I1
480 PRINT
490 PRINT "Forza assiale di eser
      cizio specifica di sinistra
      = ";F0
500 PRINT
510 PRINT "Forza assiale di eser
      cizio specifica di destra =
      ";F1
520 PRINT
530 PRINT "Estremo inf.T1 dell'i
      ntervallo di saggio = ";T1
540 PRINT
550 PRINT "Estremo sup.T2 dell'i
      ntervallo di saggio = ";T2
560 PRINT
570 PRINT "Passo iniziale T0 del
      saggio = ";T0
580 PRINT
590 PRINT "Passo finale del saagg
      io = ";E1
600 PRINT @ PRINT @ PRINT
610 DEF FNI(Z) = I0+(I1-I0)*Z^2/
      L^2
620 DEF FNF(Z) = F0+(F1-F0)*Z^2/
      L^2
630 N=W-1
640 DIM K0(32),F0(31),N0(31),K(3
      0,30),B0(30,30)
650 REDIM K0(N+2),F0(N+1),N0(N+1
      ),K(N,N),B0(N,N)
660 DIM B(30),X(30),T(30),C(30),
      V(30)
670 REDIM B(N),X(N),T(N),C(N),V(
      N)
680 FOR I=2 TO N+1
690 F0(I)=L/W/2*(FNF(L/W*(I-.5))
      +FNF(L/W*(I-1.5)))
700 K0(I)=E*W/L/2*(FNI(L/W*(I-.5
      ))+FNI(L/W*(I-1.5)))
710 NEXT I
720 I8=(FNI(0)+FNI(L/W/2))/2
730 K0(1)=2*E*I8/(L/W+2*E*I8*C8)
740 I9=(FNI(L-L/W/2)+FNI(L))/2
750 K0(N+2)=2*E*I9/(L/W+2*E*I9*C
      9)
760 F0(1)=F+L/W/4*(FNF(0)+FNF(L/
      W/2))
770 N0(1)=F0(1)
780 FOR I=2 TO N+1
790 N0(I)=N0(I-1)+F0(I)
800 NEXT I

```

Figura 5b

```

810 FOR I=1 TO N-1
820 K(I,I)=K0(I)+K0(I+1)+K0(N+1)
      +K0(N+2)
830 NEXT I
840 K(N,N)=K0(N)+4*K0(N+1)+K0(N+
      2)
850 FOR I=1 TO N-1
860 FOR J=I+1 TO N-1
870 IF J#I+1 THEN 900
880 K(I,J)=-K0(I+1)+K0(N+1)+K0(N
      +2)
890 GOTO 910
900 K(I,J)=K0(N+1)+K0(N+2)
910 K(J,I)=K(I,J)
920 NEXT J
930 NEXT I
940 FOR I=1 TO N-1
950 IF I#N-1 THEN 980
960 K(I,N)=-K0(N)+2*K0(N+1)+K0(N
      +2)
970 GOTO 990
980 K(I,N)=2*K0(N+1)+K0(N+2)
990 K(N,I)=K(I,N)
1000 NEXT I
1010 FOR I=1 TO N
1020 B0(I,I)=L/W*(N0(I)+N0(N+1))
1030 NEXT I
1040 FOR I=1 TO N-1
1050 FOR J=I+1 TO N
1060 B0(I,J)=L/W*N0(N+1)
1070 B0(J,I)=B0(I,J)
1080 NEXT J
1090 NEXT I
1100 MAT K=INV(B0)*K
1110 T3=T0 @ T5=T1
1120 I8=0
1130 FOR I=1 TO N
1140 B(I)=K(I,I)+I*555
1150 NEXT I
1160 Y3=0 @ Y4=0
1170 FOR T=T1-2*T0 TO T2 STEP T0
1180 MAT B0=K
1190 FOR S=1 TO N
1200 B0(S,S)=B0(S,S)-T
1210 NEXT S
1220 MAT X=SYS(B0,B)
1230 Y=FNORM(X)
1240 IF T=T1-2*T0 OR T=T1-T0 THE
      N 1390
1250 IF Y4-Y3<=0 OR Y-Y4>=0 THEN
      1390
1260 PRINT T-2*T0
1270 PRINT T-T0
1280 PRINT T
1290 PRINT "-----"
      "
1300 PRINT
1310 IF T0<E1 THEN 1350
1320 T1=T-2*T0
1330 T0=T0/10

```

Figura 5c

```

1340 GOTO 1170
1350 T0=T3 @ I8=I8+1
1360 IF I8=N THEN 1450
1370 T1=T+2*T0
1380 GOTO 1170
1390 Y3=Y4 @ Y4=Y
1400 NEXT T
1410 T1=T5 @ T0=T3
1420 T0=T0/2
1430 T3=T0
1440 GOTO 1120
1450 DISP "Numero di modi deside
      rato";
1460 INPUT @
1470 FOR I=1 TO @
1480 DISP "Autovalore";I
1490 INPUT T(I)
1500 NEXT I
1510 FOR Z=1 TO @
1520 REDIM B0(N-1,N-1),B(N-1)
1530 FOR I=1 TO N-1
1540 FOR J=1 TO N-1
1550 IF I=J+1 THEN 1580
1560 B0(I,J)=K(I,J+1)
1570 GOTO 1590
1580 B0(I,J)=K(I,J+1)-T(Z)
1590 NEXT J
1600 B(I)=-K(I,1)
1610 NEXT I
1620 B(1)=B(1)+T(Z)
1630 REDIM X(N-1)
1640 MAT X=SYS(B0,B)
1650 REDIM X(N)
1660 FOR I=2 TO N
1670 C(I)=X(I-1)
1680 NEXT I
1690 C(1)=1
1700 PRINT @ PRINT
1710 PRINT "Modo";Z
1720 PRINT @ PRINT
1730 PRINT "Autovalore=";T(Z)
1740 PRINT @ PRINT @ PRINT
1750 V(1)=-C(1)*L/W
1760 FOR I=2 TO N
1770 V(I)=V(I-1)-C(I)*L/W
1780 NEXT I
1790 PRINT "Spostamenti del modo
      ";Z
1800 PRINT @ PRINT
1810 PRINT @
1820 FOR I=1 TO N
1830 PRINT V(I)
1840 NEXT I
1850 PRINT @
1860 PRINT @ PRINT @ PRINT
1870 GOCLEAR
1880 M=MAXAB(V)
1890 SCALE @,L,-1.2*M,1.2*M
1900 MOVE L,@
1910 DRAW @,@

```

Figura 5d

Le soluzioni della (23) possono trovarsi (fig. 6) con una banale ricerca degli zeri della funzione $\Delta(\lambda)$; più rapida però (e soprattutto utile quando esistono radici multiple di ordine pari) è la ricerca degli asintoti della funzione $y(\lambda)$ definita come “norma” della soluzione del sistema

$$\mathbf{Kx} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{B} \quad (26)$$

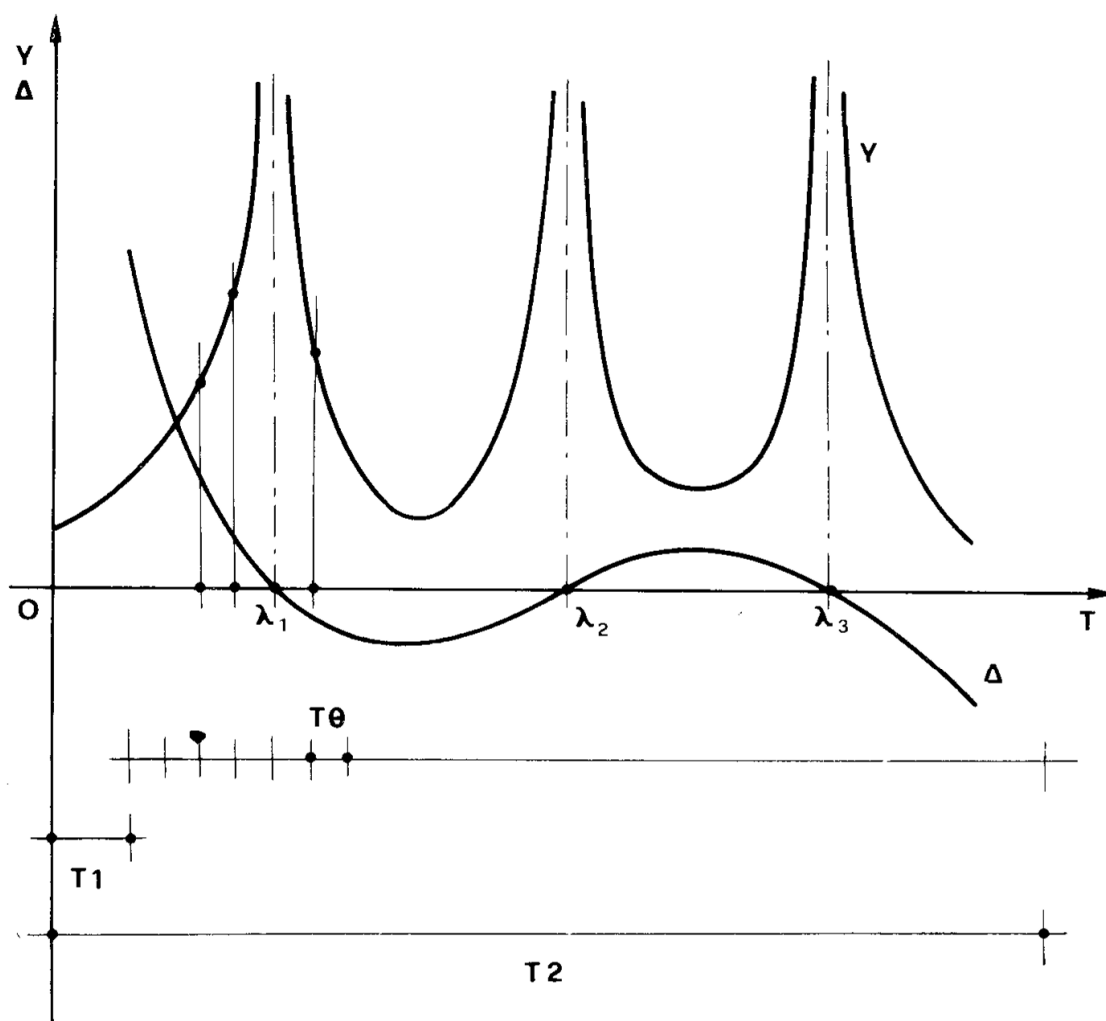


Figura 6.

λ

e cioè

$$y(\lambda) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (27)$$

Il vettore \mathbf{B} dei termini noti è qualsiasi.

Lo stesso risultato può raggiungersi ponendo

$$y(\lambda) = \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}$$

oppure

$$y(\lambda) = \frac{1}{[\Delta(\lambda)]^2}$$

La variabile λ si indica con la lettera T , la y con la Y . L'indagine si esegue nell'intervallo $[T_1, T_2]$, con passo T_0 . Se l'asintoto è compreso in $[T, T - 2T_0]$, come si vede nella fig. 7, e se tale intervallo è sufficiente-

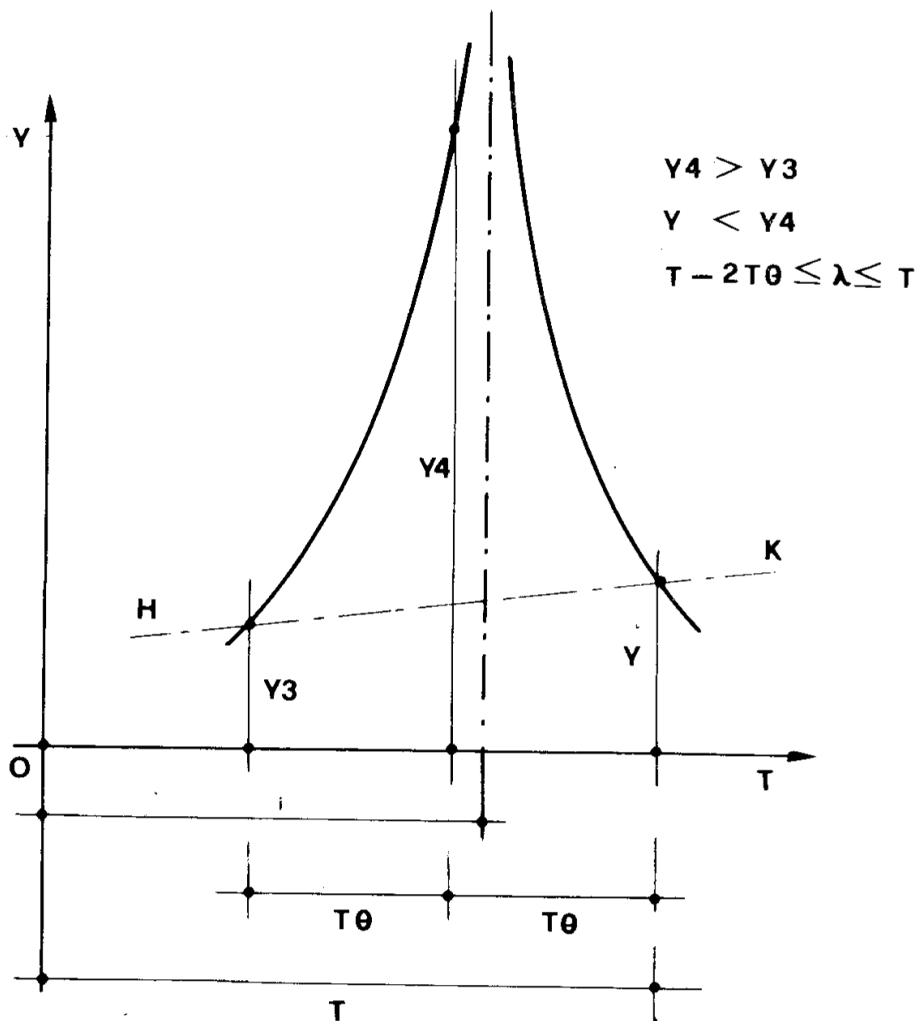


Figura 7.

mente ristretto in relazione alle pendenze della $Y(\lambda)$, si avrà (vedi pure fig. 8)

$$Y_4 > Y_3$$

(28)

$$Y < Y_4$$

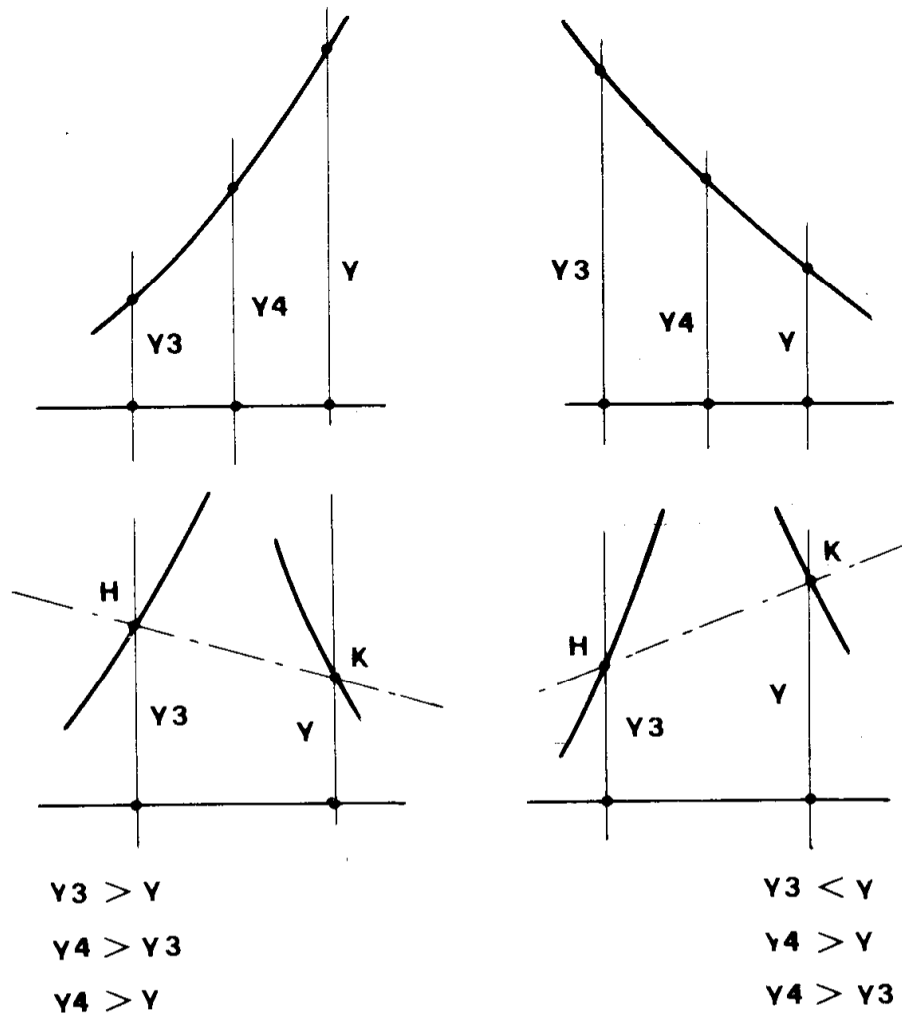


Figura 8.

dove

$$Y_4 = y (T - 2T_0)$$

$$Y_3 = y (T - T_0)$$

$$Y = y (T) .$$

La frase 1110 conserva T_0 in T_3 e T_1 in T_5 ; la frase 1120 impone

il valore iniziale zero alla $I8$.

Il looping 1130 ÷ 1150 costruisce, in modo che potremmo dire casuale, il vettore \mathbf{B} dei termini noti.

La frase 1160 assegna i valori iniziali zero ad $Y3$ ed $Y4$.

La prima indagine, per successivi incrementi $T0$ di T , è consegnata nel looping 1170 ÷ 1400; essa parte da $T1 - 2 \cdot T0$, e non può superare $T2$ (frase 1170). La 1180 trasferisce la matrice \mathbf{K} nella $B0$; la \mathbf{K} non si perde come invece accade per la precedente $B0$. Il looping 1190 ÷ 1210 crea la matrice

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I} ;$$

la frase 1220 risolve il sistema (26), e la frase 1230 fornisce, per ogni λ , la $y(\lambda)$ della (27).

All'inizio, per $\lambda = T1 - 2T0$ e per $\lambda = T1 - T0$, non si esegue il test (28); la 1240 rimanda alla 1390, che prima pone

$$Y3 = 0$$

$$Y4 = Y(T1 - 2T0)$$

e successivamente

$$Y3 = Y(T1 - 2T0)$$

(29)

$$Y4 = Y(T1 - T0) .$$

Si parte così, per $T = T1$, con i valori (29) di $Y3$ ed $Y4$; da $T = T1$, il test (28) è valido, ed è espresso dalla 1250. Se esso è negativo, si salta alla 1390, che sostituisce ad $Y3$ ed $Y4$ i valori ottenuti incrementando T di $T0$, e si torna (1400) in 1170. Se esso invece è negativo, vuol dire che tra T e $T - 2T0$ è ubicato un asintoto; si passa in tal caso alla sequenza 1260 ÷ 1300, che stampa

$$T - 2T0$$

$$T - T0$$

$$T .$$

All'inizio sicuramente $T0$ è maggiore del passo finale $E1$, quindi la 1310 lascia il passo alla 1320, che sposta $T1$ in $T - 2T0$, alla 1330, che riduce $T0$ ad un decimo, e alla 1340, che riporta alla 1170. Si ripete così

il ciclo a partire da $T - 2 T_0$, per T_0 ridotto, restringendo sempre più l'intervallo $[T - 2 T_0, T]$ in cui l'asintoto è compreso, fino a ridurre T_0 al di sotto di E_1 . Quando ciò accade, la ricerca di un primo autovalore è terminata; la 1310 spedisce in 1350, che ridà a T_0 il valore iniziale, e pone $I_8 = 1$. Il test 1360 è per ora ovviamente negativo, e lascia quindi libero il passo per la 1370; questa pone l'inizio del ciclo in $T_1 = T$. Successivamente la 1380 rimanda in 1170, per il nuovo ciclo inteso alla ricerca di un secondo autovalore. Ottenutolo, al modo del primo, la 1350 pone $I_8 = 2$. Così si procede, finchè $I_8 = n$; in tal caso la 1360 spedisce in 1450, interrompendo il calcolo.

Se ciò non accade, se cioè si perviene all'estremo T_2 con $I_8 < N$, vuol dire che non tutti gli autovalori sono stati ottenuti. Quindi la 1410, a ciclo terminato, ridà a T_1 e T_0 il valore iniziale, mentre la 1420 dimezza T_0 (si poteva anche eliminare $T_0 = T_3$ nella 1410, e modificare la 1420 in $T_0 = T_3/2$). La 1440 poi invia in 1120, che ripone $I_8 = 0$; si ripete così tutto quanto sopra, con passo iniziale T_0 dimezzato.

Il procedimento va in tilt se e solo se qualche autovalore è fuori dell'intervallo $[T_1, T_2]$, o se qualche autovalore è radice multipla della (23). Il secondo caso è riconoscibile calcolando il valore (e il segno) del determinante $\Delta(\lambda)$ a destra ed a sinistra di ogni λ_i .

Nella fig. 9 è dato il diagramma di flusso della ricerca degli autovalori; l'END corrisponde all'istruzione 1450.

Se basta un numero limitato q di autovettori ($q < n$), si può bloccare con l'istruzione PAUSE il programma non appena questi autovalori sono stati ottenuti, e con l'istruzione CONT 1450 passare al tracciamento delle deformate; queste appunto assicurano (per un noto teorema di Sturm) che l'ordine dell'autovettore è pari al numero di punti di nullo della deformata incrementata dell'unità.

Quanto sopra si può automatizzare ponendo il valore di Q al posto di N nella frase 1360, e correggendo, nella stessa frase, 1450 in 1470; per $Q = 3$, per es., è

```
1360      IF      I8 = 3      THEN  1470.
```

Dalle deformate, attraverso il numero dei punti di nullo, si controlla se in realtà i primi tre valori dati dal programma sono i primi tre autovalori.

Dopo la 1450 si richiedono dal display il numero q , ed i primi q autovalori (frasi 1450 ÷ 1500). Il looping 1510 ÷ 2060 calcola e stampa le q deformate. Nel generico loop i -esimo la 1520 ridimensiona le matrici B_0 e B in $(n - 1) \times (n - 1)$ ed $n - 1$; ponendo poi $\varphi_1 = 1$, si tratta di risolvere il sistema di $n - 1$ equazioni

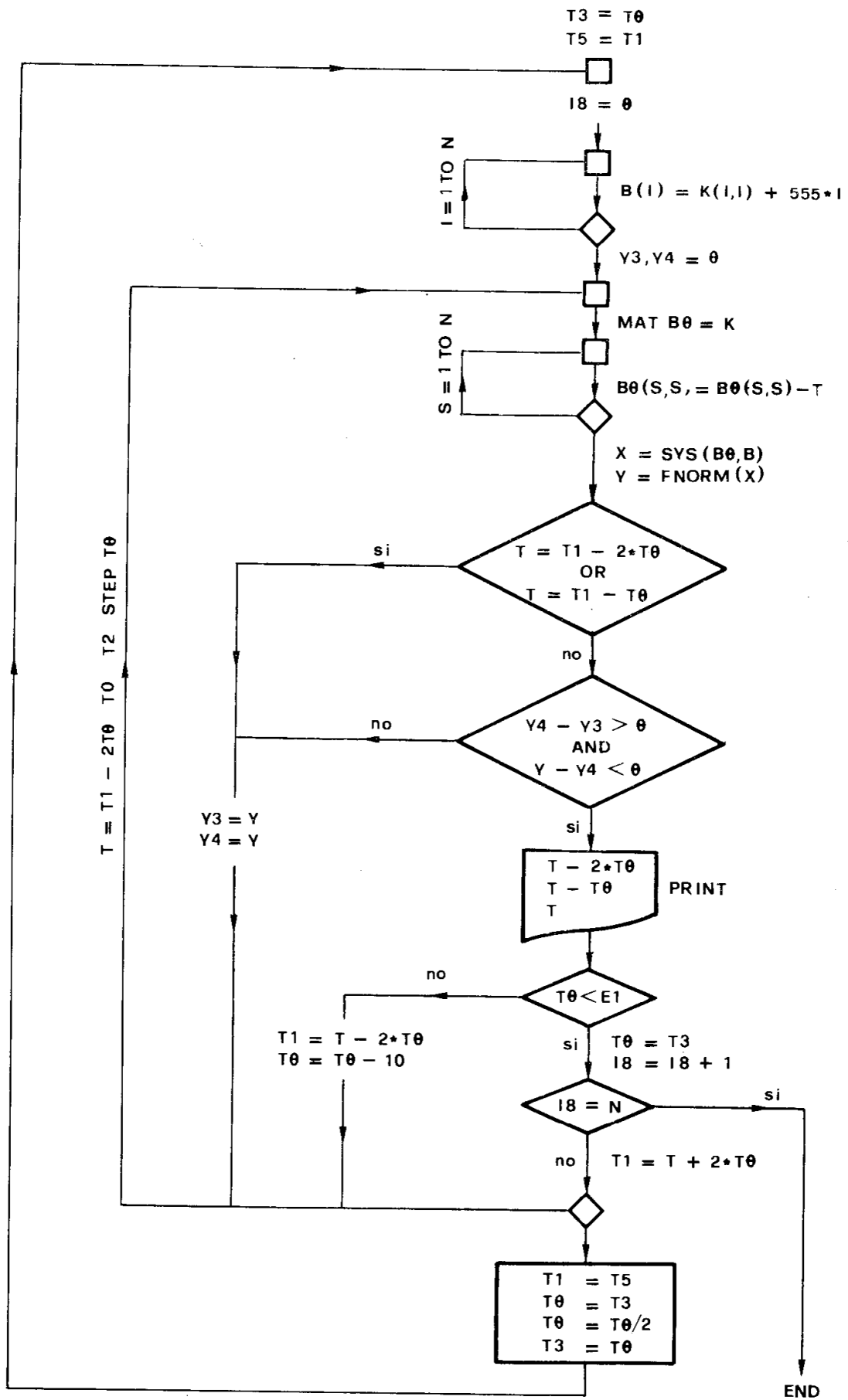


Figura 9

$$\begin{aligned}
 (K_{11} - \lambda_i) + \quad \quad \quad X \varphi_2 + \dots + K_{1n} \quad \varphi_n &= 0 \\
 K_{21} \quad \quad + (K_{22} - \lambda_i) \quad \varphi_2 + \dots + K_{2n} \quad \varphi_n &= 0 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 K_{n-1,1} \quad + K_{n-1,2} \quad \varphi_2 + \dots + K_{n-1,n} \quad \varphi_n &= 0,
 \end{aligned}$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 B_{11} \quad x_1 + \dots + B_{1,n-1} \quad x_{n-1} &= - (K_{11} - \lambda_i) \\
 B_{21} \quad x_1 + \dots + B_{2,n-1} \quad x_{n-1} &= - K_{21} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 B_{n-1,1} x_1 + \dots + B_{n-1,n-1} x_{n-1} &= - K_{n-1,1} ,
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= K_{12} \quad \dots \quad B_{1,n-1} &= K_{1n} \\
 B_{21} &= K_{22} - \lambda_i \quad \dots \quad B_{2,n-1} &= K_{2n} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 B_{n-1,1} &= K_{n-1,2} \quad \dots \quad B_{n-1,n-1} &= K_{n-1,n} .
 \end{aligned}$$

Il doppio looping 1530 ÷ 1610 crea i coefficienti B_{ij} , ed i termini noti; la frase 1620 corregge il primo termine noto. La frase 1630 ridimensiona la matrice X in $n - 1$, la 1640 risolve il sistema, e cioè fornisce in $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1}$ i valori di $\varphi_2 \ \varphi_3 \ \dots \ \varphi_n$. La 1650 ridà alla matrice X la dimensione n , ed il looping 1660 ÷ 1680 con la frase 1690 mette nell'array C i valori $1, \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n$.

La frase 1750 ed il looping 1760 ÷ 1780 calcolano gli spostamenti dei concetti interni; il resto serve per la stampa del grafico e del diagramma delle $v(z)^*$.

d) *Esempi.*

Per una trave con momento d'inerzia costante pari ad 1 m^4 , appog-

giata agli estremi, di luce 1 m, soggetta ad una forza di 1 t all'estremo, e per $EI = 1 \text{ tm}^2$, è

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9,869$$

$$\lambda_2 = 4 \pi^2 = 39,478$$

$$\lambda_3 = 9 \pi^2 = 88,826$$

Per $n = 5, 10, 20$ il programma fornisce

n	5		10		20		valore esatto
	valore	errore 0/0	valore	errore 0/0	valore	errore 0/0	
λ_1	9,549	3,2	9,789	0,81	9,849	0,20	9,869
λ_2	34,549	12,5	38,197	3,24	39,155	0,82	39,478
λ_3	65,451	26,3	82,443	7,18	87,195	1,83	88,826

Tabella 1

Per la stessa trave incastrata agli estremi si ha

n	5		10		20		valore esatto
	valore	errore 0/0	valore	errore 0/0	valore	errore 0/0	
λ_1	34,549	12,5	38,197	3,2	39,155	0,82	39,478
λ_2	57,974	28,2	74,457	7,8	79,148	1,99	80,760
λ_3	90,451	42,7	138,198	12,5	152,786	3,24	157,914

Tabella 2

Per la trave incastrata, e per $n = 20$, sono riportate nella fig. 10 a, b, c le deformate corrispondenti ai primi tre autovalori.

Si prende poi in esame la trave già studiata nel problema n. 38, ap-

Modo 1

Autovalore= 39.155

Spostamenti del modo 1

```
0  
-.05  
-.195105653  
-.421112957393  
-.705898651169  
-1.02158580273  
-1.33727261402  
-1.62205732031  
-1.84806308665  
-1.9931568016  
-2.04316465325  
-1.9931625049  
-1.84805496985  
-1.62204628993  
-1.3372599178  
-1.02157290746  
-.705887099133  
-.421104215381  
-.195100968737  
-.050000280006  
0
```

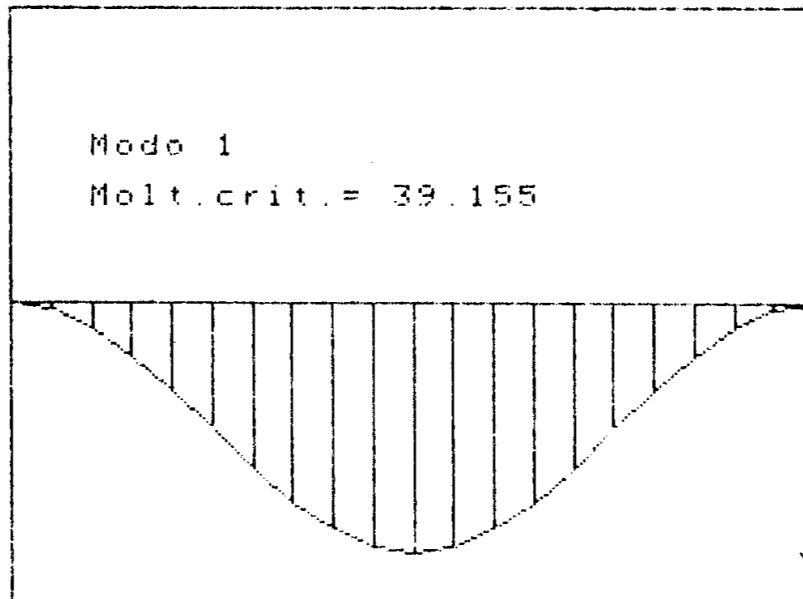


Figura 10.a

Modo 2

Autovalore= 79.148

Spostamenti del modo 2

```
0
-.05
-.180106449018
-.354575133006
-.52888388248
-.6585421742
-.707894471
-.657175382932
-.506420644969
-.27546004613
.000006290874
.275471892923
.506430432322
.657182193863
.707897977471
.658542702026
.528882346862
.354572857438
.180104903409
.05000050982
0
```

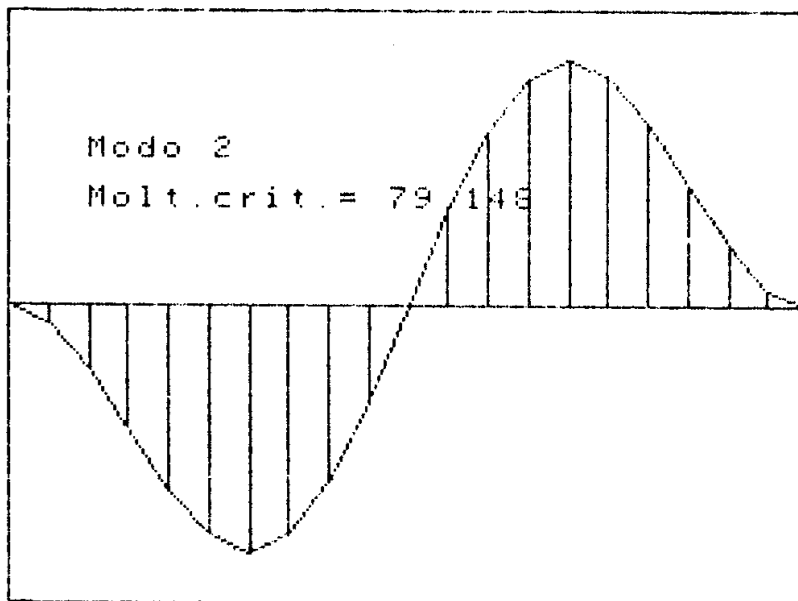


Figura 10.b

Modo 3

Autovalore= 152.786

Spostamenti del modo 3

```
0
-.05
-.180901687501
-.342705136939
-.47360703125
-.523607365874
-.473607706497
-.342706094806
-.180902318119
-.049999687499
.000001636248
-4.99970400039E-2
-.180897909382
-.342701358814
-.473604071238
-.523605729604
-.473607387975
-.342706600412
-.180902823737
-.049999375008
0
```

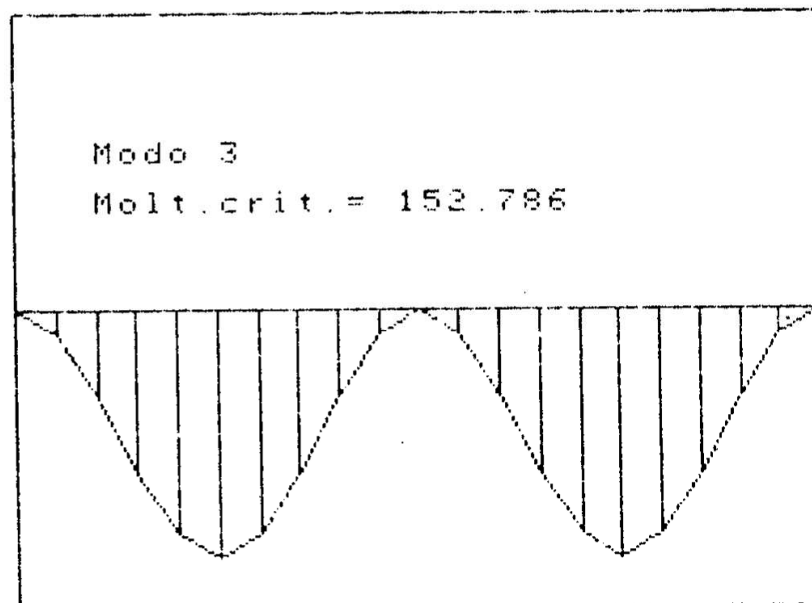


Figura 10.c

poggiata agli estremi, con variazione lineare del momento d'inerzia da I in $z = 0$ a $2I$ in $z = l$, e caricata da una forza unitaria in $z = 0$; approssimando la deformata con i primi tre termini dello sviluppo di Fourier in seni si è avuto

$$\lambda_1 = 14,5 \frac{EI}{l^2}$$

$$\lambda_2 = 57,6 \frac{EI}{l^2}$$

$$\lambda_3 = 135 \frac{EI}{l^2}$$

Con

$$l = 10 \text{ m}$$

$$E = 3.000.000 \text{ tm}^{-2}$$

$$I = 0,05 \text{ m}^4$$

si ha

$$\lambda_1 = 21.750$$

$$\lambda_2 = 86.400$$

$$\lambda_3 = 202.500$$

Operando alla Lagrange (il programma è stato modificato, come già detto, nella frase 610, per tener conto della variazione non più parabolica, ma lineare del momento d'inerzia) si ha invece

$\lambda \backslash n$	5	10	20
λ_1	21,053	21,585	21.721
λ_2	75.509	83.603	85.756
λ_3	143.021	179.965	190.668

21000
22000
23000

21600
21700
21800

21710
21720
21730

21720
21721
21722

84722
85722
86722

85622
85722
85822

85742
85752
85762

85755
85756
85757

189757
190257
191757

190557
190657
190757

190657
190667
190677

190667
190668
190669

Figura 11

Modo 1

Autovalore= 21721

Spostamenti del modo 1

```
0
- .5
-.982761111124
-1.43317895848
-1.83848074765
-2.1883191475
-2.47478090709
-2.69232636402
-2.83767426423
-2.90964463743
-2.90897088286
-2.83809073213
-2.70092437841
-2.50264679717
-2.24946013404
-1.94837099682
-1.60697655826
-1.23326254765
-.835415477768
-.421650811762
0
```

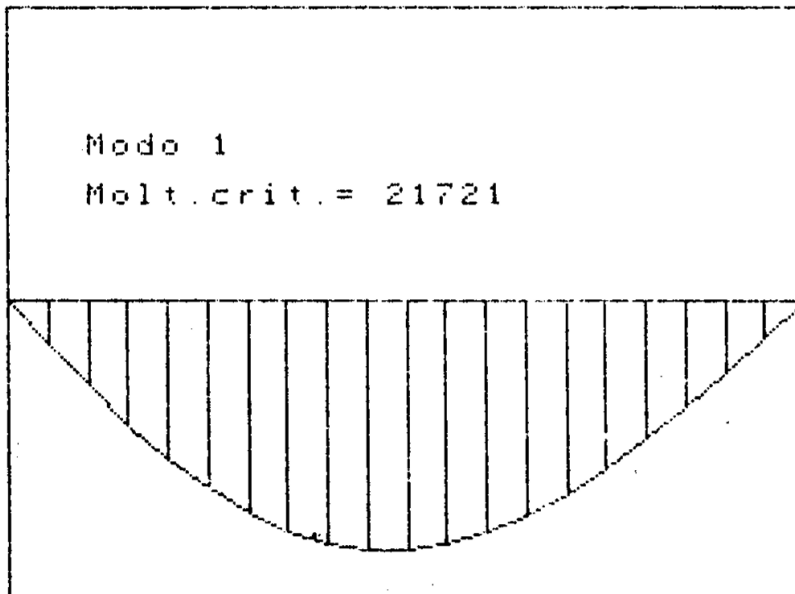


Figura 12.a

Modo 2

Autovalore= 85756

Spostamenti del modo 2

```
0  
- .5  
- .931939682552  
- 1.2427893357  
- 1.39918008701  
- 1.38892071675  
- 1.21985029985  
- .916665162037  
- .516431212334  
- .063474554249  
.39573879794  
.817244398619  
1.16339127817  
1.40561338433  
1.52607813556  
1.51823861562  
1.38640093309  
1.14447788166  
.814135149852  
.422549458479  
0
```

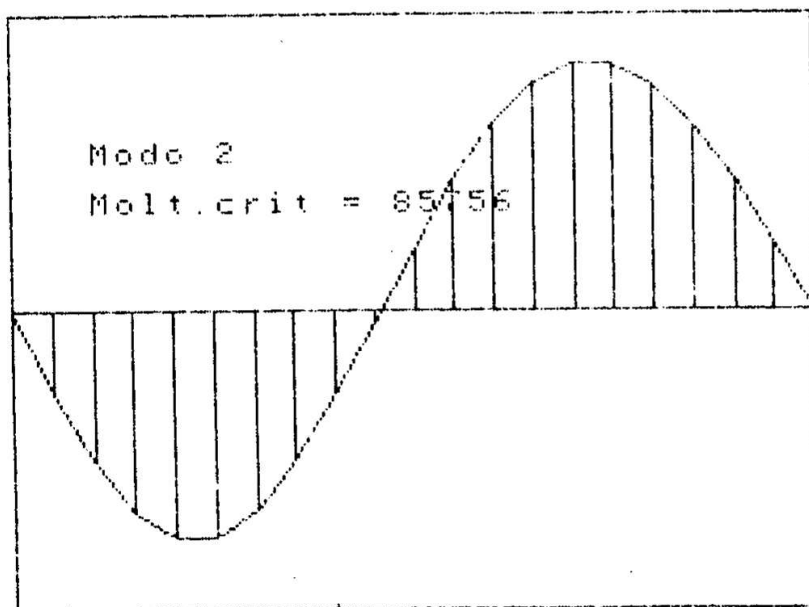


Figura 12.b

Modo 3

Rautovalore= 190668

Spostamenti del modo 3

```

0
- .5
- .84867619049
- .952177544803
- .792563264186
- .42306502184
.053986502604
.517841234112
.859799974957
1.00659640433
.932788554125
.661366339421
.254351224485
- .203181223036
- .621582198413
- .923791179088
- 1.00588109087
- .780728771677
- .42499750288
0
    
```

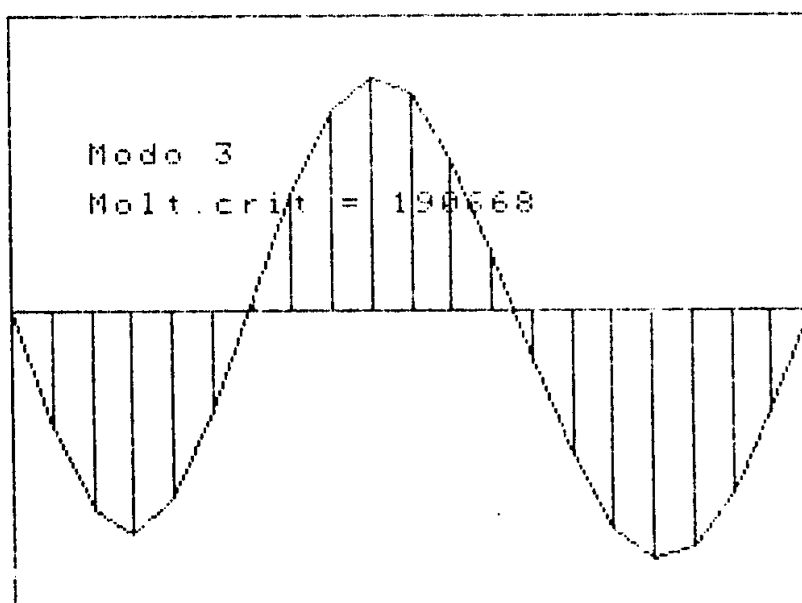


Figura 12.c

Nella fig. 11 sono riportati, per $n = 20$, i successivi valori di λ_1 , λ_2 , λ_3 e corrispondentemente, nella fig. 12 a, b, c le deformate.

2. Ricerca numerica del moltiplicatore critico per una trave a mensola.

La trave AB (fig. 13) è vincolata in A con un bipendolo angolarmente cedevole, in B con un incastro angolarmente cedevole.

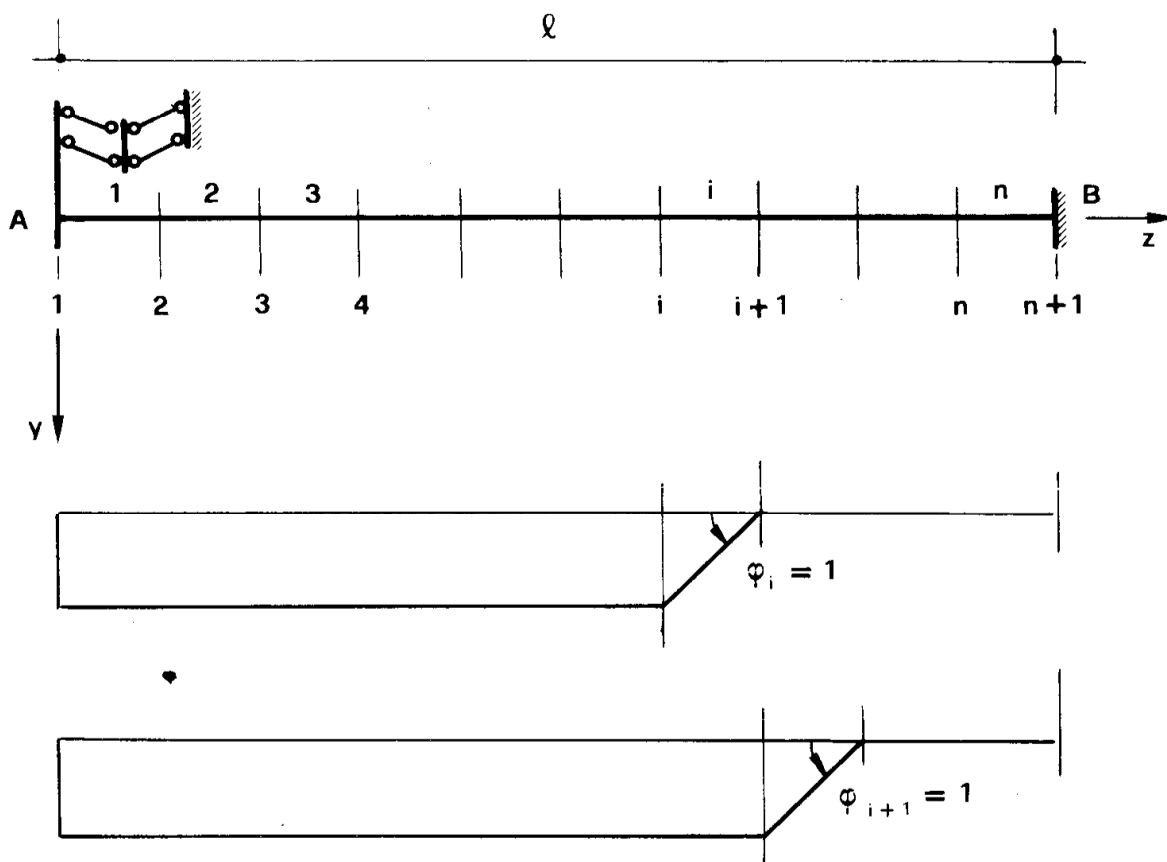


Figura 13.

La trave si divide in n tratti rigidi di lunghezza costante $l' = \frac{l}{n}$, assemblati da conchi elastici di lunghezza trascurabile. I conchi *interni* sono $n - 1$; le coordinate lagrangiane sono le rotazioni degli n tratti.

Continuano a valere le (2), (3), (4). La numerazione dei conchi e dei tratti è quella della fig. 13.

Si ha (fig. 13)

$$\kappa_{ii} = 2L_i = k_i + k_{i+1} \quad (30)$$

e ancora

$$\begin{aligned}
 K_{i,i+1} &= L_{i,i+1} = -k_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\
 K_{i+1,i} &= K_{i,i+1} & ;
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

la matrice \mathbf{K} presenta quindi tutti elementi nulli, ad eccezione della diagonale principale e delle due diagonali ad essa adiacenti, a destra e a sinistra (banda diagonale di ordine tre).

Il lavoro connesso con le forze applicate è (vedi fig. 4 e 13)

$$L_e = \sum_{i=1}^n N_i \frac{l}{2n} \varphi_i^2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 B_{ii} &= \frac{l}{n} N_i \\
 B_{ij} &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Nella fig. 14 appare il listing del programma, facilmente comprensibile data l'analogia stretta con il precedente.

Per una trave a mensola con momento d'inerzia costante pari ad 1 m^4 , di luce 1 m , soggetta ad una forza di 1 t all'estremo, si ha

$\lambda \backslash n$	5	10	valore esatto
λ_1	2,4472	2,4624	2,4674
λ_2	20,6107	21,7987	22,2066
λ_3	49,9999	58,5786	61,6850 ;

gli stessi valori si hanno per una trave vincolata con bipendolo in A , e appoggiata in B .

Nelle fig. 15 a, b, c e 16 a, b, c sono riportate, per i due casi, le deformate dei primi tre modi.

Si osservi come il metodo di Lagrange approssimi sempre gli autovalori per valori in difetto; ciò deriva dal fatto che la struttura ridotta a sistema olonomo è più deformabile di quella reale. Si può evidenziare questo fatto sulla mensola della fig. 17, e, più in generale, attraverso il procedimento dei pesi elastici (fig. 18).

```

10 REM PROGRAMMA "DOG L1"
20 REM Analisi modale statica
  di una trave a mensola ";
30 REM 6 marzo A.D.1982 D.G

40 OPTION BASE 1
50 DISP "Luce ";
60 INPUT L
70 DISP "Modulo di Young " ;
80 INPUT E
90 DISP "Forza assiale di eserc
  izio concentrata all'estr
  di sinistra ";
100 INPUT F
110 DISP "Numero dei tratti ";
120 INPUT N
130 DISP "Cedibilita' angolare d
  i sinistra ";
140 INPUT C8
150 DISP "Cedibilita' angolare d
  i destra ";
160 INPUT C9
170 DISP "Momento d'inerzia di s
  inistra ";
180 INPUT I0
190 DISP "Momento d'inerzia di d
  estra ";
200 INPUT I1
210 DISP "Forza assiale specific
  a di esercizio di sinistra
  ";
220 INPUT F0
230 DISP "Forza assiale specific
  a di esercizio di destra "
  ;
240 INPUT F1
250 DISP "Estremo inf. dell'inte
  rvallo di saggio ";
260 INPUT T1
270 DISP "Estremo sup. dell'inte
  rvallo di saggio ";
280 INPUT T2
290 DISP "Passo iniziale del saa
  ggio "
300 INPUT T0
310 DISP "Passo finale del saagi
  o ";
320 INPUT E1
330 PRINT "Luce ";L @ PRINT,
340 PRINT "Modulo di Young ";E @
  PRINT
350 PRINT "Forza assiale di eser
  cizio concentrata all'estr
  di sinistra ";F @ PRINT
360 PRINT "Numero dei tratti ";N
  @ PRINT
370 PRINT "Cedibilita' angolare
  di sinistra ";C8 @ PRINT
380 PRINT "Cedibilita' angolare
  di destra ";C9 @ PRINT

```

Figura 14.a


```

390 PRINT "Momento d'inerzia di
sinistra ";I0 @ PRINT
400 PRINT "Momento d'inerzia di
destra ";I1 @ PRINT
410 PRINT "Forza assiale specifi
ca di esercizio di sinistra
";F0 @ PRINT
420 PRINT "Forza assiale specifi
ca di esercizio di destra
";F1 @ PRINT
430 PRINT "Estremo inf. dell'int
ervallo di saggio ";T1 @ PRI
NT
440 PRINT "Estremo sup. dell'int
ervallo di saggio ";T2 @ PRI
NT
450 PRINT "Passo iniziale del sa
ggio ";T0 @ PRINT
460 PRINT "Passo finale del saagg
io ";E1 @ PRINT
470 DEF FNI(Z) = I0+(I1-I0)*Z^2/
L^2
480 DEF FNF(Z) = F0+(F1-F0)*Z^2/
L^2
490 DIM K0(31),F0(30),N0(30),K(3
0,30),B0(30,30)
500 REDIM K0(N+1),F0(N),N0(N),K(
N,N),B0(N,N)
510 DIM B(30),X(30),T(30),C(30),
V(30)
520 REDIM B(N),X(N),T(N),C(N),V(
N)
530 FOR I=2 TO N
540 F0(I)=L/N/2*(FNF(L/N*(I-.5))
+FNF(L/N*(I-1.5)))
550 K0(I)=E*N/L/2*(FNI(L/N*(I-.5
))+FNI(L/N*(I-1.5)))
560 NEXT I
570 I8=(FNI(0)+FNI(L/N/2))/2
580 K0(1)=2*E*I8/(L/N+2*E*I8*C8)
590 I9=(FNI(L-L/N/2)+FNI(L))/2
600 K0(N+1)=2*E*I9/(L/N+2*E*I9*C
9) "
610 F0(1)=F+L/N/4*(FNF(0)+FNF(L/
N/2))
620 N0(1)=F0(1)
630 FOR I=2 TO N
640 N0(I)=N0(I-1)+F0(I)
650 NEXT I
660 MAT K=ZER
670 MAT B0=ZER
680 FOR I=1 TO N
690 K(I,I)=K0(I)+K0(I+1)
700 NEXT I
710 FOR I=1 TO N-1
720 K(I,I+1)=-K0(I+1)
730 K(I+1,I)=K(I,I+1)
740 NEXT I
750 FOR I=1 TO N
760 B0(I,I)=N0(I)*L/N

```

Figura 14.b

```

770 NEXT I
780 MAT K=INV(B0)*K
790 T3=T0 @ T5=T1 @ L1=0
800 I8=0
810 FOR I=1 TO N
820 B(I)=K(I,I)+I*555
830 NEXT I
840 Y3=0 @ Y4=0
850 FOR T=T1-2*T0 TO T2 STEP T0
860 MAT B0=K
870 FOR S=1 TO N
880 B0(S,S)=B0(S,S)-T
890 NEXT S
900 MAT X=SYS(B0,B)
910 Y=FNORM(X)
920 IF T=T1-2*T0 OR T=T1-T0 THEN
    1070
930 IF Y4-Y3<=0 OR Y-Y4>=0 THEN
    1070
940 PRINT T-2*T0
950 PRINT T-T0
960 PRINT T
970 PRINT "-----"
    -----
980 PRINT
990 IF T0<E1 THEN 1030
1000 T1=T-2*T0
1010 T0=T0/10
1020 GOTO 850
1030 T0=T3 @ I8=I8+1
1040 IF I8=N THEN 1130
1050 T1=T+2*T0
1060 GOTO 850
1070 Y3=Y4 @ Y4=Y
1080 NEXT T
1090 T1=T5 @ T0=T3
1100 T0=T0/2
1110 T3=T0
1120 GOTO 800
1130 DISP "Numero di modi deside
    rato";
1140 INPUT Q
1150 FOR I=1 TO Q
1160 DISP "Autovalore";I
1170 INPUT T(I)
1180 NEXT I
1190 FOR Z=1 TO Q
1200 REDIM B0(N-1,N-1),B(N-1)
1210 FOR I=1 TO N-1
1220 FOR J=1 TO N-1
1230 IF I=J+1 THEN 1260
1240 B0(I,J)=K(I,J+1)
1250 GOTO 1270
1260 B0(I,J)=K(I,J+1)-T(Z)
1270 NEXT J
1280 B(I)=-K(I,1)
1290 NEXT I
1300 B(1)=B(1)+T(Z)
1310 REDIM X(N-1)
1320 MAT X=SYS(B0,B)

```

Figura 14.c

```

1330 FOR I=2 TO N
1340 C(I)=X(I-1)
1350 NEXT I
1360 C(1)=1
1370 PRINT @ PRINT @ PRINT
1380 PRINT @ PRINT @ PRINT
1390 PRINT "Modo";Z
1400 PRINT @ PRINT
1410 PRINT "Molt.crit.=";T(Z)
1420 PRINT @ PRINT @ PRINT
1430 V(N)=C(N)*L/N
1440 FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
1450 V(I)=V(I+1)+C(I)*L/N
1460 NEXT I
1470 PRINT "Deformata del modo
";Z
1480 PRINT @ PRINT
1490 FOR I=1 TO N
1500 PRINT V(I)
1510 NEXT I
1520 PRINT @
1530 PRINT @ PRINT @ PRINT
1540 GCLEAR
1550 M=MAXAB(V)
1560 FOR I=1 TO N
1570 SCALE 0,L,-1.2*M,1.2*M
1580 MOVE L,0
1590 DRAW 0,0
1600 MOVE 0,-V(I)
1610 FOR I=2 TO N
1620 DRAW L/N*(I-1),-V(I)
1630 MOVE L/N*(I-1),0
1640 DRAW L/N*(I-1),-V(I)
1650 NEXT I
1660 DRAW L,0
1670 MOVE .1*L,.4*M
1680 LABEL "Molt.crit.="&VAL$(IP*
(T(Z)*10000)/10000)
1690 MOVE .1*L,.6*M
1700 LABEL "Modo "&VAL$(Z)
1710 YAXIS 0 @ YAXIS L
1720 XAXIS -1.2*M @ XAXIS 1.2*M
1730 COPY
1740 NEXT Z
1750 REDIM K(N,N),B(N)
1760 END

```

Figura 14.d

Modo 1

Molt.crit.= 2.4624

Deformata del modo 1

```
.639240276316  
.539240276316  
.441702576316  
.349023944641  
.263501376797  
.187225903615  
.122080732346  
6.96699976883E-2  
3.12842615711E-2  
7.86873436097E-3  
0
```

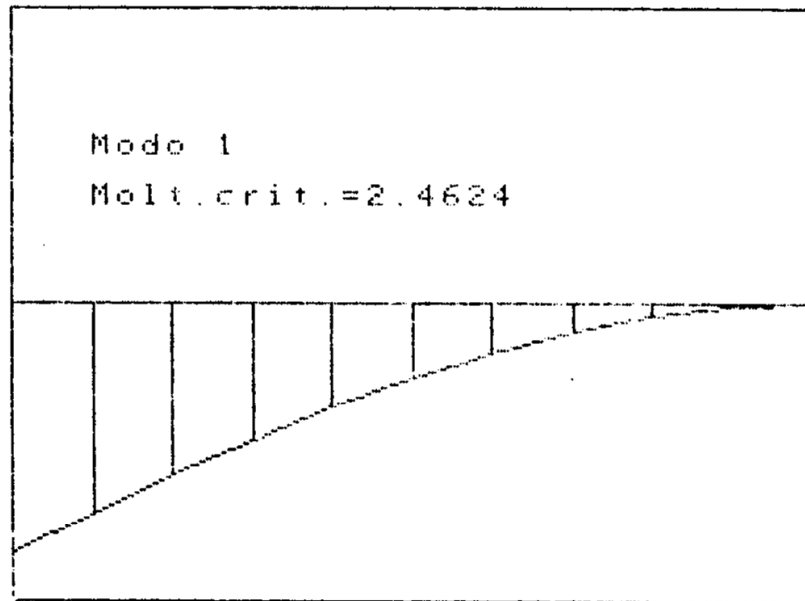


Figura 15.a

Modo 2

Mult.crit. = 21.7987

Deformata del modo 2

```
-.220268334549  
-.320268334549  
-.398469734549  
-.437825645967  
-.429756991741  
-.3760226336  
-.288335963071  
-.185811534404  
-9.07983402296E-2  
-2.40680217071E-2  
0
```

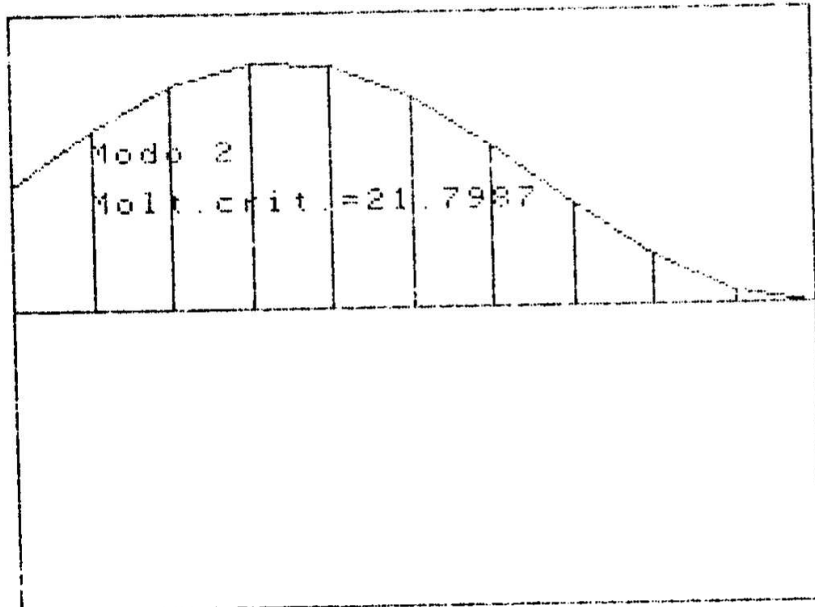


Figura 15.b

Modo 3

Molt.crit.= 58.5788

Deformata del modo 3

```
.141421299994  
4.14212999936E-2  
-6.4E-12  
.041421500478  
.141421583521  
.241421400477  
.282842258571  
.241420316182  
.141420850098  
4.14204161873E-2  
0
```

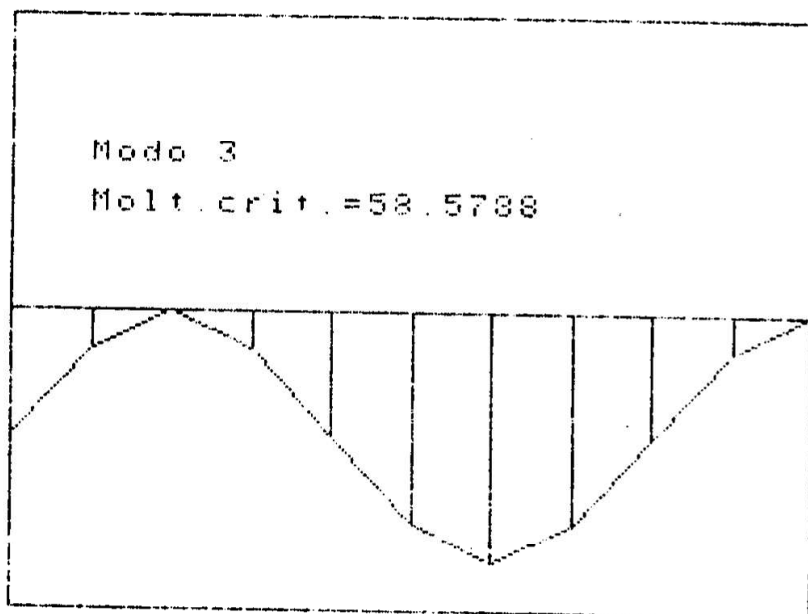


Figura 15.c

Modo 1

Molt.crit.= 2.4624

Deformata del modo 1

8.12233468249
8.02233408249
7.72479648249
7.23704784835
6.57109850244
5.74334678145
4.77417524376
3.68744876932
2.50992691063
1.27060496654
0

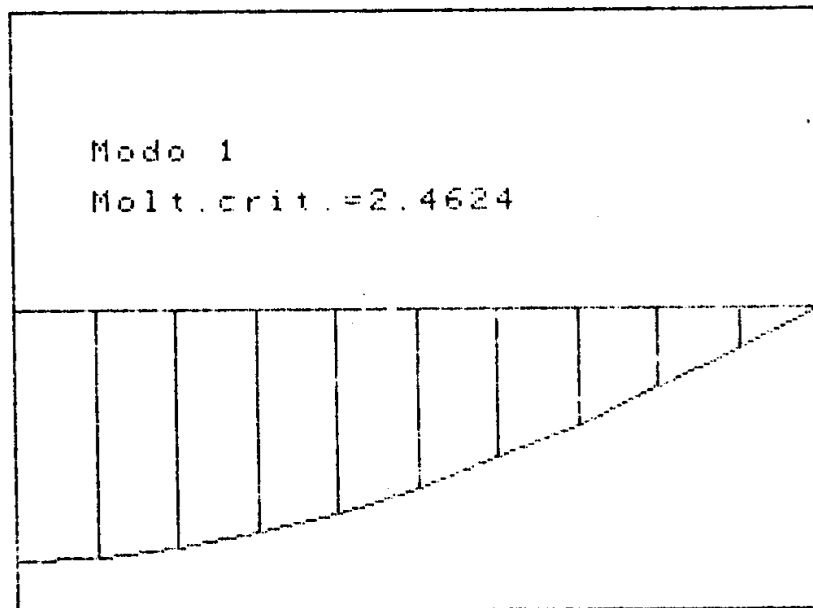


Figura 16.a

Modo 2

Molt. crit. = 21.7987

Deformata del modo 2

```
.917485416291  
.817485416291  
.539284116291  
.143525783074  
-.283519411577  
-.648761166815  
-.872581528142  
-.906190566453  
-.742261948313  
-.416529981485  
0
```

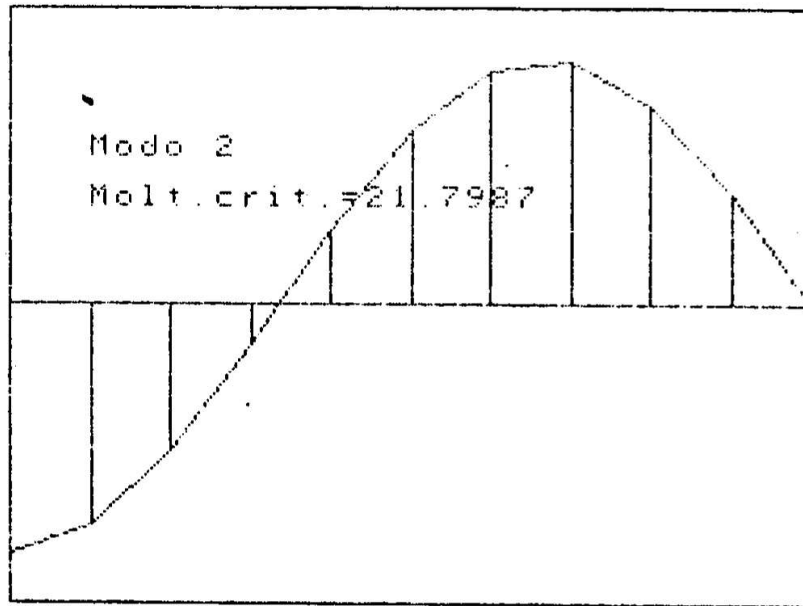


Figura 16.b

Modo 3

Molt.crit. = 58.5786

Deformata del modo 3

```
.34142055478  
.24142055478  
-.000000004522  
-.241422369  
-.34142266783  
-.241422966661  
-.000001690441  
.241419957118  
.341420554779  
.24142115244  
0
```

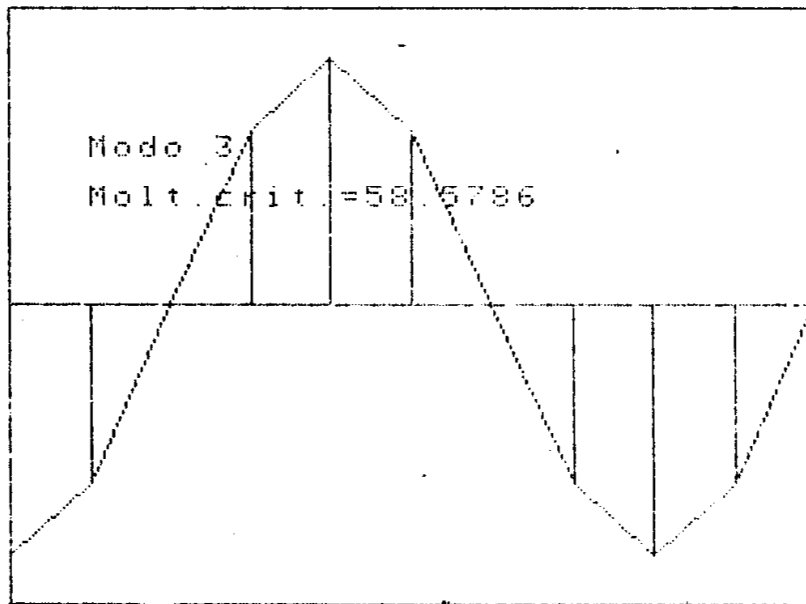
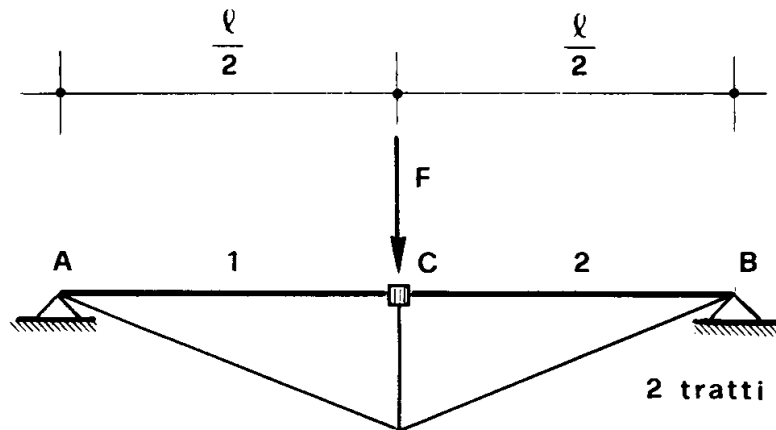


Figura 16.c

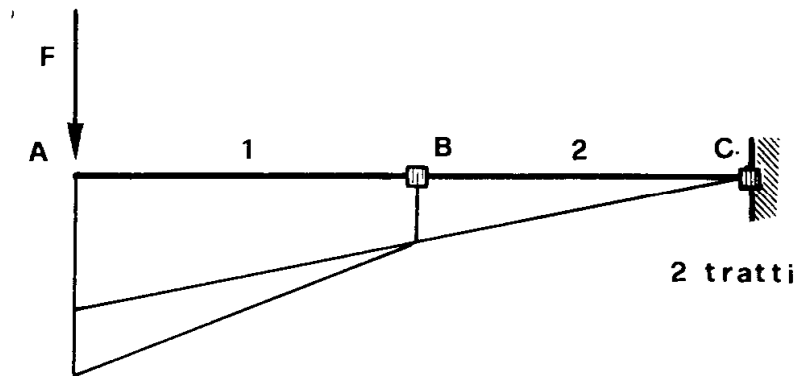


$$k = \frac{2EI}{l}$$

$$\Delta\varphi_C = \frac{F l^2}{8EI}$$

$$\varphi_A = \frac{F l^2}{16EI}$$

$$v_C = \frac{F l^3}{32EI}$$



$$k_B = \frac{2EI}{l}$$

$$k_C = \frac{4EI}{l}$$

$$\Delta\varphi_B = \frac{F l^2}{4EI}$$

$$\Delta\varphi_C = \frac{F l^2}{4EI}$$

$$\varphi_A = \frac{F l^2}{2EI}$$

$$v_A = \frac{F l^3}{4EI} + \frac{F l^3}{8EI} = \frac{3}{8} \frac{F l^3}{EI}$$

Figura 17

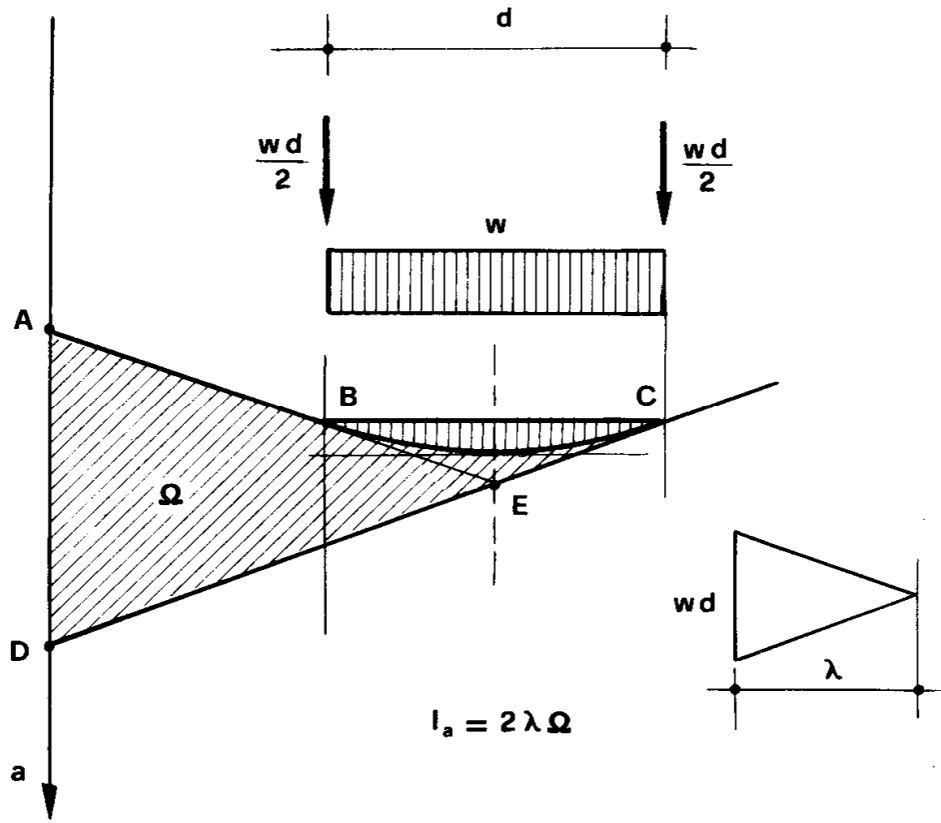


Figura 18